

Autoreferat

Łukasz Rudnicki

Centrum Fizyki Teoretycznej PAN, Aleja Lotników 32/46, 02-668 Warszawa

15 marca 2017

1 Imiona i nazwisko

Łukasz Marek Rudnicki

2 Posiadane dyplomy, stopnie naukowe/artystyczne – z podaniem nazwy, miejsca i roku ich uzyskania oraz tytułu rozprawy doktorskiej

I. Doktor nauk fizycznych, Uniwersytet Warszawski, Warszawa, 10.12.2012

(a) Promotor: prof. dr. hab. Iwo Białynicki-Birula

(b) Tytuł rozprawy: *„Kreacja par elektron-pozyton, przewodnictwo elektryczne w grafenie oraz granica klasyczna operatora Diraca w języku funkcji Diraca-Heisenberga-Wignera”*

II. Magister fizyki, Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski, Warszawa, 30.07.2009

(a) Promotor: prof. dr. hab. Iwo Białynicki-Birula

(b) Tytuł rozprawy: *„Dynamiczny efekt Casimira w jednostajnie przyspieszanych ośrodkach”*; praca została wyróżniona nagrodą Wydziału Fizyki UW

3 Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych

- 03.2017 – obecnie: Senior Scientist w Instytucie Fizyki Światła im. **Maxa Plancka w Erlangen**
- 02.2016 – 03.2017: Postdoc w Instytucie Fizyki na **Uniwersytecie w Kolonii**
- 10.2014 – 02.2016: Postdoc w Instytucie Fizyki na **Uniwersytecie we Freiburgu**
- 04.2013 – obecnie: **Centrum Fizyki Teoretycznej Polskiej Akademii Nauk** (na bezpłatnym urlopie naukowym); obecnie na stanowisku adiunkta
- 04.2013 – 09.2014: Postdoc w **Instytucie FRIAS we Freiburgu**
- 08.2009 – 03.2013: Asystent naukowy w **Centrum Fizyki Teoretycznej PAN**
- 01.2009 – 05.2009: Analityk systemowy w **Instytucie Badań Systemowych PAN**
- 11.2008 – 07.2009: Stażysta w **Centrum Fizyki Teoretycznej PAN**

4 Wskazanie osiągnięcia wynikającego z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. 2016 r. poz. 882 ze zm. w Dz. U. z 2016 r. poz. 1311.)

(a) Tytuł osiągnięcia naukowego

Kwantowe relacje nieoznaczoności jako narzędzie poznawcze fizyki

(b) Lista publikacji wchodzących w skład cyklu (autor/autorzy, tytuły publikacji, rok wydania, nazwa wydawnictwa, tom, numer strony)

- [H1] Ł. Rudnicki, *Nonlinear Schrödinger equation from generalized exact uncertainty principle*, J. Phys. A: Math. Theor. **49**, 375301 (2016).
- [H2] E. C. Paul, D. S. Tasca, Ł. Rudnicki, S. P. Walborn, *Detecting entanglement of continuous variables with three mutually unbiased bases*, Phys. Rev. A **94**, 012303 (2016).
- [H3] Ł. Rudnicki, D. S. Tasca, S. P. Walborn, *Uncertainty relations for characteristic functions*, Phys. Rev. A **93**, 022109 (2016).
- [H4] Z. Puchała, Ł. Rudnicki, K. Chabuda, M. Paraniak, K. Życzkowski, *Certainty relations, mutual entanglement, and nondisplaceable manifolds*, Phys. Rev. A **92**, 032109 (2015).
- [H5] Ł. Rudnicki, *Majorization approach to entropic uncertainty relations for coarse-grained observables*, Phys. Rev. A **91**, 032123 (2015).
- [H6] Ł. Rudnicki, Z. Puchała, P. Horodecki, K. Życzkowski, *Constructive entanglement test from triangle inequality*, J. Phys. A: Math. Theor. **47**, 424035 (2014).
- [H7] Ł. Rudnicki, Z. Puchała, K. Życzkowski, *Strong majorization entropic uncertainty relations*, Phys. Rev. A **89**, 052115 (2014).
- [H8] Z. Puchała, Ł. Rudnicki, K. Życzkowski, *Majorization entropic uncertainty relations*, J. Phys. A: Math. Theor. **46**, 272002 (2013).
- [H9] D. S. Tasca, Ł. Rudnicki, R. M. Gomes, F. Toscano, S. P. Walborn, *Reliable Entanglement Detection Under Coarse-Grained Measurements*, Phys. Rev. Lett. **110**, 210502 (2013).
- [H10] W. Roga, Z. Puchała, Ł. Rudnicki, K. Życzkowski, *Entropic trade-off relations for quantum operations*, Phys. Rev. A **87**, 032308 (2013).
- [H11] Ł. Rudnicki, Z. Puchała, P. Horodecki, K. Życzkowski, *Collectibility for mixed quantum states*, Phys. Rev. A **86**, 062329 (2012).

(c) Omówienie celu naukowego ww. prac i osiągniętych wyników wraz z omówieniem ich ewentualnego wykorzystania

Część merytoryczną Autoreferatu chciałbym zacząć od paru uwag odnośnie jego struktury i treści. Dla wygody Czytelnika niniejszy Autoreferat zawiera cztery rozłączne spisy publikacji. Pierwszy (zaprezentowany powyżej) spis zawiera 11 pozycji oznaczanych literą „H”, które razem stanowią podstawę habilitacji. Dwa kolejne zbiory: 8 pozycji oznaczanych literą „N” i 11 pozycji oznaczanych literą „D” znajdują się odpowiednio w podrozdziałach 5.1 i 5.3. Pierwszy ze spisów zawiera publikacje i preprinty opublikowane po uzyskaniu stopnia doktora, lecz nie wchodzące w skład zbioru „H”, podczas gdy drugi spis podsumowuje moją działalność naukową przed uzyskaniem stopnia doktora. Pozostałe publikacje wymienione w opisie merytorycznym, a których nie jestem autorem, znaleźć można na końcu opracowania.

Moja rozprawa doktorska, tematycznie przynależna do obrzeży kwantowej teorii pola, poświęcona była równaniu Diraca i szczególnemu (macierzowemu, niezmienniczemu względem cechowania) typowi funkcji Wignera. Ponadto, na bardzo wczesnym etapie mojej pracy naukowej profesor Iwo Białynicki-Birula zaszczepił we mnie zainteresowanie (entropowymi) relacjami nieoznaczoności i ich znaczeniem dla zrozumienia fundamentów mechaniki kwantowej. Lista „D” zawiera zatem prace związane z tematyką relacji nieoznaczoności, które nie mogą zaliczać się do niniejszej habilitacji z uwagi na okres ich opublikowania. Ponieważ publikacja [H9] korzysta z wyników przedstawionych w pracach [D2] i [D4], a publikacje [H6, H11] czerpią motywację z [D5], warto podkreślić że wymienione prace należące do spisu „D” nie miały merytorycznego przekroczenia z rozprawą dokorską.

Po trzecie, motywem przewodnim prezentowanego cyklu publikacji nie są kwantowe relacje nieoznaczoności *sensu stricto*, lecz nieoczywiste wnioski natury fizycznej z nich płynące wraz z zastosowaniami doświadczalnymi. Do grona tych pierwszych w szczególności zaliczam wniosek, iż kwantowe fluktuacje pola grawitacyjnego nie muszą wpływać na spektrum fal płaskich [H1] oraz formalny opis fluktuacji objętości bardzo wczesnego Wszechświata [H3] w pętlowej kosmologii. Rezultaty o znaczeniu doświadczalnym to nacechowane prostotą testy splątania bądź to motywowane relacjami nieoznaczoności [H6, H11], czy też bezpośrednio z nich wynikające [H2, H9].

Materiał zebrany w 11 przedstawionych pracach można podzielić na wiele sposobów, zależnie od wyboru perspektywy. Podejście przyjęte w niniejszym Autoreferacie sugeruje (o czym Czytelnik może się przekonać w dalszej części) następujący podział otrzymanych wyników:

- Testy splątania dla układów skończenie-wymiarowych [H6, H11].
- Relacje nieoznaczoności i testy splątania dla zmiennych ciągłych [H2, H9].
- Majoryzacyjne relacje nieoznaczoności [H5, H7, H8].
- Relacje nieoznaczoności dla funkcji charakterystycznych [H3].
- Relacje nieoznaczoności i wnioski nt. grawitacji kwantowej [H1, H3].
- Skończenie-wymiarowe relacje nieoznaczoności i formalizm mechaniki kwantowej [H4, H10].

Powyższe bloki tematyczne omówione zostały po kolei w podrozdziałach 4.2 - 4.7, podczas gdy podrozdział 4.1 poświęcony został informacjom wstępnym natury ogólnej.

4.1 Krótkie wprowadzenie

W zakres podstawowego kursu mechaniki kwantowej wchodzi zasada nieoznaczoności Heisenberga [1]

$$\sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \sigma_A \sigma_B \geq \frac{1}{2} \left| \left\langle \left[\hat{A}, \hat{B} \right] \right\rangle \right|, \quad (1)$$

w wersji dla położenia i pędu (nierówność lewa; gwoli ścisłości wyprowadzona przez Kennarda [2]) i w formie ogólniejszej dla dwóch dowolnych obserwabli A i B (nierówność prawa) [3]. Każdy kto ukończył studia z fizyki na poziomie magisterskim ma zatem „pewne wyczucie” tego, jakiego typu głęboka mądrość odnośnie świata kwantowego kryje się w nierównościach (1). Notacja zastosowana w (1) jest w stu procentach standardowa. Dla pewności uściślijmy tylko, iż σ_A oznacza odchylenie standardowe dla pewnej obserwabli A , a prawa nierówność przechodzi w lewą ponieważ

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar. \quad (2)$$

Co zrozumiałe, powyższe nierówności stanowią tylko zaproszenie do arcyobszernej gałęzi wiedzy, której nie sposób zreferować w ramach jednej pozycji o rozsądnym rozmiarze¹. Jej ważne dla zrozumienia Autoreferatu fragmenty, takie jak metody detekcji splątania typu EPR [5] czy też niebanalny sposób wyprowadzenia równania Schrödingera [6], znaleźć można w kolejnych podrozdziałach.

Przełomowe dla teorii relacji nieoznaczoności stało się zrozumienie, iż wartości przyjmowane przez badane obserwabli w istocie nie odgrywają roli, a wszystkie rozważania można skutecznie prowadzić w oparciu o same rozkłady prawdopodobieństwa. Wraz z tymi ostatnimi przyszły znane z teorii informacji narzędzia, takie jak entropia informacyjna (tu od razu w formie Rényi’ego):

$$h_\alpha[\rho] = \frac{1}{1-\alpha} \ln \int_{\mathbb{R}} dz [\rho(z)]^\alpha, \quad H_\alpha[P] = \frac{1}{1-\alpha} \ln \sum_k P_k^\alpha, \quad (3)$$

a także informacja Fishera i inne. Przez $\rho(z)$ oznaczam rozkład prawdopodobieństwa zmiennej ciągłej z (takiej jak położenie i pęd), podczas gdy P_k jest dowolnym dyskretnym rozkładem prawdopodobieństwa. W granicy $\alpha \rightarrow 1$ entropia Rényi’ego przechodzi w dobrze znaną entropię Shannona $h[\rho] = -\int_{\mathbb{R}} dz \rho(z) \ln[\rho(z)]$, $H[P] = -\sum_k P_k \ln P_k$.

Historycznie pierwszą relacją nieoznaczoności dla entropii Shannona była nierówność Białynickiego-Biruli-Mycielskiego [7]

$$h[\rho] + h[\tilde{\rho}] = -\int_{\mathbb{R}} dx \rho(x) \ln[\rho(x)] - \int_{\mathbb{R}} dp \tilde{\rho}(p) \ln[\tilde{\rho}(p)] \geq \ln(\hbar e \pi). \quad (4)$$

Dla stanów czystych: $\rho(x) = |\psi(x)|^2$ i $\tilde{\rho}(p) = |\tilde{\psi}(p)|^2$, gdzie $\psi(x)$ i $\tilde{\psi}(p)$ są funkcjami falowymi (odpowiednio w reprezentacji położeniowej i pędowej) wzajemnie powiązanymi transformacją Fouriera

$$\tilde{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{\mathbb{R}} dx e^{-ipx/\hbar} \psi(x). \quad (5)$$

Relacja nieoznaczoności (4), jak również wiele pokrewnych relacji (w tym dla entropii dyskretnych) omawianych w dalszej części Autoreferatu zachowuje ważność dla dowolnych stanów mieszanych.

