

Autoreferat

Tomasz Romańczukiewicz

15 grudnia 2017

1. Imię i Nazwisko

Tomasz Romańczukiewicz

2. Posiadane dyplomy i stopnie naukowe

2006 **Doktor nauk fizycznych**, Uniwersytet Jagielloński

Tytuł rozprawy: *Ewolucja i oddziaływania defektów topologicznych*, doktorat z **wyróżnieniem**

Opiekun: prof. dr hab. Henryk Arodź

2002-2006 Studia **doktoranckie** w Instytucie Fizyki Uniwersytetu Jagiellońskiego

2002 **Magister** w dziedzinie fizyki teoretycznej, Uniwersytet Jagielloński

Tytuł pracy: *Relaksacja zaburzenia wokół solitonu*

Opiekun: prof. dr hab. Piotr Bizoń

1997-2002 **Studia Matematyczno Przyrodnicze**, Uniwersytet Jagielloński

Specjalizacja: fizyka teoretyczna

Opiekunowie: prof. dr hab. Józef Spałek, prof. dr hab. Piotr Bizoń

3. Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych

2006-2009 Asystent, Zakład Teorii Pola, Instytut Fizyki, Uniwersytet Jagielloński

2009– Adiunkt, Zakład Teorii Pola, Instytut Fizyki, Uniwersytet Jagielloński

4. Wskazanie osiągnięcia

4.1. Tytuł: **Wpływ małych zaburzeń na dynamikę i ewolucję solitonów**

4.2. **Spis publikacji**

Spis publikacji w kolejności chronologicznej.

- [H1] T. Romańczukiewicz, “Negative radiation pressure in case of two interacting fields,” *Acta Phys. Polon.*, vol. B39, pp. 3449–3462, 2008, arXiv:[0807.2314](#).
- [H2] T. Romańczukiewicz, “Long lived oscillons,” *Acta Phys. Polon.*, vol. B40, pp. 611–622, 2009.
- [H3] T. Romańczukiewicz and Ya. Shnir, “Oscillon resonances and creation of kinks in particle collisions,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 105, p. 081601, 2010, DOI: [10.1103/PhysRevLett.105.081601](#), arXiv:[1002.4484](#).
- [H4] P. Dorey, K. Mersh, T. Romańczukiewicz, and Ya. Shnir, “Kink-antikink collisions in the ϕ^6 model,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 107, p. 091602, 2011, DOI: [10.1103/PhysRevLett.107.091602](#), arXiv:[1101.5951](#).
- [H5] A. Halavanau, T. Romańczukiewicz, and Ya. Shnir, “Resonance structures in coupled two-component ϕ^4 model,” *Phys. Rev.*, vol. D86, p. 085027, 2012, DOI: [10.1103/PhysRevD.86.085027](#), arXiv:[1206.4471](#).
- [H6] P. Forgács, A. Lukács, and T. Romańczukiewicz, “Plane waves as tractor beams,” *Phys. Rev.*, vol. D88, no. 12, p. 125007, 2013, DOI: [10.1103/PhysRevD.88.125007](#), arXiv:[1303.3237](#).
- [H7] C. Adam, M. Haberichter, T. Romańczukiewicz, and A. Wereszczynski, “Radial vibrations of BPS skyrmions,” *Phys. Rev.*, vol. D94, no. 9, p. 096013, 2016, DOI: [10.1103/PhysRevD.94.096013](#), arXiv:[1607.04286](#).
- [H8] P. Dorey, A. Halavanau, J. Mercer, T. Romańczukiewicz, and Y. Shnir, “Boundary scattering in the ϕ^4 model,” *JHEP*, vol. 05, p. 107, 2017, DOI: [10.1007/JHEP05\(2017\)107](#), arXiv:[1508.02329](#).
- [H9] T. Romańczukiewicz, “Could the primordial radiation be responsible for vanishing of topological defects?” *Phys. Lett. B*, vol. 773, pp. 295–299, 2017, DOI: [10.1016/j.physletb.2017.08.045](#), arXiv:[1706.05192](#).

Notacja

Publikacje w ramach cyklu opatrzone są przedrostkiem H, pozostałe publikacje, których spis został umieszczony w 5. oznaczone są przedrostkiem D, publikacje w trakcie recenzji X. Odnosiłki do publikacji, których nie byłem współautorem nie posiadają przedrostka. Ich spis znajduje się na końcu Autoreferatu.

4.3. Omówienie celu naukowego i osiągniętych wyników

4.3.1. Wstęp

Największymi osiągnięciami cyklu z bibliometrycznego punktu widzenia są: odkrycie rezonansowej struktury fraktalnej w zderzeniach niesymetrycznych kinków w modelu ϕ^6 [H4] oraz odkrycie

mechanizmu rezonansu pomiędzy falą a oscylorem prowadzącą do kreacji par kink–anty kink [H3]. Należy podkreślić, że ciągu ostatnich kilku lat bardzo wzrosło zainteresowanie modelami z niesymetrycznymi kinkami [1–6].

Z mojego punktu widzenia najciekawszym, niestety stosunkowo słabo znanym, ale potencjalnie ważnym odkryciem było ujemne ciśnienie promieniowania (UCP) w kontekście defektów topologicznych. Pierwszy przykład tego zjawiska został znaleziony w trakcie doktoratu [D1, D2]. Co prawda artykuł [D4] został opublikowany już po doktoracie, jednak zawiera w dużej części materiał zawarty w rozprawie i nie został ujęty jako część cyklu habilitacyjnego. Jako część cyklu uwzględnione zostały publikacje [H1, H6, H9], które zawierają inny, istotnie różny mechanizm UCP. Warto też wspomnieć, że kolejny artykuł dotyczący tego problemu [X1] prezentuje jeszcze inny mechanizm. Niestety praca znajduje się wciąż na etapie recenzji.