Dla przypadku skończenie-wymiarowego, stanu mieszanego ρ na d -wymiarowej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ oraz pary niezdegenerowanych, niekomutujących obserwabli A i B definiujemy prawdopodobieństwa:

$$p_i = \langle a_i | \rho | a_i \rangle, \quad q_j = \langle b_j | \rho | b_j \rangle. \quad (6)$$

Przez $|a_i\rangle$ i $|b_j\rangle$, $i, j = 1, \dots, d$ oznaczyliśmy stany własne operatorów stowarzyszonych z obiema obserwabliami. Entropowe relacje nieoznaczoności dla prawdopodobieństw (6) przybierają ogólną postać

$$H_\alpha[p] + H_\beta[q] \geq B_{\alpha\beta}(U), \quad (7)$$

¹Stąd pewnie brak kompletnego artykułu przeglądowego, a jedyna praca [4] poświęcona jest aspektom natury formalnej.

gdzie $U \in \mathcal{U}(d)$ jest macierzą unitarną o elementach macierzowych $U_{ij} = \langle a_i | b_j \rangle$.

Pierwszą relację entropową dla zmiennych dyskretnych zawdzięczamy Deutschowi [8], który dla $\alpha = 1 = \beta$ znalazł ograniczenie $B_{11}^D = -2 \ln C$, z $C = (1 + \sqrt{c_1})/2$ oraz $c_1 = \max_{i,j} |U_{ij}|^2$. Zdecydowanie bardziej znane jest ograniczenie Maassena–Uffinka [9] z roku 1988, $B_{\alpha\beta}^{\text{MU}} = -\ln c_1$, które ma zastosowanie wyłącznie dla tzw. parametrów sprzężonych spełniających relację $1/\alpha + 1/\beta = 2$.

Do entropowych relacji nieoznaczoności i ich szerokich zastosowań powrócę w poszczególnych podrozdziałach. Na zakończenie krótkiego wstępu chciałbym tylko wspomnieć artykuły przeglądowe [10, 11] i [D11] szczegółowo traktujące niniejszą tematykę.

4.2 Testy splątania dla układów skończenie-wymiarowych

Obecnym podrozdziałem przechodzę do omówienia poszczególnych zagadnień dotyczących relacji nieoznaczoności i ich zastosowań. Trochę z przekory, a po części starając się zachować porządek chronologiczny, rozpoczynam od rezultatów, które z technicznego punktu widzenia, z relacjami nieoznaczoności mają najmniej wspólnego. Prezentowane wyniki powstały w ramach mojego grantu typu *Iuventus Plus 2011* zatytułowanego „*Collectibility – nowe kryterium splątania oparte o relacje nieoznaczoności*”, poświęconego rozwinięciu testu splątania bazującego na wielkości nazwanej *Collectibility* [D5].

4.2.1 Collectibility dla stanów mieszanych

W pracy [D5] rozważaliśmy czyste stany $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$ należące do przestrzeni Hilberta $\mathcal{H} = \mathcal{H}^1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}^K$ będącej iloczynem tensorowym K przestrzeni Hilberta o wymiarze N każda. Podstawowa wielkość *Maximal Collectibility* zdefiniowana została jako

$$Y^{\max} [|\Psi\rangle] = \max_{|\chi^{\text{sep}}\rangle} \prod_{j=1}^N \left| \langle \Psi | \chi_j^{\text{sep}} \rangle \right|^2, \quad (8)$$

gdzie $|\chi^{\text{sep}}\rangle = \{|\chi_1^{\text{sep}}\rangle, \dots, |\chi_N^{\text{sep}}\rangle\}$ jest dowolnym zbiorem N stanów separowalnych, lokalnie ortogonalnych. Przy pomocy rachunku wariacyjnego wzorowanego na wyprowadzeniu entropowej relacji nieoznaczoności Deutscha [8] zostało pokazane², iż $Y^{\max} [|\Psi\rangle] \leq N^{-N}$, podczas gdy dla dowolnego stanu separowalnego $|\Psi\rangle_{\text{sep}} = |\Psi_1\rangle \otimes \dots \otimes |\Psi_K\rangle$ zachodzi $Y^{\max} [|\Psi\rangle_{\text{sep}}] \leq N^{-N \cdot K}$. Powyższa obserwacja implikuje kryterium splątania dla stanów czystych. Dalsze wyniki opisane w omawianej pracy odnoszą się do przypadku kubitów ($N = 2$). Zastąpienie w definicji (8) pełnego maksimum po $|\chi^{\text{sep}}\rangle$, przez maksimum ograniczone do jednej przestrzeni Hilberta prowadzi do właściwej *Collectibility*, zbudowanej z elementów pewnej macierzy Grama, które są mierzalne przy pomocy układu doświadczalnego bazującego na interferencji Hong-Ou-Mandela [12] (splątanie polaryzacji fotonów).

W pracy [H11] uogólniono *Maximal Collectibility* (wraz z testem splątania) na przypadek dowolnego stanu mieszanego ρ . Pierwszy z rezultatów jest o tyle nietrywialny, iż dokonując w (8) prostej zamiany $|\Psi\rangle \langle \Psi| \mapsto \rho$ otrzymujemy wielkość przyjmującą wartość N^{-N} dla stanu separowalnego, maksymalnie mieszanego rzędu N . Aby uratować zdolność detekcji splątania wprowadzona została zmodyfikowana *Maximal Collectibility* dla stanów mieszanych uwzględniająca niektóre elementy pozadiagonalne macierzy gęstości (*Definition 2* na str. 4 w [H11]). Wielkość ta spełnia analogiczne, lecz bardziej skomplikowane (np. zależne od czystości $\text{Tr} \rho^2$) górne ograniczenia prowadzące do kryteriów splątania (także na str. 4 w [H11]): ogólnych (*Lemma 1*), dla dwóch podukładów (*Theorem 2*) i dla kubitów (*Fact 1*).

²W istocie można w pełni uogólnić wyprowadzenie Deutscha na przypadek wielu obserwabli (baz ortonormalnych). Opisywane rezultaty stanowią szczególny przypadek takiego, zapewne nigdzie nieopublikowanego, uogólnienia.

W dalszej części pracy (na str. 5 i 6 w [H11]) przeprowadzona została analiza skuteczności kryteriów splątania w funkcji czystości (*TABLE I*) oraz dla rodziny uogólnionych stanów Wernera (*FIG. 2*). Pokazane zostały także związki Maximal Collectibility z miarą splątania *Negativity* [13] i wielkością *Maximal Fidelity* [14, 15]. Ta ostatnia obserwacja oznacza, że *Maximal Collectibility* jest wielkością niejako dualną do Geometrycznej Miary Splątania [16, 17]. Podczas gdy miara geometryczna jest zadana maksymalnym rzutem badanego stanu na stan separowalny, to nasza wielkość jest prostą funkcją maksymalnego rzutu stanu na stan maksymalnie splątany.

Drugim, a być może ważniejszym celem pracy [H11] było zaproponowanie rozwiązań doświadczalnych pozwalających na wykonanie omawianego testu splątania dla stanów mieszanych o dużej czystości. Dowodem skuteczności zaproponowanych rozwiązań jest praca doświadczalna z roku 2016 [18], w której wielkości opisane w [H11] zostały zmierzone potwierdzając poprawność i użyteczność testu. Praktyczne zalety omawianego testu warto zareklamować cytując fragmenty wstępu z [18]: „*This technique³ does not share the disadvantages of the previously mentioned methods⁴, i.e., it allows us to detect two-qubit entanglement without the need for any a priori information and for pure states it allows us to measure the amount of entanglement in terms of the negativity...*” oraz „*In comparison to other previously proposed methods, the collectibility requires only one two-photon interaction to be implemented*”.

Na początek wprowadzę elementy notacji (wszystkie szczegóły można znaleźć w [H11]) związanej z opisem eksperymentu, którego schemat przedstawia Rys. 1. Doświadczenie dla dwóch kubitów wykonywane jest przy użyciu dwóch kopii układu („pochodzących” ze źródeł S1 i S2). Po lewej stronie schematu eksperymentator ma wybór pomiędzy zastosowaniem do swoich fotonów pewnych (ustalonych) polaryzatorów $R^\dagger(\theta, \phi)$ lub $R^\dagger(\theta', \phi')$. Po wykonaniu pomiaru przy użyciu detektorów (D_{ij} , $i, j = 1, 2$) fotony po prawej stronie mogą znajdować się w stanach mieszanych: σ_+ lub σ_- , odpowiednio z prawdopodobieństwami p_+ lub p_- , gdy pomiar po stronie lewej wykonany został przy użyciu polaryzatorów $R^\dagger(\theta, \phi)$; σ'_+ lub σ'_- , z prawdopodobieństwami p'_+ lub p'_- , gdy pomiar po stronie lewej wykonany został przy użyciu drugiej pary polaryzatorów $R^\dagger(\theta', \phi')$. Powyższe stany mieszane są w dalszej kolejności poddawane interferencji Hong-Ou-Mandela (HOM). Elementy macierzy Grama obecne w pierwotnej definicji Collectibility [D5] zadane są wzorami [H11]:

$$G_{11} = p_+ \sqrt{\text{Tr}(\sigma_+^2)}, \quad G_{22} = p_- \sqrt{\text{Tr}(\sigma_-^2)}, \quad |G_{12}|^2 = p_+ p_- \text{Tr}(\sigma_+ \sigma_-) = |G_{21}|^2. \quad (9)$$

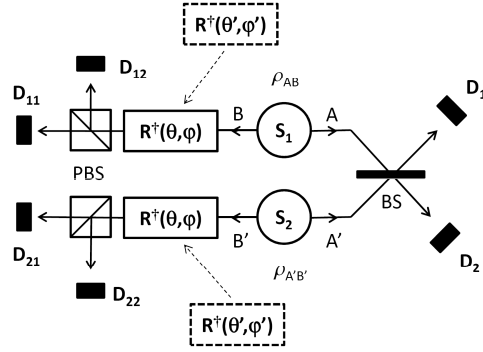
Wspomniana wyżej interferencja HOM służy do wyznaczenia śladów iloczynów stanów polaryzacji jednego fotonu. Co istotne, do pomiaru macierzy Grama wystarczająca jest jedna para polaryzatorów, tak jak to miało miejsce w oryginalnym schemacie z pracy [D5]. Druga para polaryzatorów niezbędna jest do uwzględnienia poprawek do testu splątania wynikających z faktu, iż badany stan kwantowy nie jest czysty. W celu uzyskania poprawek, założmy że $\text{Tr} \sigma_\pm^2 \geq 1 - \epsilon_\pm$ oraz $\text{Tr}(\sigma'_\pm)^2 \geq 1 - \epsilon'_\pm$. Pomimo tego, że HOM daje nam dokładne wartości lewych stron obu nierówności, znak „ $\geq$ ” w definicji parametrów $\epsilon_\pm$ i $\epsilon'_\pm$ pozwala na dodatkowe uwzględnienie niepewności pomiarowych. Znaleziony w [H11] analogon zależnej od macierzy Grama Collectibility prowadzi do testu splątania dla stanów mieszanych (nierówności spełnianej przez wszystkie stany separowalne):

$$G_{11}G_{22} - |G_{12}|^2 \leq \frac{\eta + (G_{11} + G_{22})^2 - 1}{2}, \quad \eta = 8p_+p_- \sqrt{\epsilon_+\epsilon_-} + 2\epsilon' \leq 2, \quad (10)$$

z $\epsilon' = \max[\epsilon'_+, \epsilon'_-]$, tak że poprawka η uwzględnia czystości stanów jednego fotonu.

³Test bazujący na Collectibility (przyp. ŁR).

⁴Tu i w poniższym fragmencie — zob. kontekst przedstawiony w [18] i zacytowane tam prace (przyp. ŁR).



Rysunek 1: Schemat doświadczalny z pracy [H11].

4.2.2 Dolne ograniczenie na Geometryczną Miarę Splątania

Geometryczna Miara Splątania stanu czystego $|\Psi\rangle$ zdefiniowana jest jako [16, 17]

$$E(|\Psi\rangle) = 1 - \max_{|\phi\rangle\text{-separable}} |\langle\phi|\Psi\rangle|^2. \quad (11)$$

Jej formalnego uogólnienia $E(\rho)$ na stany mieszane można dokonać m.in. przez tzw. konstrukcję „*convex roof*”. Co raczej oczywiste, tak zdefiniowana miara, choć z założenia ma szansę być wielce uniwersalna (wiele podukładów dowolnego wymiaru), jest zupełnie niepraktyczna. W pracy [H6] otrzymaliśmy następujące dolne ograniczenie na Geometryczną Miarę Splątania:

$$\sqrt{E(\rho)} \geq \sqrt{1 - L(\rho)} - \sqrt{1 - \text{Tr}\rho^2}, \quad L(\rho) = \max_{|\phi\rangle\text{-separable}} \langle\phi|\rho|\phi\rangle. \quad (12)$$

Powyższy rezultat wyprowadzony został przy pomocy nierówności trójkąta dla metryki „*infidelity*” [19], równoważnej pewnej klasie relacji nieoznaczoności [20]. Na mocy (12), nierówność $L(\rho) \geq \text{Tr}\rho^2$ musi być spełniona przez wszystkie separowalne stany mieszane, co prowadzi do kryteriów splątania znanych z aktualnej literatury [21, 22].

Aby uniknąć szczegółowego referatu na temat dalszych, związanych z (12) wyników przedstawionych w pracy [H6], podejmę próbę syntetycznego ich opisu w kilku punktach:

- Wielkość $L(\rho)$ dla dwudzielnych stanów mieszanych daje się korzystnie oszacować od góry przez składowe produktowej reprezentacji Blocha badanego stanu.
- Różnicę $L(\rho) - \text{Tr}\rho^2$ daje się scharakteryzować przy pomocy mniejszej liczby parametrów, niż każdy z członów osobno.
- Nowy test splątania można mierzyć przy pomocy niekompletnej tomografii kwantowej.
- Dla dowolnego stanu mieszanego dwóch kubitów, zaproponowana procedura pomiaru wymaga zmierzenia 10 parametrów, podczas gdy pomiar samego $\text{Tr}\rho^2$ wymaga 12.
- Dla stanu Wernera dwóch kubitów, test pozwala wykryć splątanie dla największego (spośród wszystkich innych znanych testów) zakresu parametru definiującego ten stan.

4.3 Relacje nieoznaczoności i testy splątania dla zmiennych ciągłych

Poprzedni podrozdział stanowił omówienie kilku testów kwantowego splątania dla przypadku skończeniowymiarowego, których wspólnymi cechami było pochodzenie zainspirowane relacjami nieoznaczoności i dbałość o aspekty doświadczalne. Obecny podrozdział, poświęcony zmiennym ciągłym w optyce kwantowej, idzie o krok dalej w obu wymienionych kwestiach. Po pierwsze, zaprezentowane poniżej testy splątania bezpośrednio bazują na relacjach nieoznaczoności, tzn. detekcja splątania następuje poprzez zaobserwowanie złamania pewnej relacji. Ponadto, ważne z doświadczalnego punktu widzenia cechy kryteriów splątania, takie jak wygoda pomiaru i odporność na wymuszony ograniczeniami sprzętowymi brak precyzji, zostały do razu poddane weryfikacji. Obie prace [H2] i [H9], opublikowane we współpracy z fizykami z Rio de Janeiro, są teoretyczno-doświadczalne⁵.

4.3.1 Gruboziarniste kryteria splątania

Publikacja [H9] jest następstwem dwóch prac [D2] i [D4] badających relacje nieoznaczoności dla zmiennych ciągłych z uwzględnieniem gruboziarnistości, gdy w miejsce ciągłych rozkładów prawdopodobieństwa $\rho(x)$, $\tilde{\rho}(p)$ dysponujemy (zostały zmierzone) ich wersjami dyskretnymi ($k, l \in \mathbb{Z}$)

$$r_k = \int_{\Delta(k-1/2)}^{\Delta(k+1/2)} dx \rho(x), \quad s_l = \int_{\delta(l-1/2)}^{\delta(l+1/2)} dp \tilde{\rho}(p). \quad (13)$$

Parametry Δ i δ oznaczają stopień gruboziarnistości modelu. Przed publikacją [D4] nie były znane relacje nieoznaczoności typu Heisenberga dla rozkładów dyskretnych (13). Relacje entropowe

$$H_\alpha[r] + H_\beta[s] \geq -\ln\left(\frac{\Delta\delta}{e\pi}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\ln\alpha}{1-\alpha} + \frac{\ln\beta}{1-\beta}\right), \quad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 2, \quad (14)$$

wyprowadzone zostały w [23] (historycznie, dla entropii Shannona także w [24, 25]), aczkolwiek ich „nietrywialność” ograniczona była do zakresu parametrów $\Delta\delta \leq e\pi \approx 8.54$ (ponieważ dla $\Delta\delta > e\pi$ prawa strona jest zawsze ujemna). W pracach [D2], [D4] i [H9] posłużono się ciągłymi rozkładami prawdopodobieństwa, z wyglądu przypominającymi histogramy (zob. FIG. 2 i FIG. 3 z [H9] przedstawiające nieunormowane wersje histogramów otrzymanych z danych doświadczalnych) zdefiniowanymi jako (tu także $k, l \in \mathbb{Z}$):

$$\rho^\Delta(x) = \frac{r_k}{\Delta} \quad \text{dla } x \in \left[k\Delta - \frac{1}{2}, k\Delta + \frac{1}{2}\right], \quad \tilde{\rho}^\delta(p) = \frac{s_l}{\delta} \quad \text{dla } p \in \left[l\delta - \frac{1}{2}, l\delta + \frac{1}{2}\right]. \quad (15)$$

W wymienionych pracach wyprowadziliśmy nierówności:

$$h_\alpha[\rho^\Delta] + h_\beta[\tilde{\rho}^\delta] = H_\alpha[r] + H_\beta[s] + \ln(\Delta\delta) \geq \ln 2\pi\hbar - 2\ln\left[R_{00}\left(\frac{\Delta\delta}{4\hbar}, 1\right)\right], \quad (16)$$

$$\sigma_x[\rho^\Delta] \sigma_p[\tilde{\rho}^\delta] \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (17)$$

Prawa strona w (16) zależna jest od pewnej znanej funkcji specjalnej $R_{00}(z, 1)$ i po odjęciu członu $\ln(\Delta\delta)$ [tzn. dla entropii dyskretnych, analogicznie do (14)] jest nieujemna dla dowolnych Δ i δ . Co także ciekawe (i nieintuicyjne), nierówność (17) nie jest następstwem zasady nieoznaczoności Heisenberga (1), która w zgodzie z zastosowaną w (17) notacją dana jest nierównością $\sigma_x[\rho] \sigma_p[\tilde{\rho}] \geq \hbar/2$. Oba uzyskane wyniki zachowują swoją ważność dla stanów mieszanych.

Na celowość rozważania powyższych rozkładów prawdopodobieństwa składają się trzy czynniki:

⁵Zwyczajowo przyjęty porządek listy autorów zakłada, iż pierwsze miejsca przysługują autorom wykonującym główną część eksperymentu.

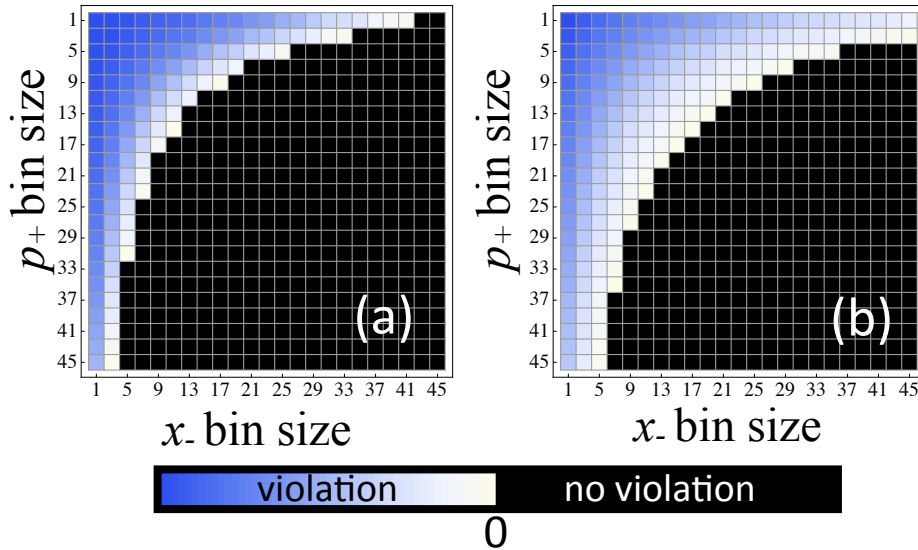
- Rozkłady prawdopodobieństwa otrzymywane w doświadczeniu są zawsze zdyskretyzowane. Parametry Δ i δ należy interpretować jako szerokości detektorów.
- Fotony są obiektami kwantowymi, które nie dają się ściśle zlokalizować [26], dlatego też rozważanie ciągłych (nieskończenie dokładnych) rozkładów prawdopodobieństwa dla stanów fotonowych wydaje się na swój sposób wątpliwe.
- Wprowadzając rzetelny opis uśredniony nie ma obawy o to, że otrzymane wyniki prowadzą do fałszywych wniosków, poprzez pominięcie ważnych, aczkolwiek subtelnych efektów. Bez względu na to, jaka fizyka obowiązuje w skalach długości niedostępnych doświadczeniu, chcielibyśmy mieć zaufanie do wniosków wydedukowanych na bazie posiadanych (uśrednionych) danych.

Dla stanu dwufotonowego wprowadźmy zmienne (x_1, p_1) oraz (x_2, p_2) . Zmienne te można m.in. interpretować (zależnie od kontekstu) jako kwadratury pola dwumodowego lub poprzeczne stopnie swobody dwóch fotonów wyprodukowanych w procesie spontanicznego parametrycznego podziału częstości (SPDC). W kolejnym kroku wprowadza się zmienne globalne $x_{\pm} = x_1 \pm x_2$, $p_{\pm} = p_1 \pm p_2$ oraz odpowiadające im ciągłe rozkłady prawdopodobieństwa $R_{\pm}(x_{\pm})$ oraz $S_{\pm}(p_{\pm})$. Dla powyższych rozkładów znane były kryteria splątania bazujące na wariancjach [27] oraz entropiach Shannona [28] mówiące, iż jeśli ($\hbar = 1$)

$$\sigma^2[R_{\pm}] \sigma^2[S_{\mp}] < 1 \quad \text{lub} \quad h[R_{\pm}] + h[S_{\mp}] < 1 + \ln 2\pi, \quad (18)$$

to badany stan jest splątany. Kryteria te, a także pokrewne rezultaty [5, 29–31], łączą w sobie relacje nieoznaczoności, symetrie funkcji Wignera i kryterium PPT.

Osiągnięciem zaprezentowanym w [H9] jest uogólnienie kryteriów (18) na przypadek zdyskretyzowanych [jak w (15)] rozkładów $R_{\pm}^{\Delta}(x_{\pm})$ oraz $S_{\pm}^{\delta}(p_{\pm})$ — wzory 10a-10c z [H9]⁶. Nowe kryteria zostały sprawdzone doświadczalnie dla zakresu parametrów $\Delta \in [0.0250\text{mm}, 1.125\text{mm}]$ oraz $\delta \in [1.546\text{mm}^{-1}, 69.57\text{mm}^{-1}]$.



Na powyższym rysunku (FIG. 4 zaczerpnięty z [H9]⁷) uwidoczniiony jest efekt doświadczalnej detekcji splątania przy pomocy nowych kryteriów — rysunek lewy dla wariancji, prawy dla entropii. Kwadraty niebieskie pokazują zakres parametrów Δ, δ , dla których detekcja splątania powiodła się.

⁶Zob. także „Supplementary Material”.

⁷Opis i druga część rysunku znajdują się w pracy na str. 4.

Główną zaletą otrzymanych rezultatów jest redukcja niezbędnych wysiłków doświadczalnych związanych z detekcją splątania oraz częściowe rozwiązanie problemu wpływu niepewności pomiarowych na jakościową interpretację wyników — niepewności pomiarowe mogą zaniżyć wyniki pomiarów, sprawiając iż stan separowalny zostaje sklasyfikowany jako splątany. Od strony koncepcyjno-teoretycznej podane kryteria należy rozumieć jako takie, które w procesie doświadczalnej weryfikacji wymagają jedynie tyle informacji, ile przy obecnym zaawansowaniu technologicznym jesteśmy de facto w stanie uzyskać w laboratorium. Warto dodać, iż zagadnienie gruboziarnistości danych w detekcji splątania przy pomocy relacji nieoznaczoności zaczyna wykraczać poza domenę optyki kwantowej. Doświadczenia z kondensatem Bosego-Einsteina [32] zostaną niebawem zaadaptowane do badania efektów grawitacyjnych w mikroskali [33]. Grupa z Hanoweru⁸ jest zainteresowana zastosowaniem metodologii przedstawionej w [H9] do ulepszenia analizy danych doświadczalnych [33].

4.3.2 Kryteria splątania dla trzech zmiennych

Bazy własne kanonicznie sprzężonych zmiennych położenia i pędu są wzajemnie nieobciążone (*mutually unbiased*). Właściwie, jeśli zdefiniujemy obrocony operator na przestrzeni fazowej postaci⁹ $\hat{q}_\theta = \cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{p}$, to bazy własne operatorów $\hat{q}_\theta$ i $\hat{q}_{\theta'}$ są zawsze wzajemnie nieobciążone, jeśli tylko $\sin(\theta - \theta') \neq 0$. W przestrzeni fazowej można też jednocześnie zdefiniować trzy bazy wzajemnie nieobciążone [34]: oprócz bazy własnej operatora położenia, należy wziąć bazy własne operatorów¹⁰ $\hat{r} \equiv \hat{q}_{2\pi/3}$ i $\hat{s} \equiv \hat{q}_{4\pi/3}$.