Ostatnim odkrytym przeze mnie, choć jeszcze wciąż słabo zbadanym, efektem jest niemonotoniczna relaksacja głębokich modów oscylacyjnych na skutek przechodzenia wyższych harmonicznych przez próg masy [H8]. Podobny efekt został również zauważony w [X2, X3].

Ponieważ część efektów ma charakter uniwersalny, niniejsze omówienie zostało podzielone według efektów i mechanizmów. Nie do końca będzie to zatem omówienie poszczególnych prac, gdyż każdy z artykułów skupia się na jednym modelu, w którym można zaobserwować kilka różnych zjawisk.

Po krótkim wstępie opiszę wyniki dotyczące relaksacji solitonów na przykładzie promieniowania modu oscylacyjnego poprzez wyższe harmoniczne. W szczególności omówione zostanie nowo odkryte zjawisko przyspieszenia relaksacji na skutek wynurzania się drugiej harmonicznej powyżej progu masy. W kontekście skyrmionów opiszę promieniowanie kompaktów i ograniczenia przybliżenia zwanego modelem Derricka. Poruszę również zagadnienie modów kwazinormalnych. Kolejna część dotyczyć będzie ujemnego ciśnienia promieniowania poprzez sprzężenie pomiędzy kanałami o różnych relacjach dyspersji. Najważniejszy przykład opisuje rolę jaką ciśnienie promieniowania może odgrywać w przypadku układu wielu defektów topologicznych, takich jak kinki i ścianki domenowe w jedno i wielowymiarowym modelu ϕ^6 . Ostatnia część dotyczyć będzie silnie nieliniowych efektów pojawiających się w kontekście zderzeń, anihilacji i kreacji par kink–anty kink oraz roli jaką struktura spektralna małych drgań odgrywa w kontekście tych zjawisk.

Rola defektów i solitonów w fizyce

Solitony w fizyce matematycznej stały się niezwykle popularne za sprawą modeli całkowalnych. Dzięki całkowalności można znaleźć interesujące, nietrywialne rozwiązania analitycznie bez konieczności odwoływania się do metod perturbacyjnych, które wielokrotnie okazywały się zawodne. Pomimo swoich ogromnych zalet, modele całkowalne są w pewien sposób ograniczone do opisu najprostszych, wyidealizowanych zjawisk. Przykładowo, w tego typu modelach, zderzenia pomiędzy solitonami są jedynie całkowicie elastyczne, a sektor fal czy małych drgań jest praktycznie całkowicie odseparowany od solitonowych stopni swobody.

Wraz z pojawieniem się szybszych komputerów i rozwojem numerycznych technik obliczeniowych, całkowalność straciła częściowo swoje uprzywilejowane znaczenie i zaczęto badać intensywnie modele niecałkowalne. Metody numeryczne dostarczyły narzędzi do kontrolowania obliczeń perturbacyjnych a także do znajdowania ciekawych rozwiązań będących daleko poza zasięgiem metod analitycznych. I właśnie takie połączenie metod numerycznych i analitycznych stanowi podstawę moich metod badawczych. W badaniach skupiam się głównie na modelach niecałkowalnych i problemach, które częściowo można badać analitycznie. Jeśli chodzi o tematykę to przeważają modele proste i wielokrotnie badane, w których występują niejednokrotnie uniwersalne, choć nie-trywialne efekty. Pomimo, iż modele te były w centrum zainteresowania badaczy przez wiele dekad, to udało mi się znaleźć kilka ciekawych, nieznanych wcześniej efektów. Co więcej, część z tych odkryć można zastosować również w przypadku innych, bardziej skomplikowanych modeli mających większy związek z rzeczywistością.

4.3.2. Relaksacja

Niektóre solitony, zwane defektami topologicznymi, na mocy twierdzenia Derricka, są stacjonarnymi rozwiązaniami równań pola, często minimalizującymi energię przy danym ładunku topologicznym. Zaburzone solitony oddają energię i asymptotycznie dążą do rozwiązań o najniższej energii. Proces pozbywania się nadmiarowej energii nazywa się procesem relaksacji i ma ogromne znaczenie w fizyce. W przypadku modeli, dla których energia jest całką ruchu, proces relaksacji polega na wypromieniowaniu energii do nieskończoności. Analizując promieniowanie można poznać wiele właściwości obiektu, który to promieniowanie wysyła.