W pracy [H2] ściśle wyprowadzona została dość intuicyjna relacja nieoznaczoności dla trzech powyższych zmiennych (równanie 18 z [H2])

$$\sigma_x^2 \sigma_r^2 \sigma_s^2 \geq \frac{1}{8}. \quad (19)$$

Efekt wyprowadzenia była nieintuicyjna konkluzja, iż powyższa relacja wysyca się jedynie gdy $\sigma_x^2 = \sigma_r^2 = \sigma_s^2 = 1/2$, tzn. dla przypadku gaussowskiego stanu próżni. Wszakże standardowa relacja nieoznaczoności Heisenberga wysyca się dla wszystkich stanów gaussowskich. Ta zmiana jakościowa oznacza, iż nowa relacja jest „bardziej wybiórcza” ponieważ bardziej „odpycha” stany kwantowe od brzegu (wartości wysycenia). Można się zatem spodziewać, iż kryteria splątania bazujące na nowej relacji nieoznaczoności zyskują na czułości.

Związane z (19) kryteria splątania wyprowadzone zostały analogicznie jak w [H9]. W tym przypadku, dla trójek zmiennych (x_1, r_1, s_1) i (x_2, r_2, s_2) zdefiniowane zostały operatory globalne: $X_\pm = x_1 \pm x_2$, $U_\pm = r_1 \pm s_2$ i $V_\pm = s_1 \pm r_2$, dla których kryteria splątania zadane są relacją nieoznaczoności (25) z [H2]. Równanie (27) z [H2] [z widocznym złamaniem (25)] stanowi podsumowanie wykonanego pomiaru.

4.4 Majoryzacyjne relacje nieoznaczoności

Para entropowych relacji nieoznaczoności (14, 16) ma tę zaletę, iż nie ulega trywializacji dla dużych wartości parametrów Δ i δ . Nie oznacza to jednak, iż zestaw ten jest optymalny i nie pozostawia miejsca na dodatkowe poprawki. Ponadto, obie wymienione relacje zachowują swoją ważność jedynie dla parametrów sprzężonych $1/\alpha + 1/\beta = 2$ (na szczęście wiąż ten dopuszcza przypadek pary entropii Shannona dla $\alpha = 1 = \beta$), podczas gdy dość naturalnym wyborem z praktycznego punktu widzenia (aby ręcznie nie wprowadzać asymetrii w analizie danych) byłby wybór zestawu symetrycznego¹¹ $\alpha = \beta$. Co więcej, omawiane ograniczenie jest współdzielone przez wszystkie¹² dyskretne entropowe relacje nieoznaczono-

⁸Adres internetowy grupy: <https://www.iqo.uni-hannover.de/77.html>

⁹Także tu kładziemy $\hbar = 1$.

¹⁰Oznaczenia literami r i s , tu zgodne z [H2], nie mają powiązania z rozkładami (13).

¹¹Jako rozwiązanie pośrednie, w [23] i późniejszych pracach rozważano symetryzację entropii z parametrami sprzężonymi.

¹²Wszystkie relacje wyprowadzone przed rokiem 2013.

ści, np. relację Maassena-Uffinka [9]. Obecny podrozdział opisuje prace [H8], [H7] oraz [H5], w których z sukcesem zmierzaliśmy się z powyższym problemem stosując technikę majoryzacji. W mojej pracy [H5] wyprowadziłem symetryczny ($\alpha = \beta$) odpowiednik relacji typu (14, 16), pokazując że dla sumy dwóch entropii Shannona nowa relacja [w parze z (14)] jest lepsza niż relacja (16) stosowana obok (17) w kryteriach splątania omawianych w 4.3. W dwóch wcześniejszych pracach [H8] i [H7] podejście majoryzacyjne zostało rozwinięte dla entropii dyskretnych co pozwoliło znacznie poprawić entropowe ograniczenie Maassena-Uffinka.

4.4.1 Relacje nieoznaczoności w przypadku skończenie-wymiarowym

Relacja majoryzacji $x \prec y$ pomiędzy dowolnymi dwoma d -wymiarowymi rozkładami prawdopodobieństwa oznacza, iż dla każdego $n \leq d$ zachodzi $\sum_{k=1}^n x_k^\downarrow \leq \sum_{k=1}^n y_k^\downarrow$, z równością (unormowanie) dla $n = d$. Tradycyjnie symbolem $\downarrow$ oznaczamy porządek malejący, tzn. $(x^\downarrow)_k \geq (x^\downarrow)_l$, dla wszystkich $k \leq l$. Kluczową dla naszych rozważań własnością entropii Rényi’ego (a także innych jak np. entropia Tsallisa) jest ich wklęsłość w sensie Schura, która oznacza że $H_\alpha[x] \geq H_\alpha[y]$ jeśli $x \prec y$. Poniższy krótki opis wyników uzyskanych w pracach [H8] i [H7] odnosi się do prawdopodobieństw (6) i ogólnych relacji nieoznaczoności typu (7). W obu pracach rozwinięto analityczne algorytmy poszukujące wektorów majoryzujących iloczyn tensorowy i sumę prostą prawdopodobieństw (6):

$$p \otimes q \prec Q(U), \quad p \oplus q \prec \{1\} \oplus W(U). \quad (20)$$

Na mocy wklęsłości Schura (ale nie tylko), powyższe relacje majoryzacji zadają dolne ograniczenia na sumę entropii (7) postaci: $B_{\alpha\alpha}(U) = H_\alpha[Q]$ oraz $B_{\alpha\alpha}(U) = H_\alpha[W]$, z tym że to drugie ograniczenie działa jedynie dla $\alpha \leq 1$. Gdy $\alpha > 1$, można jednak podać jego słabszy odpowiednik. Najprostszym przykładem nietrywialnego majoryzującego wektora $Q(U)$ jest¹³ [H8] $(C^2, 1 - C^2)$. Warto zwrócić uwagę na fakt, iż wektory majoryzacyjne można zawsze skrócić, minimalnie tracąc dokładność ograniczenia, lecz zyskując na prostocie wyrażen. W tym celu składową wektora majoryzującego, która ma być ostatnia, należy wybrać jako dopełnienie (do jedynki) wcześniejszych składowych.

W pracy [H7] podany został dodatkowo szereg ograniczeń „hybrydowych” łączących majoryzację dla iloczynu tensorowego z techniką [35] bazującą na monotoniczności kwantowej entropii względnej. Trzy nowe relacje dla sumy entropii Shannona zostały podsumowane jako *Theorem 1* na str. 3 pracy [H7]. Rysunki FIG. 1 i FIG. 2 z [H7] przedstawiają porównanie wszystkich omawianych dolnych ograniczeń: Maassena-Uffinka, dwóch relacji majoryzacyjnych, trzech z *Theorem 1* oraz relacji Colesa-Pianiego [35].

Otrzymane w naszych obu pracach relacje nieoznaczoności stanowiły swoisty przełom w tej dziedzinie, po 25 latach „panowania” relacji Maassena-Uffinka (z dokładnością do podanej w częściowo uwikłanej formie relacji [36]). Należy wspomnieć, iż idea zastosowania majoryzacji w kontekście relacji nieoznaczoności rozważana była także w niedawnej przeszłości [37], a równolegle z naszą publikacją [H8] powstawała praca [38], co jest wynikiem aktualności omawianego zagadnienia. O tym ostatnim świadczy nieco późniejszy¹⁴ wysyp rezultatów [39–43]. Z perspektywy historycznej, entropowe relacje nieoznaczoności, poza ich samoistnym sensem poznawczym, okazywały się użyteczne na różnych polach związanych z dziedziną informacji kwantowej — o czym wyczerpująco traktuje artykuł przeglądowy [11]. Można także zaobserwować koncepcyjne powiązania pomiędzy technikami majoryzacji, entropiami informacyjnymi i termodynamiką kwantową [44]. Zastosowanie w tym kontekście relacji nieoznaczoności takich jak zaprezentowane w obecnym podrozdziale wydaje się pozostawać jedynie kwestią czasu.

¹³Wielkość C została zdefiniowana we wstępie, przy okazji omawiania relacji Deutscha.

¹⁴Licząc od prac [H8] i [38].

4.4.2 Relacje nieoznaczoności dla przypadku ciągłego-grubozbiarnistego

Publikacja [H5] w całości poświęcona jest zastosowaniu technik wypracowanych w [H8] i [H7] do przypadku omawianego w podrozdziale 4.3.1 poświęconemu opisowi grubozbiarnistemu dla zmiennych położenia i pędu. W niniejszym kontekście koncepcyjnie prościej było rozważać relację majoryzacyjną dla sumy prostej. Rozdział II z pracy [H5] poświęcony jest wyprowadzeniu nieskończonej hierarchii wektorów majoryzacyjnych typu W (zob. równ. 20), z tym, że dla badanego przypadku wektor ten zależy od parametru $\gamma = \Delta\delta/\hbar$. Główny wynik, dolne ograniczenia na sumę entropii oznaczone jako $\mathcal{R}_\alpha^{(n)}(\Delta\delta/\hbar)$, zaprezentowany jest¹⁵ jako równanie (27) z [H5]. Na wykresie FIG. 1 znajdującym się na tej samej stronie co główna relacja, pokazane jest porównanie nowych dolnych ograniczeń i (14, 16) dla przypadku $\alpha = 1$. Widać, iż para ograniczeń (14) i $\mathcal{R}_1^{(3)}$ w całości poprawia ograniczenie (16).

Warto jeszcze raz podkreślić, iż zarówno relacje majoryzacyjne omówione w 4.4.1 jak i dolne ograniczenia $\mathcal{R}_\alpha^{(n)}$ są unikatowe dla przypadku sumy dwóch entropii Rényi’ego o tym samym indeksie α (gdy $\alpha \neq 1$). Co zrozumiałe, fakt ten (w kontekście rezultatów z pracy [H5]) prowadzi do nowej rodziny grubozbiarnistych kryteriów splątania, na wzór tych omawianych w podrozdziale 4.3.1. Warto zwrócić uwagę na fakt, iż wszystkie omówione relacje nieoznaczoności (także dyskretne) swoim zakresem zastosowań wykraczają poza detekcję splątania, będąc przydatnymi choćby w celu poprawy skuteczności kryteriów detekcji kwantowej sterowalności (*quantum steering*) [45, 46].

W ramach dalszej dyskusji przeprowadzonej w [H5] pokazana została asymptotyka nowych i poprzednich ograniczeń dla dużych γ . Asymptotycznie, wszystkie ograniczenia z rodziny $\mathcal{R}_1^{(n)}$ przewyższają (16) o rozbieżny czynnik $\gamma/4$. Ponadto, przy pomocy równania (31) z [H5], co jest widoczne także na FIG. 1 odtworzone zostało zachowanie typowe dla wszystkich wymienionych relacji majoryzacyjnych. W przypadku dyskretnym, relacje te niemal zawsze górują nad dolnym ograniczeniem Maassena-Uffinka, za wyjątkiem ścisłego otoczenia punktu, dla którego macierz unitarna U jest macierzą Fouriera. W przypadku ciągłym-grubozbiarnistym, analogiem otoczenia macierzy Fouriera jest granica ciągła $\gamma \rightarrow 0$. Ten prawdopodobnie intuicyjny fakt został ściśle pokazany w formie asymptotyki małych γ dla $\mathcal{R}_1^{(\infty)}$, równej $-\frac{1}{2} \ln \gamma$.

4.5 Relacje nieoznaczoności dla funkcji charakterystycznych

Poprzednie trzy podrozdziały opisywały w pewnym sensie większe projekty badawcze związane z relacjami nieoznaczoności. Kolejne trzy, począwszy od obecnego, mają na celu przybliżenie rezultatów bardziej zwartych niemniej jednak na równi (a może nawet bardziej) interesujących. Niniejszy podrozdział poświęcony jest pierwszej znanej relacji nieoznaczoności wyrażonej w języku funkcji charakterystycznych znanych z teorii prawdopodobieństwa. Już na wstępie należy nadmienić, iż kluczowy rezultat pracy [H3] jest silniejszy niż zasada nieoznaczoności Heisenberga, a więc nie jest wnioskiem z niej płynącym. Potrzeba wyprowadzenia relacji nieoznaczoności dla funkcji charakterystycznych zrodziła się w związku z doświadczalnym projektem z dziedziny optyki kwantowej [N8] mającym na celu zbadanie użyteczności struktur okresowych implementowanych przy pomocy masek typu SLM (*spatial light modulator*).

¹⁵Należy zwrócić uwagę na rozbieżności notacyjne. W pracy [H5] dyskretne prawdopodobieństwa r_k i s_l zdefiniowane są w równaniu (12) jako q_k^Δ i p_l^δ . Argumenty entropii w równaniu (27) z [H5] odnoszą się do tych właśnie prawdopodobieństw, nie zaś do histogramów (15) zdefiniowanych w podrozdziale 4.3.1 Autoreferatu. Oznaczenie entropii (H zamiast h), powinno rozwiązać ewentualne wątpliwości.

4.5.1 Główna relacja nieoznaczoności

Przechodząc do meritum, funkcje charakterystyczne $\Phi_x(\lambda_x)$ i $\tilde{\Phi}_p(\lambda_p)$ odpowiadające rozkładom prawdopodobieństwa $\rho(x)$ i $\tilde{\rho}(p)$ można zdefiniować na trzy różne sposoby:

$$\Phi_x(\lambda_x) = \langle e^{i\lambda_x \hat{x}} \rangle \equiv \int_{\mathbb{R}} dx \rho(x) e^{i\lambda_x x} \equiv \int_{\mathbb{R}} dp \tilde{\psi}^*(p) \tilde{\psi}(p - \hbar\lambda_x), \quad (21)$$

$$\tilde{\Phi}_p(\lambda_p) = \langle e^{i\lambda_p \hat{p}} \rangle \equiv \int_{\mathbb{R}} dp \tilde{\rho}(p) e^{i\lambda_p p} \equiv \int_{\mathbb{R}} dx \psi^*(x) \psi(x + \hbar\lambda_p). \quad (22)$$

Pierwsze definicje wyrażają funkcje charakterystyczne poprzez operatory przesunięcia dla położenia i pędu. Drugie wyrażenia to po prostu transformaty Fouriera (bez czynnika normującego) rozkładów prawdopodobieństwa. Bardzo ciekawe są trzecie definicje bazujące na funkcjach autokorelacji. Funkcja charakterystyczna dla położeniowego rozkładu prawdopodobieństwa zadana jest autokorelacją funkcji falowej w reprezentacji pędowej (i na odwrót).

Warto zwrócić uwagę na fakt, iż w literaturze matematycznej znaleźć można szereg górnych ograniczeń na moduł pojedynczej funkcji charakterystycznej (zob. pozycje „[41-47]” cytowane w [H3]). Niestety wszystkie te ograniczenia wymagają informacji *a priori* na temat badanego rozkładu, tzn. zależą od stanu układu. Ponadto, próby ograniczenia sumy $|\Phi(\lambda_x)|^2 + |\tilde{\Phi}(\lambda_p)|^2$ przy pomocy owych wyników, niezależnie dla każdego członu, spełniają na niczym ponieważ optymalizacje mające na celu uczynić rezultat końcowy niezależnym od stanu prowadzą do trywialnego górnego ograniczenia równego 2. Głównym rezultatem publikacji [H3] jest twierdzenie (*Theorem 1* w [H3]) zadające ograniczenie:

$$|\Phi(\lambda_x)|^2 + |\tilde{\Phi}(\lambda_p)|^2 \leq \mathcal{B}(\hbar\lambda_x\lambda_p), \quad \mathcal{B}(\gamma) = 2\sqrt{2} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 - \cos(\gamma)}}{1 + \cos(\gamma)}. \quad (23)$$

Wykres (FIG. 1 z [H3]) przedstawia okresowy charakter funkcji $\mathcal{B}$, której wartości oscylują pomiędzy trywialnym maksimum równym 2 a optymalnym minimum równym 1. Co istotne funkcje falowe wysycające otrzymaną nierówność w punktach ekstremalnych to funkcje grzebieniowe, a więc jest to pierwsza relacja nieoznaczoności dla położenia i pędu, w której funkcja Gaussa nie odgrywa roli wiodącej. Linia niebieska na FIG. 1 jak i analiza przeprowadzona od razu po *Theorem 1* (przed dowodem) pokazuje, w którym miejscu funkcja Gaussa daje o sobie znać.

4.5.2 Niektóre zastosowania

W pracy [H3] omówione zostały zastosowania nierówności (23) w kwantowym obrazowaniu [47, 48]. Mam na myśli równanie (18) z [H3], wsparte opisem przed i po równaniu, które zadaje górne ograniczenie na sumę czystości¹⁶ prawdopodobieństw detekcji dla obu kanonicznie sprzężonych zmiennych (położenie i pęd), po zastosowaniu maski przestrzennej z dowolną funkcją transmitancji. Powyższy wynik znajduje zastosowanie w teoretyczno-doświadczalnym projekcie, który obecnie jest we wstępnej fazie realizacji.

Drugie zastosowanie relacji nieoznaczoności (23) opisane zostanie w podrozdziale 4.6 ponieważ dotyczy grawitacji. W tym miejscu chciałbym jednak opisać inny wynik o teoriopolewej naturze, wspomniany w [H3] jako referencja „[73]”¹⁷. W elektrodynamice klasycznej możemy przy użyciu pól elektrycznego $\mathbf{E}$ i magnetycznego $\mathbf{B}$ zdefiniować strumienie¹⁸:

$$E[\beta] = \int_{S_\beta} E^a d^2 S_a, \quad B[\alpha] = \int_{S_\alpha} B^a d^2 S_a, \quad (24)$$

¹⁶Ścisłej na sumę całek z kwadratów rozkładów prawdopodobieństwa.

¹⁷Tutaj cytowana z numerem [49].

¹⁸Definicje za [49] — α i β mają tu znaczenie zgodne z [49], a nie związane z resztą Autoreferatu gdzie pełnią rolę parametrów sprzężonych.

przez dowolne powierzchnie S_α i S_β . W klasycznej teorii pola powyższe strumienie spełniają nawiasy Poissona $\{B[\alpha], E[\beta]\} = \mathcal{GL}(\alpha, \beta)$, gdzie $\mathcal{GL}(\alpha, \beta)$ jest topologiczną liczbą Gaussa dla pętli będących brzegami obu powierzchni. Na gruncie kwantowym, po tym jak strumienie pola zyskują operatorowy charakter można wypisać relację nieoznaczoności (równanie 1.9 z [49])

$$\left(\Delta \hat{B}[\alpha]\right) \left(\Delta \hat{E}[\beta]\right) \geq \frac{\hbar}{2} |\mathcal{GL}(\alpha, \beta)|. \quad (25)$$

Nasuwa się pytanie na ile powyższa relacja nieoznaczoności ma sens fizyczny, w szczególności czym (i czy dobrze określone) są wariancje operatorów strumieni pola.

W ujęciu teoriopolewym, naturalnymi obiektami zawierającymi strumienie pola są *dobrze określone* holonomie, o czym autorzy [49] także wspominają. Na mocy głównego wyniku z pracy [H3] przytoczonego jako równanie (23) można natychmiast wypisać relację nieoznaczoności dla holonomii (dla dowolnych parametrów rzeczywistych $\lambda_\alpha, \lambda_\beta$):

$$\left|\left\langle \exp\left(i\lambda_\alpha \hat{B}[\alpha]\right) \right\rangle\right|^2 + \left|\left\langle \exp\left(i\lambda_\beta \hat{E}[\beta]\right) \right\rangle\right|^2 \leq \mathcal{B}(\hbar\lambda_\alpha\lambda_\beta |\mathcal{GL}(\alpha, \beta)|). \quad (26)$$

4.6 Relacje nieoznaczoności i wnioski nt. grawitacji kwantowej

Jak już wspominałem, ważnym celem omawianego cyklu publikacji jest otrzymanie niebanalnych wniosków natury fizycznej płynących z relacji nieoznaczoności. Co oczywiste, relacje nieoznaczoności są tytułowym narzędziem poznawczym fizyki także gdy pozwalają na skuteczną detekcję kwantowego splątania (o czym traktowały podrozdziały 4.2-4.4). Niemniej jednak za szczególnie interesujące uznają przypadki, gdy startując z pewnej relacji nieoznaczoności można coś powiedzieć o fizyce bardzo odległej od obranego punktu startowego. Za bardzo odległą zdecydowanie uznają od dziesięcioleci rozwijaną dziedzinę kwantowej grawitacji, toteż niniejszy podrozdział ma na celu przedstawienie dwóch wyników prowadzących do wniosków nt. grawitacji kwantowej.

4.6.1 Relacja nieoznaczoności dla objętości bardzo wczesnego Wszechświata

W tej części powracam do pracy [H3] i jej ostatniego fragmentu dotyczącego pętlowej kosmologii kwantowej. Tytułem wstępu należy przytoczyć kilka faktów dotyczących pętlowej grawitacji kwantowej [50]. Rolę położenia kanonicznego pełni w niej tzw. koneksja Ashtekara¹⁹ $A_a^i(x)$ [51]. Problemem opisu kwantowego jest nieistnienie (w sensie matematycznym) operatora $\hat{A}_a^i(x)$ przez co (jak już wspominałem w 4.5) trzeba używać holonomii. Co warto podkreślić, w tym przypadku *nie da się* wypisać relacji nieoznaczoności typu (25). Innymi słowy, mamy do czynienia z przypadkiem, w którym założenia twierdzenia Stone’a–von Neumanna nie są spełnione. Ponieważ jednak dla tej teorii dobrze określona jest algebra Weyla [52], można po raz kolejny uciec się do równania (23).

Aby przejść do kosmologii pętlowej zaczynam od metryki Friedmana-Lemaître’a-Robertsona-Walkera

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) d\Sigma^2, \quad (27)$$

gdzie Σ odnosi się do przestrzeni trójwymiarowej. Funkcja czasu $a(t)$ jest dobrze znanym czynnikiem skali. Przy użyciu tej funkcji można wprowadzić dwie wielkości: parametr Hubble’a $b = \dot{a}/a$ oraz „fizyczną” objętość Wszechświata $V = V_0 a^3$ (V_0 jest wymiarowym czynnikiem proporcjonalności) [53]. Obie funkcje stanowią parę zmiennych kanonicznych opisywanych nawiasem Poissona $\{b, V\} = \pm 4\pi G/c^2$.

¹⁹Indeks “a” odnosi się do współrzędnych przestrzennych; wewnętrzny indeks “i” związany jest z grupą cechowania $SU(2)$.

Ponieważ koneksja Ashtekara jest proporcjonalna do $\dot{a}$, jasne jest iż operator kwantowy „ $\hat{b}$ ” nie może być poprawnie zdefiniowany. Innymi słowy, narzucająca się relacja nieoznaczoności $\sigma_b \sigma_V \geq 2\pi G \hbar / c^2$ może być traktowana jedynie jako nierówność heurystyczna informująca, że „coś jest na rzeczy”. Podobnie jak w poprzednim podrozdziale w sukurs przychodzi twierdzenie z publikacji [H3]. Ustalając wartość jednego z parametrów λ w równaniu (23) można pokazać, że

$$\sigma_V \geq \frac{4\pi G}{c^2} \lambda_b |U(\lambda_b)|, \quad (28)$$

gdzie λ_b jest dowolnym dodatnim parametrem rzeczywistym a $U(\lambda_b)$ jest dobrze zdefiniowanym operatorem holonomii dla parametru Hubble’a. Co ciekawe, nie ma możliwości dalszej optymalizacji uzyskanego więzu ponieważ $U(\lambda_b) \neq \exp(i\lambda_b \hat{b})$. Nierówność (28) jest jak dotąd jedyną znaną, w pełni poprawną formą opisaną relacji nieoznaczoności dla fluktuacji objętości Wszechświata, mających fizyczne znaczenie na bardzo wczesnym etapie jego ekspansji.

4.6.2 Nieliniowe równanie Schrödingera i relacje nieoznaczoności ze stałą grawitacyjną G

Być może jednym z najbardziej nietypowych zastosowań relacji nieoznaczoności było wyprowadzenie przez Halla i Reginatto równania Schrödingera, przy założeniu dynamiki klasycznej oraz własności skalowania nazwanej „*Exact Uncertainty Principle*” (EUP) [6].

W telegraficznym skrócie, zaczynając od równań klasycznych: ciągłości dla rozkładu prawdopodobieństwa $P(x, t)$ oraz Hamiltona-Jacobiego

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \cdot \left(P \frac{1}{m} \nabla S \right) = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \nabla S \cdot \nabla S + V = 0, \quad (29)$$

postuluje się istnienie fluktuacji²⁰ pędów $\mathbf{p}$ „wokół” pędów klasycznych $\mathbf{p}_{cl}$ (definiowanych jako składowe ∇S), tak że $\mathbf{p} = \mathbf{p}_{cl} + \mathbf{N}$. Od tej pory, dla prostoty opisu ograniczę się do scenariusza jednowymiarowego (para zmiennych x i p), podczas gdy zarówno w [6] jak i w mojej pracy [H1] rozważany był ogólny przypadek n -wymiarowy. W wyniku uwzględnienia fluktuacji (z wieloma technicznymi szczegółami po drodze) otrzymuje się modyfikację $(S')^2$, która na poziomie działania²¹ prowadzi do dodatkowego członu $(\Delta N)^2 = \int dx P \bar{N}^2$. Średnia typu „ $\bar{\cdot}$ ” odnosi się do losowości fluktuacji w każdym punkcie. Warto zwrócić uwagę na fakt, iż w rozdziale 2.1 pracy [H1] przeprowadzona została szczegółowa dyskusja subtelnych aspektów procedury uśredniania. Kluczowym rezultatem pracy [6], opartym na (EUP), są równania:

$$(\Delta N)^2 = \frac{\hbar^2}{4} F[P], \quad \sigma_p \geq \Delta N. \quad (30)$$

Pierwsze równanie mówi, iż człon pochodzący od fluktuacji wyraża się przez informację Fishera²² dla rozkładu prawdopodobieństwa P . Druga nierówność (nie związana z pierwszym równaniem) zadaje dolne ograniczenie na σ_p . Nierówność Cramera-Rao w prosty sposób przeprowadza (30) w relację nieoznaczoności Heisenberga (1). Ostatecznie, działanie kwantowe (równ. 11 z pracy [H1]) prowadzi do zmodyfikowanego równania Hamiltona-Jacobiego (znów w dowolnej liczbie wymiarów)

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \nabla S \cdot \nabla S + \frac{\hbar^2}{8m} \left[\frac{1}{P^2} \nabla P \cdot \nabla P - \frac{2}{P} \nabla^2 P \right] + V = 0, \quad (31)$$

²⁰Oznaczanych wektorem $\mathbf{N}$.