W modelach, badanych przeze mnie, największą rolę odgrywa struktura spektralna małych drgań. Przy założeniu, że zaburzenie jest bardzo małe, zasadnym wydaje się użycie technik perturbacyjnych. Analizując stabilność obiektów rozwiązuje się równania zlinearyzowane, podobne do równania Schrödingera, z tą tylko różnicą, że zamiast energii mamy do czynienia z pewną funkcją częstości (np. ω^2). Tak samo jak w przypadku równania Schrödingera, spektrum rozwiązań podzielone jest na mody związane i rozproszeniowe. Jak sama nazwa wskazuje, mody rozproszeniowe opuszczają okolice solitonu bardzo szybko. Prędkość grupowa fal, $v_{gr} = d\omega/dk$, w przypadku masowego pola typu Kleina-Gordona ($k^2 = \omega^2 + m^2$ dla $c = 1$) równa jest $v_{gr} = k/\omega$, co oznacza, że najwolniej okolice solitonu opuszczać będą fale o małym wektorze falowym $k \rightarrow 0$. Innym wyjątkiem są tak zwane mody rezonansowe, zwane również modami kwazinormalnymi lub po prostu kwazimodami. Są to mody, które dość długo pozostają w pobliżu źródła potencjału. Zanikają eksponencjalnie w czasie. Matematycznie spełniają warunek fali wychodzącej, czym łamią hermitowskość operatora liniowego (analogu hamiltonianu w równaniu Schrödingera). Z tego powodu opisywane są jako rozwiązania o zespolonej częstości. Można je również opisywać jako bieguny funkcji Greena lub punkty gdzie Wrońskian zanika (rozwiązania przestają być niezależne). Inną ważną klasą rozwiązań są mody związane, które w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń oscylują ze stałą częstością i amplitudą. Po uwzględnieniu wyższych rzędów mody te zanikają w czasie. W

przypadku niektórych solitonów, szczególnie defektów o wyższym niż jeden ładunku topologicznym, możliwe są również mody niestabilne o urojonych częstościach, prowadzących do zaburzeń narastających w czasie. W efekcie np. wortex o liczbie nawinięć dwa rozpada się na dwa wortexy o liczbie nawinięć równej jeden.

Promieniowanie modów oscylacyjnych

Jak wspomnieliśmy powyżej, mody oscylacyjne są szczególnymi rozwiązaniami zlinearyzowanych równań wokół solitonu. Uwzględniając jedynie pierwszy rząd rachunku zaburzeń, mody te pozostają związane wiecznie i oscylują ze stałą częstością i amplitudą. Modele opisujące solitony są jednak nieliniowe i poprawki wyższych rzędów powinny być uwzględniane. Takim sztywnym przykładem, badanym w literaturze [7], jest zanik modu oscylacyjnego w teorii 1+1 wymiarowego pola skalarnego ϕ^4 opisanym lagranżjanem o gęstości

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\phi_t^2 - \frac{1}{2}\phi_x^2 - U(\phi), \quad U(\phi) = \frac{1}{2}(\phi^2 - 1)^2. \quad (1)$$

Model posiada dwie próżnie $\phi_{vac} = \pm 1$. Soliton występujący w tym modelu $\phi_K(x) = \tanh x$ posiada jeden mod oscylacyjny o częstości $\omega = \sqrt{3} < m$ (parametr masowy $m = U''(\phi_{vac})$ będą często nazywał masą małych drgań, masą zaburzenia, masą fali lub po prostu masą pola; w modelu ϕ^4 numeryczna wartość $m = 2$). Na skutek nieliniowego sprzężenia z modami ze spektrum ciągłego powstaje promieniowanie o częstości $2\omega > m$ unoszące energię z modu oscylacyjnego, powodując jego zanik. Zanik ten można bardzo prosto wyznaczyć biorąc pod uwagę, że sam mod ma energię proporcjonalną do kwadratu amplitudy $E \sim A^2$. Fala powstała na skutek nieliniowego (kwadratowego) sprzężenia ma amplitudę również rzędu $a \sim A^2$, ale strumień energii unoszony przez tę falę jest już proporcjonalny do czwartej potęgi amplitudy modu oscylacyjnego co prowadzi do następującej relacji:

$$\frac{dE}{dt} \sim -A^4 \sim \frac{dA^2}{dt} \Rightarrow A(t) \sim t^{-1/2}. \quad (2)$$

Dokładny współczynnik obliczony był w pracy [7]. W mojej pierwszej pracy [D1], jeszcze w czasie doktoratu, badałem dokładniej tę relację uwzględniając między innymi odpowiednie warunki początkowe. Na bardzo ciekawy problem natknęliśmy się badając zmodyfikowany model ϕ^4 [H8]. Modyfikacja polegała na wprowadzeniu warunków brzegowych Neumana $\phi_x(0,t) = H$ oraz zawężeniu dziedziny do $x \in (-\infty, 0]$. Rozwiązania stacjonarne spełniający powyższy warunek można było otrzymać przesuwając soliton (kink) w odpowiednie miejsce $\phi_B(x) = \tanh(x - X_0)$. Można powiedzieć, że odpowiednie rozwiązania stacjonarne były fragmentami kinku. Modyfikacja ta wprowadzała też istotne zmiany jeśli chodzi o mod oscylacyjny. Aby warunki nie zostały zakłócone, małe drgania $\phi(x,t) = \phi_B(x) + \eta(x,t)$ muszą spełniać warunek brzegowy $\eta_x(0,t) = 0$. W efekcie częstość drgań modu oscylacyjnego ulega zmianie i, w zależności od parametru H , może przyjmować wartości od 0 do $m = 2$. Gdy częstość spadnie poniżej $m/2$ to drgania o częstości $2\omega < m$ również nie mogą się propagować. Zanik modu oscylacyjnego powodowany jest dopiero poprzez sprzężenie z trzecią har-

moniczną, które pojawia się trzecim rzędzie rachunku zaburzeń. Zależność czasową można opisać jako

$$\frac{dE}{dt} \sim -A^6 \sim \frac{dA^2}{dt} \Rightarrow A(t) \sim t^{-1/4}. \quad (3)$$

Sytuacja może się oczywiście powtarzać, gdy wyższe harmoniczne znajdują się pod progiem masy. Jeśli przez n oznaczymy pierwszą propagującą się harmoniczną to

$$A(t) \sim t^{-\frac{1}{2(n-1)}} \quad \text{dla} \quad \frac{m}{n+1} < \omega < \frac{m}{n}. \quad (4)$$

Sam proces jest jednak jeszcze bardziej skomplikowany. Trudnością w potwierdzeniu tej zależności jest obecność wolno propagujących się modów na progu masy, które przy generycznych danych początkowych pojawiają się praktycznie zawsze i zazwyczaj zanikają jak $t^{-1/2}$. Mogą one jednak się sprzegać zarówno z modami oscylacyjnymi jak i wyższymi harmonicznymi.

Najciekawszym wynikiem naszej pracy było odkrycie niemonotonicznej relaksacji. Zmiana parametrów modelu takich jak warunek brzegowy $\phi_x(0, t) = H$ nie jest jedynym sposobem obniżenia częstości oscylacji modu. Również nieliniowości mogą obniżyć częstość drgań, tak jak ma to miejsce w przypadku oscylatora anharmonicznego. Mod oscylacyjny, który w przybliżeniu liniowym ma częstość nieco większą niż $m/2$, może zostać wzbudzony na tyle silnie, że jego częstość obniży się poniżej $m/2$. Wówczas również druga harmoniczna schodzi poniżej progu masy i nie może się propagować. Zanik takiego modu początkowo jest wolny $A(t) \sim t^{-1/4}$. Prowadzi on jednak do obniżenia amplitudy, a co za tym idzie do wzrostu częstości. W pewnym momencie częstość przekracza wartość $m/2$, a druga harmoniczna wynurza się ponad próg masy i zaczyna się propagować. Szybkość relaksacji wzrasta Rys. 1a). Daleko od solitonu takie przejście może zostać zaobserwowane jako nagły rozbłysk promieniowania Rys. 1c).

Należy zaznaczyć, że opisany przez nas mechanizm jest generyczny i nie ogranicza się jedynie do tego prostego modelu. Obserwowaliśmy podobne zachowanie w przypadku modu oscylacyjnego skyrmionu (praca w arXiv [X2]) i w przypadku pola zewnętrznego [X3]. Pracujemy obecnie również nad pewnym uproszczonym modelem – wahadłem sprzężonym z polem Kleina-Gordona, gdzie dużo łatwiej można kontrolować dane początkowe i sprzężenie pomiędzy modami, a także obserwować wiele przejść w trakcie jednej ewolucji.

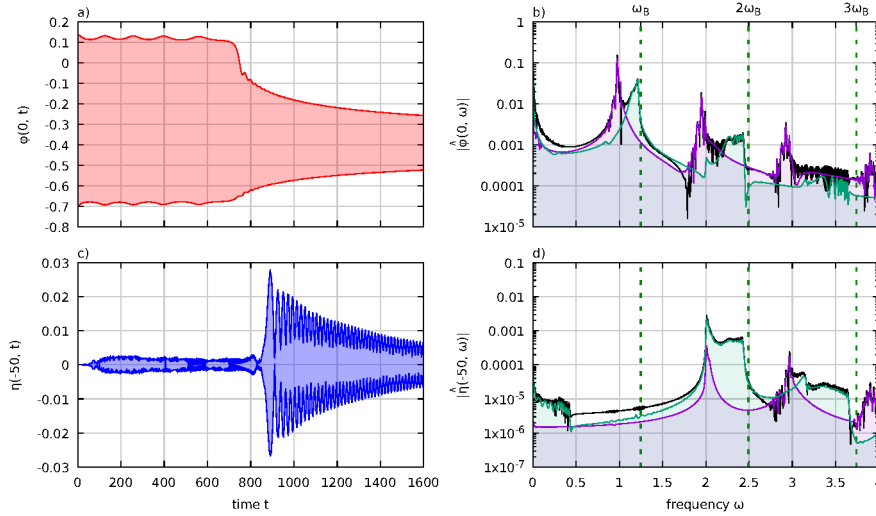
Mody rezonansowe na przykładzie skyrmionów

Uogólniony model Skyrme'go można zapisać jako

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_6 \quad (5)$$

gdzie indeksy oznaczają potęgę pochodnych pola $U \in SU(2)$, przy czym $\mathcal{L}_{\text{Sk}} = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_4$ jest oryginalnym modelem Skyrme'go. $\mathcal{L}_0 = -\lambda_0 \mathcal{U}(U)$ jest potencjałem.

W pracy [H7] badaliśmy radialne wzbudzenia modelu BPS $\mathcal{L}_{\text{BPS}} \equiv \mathcal{L}_6 + \mathcal{L}_0$. W tym podmodelu klasyczne energie wiązań skyrmionów o dużej liczbie barionowej są równe zeru. Oryginalny model



Rysunek 1: (a) Ewolucja modu oscylacyjnego (c) promieniowanie zmierzone w dużej odległości oraz widmo mocy (b) i (d). Widać wyraźnie moment przejścia, gdy druga harmoniczna nagle zaczyna się propagować. Kolor fioletowy na (b) i (d) oznacza widmo przed przejściem, kolor zielony po. ω_B - częstość wyznaczona z linearyzacji.