²¹Zob. równania (9) i (11) z [H1].

²²Z pewną dowolną stałą proporcjonalności, nie przez przypadek oznaczoną jako $\hbar^2/4$.

które z kolei (wraz z niezmiennym równaniem ciągłości) odpowiada równaniu Schrödingera. Na zakończenie wstępu warto wspomnieć, iż podejście oparte na EUP zyskało spore zainteresowanie i szereg kontynuacji. Pełen zbiór rezultatów związanych z EUP znaleźć można w nowej książce [54].

W pracy [H1] przeprowadziłem rozmówienie w pewnym sensie odwrotne do powyższego. Jeśli założymy, że z przyczyn fizycznych spełniona jest relacja nieoznaczoności bardziej rygorystyczna niż (1), to fakt ten powinien mieć wpływ na formę EUP. Odpowiednio zmodyfikowana EUP, taka aby procedurą podobną do tej bazującej na (30) odtworzyć ostrzejszą relację nieoznaczoności, w następnym kroku prowadzi do nowego (nieliniowego) równania Schrödingera. Pełna i uporządkowana argumentacja przedstawiona została w [H1]. W tym miejscu, pozwolę sobie jedynie wybrać trzy składniki „ze środka”, aby zaprezentować pierwszy wynik tej publikacji. Przy założeniu, że dyskutowana relacja nieoznaczoności ma postać (osobno dla każdego kierunku)

$$\sigma_x w(\sigma_p) \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (32)$$

z pewną funkcją $w(\cdot)$ o szeregu własności (równ. 25-28 z [H1]) to omówiony formalizm prowadzi do nieliniowego równania Schrödingera (tu znowu w n wymiarach; F_l jest informacją Fishera względem l -tego kierunku)

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V - \frac{\hbar^2}{2m} \sum_{l=1}^n W(\hbar^2 F_l[\rho]/4) \frac{1}{|\psi|} \frac{\partial^2 |\psi|}{\partial x_l^2} \right) \psi, \quad W(z) = \frac{d}{dz} [w^{-1}(\sqrt{z})]^2 - 1. \quad (33)$$

Powyższe nowe, nieliniowe równanie ewolucji ma trzy wielce pożądane własności:

- Separuje się dla nieoddziałujących podukładów.
- Nie zależy od normy funkcji falowej.
- Jest niezmiennicze względem transformacji Galileusza.

Ponadto, rozwiązania będące falami płaskimi redukują (33) do standardowego równania Schrödingera. Oznacza to, że fale płaskie w ogólności nie czują nieliniowości równania (33).

Naturalne pytanie Czytelnika mogłoby odnosić się do okoliczności w jakich relacja typu (32) miałaby zastąpić (1). Przykładem rozważonym w [H1] była uogólniona relacja nieoznaczoności z poprawkami grawitacyjnymi postulowana dla reżimu wysokich energii [55–57]

$$\sigma_x \frac{\sigma_p}{1 + \beta \sigma_p^2} \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (34)$$

z $\beta \sim G/(\hbar c^3)$. Teorii, która narosła wokół powyższej nierówności po części słusznie zarzuca się balansowanie na granicy uznanych podstaw fizyki. Dla wielu, (34) będzie równoważna z łamaniem niezmienniczości Lorentza. Jak podkreśliłem w [H1], nie jest moim celem rozważanie fizyki niekonwencjonalnej. Spodziewam się raczej, że relacja typu (34) będzie opisywać związki grawitacji z kwantowymi fluktuacjami w sposób zgodny z pozostałymi teoriami fizycznymi. Przykładem tego typu może być wyprowadzenie (34) [58], bazujące na postulatcie istnienia maksymalnego przyspieszenia (podejście to zachowuje lorentzowską niezmienniczość [59]).

Można pokazać, iż dla powyższego modelu $W(z) = 4\beta z + \mathcal{O}(\beta^2)$ a położeniowe odchylenie standardowe jest od dołu ograniczone przez $\hbar\sqrt{\beta}$. W kontekście grawitacyjnym warto powrócić do szczególnej roli fal płaskich, które pozostają nieczułe na nieliniowości równania. Innymi słowy, spektrum rozwiązań będących falami płaskimi nie ulega modyfikacji. Ten fizycznie nietrywialny wniosek stoi w sprzeczności z oczekiwaniami odnośnie możliwości detekcji efektów grawitacyjnych właśnie poprzez zaobserwowanie

zmian w spektrum fal płaskich [60,61]. Co oczywiste, połączenie równania Schrödingera z reżimem bardzo wysokich energii ma mały sens fizyczny (może bardziej jako wskazówka formalna jak dokonywać uogólnień), więc może i przewidywanie odnośnie fal płaskich powinno być inne. W końcu modyfikacja spektrum fal płaskich przewidywana jest dla rozwiązań równania Kleina-Gordona i Maxwella. Jednakże powyższe rozumowanie można łatwo powtórzyć dla przypadku Kleina-Gordona, ulepszając wyprowadzenie przedstawione w [62]. Innymi słowy, postulowany w pracy [H1] brak efektu przesunięcia spektrum fal płaskich ma znamiona uniwersalności, a więc powinien zostać wzięty pod uwagę w dyskusji odnośnie możliwych obserwowalnych efektów wzajemnych relacji pomiędzy grawitacją i mechaniką kwantową.

4.7 Skończenie-wymiarowe relacje nieoznaczoności i formalizm mechaniki kwantowej

Ostatnia część niniejszego omówienia poświęcona jest dwóm pracom [H10] i [H4] dotyczącym mechaniki kwantowej w skończenie-wymiarowych przestrzeniach Hilberta.

4.7.1 Relacje nieoznaczoności dla kanałów kwantowych

W pracy [H10] przedyskutowaliśmy jak ilościowo opisywać nieoznaczoność dla kanału kwantowego Φ zdefiniowanego jako całkowicie dodatnie odwzorowanie zachowujące ślad macierzy gęstości. Wyprowadziliśmy szereg relacji nieoznaczoności poświęconych:

- entropii odwzorowania²³ $S^{\text{map}}(\Phi)$, zdefiniowanej jako entropia (von Neumanna czy też Rényi’ego) macierzy gęstości stanu Choi-Jamiołkowskiego dla Φ ,
- entropii odbiorcy $S^{\text{rec}}(\Phi)$, zdefiniowanej jako entropia (Shannona lub Rényi’ego) unormowanych wartości własnych nieujemnej macierzy hermitowskiej $\Phi\Phi^\dagger$,
- sumom obu tych entropii.

O ile znaczenie entropii $S^{\text{map}}(\Phi)$ powinno być z gruntu jasne, to należy wyjaśnić, iż $S^{\text{rec}}(\Phi)$ ma na celu opisać wiedzę *a priori* nt. końcowej macierzy gęstości (po zadziałaniu kanału Φ) posiadaną przez odbiorcę.

Gęszcz relacji nieoznaczoności zaprezentowanych w [H10] (łącznie blisko 20) opiszę w formie listy²⁴:

- Dolne i górne ograniczenia na $S_q^{\text{rec}}(\Phi)$: (40a), (40c), (47).
- Dolne i górne ograniczenia na $S_q^{\text{map}}(\Phi)$: (40b), (40d), (54).
- Dolne ograniczenia na sumę $S_q^{\text{rec}}(\Phi) + S_q^{\text{map}}(\Phi)$: (46), na mocy (42) prowadzące do (43) i (44), które z kolei prowadzą do (39).
- Nierówności dla przypadku separowalnej macierzy Choi-Jamiołkowskiego (kanały łamiące splątanie): *Proposition 6* punkty (i-iii) na stronie 9 w [H10].

4.7.2 Kwantowe koherencje oraz relacje nieoznaczoności i oznaczoności dla wielu obserwabli

Podstawowym obiektem zainteresowań, od samego początku badań nad mechaniką kwantową, były dolne ograniczenia na zbiorcze miary statystycznej niepewności. Górne ograniczenia nie były rozważane gdyż w przypadku ciągłym maksymalna wartość sum entropii lub iloczynów wariancji może być nieskończona.

²³Oznaczenie entropii przez S , zamiast H , podyktowane jest notacją zastosowaną w [H10].

²⁴Cytowane numery równań odnoszą się do pracy [H10]; indeks q (notacja z [H10], w Autoreferacie oznaczany jako α) odnosi się do entropii Rényi’ego.

Ponieważ w przypadku skończenie-wymiarowym powyższa niedogodność nie występuje, pytanie o górne ograniczenia nabiera nowego sensu. Innymi słowy, wracając do entropowej nierówności (7), można pytać przez jaką wielkość suma entropii jest ograniczona od góry (tzw. relacja oznaczoności). Co oczywiście, w d -wymiarowej przestrzeni Hilberta suma dwóch entropii Rényi’ego dowolnego stopnia (mogą być dwa różne) jest w sposób trywialny ograniczona od góry przez $2 \ln d$. Dla przypadku ogólniejszego, gdy zamiast dwóch, rozważamy L obserwabli oraz stowarzyszonych z nimi baz własnych i rozkładów prawdopodobieństwa, trywialne górne ograniczenie przyjmuje postać $L \ln d$. Aby wysycić te ograniczenia, wszystkie prawdopodobieństwa muszą być równocześnie równe $1/d$. Pojawia się więc pytanie o to kiedy powyższych ograniczeń wysycić się nie da, w konsekwencji czego znaleźć można bardziej ostre relacje. Od dłuższego czasu znana jest konstruktywna odpowiedź²⁵ na powyższe pytania dla specjalnego przypadku $L = d + 1$ baz wzajemnie nieobciążonych (*mutually unbiased bases*) [63, 64]. W przypadku bazowym, tzn. dla dowolnego d i $L = 2$, nieoczekiwany wynik negatywny (brak relacji oznaczoności; ograniczenie $2 \ln d$ zawsze daje się wysycić) otrzymany został bardzo niedawno [65]. W dalszej części podrozdziału opiszę rezultaty zaprezentowane w publikacji [H4], w szczególności wnioski natury fizycznej płynące z faktu trywializacji relacji oznaczoności dla $L = 2$ oraz nowy zestaw relacji nieoznaczoności i oznaczoności dla przypadku ogólnego. Podrozdział ten zakończy krótką listą pobocznych wyników uzyskanych w [H4].

Na wzór teorii kwantowego splątania, opracowano opis kwantowej koherencji²⁶ [66], w termodynamice kwantowej traktowanej podobnie jak praca [67]. Dla ustalonej bazy $|a_i\rangle$, $i = 1, \dots, d$, stan maksymalnie koherentny jest postaci $|\Psi_{\text{coh}}\rangle = d^{-1/2} \sum_{j=1}^d e^{i\phi_j} |a_j\rangle$. Na mocy wspomnianej powyżej trywialnej relacji oznaczoności, dla dowolnej drugiej bazy ortonormalnej $|b_j\rangle$ istnieją fazy $\varphi_1, \dots, \varphi_d$, takie że $|\Psi_{\text{coh}}\rangle = d^{-1/2} \sum_{j=1}^d e^{i\varphi_j} |b_j\rangle$. Dla kwantowej koherencji oznacza to, że (zob. *Corollary 1 i 2* na str. 3 w [H4]):

- stan maksymalnie koherentny może być współdzielony przez dwóch użytkowników,
- dla dowolnego kanału unitarnego, można tak dobrać fazy w $|\Psi_{\text{coh}}\rangle$ aby stan był maksymalnie koherentny przed i po wykonaniu operacji.

Kwantowa koherencja, tak jak splątanie, może być ilościowo badana przy pomocy miar koherencji [66]. Prawdopodobnie najprostszą i najbardziej intuicyjną miarą jest norma l_1 współczynników pozadiagonalnych macierzy gęstości zadana wzorem

$$C_{l_1}(\rho) = \sum_{i \neq j}^d |\rho_{ij}|. \quad (35)$$

Na stronach 3 i 4 pracy [H4] pokazaliśmy, iż obniżenie (względem jej maksimum) wartości powyższej miary koherencji liczonej dla stanu czystego $|\xi\rangle$, który został przygotowany jako maksymalnie koherentny z prawdopodobieństwem $1 - \epsilon$, jest proporcjonalne do ϵ . Jeśli niedokładności rzędu ϵ dotyczące przygotowania maksymalnie koherentnego stanu kwantowego o ustalonych fazach (dla celów zastosowań wymienionych w *Corollary 1 i 2*) dotyczą tylko dostrojenia faz, wtedy spadek koherencji jest proporcjonalny do ϵ^2 . Ponadto, *Corollary 3* na str. 4 w [H4] wykorzystuje zagnieżdżony rozkład macierzy unitarnych otrzymany przy pomocy macierzy Fouriera [68] do określenia dla jakiego zestawu $L \geq 3$ obserwabli istnieje stan maksymalnie koherentny względem wszystkich L baz własnych.