Skrymego miał problem odwrotny, gdyż energie wiązań były zbyt duże. Model BPS ma jeszcze jedną bardzo ważną własność. W przypadku pola o symetrii sferycznej

$$U = e^{i\xi\vec{\tau}\cdot\vec{n}}, \quad (6)$$

gdzie $\vec{n}$ jest wektorem radialnym, a τ_i macierzami Pauliego, równanie opisujące profil skrymionu $\xi(r)$ można sprowadzić do równania pierwszego rzędu. Równania pola zapisane w nowej zmiennej połowej χ

$$\chi = \frac{1}{2} \left(\xi - \frac{1}{2} \sin 2\xi \right) \quad (7)$$

mają niezwykle prostą postać.

$$\chi' = \pm \frac{2r^2}{Bl^3} \sqrt{U}, \quad (8)$$

gdzie B i l - pewne stałe. Ponadto dla szerokiej klasy potencjałów można znaleźć statyczne rozwiązania w postaci analitycznej (B i l pewne stałe). Taką klasą, badaną przez nas w omawianej pracy, były potencjały typu

$$\mathcal{U} = \chi^{2a}. \quad (9)$$

Dla $0 < a < 1$ rozwiązaniem statycznym jest kompakton. Dosyć zaskakującym przypadkiem jest przypadek gdy $a = 1$. Pełne równania ruchu są liniowe w zmiennej χ . W szczególności równanie

opisujące profil skyrmionu, jest liniowe a jego rozwiązanie przyjmuje bardzo prostą postać

$$\chi_s(r) = \frac{\pi}{2} e^{-\frac{2r^3}{3Bl^3}}. \quad (10)$$

Dla $r \rightarrow \infty$ zlinearyzowany potencjał generowany przez skyrmion (formalnie potencjał nie zależy od $\chi_s(r)$ a posiada jedynie człon związany z założoną symetrią) również dąży do nieskończoności. Model posiada nieskończenie wiele stanów związanych. Jednak, ze względu na liniowy charakter modelu, mody te ani nie promieniują ani nie oddziałują ze sobą w żaden sposób.

Dla $a > 1$ statyczne rozwiązania dążą do zera potęgowo $\chi_s \sim r^{-3/(a-1)}$.

Zlinearyzowany potencjał (zależny już od χ_s) w nieskończoności zanika. Dla wartości parametru a bliskich 1 potencjał początkowo wygląda bardzo podobnie jak w przypadku $a = 1$, ale w pewnej odległości osiąga maksimum (próg), po którym spada monotonicznie do zera. Stany związane z przypadku $a = 1$ stają się modami rezonansowymi, przy czym, te stany, których częstotliwości znajdują się poniżej progu są bardzo wąskie. Mody znajdujące się powyżej progu zanikają bardzo szybko.

Mody rezonansowe mogą być istotne zarówno z punktu widzenia kwantyzacji jak i (w przybliżeniu klasycznym) tzw. rezonansów Ropera, którego rozpad prowadzi do emisji pionu [8]. Pewna niezwykła cecha rezonansu w modelu bez potencjału (dla $m = 0$) była badana w [9]. W trakcie ewolucji, po pewnym czasie, gdy rezonans zanikł eksponencjalnie do bardzo małej amplitudy schemat zaniku zmieniał się dramatycznie. Zamiast eksponencjalnie zanikających drgań zaobserwowano ogon zanikający potęgowo. Był to efekt nieliniowy.

W pracy badaliśmy również dynamikę, rozwiązując równania pełne ruchu dla warunków początkowych odpowiadających ściśniętemu skyrmionowi a następnie porównywaliśmy wyniki (np. spektrum mocy) z analizą struktury spektralnej małych drgań. Największym wyzwaniem było jednak znalezienie modów kwazinormalnych, rozwiązując numerycznie zlinearyzowane równania. Opracowaliśmy w tym celu własną metodę wzorowaną na tzw. foliacjach hiperbolicznych. Nasza metoda była bardziej dostosowana do potencjału, dzięki czemu błędy obliczeniowe były mniejsze.

W przypadku dużych zaburzeń częstość drgań ulegała zmianie. Dla $a > 1$ częstość malała wraz z amplitudą zaburzenia, w przypadku kompaktów ($a < 1$) częstość rosła wraz z amplitudą.

Relaksacja kompaktów

Jednym z aspektów pracy [H7] była analiza założenia twardej powierzchni (*hard wall limit*) dla kompaktów. Kompakty są to solitony, które mają ściśle zwarty nośnik ($\chi_s \sim (R - r)^{3/(1-a)}$ dla $r \rightarrow R^-$). Poza granicą kompaktu $r > R$ pole osiąga ściśle wartość próżniową $\chi_s = 0$. Małe drgania wokół próżni są opisywane przez równania nieliniowe i zazwyczaj przy rozważaniach są pomijane. Zakłada się, że istnieją jedynie mody, które gładko znikają na powierzchni. Takie ograniczenie wprowadza dyskretyzację spektrum małych drgań. Jednak fizycznie, powierzchnia kompaktu nie jest sztywną powłoką. Równania ruchu nie zakazują jej przemieszczania się. Faktem jest natomiast, że zlinearyzowane równania przestają mieć sens w pobliżu powierzchni. Dla dowolnie małej amplitudy zaburzenia istnieje wąska powłoka, wewnątrz której zaburzenie jest

większe niż rozwiązanie, wokół którego się zaburza. Wyjątek stanowią zaburzenia odpowiednio szybko znikające przy powierzchni. W przypadku dowolnego zaburzenia założenie to nie jest prawdziwe. Nasze symulacje numeryczne potwierdziły, że z powierzchni kompaktanu odrywają się fale, które następnie propagują się. Opisywane one są równaniami nieliniowymi. Wewnątrz kompaktanu pozostają drgania z dyskretnego spektrum wyznaczonego przez warunek twardego brzegowe. W przypadku kompaktanu zatem jego powierzchnia działa jak filtr pozostawiający wewnątrz jedynie drgania o określonej częstotliwości. Widmo mocy rozwiązań pełnego nieliniowego równania cząstkowego dla warunków początkowych odpowiadających ściśniętemu kompaktonowi pokazało, że w wewnątrz kompaktanu faktycznie dominują częstotliwości otrzymane z przybliżenia twardego brzegu.

Mod Derricka

Defekty topologiczne zawdzięczają swoją stabilność zarówno ładunkowi topologicznemu jak i równowadze pomiędzy częścią kinetyczną i potencjalną energii. Gdy soliton ulega jednorodnemu ściśnięciu lub rozciągnięciu $x \rightarrow \lambda x$ jego energia wzrasta. Szczegółowo o tym mówi twierdzenie Derricka [10]. Często korzysta się z uproszczenia polegającego na założeniu, że pod wpływem zaburzenia soliton reaguje sztywno kurcząc się i rozciągając jednorodnie. Wprowadzając zmienną kolektywną $q(t)$ opisującą stopień tego ściśnięcia $x \rightarrow x/(1+q(t))$ oraz całkując gęstość lagrangianu można otrzymać pewien efektywny lagrangian dla zmiennej $q(t)$. Ograniczając się do wyrazów kwadratowych w q można otrzymać lagranżjan oscylatora harmonicznego oscylującego z pewną charakterystyczną częstotliwością ω zależną jedynie od pewnych globalnych właściwości solitonu. Mając dany profil solitonu $\phi(x)$ można łatwo otrzymać profil modu Derricka

$$\eta_D(x) = -\frac{d}{dq}\phi\left(\frac{x}{1+q}\right)\bigg|_{q=0} = x\phi'(x). \quad (11)$$

Tego typu drgania w literaturze często uznaje się za drgania własne.

Z oczywistych względów jest to jedynie przybliżenie, które bardzo często nie musi być dobrze uzasadnione. Wiadomo, że drgania własne są związane raczej z modami oscylacyjnymi, których soliton nie musi posiadać, może posiadać jeden lub wiele, nawet nieskończenie wiele. Czasami taki mod można dość łatwo utożsamić z tzw. modem kształtu *shape mode*, który zmienia kształt solitonu w taki sposób, że wydaje się jakby soliton był ściskany. Przykładem takiego modu może być znany mod oscylacyjny kinku w ϕ^4 oscylujący z częstotliwością $\omega = \sqrt{3}$, którego profil dany jest jako $\eta_0(x) = \tanh(x)/\cosh(x)$. Mod Derricka zaś oscyluje z częstotliwością $\omega_D = \sqrt{12/(\pi^2 - 6)} \approx \sqrt{3.101}$ i ma profil $\eta(x) = x/\cosh(x)$. Dodatkowo można pokazać, że te mody przekrywają się w 98%. Widać zatem, że jako przybliżenie taka prosta analiza czasami może mieć sens.

Jako kontrprzykład może posłużyć inny niezwykle często badany model – model sinus-Gordona. Soliton nie ma żadnego modu oscylacyjnego, jednak mod Derricka istnieje i jego częstotliwość wynosi $\omega_D = 2\sqrt{3}/\pi \approx 1.1027$ i jest 10% powyżej progu masy w tym modelu. W pracy badaliśmy również model *double sinus-Gordona*, który jest blisko spokrewniony z modelem sG, ale zawiera

pewien dodatkowy człon, łamiący całkowalność. Dla pewnych parametrów modelu, mod oscylacyjny istnieje i może być powiązany z modem Derricka. Dla innych parametrów nie ma modów oscylacyjnych. Próbowaliśmy również powiązać mod Derricka z modem rezonansowym, który udało nam się znaleźć dla niektórych parametrów modelu. Jednak różnice częstości były zbyt duże.

Mody Derricka często rozważa się w kontekście skyrmionów. Obiekty te zachowują się dość sztywno, a równania mogą stwarzać pewne problemy obliczeniowe. Ponadto drgania takie są związane z drganiami w modelu kropłowym nukleonu traktującym materię jądrową jako ściśliwą ciecz (*giant monopole vibrations*). W zależności od parametru a modelu (9) można było badać modele posiadające rozwiązania kompaktonowe lub zwykłe skyrmiony. W przypadku kompaktonów mod Derricka bardzo dobrze pasował do najniższego modu oscylacyjnego. Zwykłe skyrmiony, dla niektórych wartości parametru a , posiadały również mod oscylacyjny, którego częstość była zbliżona do częstości modu Derricka. Gdy parametr a był zwiększany, mod oscylacyjny zamieniał się w mod rezonansowy. Część rzeczywista tego modu była również zbliżona do częstości modu Derricka. Jednak prosta analiza oparta jedynie na zmiennej kolektywnej związanej ze ściskaniem solitonu nie dawała żadnych informacji o czasie życia modu rezonansowego.

4.3.3. Ciśnienie promieniowania

Najczęściej badanymi zagadnieniami dotyczącymi ewolucji solitonów są procesy relaksacji, zderzenia solitonów lub problem rozpraszania fal na solitonie. W teorii rozpraszania najczęściej rozważa się jedynie przybliżenie liniowe zakładając, że soliton jest na tyle ciężkim obiektem, że można go potraktować jako obiekt stacjonarny. Bardzo ciekawe, niekiedy wręcz sprzeczne z intuicją, okazały się wyniki badań dotyczące ruchu solitonu pod wpływem fali.