Nietrywialne relacje nieoznaczoności i oznaczoności dla $L \geq 3$ obserwabli wyprowadzone zostały jako *Theorem 2* na str. 5 w [H4] oraz pokazane na rysunku FIG. 3 dla $L = 3$. Mimo tego, iż jest to niemałej wagi rezultat, w Autoreferacie pominię dalszy jego opis oszczędzając szczegółów technicznych. Warto jedynie zwrócić uwagę na *Theorem 1* obecne na str. 4 w [H4], które istotnie uogólnia wyniki z pracy [69].

²⁵W formie relacji oznaczoności [63, 64].

²⁶Chodzi o koherencję względem pewnej ustalonej bazy ortonormalnej.

Pozostałe interesujące rezultaty opisane w publikacji [H4] obejmują:

- Rysunek FIG. 4 pokazujący zwięźanie się zakresu zmienności sumy entropii w miarę zbliżania się baz do zestawu MUB, tzn. w funkcji parametru zdefiniowanego równaniem (31) z [H4].
- Rysunek FIG. 6 dla $L = 3$ ilustrujący podobne zachowanie w funkcji zmiennych geometrycznych $P_{\blacktriangle}$ i $A_{\blacktriangle}$ zaprezentowanych na FIG. 5.
- Powtórzenie części analizy poświęconej koherencji dla przypadku kwantowego splątania (np. istnienie stanów „wzajemnie splątanych”).

4.8 Krótkie podsumowanie

W poprzednich podrozdziałach przedstawiłem wyniki z 11 prac poświęconych relacjom nieoznaczoności, ich praktycznym zastosowaniom oraz wnioskowi natury fizycznej płynącym z ich odkrycia. W ramach podsumowania umieszczam zwięźłą tabelę, która w sposób syntetyczny lecz w pewnym sensie subiektywny przez co także niekompletny prezentuje najciekawsze (moim zdaniem) otrzymane rezultaty:

Praca	Nowe relacje nieoznaczoności	Wnioski i zastosowania fizyczne
H1	-	Nowe nieliniowe równanie Schrödingera
H1	-	Poprawki kwantowo-grawitacyjne nie muszą wpływać na spektrum fal płaskich
H2	(18)	Kryteria splątania (25)
H3	(5)	Nierówność (18) przydatna w optyce kwantowej
H3	(5)	Relacja nieoznaczoności (21) dla kosmologii kwantowej
H4	-	Szereg wniosków nt. stanów maksymalnie koherentnych: współdzielenie, odporność, kryteria istnienia
H4	(28)	Pierwsze znane, ogólne relacje nieoznaczoności i oznaczoności dla dowolnej liczby obserwabli
H5	(27)	Poprawienie relacji nieoznaczoności z [D2]
H6	-	Dolne ograniczenie (8) na Geometryczną Miarę Splątania
H6	-	Kryteria splątania (33) wierne dla stanów Wernera
H7	(23), (26), (28)	Najmocniejsze znane relacje nieoznaczoności dla entropii Rényi’ego o tym samym indeksie α
H8	(9), (21)	Pierwsze relacje majoryzacyjne dla iloczynu tensorowego dwóch rozkładów prawdopodobieństwa
H9	-	Skończone rozmiary detektorów zostały uwzględnione w kryteriach splątania (10)
H10	(39-40), (43-44), (46-50)	Pierwsze znane relacje nieoznaczoności dla kanałów kwantowych
H11	-	Test splątania dla stanów mieszanych (12) niedawno zmierzony w [18]

5 Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych

5.1 Lista publikacji stanowiących pozostały dorobek naukowy

Do pozostałego dorobku zaliczam publikacje i preprinty²⁷ opublikowane po uzyskaniu stopnia doktora. Publikacje w czasopismach naukowych:

- [N1] B. Witt, Ł. Rudnicki, Y. Tanimura, F. Mintert, *Exploring complete positivity in hierarchy equations of motion*, New J. Phys. **19**, 013007 (2017).
- [N2] I. V. Toranzo, P. Sánchez-Moreno, Ł. Rudnicki, J. S. Dehesa, *One-Parameter Fisher–Rényi Complexity: Notion and Hydrogenic Applications*, Entropy **19**, 16 (2017).
- [N3] Ł. Rudnicki, I. V. Toranzo, P. Sánchez-Moreno, J. S. Dehesa, *Monotone measures of statistical complexity*, Phys. Lett. A **380**, 377 (2016).
- [N4] K. von Prillwitz, Ł. Rudnicki, F. Mintert, *Contrast in multipath interference and quantum coherence*, Phys. Rev. A **92**, 052114 (2015).
- [N5] A. Verdeny, Ł. Rudnicki, C. A. Müller, F. Mintert, *Optimal Control of Effective Hamiltonians*, Phys. Rev. Lett. **113**, 010501 (2014).
- [N6] A. Gabriel, Ł. Rudnicki, B. C. Hiesmayr, *Measurement-base-independent test for genuine multipartite entanglement*, New J. Phys. **15**, 073033 (2013).

Preprinty:

- [N7] D. Suess, Ł. Rudnicki, D. Gross, *Error regions in quantum state tomography: computational complexity caused by geometry of quantum states*, arXiv:1608.00374
- [N8] D. S. Tasca, Ł. Rudnicki, R. S. Aspden, M. J. Padgett, P. H. Souto Ribeiro, S. P. Walborn, *Testing for entanglement with periodic images*, arXiv:1506.01095

5.2 Krótki opis pozostałego dorobku naukowego

Osiem publikacji wymienionych powyżej podzielić można na cztery kategorie:

- Prace uzyskane w ramach mojego udziału w grantie ERC „*Optimal dynamical control of quantum entanglement*”: [N1], [N4], [N5].
- Prace uzyskane we współpracy z grupą z Granady zajmującą się fizyką atomową: [N2], [N3].
- Praca, która powstała podczas mojego obecnego postdoca w grupie „*Quantum Correlations in Physics, Math, and Computer Science*”: [N7].
- Dalsze prace dotyczące kryteriów splątania: [N6], [N8].

Praca [N1] stanowi znaczną część projektu doktorskiego, którego byłem nieformalnym współopiekunem²⁸. Projekt dotyczy dynamiki układów otwartych poza równaniem Lindblada–Kossakowskiego opisywanej tzw. hierarchią równań ruchu [70]. Badanie dotyczy skomplikowanego problemu określenia kiedy otrzymana z równań dynamika jest całkowicie dodatnia. Praca [N4] powstała jako rozwinięcie projektu

²⁷Preprinty opublikowane na serwerze arXiv.

²⁸Tu, jak i w całym paragrafie „podopieczny” jest pierwszym autorem opisywanej publikacji.

licencjackiego, którego byłem nieformalnym współopiekunem. Celem zakończonego sukcesem projektu było wyprowadzenie hierarchii kryteriów określających stopień koherencji [66], bazujących na interferencji Macha-Zehndera. Publikacja [N5] jest częścią projektu doktorskiego, którego byłem nieformalnym współopiekunem, skupioną na nowej metodzie optymalnej kontroli Hamiltonianów efektywnych, polegającej na minimalizacji szybkich fluktuacji wokół dynamiki efektywnej. Metoda została zastosowana do tzw. trójpoziomowego modelu Lambda z przejściami Ramanowskimi — uzyskano analityczne wyrażenia na amplitudy przyłożonych impulsów laserowych.

Praca [N2] wprowadza nową rodzinę miar dla wielkości zwanej „*statistical complexity*” [71]. Wielkość ta ma za zadanie mierzyć jak daleko dany rozkład prawdopodobieństwa odbiega zarówno od (uprzednio zdefiniowanego) perfekcyjnego porządku jak i zupełnego nieporządku. Ponadto, pokazaliśmy na przykładzie rodziny stanów własnych atomu wodoru z liczbami kwantowymi związanymi relacją $l = m = n - 1$, że hierarchia może ulec pełnemu odwróceniu w zależności od skali długości dla jakiej dokonuje się oceny. W pracy [N3] usystematyzowaliśmy aksjomatykę pojęcia *statistical complexity*, wprowadzając na wzór teorii kwantowego splątania, odpowiedni wymóg monotoniczności. Pokazaliśmy, że podstawowe miary typu Fishera-Shannona [72] i Cramera-Rao [73] są monotoniczne względem operacji splotu rozkładu prawdopodobieństwa z wygładzającym jądrem gaussowskim.

Publikacja [N7] opisuje badania nad problemem obszarów ufności dla tomografii kwantowej. Przy uzasadnionym założeniu gaussowskości dla otrzymywanych doświadczalnie danych, obszary ufności są elipsoidami, które z reguły wykraczają poza zbiór stanów fizycznych (brak wymogu nieujemnej określoności, ponieważ rekonstrukcja odbywa się w przestrzeni macierzy hermitowskich). W pracy [N7] zostało pokazane, iż problem znajdowania obszarów ufności o minimalnej objętości jest NP-trundy, jeśli do algorytmu doda się warunek nieujemnej określoności dla rekonstruowanej macierzy.

W pracy [N6] wyprowadzone zostały wygodne doświadczalnie kryteria splątania dla układów złożonych z wielu podukładów. Metoda opiera się na badaniu uśrednionych po grupie unitarnej kryteriów [74] wykorzystujących mierzalne składowe macierzy gęstości. Cytowana w podrozdziale 4.5, głównie doświadczalna praca [N8] zawiera opis nowatorskiej metody dyskretyzacji zmiennych ciągłych w optyce kwantowej, przy użyciu okresowych masek SLM²⁹. W części teoretycznej praca sporo czerpie z [H3], a w najnowszej, nieopublikowanej na serwerze arXiv wersji, także z [H5]. Praca wciąż jest ulepszana.

W kolejnym podrozdziale zamieszczam listę moich prac opublikowanych przed uzyskaniem przeze mnie stopnia naukowego doktora. Prace [D2], [D4] i [D5], były już wspomniane w niniejszym Autoreferacie. Praca [D7] zawiera część teoriopolożnych wyników uzyskanych w doktoracie podczas gdy publikacja [D9] opisuje projekt magisterski. Pozycja [D11] jest rozdziałem o charakterze przeglądowym otwierającym książkę [71]. Mając na uwadze zwartość Autoreferatu pominię opis pozostałych prac z listy „D”.

5.3 Lista publikacji opublikowanych przed uzyskaniem stopnia doktora

Publikacje w czasopismach naukowych:

- [D1] Ł. Rudnicki, P. S. Moreno, J. S. Dehesa, *The Shannon–entropy–based uncertainty relation for D–dimensional central potentials*, J. Phys. A: Math. Theor. **45**, 225303 (2012).
- [D2] Ł. Rudnicki, S. P. Walborn, F. Toscano, *Optimal uncertainty relations for extremely coarse-grained measurements*, Phys. Rev. A **85**, 042115 (2012).
- [D3] Ł. Rudnicki, *Heisenberg position–momentum uncertainty relation beyond central potentials*, Phys. Rev. A **85**, 022012 (2012).

²⁹Spatial light modulator.

- [D4] Ł. Rudnicki, S. P. Walborn, F. Toscano, *Heisenberg Uncertainty Relation for Coarse-grained Observables*, Europhys. Lett. **97**, 38003 (2012).
- [D5] Ł. Rudnicki, P. Horodecki, K. Życzkowski, *Collective Uncertainty Entanglement Test*, Phys. Rev. Lett. **107**, 150502 (2011).
- [D6] Ł. Rudnicki, *Shannon entropy as a measure of uncertainty in positions and momenta*, J. Russ. Laser Res. **32**, 393 (2011).
- [D7] I. Białynicki-Birula, Ł. Rudnicki, *Time evolution of the QED vacuum in a uniform electric Field: Complete analytic solution by spinorial decomposition*, Phys. Rev. D **83**, 065020 (2011).
- [D8] I. Białynicki-Birula, Ł. Rudnicki, *Comment on "Uncertainty relations in terms of the Tsallis entropy"*, Phys. Rev. A **81**, 026101 (2010).
- [D9] Ł. Rudnicki, I. Białynicki-Birula, *Dynamical Casimir effect in uniformly accelerated media*, Optics Communications **283**, 644 (2010).

Rozdziały w monografiach:

- [D10] Ł. Rudnicki, *Uncertainty related to position and momentum localization of a quantum state* in: "Proceedings of New Perspectives in Quantum Statistics and Correlations", M. Hiller, F. de Melo, P. Pickl, T. Wellens, S. Wimberger (Eds.), Universitätsverlag Winter, p. 49 (2012).
- [D11] I. Białynicki-Birula, Ł. Rudnicki, *Entropic uncertainty relations in quantum physics* in: "Statistical Complexity: Applications in Electronic Structure", K. D. Sen (ed.), Springer, p. 1-34 (2011).