Modele z wieloma polami

W mojej pierwszej publikacji [D1] oraz w [D2, D4] pokazaliśmy, że jeśli kink w modelu ϕ^4 wystawiony jest na działanie promieniowania to zaczyna przyspieszać. Zaskoczeniem był jednak zwrot tego przyspieszenia. Soliton odczuwał ujemne ciśnienie promieniowania (UCP) i zaczynał poruszać się w stronę źródła promieniowania zamiast, jak podpowiadałaby intuicja, być popychanym przez falę. Kluczem do zrozumienia tego efektu była bezodbiciowość potencjału generowanego przez kink oraz transfer energii do wyższych i szybszych modów na skutek nieliniowości. Mechanizm UCP w przypadku modelu ϕ^4 był pierwszym jaki udało nam się znaleźć. Nie jest to jednak ani najprostszy ani najpowszechniejszy mechanizm. Soliton musi być prawie całkowicie przezroczysty dla promieniowania w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń. Jest to niezwykle rzadka cecha. Przykładowo, potencjał Pöschl-Tellera $V(x) = V_0 \operatorname{sech}^2 x$ jest bezodbiciowy jedynie dla dyskretnych głębokości $V_0 = -n(n+1), n \in \mathbb{N}$. Sama bezodbiciowość w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń też nie gwarantuje, że w modelu występuje UCP. Przykładowo soliton w modelu sinus-Gordona jest przezroczysty, ale ponieważ jest dokładnie przezroczysty w każdym rzędzie rachunku zaburzeń, fala nie może przekazać solitonowi żadnego pędu. Ponadto, ze względu na swój nieliniowy charakter



Rysunek 2: Schemat rozpraszania dla modelu dwukomponentowego w przypadku UCP. Fala padająca zaznaczona jest na pomarańczowo. Nadmiar pędu przy dużym współczynniku $|T_{12}|$ może powodować UCP wywierane na soliton.

UCP w modelu ϕ^4 nie można stosować zwykłej superpozycji. Dodanie drugiej fali, o innej częstotliwości, może doprowadzić do stłumienia, a nie wzmocnienia efektu.

Ogólnie, podstawą ujemnego ciśnienia promieniowania jest przekazanie energii do szybszych, tzn. niosących więcej pędu, kanałów rozproszeniowych. W przypadku ϕ^4 były to fale o większej częstotliwości, a energia była przekazywana na skutek nieliniowości. Jednak w przypadku choćby dwukomponentowego pola opisanego przykładowo lagranżjanem typu

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_1 + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_2 \partial^\mu \phi_2 - U(\phi_1, \phi_2) \quad (12)$$

możliwości jest więcej. Już w rzędzie liniowym, fala padająca na soliton może zamienić się na inną falę o tej samej częstotliwości, ale o innym wektorze falowym. Proces ten można scharakteryzować podając współczynniki przejścia i transmisji do różnych kanałów $(A_l, k_l) \rightarrow \{(R_{ln}, T_{ln}, k_n)\}$.

Gęstość pędu niesiona przez falę w danym sektorze jest równa $\mathcal{P} = -\phi_x \phi_t$, co po uśrednieniu po czasie daje strumień pędu przepływający przez powierzchnię $\langle \mathcal{P}_t \rangle \sim \frac{1}{2} k^2 A^2$, gdzie A jest amplitudą fali, a k jej wektorem falowym. Siła jaka jest wywierana na soliton wynosi

$$F = \frac{1}{2} A_l^2 \sum_n (\delta_{ln} + |R_{ln}^2| - |T_{ln}^2|) k_n^2. \quad (13)$$

Z powyższego wzoru widać, że jeśli współczynniki odbicia są niewielkie, a współczynnik transmisji do komponentu, o większym wektorze falowym będzie dostatecznie duży, to możliwe jest ujemne ciśnienie promieniowania (Rys. 2). W przypadku pól masywnych opisywanych równaniem Kleina-Gordona ($k_n = \sqrt{\omega^2 - m_n^2}$) warunek ten sprowadza się do rozpraszania z pola o większej masie do pola o mniejszej.

Jako pierwszy przykład tego opublikowaliśmy wyniki dotyczące dwukomponentowego uproszczonego modelu będącego sprzężeniem modelu ϕ^4 z polem Kleina-Gordona [H1]:

$$U(\phi_1, \phi_2) = \frac{1}{2} (\phi_1^2 - 1)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi_2^2 + \kappa (\phi_1^2 - 1) \phi_2, \quad (14)$$

gdzie $\kappa \ll 1$ jest stałą sprzężenia, a m masą pola Kleina-Gordona ϕ_2 , która może być dowolnie modyfikowana. Masa pola opisującego model ϕ^4 jest równa 2. Z prostych rozważań można stwierdzić,

że fala poruszająca się początkowo w drugim komponencie, po rozproszeniu na solitonie będzie wywierać dodatnie ciśnienie promieniowania gdy $m < 2$. Dla $m > 2$ sprawa nie jest oczywista i dopiero ilościowe porównanie współczynników rozpraszania daje odpowiedź. W powyższym przypadku rachunek zaburzeń już w pierwszym rzędzie pokazuje, że gdy $m > 2$ to fala ϕ_2 wywołuje ujemne ciśnienie promieniowania. Niestety w pierwszym rzędzie rachunku pojawia się osobliwość gdy $m \rightarrow 2$.