Literatura

Ł. Rudnicki

- [1] W. Heisenberg, *Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik*, Z. Phys. **43**, 172 (1927).
- [2] E. Kennard, *Zur Quantenmechanik einfacher Bewegungstypen*, Z. Phys. **44**, 326 (1927).
- [3] H. Robertson, *The Uncertainty Principle*, Phys. Rev. **34**, 163 (1929).
- [4] P. Busch, T. Heinonen, and P. Lahti, *Heisenberg's uncertainty principle*, Physics Reports **452**, 155 (2007).
- [5] R. Simon, *Peres-Horodecki Separability Criterion for Continuous Variable Systems*, Phys. Rev. Lett. **84**, 2726 (2000).
- [6] M. Hall and M. Reginatto, *Schrödinger equation from an exact uncertainty principle*, J. Phys. A: Math. Gen. **35**, 3289 (2002).
- [7] I. Białynicki-Birula and J. Mycielski, *Uncertainty relations for information entropy in wave mechanics*, Commun. Math. Phys. **44**, 129 (1975).
- [8] D. Deutsch, *Uncertainty in quantum measurements*, Phys. Rev. Lett. **50**, 631 (1983).
- [9] H. Maassen and J. B. M. Uffink, *Generalized entropic uncertainty relations*, Phys. Rev. Lett. **60**, 1103 (1988).
- [10] S. Wehner and A. Winter, *Entropic uncertainty relations—a survey*, New J. Phys. **12**, 025009 (2010).
- [11] P. J. Coles, M. Berta, M. Tomamichel, and S. Wehner, *Entropic Uncertainty Relations and their Applications*, arXiv:1511.04857
- [12] C. K. Hong, Z. Y. Ou, and L. Mandel, *Measurement of subpicosecond time intervals between two photons by interference*, Phys. Rev. Lett. **59**, 2044 (1987).

- [13] G. Vidal and R. F. Werner, *Computable measure of entanglement*, Phys. Rev. A **65**, 032314 (2002).
- [14] C. H. Bennett, D. P. DiVincenzo, J. A. Smolin, and W. K. Wootters, *Mixed-state entanglement and quantum error correction*, Phys. Rev. A **54**, 3824 (1996).
- [15] P. Badziąg, M. Horodecki, P. Horodecki, and R. Horodecki, *Local environment can enhance fidelity of quantum teleportation*, Phys. Rev. A **62**, 012311 (2000).
- [16] D. C. Brody and L. P. Hughston, *Geometric quantum mechanics*, J. Geom. Phys. **38**, 19 (2001).
- [17] T.-C. Wei and P. M. Goldbart, *Geometric measure of entanglement and applications to bipartite and multipartite quantum states*, Phys. Rev. A **68**, 042307 (2003).
- [18] K. Lemr, K. Bartkiewicz, and A. Černoč, *Experimental measurement of collective nonlinear entanglement witness for two qubits*, Phys. Rev. A **94**, 052334 (2016).
- [19] A. Gilchrist, N. K. Langford, and M. A. Nielsen, *Distance measures to compare real and ideal quantum processes*, Phys. Rev. A **71**, 062310 (2005).
- [20] G. M. Bosyk, T. M. Osán, P. W. Lamberti, and M. Portesi, *Geometric formulation of the uncertainty principle*, Phys. Rev. A **89**, 034101 (2014).
- [21] G. Sarbicki, *Spectral properties of entanglement witnesses and separable states*, J. Phys.: Conf. Ser. **104**, 012009 (2008).
- [22] P. Badziąg, C. Brukner, W. Laskowski, T. Paterek, and M. Żukowski, *Experimentally Friendly Geometrical Criteria for Entanglement*, Phys. Rev. Lett. **100**, 140403 (2008).
- [23] I. Białynicki-Birula, *Formulation of the uncertainty relations in terms of the Rényi entropies*, Phys. Rev. A **74**, 052101 (2006).
- [24] I. Białynicki-Birula, *Entropic uncertainty relations*, Phys. Lett. **103A**, 253 (1984).
- [25] M. H. Partovi, *Entropic Formulation of Uncertainty for Quantum Measurements*, Phys. Rev. Lett. **50**, 1883 (1983).
- [26] I. Białynicki-Birula and Z. Białynicka-Birula, *Why photons cannot be sharply localized*, Phys. Rev. A **79**, 032112 (2009).
- [27] S. Mancini, V. Giovannetti, D. Vitali, and P. Tombesi, *Entangling Macroscopic Oscillators Exploiting Radiation Pressure*, Phys. Rev. Lett. **88**, 120401 (2002).
- [28] S. P. Walborn, B. G. Taketani, A. Salles, F. Toscano, and R. L. de Matos Filho, *Entropic Entanglement Criteria for Continuous Variables*, Phys. Rev. Lett. **103**, 160505 (2009).
- [29] L.-M. Duan, G. Giedke, J. I. Cirac, and P. Zoller, *Inseparability Criterion for Continuous Variable Systems*, Phys. Rev. Lett. **84**, 2722 (2000).
- [30] A. Saboia, F. Toscano, and S. P. Walborn, *Family of continuous-variable entanglement criteria using general entropy functions*, Phys. Rev. A **83**, 032307 (2011).
- [31] E. Shchukin and W. Vogel, *Inseparability Criteria for Continuous Bipartite Quantum States*, Phys. Rev. Lett. **95**, 230502 (2005).
- [32] J. Peise, et al., *Satisfying the Einstein-Podolsky-Rosen criterion with massive particles*, Nat. Comm. **6**, 8984 (2015).
- [33] C. Klempt, personal communication (2016).
- [34] S. Weigert and M. Wilkinson, *Mutually unbiased bases for continuous variables*, Phys. Rev. A **78**, 020303 (2008).
- [35] P. Coles and M. Piani, *Improved entropic uncertainty relations and information exclusion relations*, Phys. Rev. A **89**, 022112 (2014).
- [36] J. I. de Vicente and J. Sánchez-Ruiz, *Improved bounds on entropic uncertainty relations*, Phys. Rev. A **77**, 042110 (2008).

- [37] M. H. Partovi, *Majorization formulation of uncertainty in quantum mechanics*, Phys. Rev. A **84**, 052117 (2011).
- [38] S. Friedland, V. Gheorghiu, and G. Gour, *Universal Uncertainty Relations*, Phys. Rev. Lett. **111**, 230401 (2013).
- [39] K. Korzekwa, M. Lostaglio, D. Jennings, and T. Rudolph, *Quantum and classical entropic uncertainty relations*, Phys. Rev. A **89**, 042122 (2014).
- [40] G. M. Bosyk, S. Zozor, M. Portesi, T. M. Osán, and P. W. Lamberti, *Geometric approach to extend Landau-Pollak uncertainty relations for positive operator-valued measures*, Phys. Rev. A **90**, 052114 (2014).
- [41] S. Zozor, G. M. Bosyk, and M. Portesi, *General entropy-like uncertainty relations in finite dimensions*, J. Phys. A:Math. Theor. **47**, 495302 (2014).
- [42] J. Kaniewski, M. Tomamichel, and S. Wehner, *Entropic uncertainty from effective anticommutators*, Phys. Rev. A **90**, 012332 (2014).
- [43] F. Buscemi, M. J. W. Hall, M. Ozawa, and M. M. Wilde, *Noise and Disturbance in Quantum Measurements: An Information-Theoretic Approach*, Phys. Rev. Lett. **112**, 050401 (2014).
- [44] F. Brandão, M. Horodecki, N. Ng, J. Oppenheim, and S. Wehner, *The second laws of quantum thermodynamics*, PNAS **112**, 3275 (2015).
- [45] J. Schneeloch, P. B. Dixon, G. A. Howland, C. J. Broadbent, and J. C. Howell, *Violation of continuous-variable Einstein-Podolsky-Rosen steering with discrete measurements*, Phys. Rev. Lett. **110**, 130407 (2013).
- [46] J. Schneeloch, C. J. Broadbent, and J. C. Howell, *Improving Einstein-Podolsky-Rosen steering inequalities with state information*, Phys. Lett. A **378**, 766 (2014).
- [47] R. S. Aspdén, D. S. Tasca, R. W. Boyd, and M. J. Padgett, *EPR-based ghost imaging using a single-photon-sensitive*, New J. Phys. **15**, 073032 (2013).
- [48] G. A. Howland and J. C. Howell, *Efficient High-Dimensional Entanglement Imaging with a Compressive-Sensing Double-Pixel Camera*, Phys. Rev. X **3**, 011013 (2013).
- [49] A. Ashtekar and A. Corichi, *Gauss linking number and the electromagnetic uncertainty principle*, Phys. Rev. D **56**, 2073 (1997).
- [50] C. Rovelli and F. Vidotto, *Covariant Loop Quantum Gravity* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2015).
- [51] A. Ashtekar, *New Variables for Classical and Quantum Gravity*, Phys. Rev. Lett. **57**, 2244 (1986).
- [52] C. Fleischhack, *Representations of the Weyl Algebra in Quantum Geometry*, Commun. Math. Phys. **285**, 67 (2009).
- [53] A. Ashtekar and P. Singh, *Loop quantum cosmology: a status report*, Class. Quantum Grav. **28**, 213001 (2011).
- [54] M. Hall and M. Reginatto, *Quantization of Classical Ensembles via an Exact Uncertainty Principle in Ensembles on Configuration Space*, (Springer International Publishing), pp 85-113 (2016).
- [55] D. Amati, M. Ciafaloni, and G. Veneziano, *Can spacetime be probed below the string size?*, Phys. Lett. B **216**, 41 (1989).
- [56] M. Maggiore, *Quantum groups, gravity, and the generalized uncertainty principle*, Phys. Rev. D **49**, 5182 (1994).
- [57] A. Kempf, G. Mangano, and R. B. Mann, *Hilbert space representation of the minimal length uncertainty relation*, Phys. Rev. D **52**, 1108 (1995).
- [58] S. Capozziello, G. Lambiase, and G. Scarpetta, *Generalized uncertainty principle from quantum geometry*, Int. J. Theor. Phys. **39**, 15 (2000).
- [59] G. Scarpetta, *Relativistic kinematics with Caianiello's maximal proper acceleration*, Lett. Nuovo Cimento B **41**, 51 (1984).

- [60] A. D. K. Plato, C. N. Hughes, and M. S. Kim, *Gravitational effects in quantum mechanics*, Contemp. Phys. 1–9 (2016).
- [61] R. Gambini and J. Pullin, *Nonstandard optics from quantum space–time*, Phys. Rev. D **59**, 124021 (1999).
- [62] G. Grössing, *From classical hamiltonian flow to quantum theory: derivation of the Schrödinger equation*, Found. Phys. Lett. **17**, 343 (2004).
- [63] J. Sanchez, *Entropic uncertainty and certainty relations for complementary observables*, Phys. Lett. A **173**, 233 (1993).
- [64] J. Sanchez–Ruiz, *Improved bounds in the entropic uncertainty and certainty relations for complementary observables*, Phys. Lett. A **201**, 125 (1993).
- [65] K. Korzekwa, D. Jennings, and T. Rudolph, *Operational constraints on state-dependent formulations of quantum error disturbance, trade-off relations*, Phys. Rev. A **89**, 052108 (2014).
- [66] T. Baumgratz, M. Cramer, and M. B. Plenio, *Quantifying Coherence*, Phys. Rev. Lett. **113**, 140401 (2014).
- [67] J. Åberg, *Catalytic Coherence*, Phys. Rev. Lett. **113**, 150402 (2014).
- [68] M. Idel and M. Wolf, *Sinkhorn normal form for unitary matrices*, Lin. Alg. Appl. **471**, 76 (2015).
- [69] S. Wu, S. Yu, and K. Mølmer, *Entropic uncertainty relation for mutually unbiased bases*, Phys. Rev. A **79**, 022104 (2009).
- [70] Y. Tanimura and R. Kubo, *Time Evolution of a Quantum System in Contact with a Nearly Gaussian-Markoffian Noise Bath*, J. Phys. Soc. Jpn. **58**, 101 (1989).
- [71] Statistical Complexity: Applications in Electronic Structure, K. D. Sen (ed.), Springer (2011).
- [72] C. Vignat and J.-F. Bercher, *Analysis of signals in the Fisher–Shannon information plane*, Phys. Lett. A **312**, 27 (2003).
- [73] A. Dembo, T. M. Cover, and J. A. Thomas, *Information theoretic inequalities*, IEEE Trans. Inf. Theory **37**, 1501 (1991) .
- [74] M. Huber, F. Mintert, A. Gabriel, and B. C. Hiesmayr, *Detection of high-dimensional genuine multi-partite entanglement of mixed states*, Phys. Rev. Lett. **104**, 210501 (2010).