Przyspieszenie znalezione z rozwiązań pełnego nieliniowego układu równań ruchu (Rys. 3) pokazuje dobrą zgodność z przybliżeniem liniowym poza obszarem gdy $m \approx 2$. Zmierzone przyspieszenie zmienia zwrot w pobliżu $m = 2$, co oznacza, że nawet bardzo uproszczona analiza daje poprawne jakościowe przewidywania.

Mechanizm ten można stosunkowo łatwo uogólnić na inne modele mające bardziej bezpośrednie zastosowanie w fizyce. Przedstawiliśmy wstępne wyniki numerycznych symulacji dla worteksów w modelu Goldstone'a i abelowym modelu Higgsa. Worteksy odczuwały ujemne ciśnienie promieniowania, gdy padająca fala miała większą masę niż pola, do których była rozpraszana.

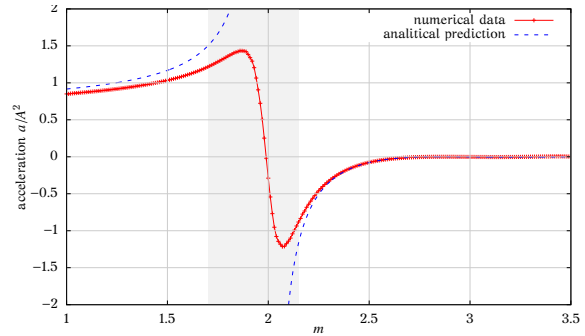
W pracy [H6] pokazano kilka fizycznych przykładów, gdzie powyżej opisany mechanizm może mieć miejsce.

W ośrodku, w którym występuje dwójłomność, fale elektromagnetyczne propagują się z różnymi prędkościami, zależnymi od polaryzacji. Gdy fala o jednej polaryzacji $E_i = E_{x0} \cos(\omega t + k_x z)$ pada na cienką warstwę, w której oś jest obrócona o kąt θ względem reszty ośrodka, jej polaryzacja efektywnie ulega obróceniu. Po przejściu, ma już dwie składowe. Ciśnienie promieniowania wywierane przez zmianę polaryzacji można zapisać bardzo prostym wzorem:

$$p_z = \epsilon_0 |E_{x0}| \left[P_0 + P_1 \cos \left(\frac{n_y - n_x}{c} \omega L \right) \right] \quad (15)$$

gdzie ϵ_0 przenikalność dielektryczna próżni, P_i polaryzacje ośrodków będące funkcjami współczynników załamania n_i i kąta θ . Okazuje się, że UCP powinno dać się zaobserwować przykładowo w ciekłym kryształach 5CB, nawet dla światła widzialnego. Można tak dobrać parametry, że dla warstewki o grubości $L = 0.1 \text{ mm}$ UCP może mieć dość sporą wartość, stanowiącą kilka procent ciśnienia, jakie wywoływałoby promieniowanie padające na doskonałe lustro.

Ujemne ciśnienie promieniowania może być też wywierane w przypadku wielokanałowego rozpraszania na w układach dwuwymiarowych. Korzystając z prawa zachowania pędu $\mathcal{P}_t = -\nabla \mathbf{T}$, gdzie $\mathcal{P}$ jest gęstością pędu, można otrzymać siłę jaką promieniowanie wywiera na rozpraszający



Rysunek 3: Zależność przyspieszenia kinku w zależności od parametru m dla fali ϕ_2 o częstotliwości $\omega = 3.5$.

potencjał

$$\mathbf{F} = - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{\mathbf{T}} \mathbf{e}_r R d\vartheta, \quad (16)$$

gdzie $\mathbf{T}$ tensorem energii-pędu, a kreska oznacza uśrednianie po czasie, r, ϑ oznaczają współrzędne biegunowe. W przypadku n -kanałowego rozpraszania, dla każdej fali parcjalej ℓ można znaleźć $n \times n$ wymiarową unitarną macierz rozpraszania S_ℓ . Wówczas siłę można wyrazić poprzez bardzo proste wyrażenie:

$$\mathbf{F} = F_x + iF_y = -4 \sum_{\ell} \left\{ A^\dagger S_{\ell+1}^\dagger K S_\ell A - A^\dagger K A \right\}, \quad (17)$$

gdzie $A = (A_1, \dots, A_n)^T$ amplitudy fali padającej oraz $K = \text{diag}(k_1, \dots, k_n)$ - macierz wektorów falowych. Taka siła (dodatnie ciśnienie promieniowania) działa, przykładowo, na solenoid w efekcie Aharonova-Bohma. W tym przypadku można znaleźć dokładną analityczną postać siły ($\hbar = 1$):

$$F_{AB} = F_x + iF_y = -4|A|^2 k (e^{-2i\pi\Phi} - 1), \quad (18)$$

gdzie Φ jest strumieniem pola magnetycznego wewnątrz solenoidu. Warto też zwrócić uwagę, że oprócz siły popychającej do przodu (dodatnie ciśnienie promieniowania) występuje również siła popychająca solenoid w kierunku poprzecznym. Jest ona skutkiem złamania symetrii odbiciowej poprzez wyróżnienie kierunku, w którym płynie prąd w solenoidzie.

W dużym uproszczeniu, rozpraszanie na strunach kosmicznych można opisać jako dwukanałowe rozpraszanie Aharonova-Bohma z dodatkowym członem sprzęgającym z polem cechowania

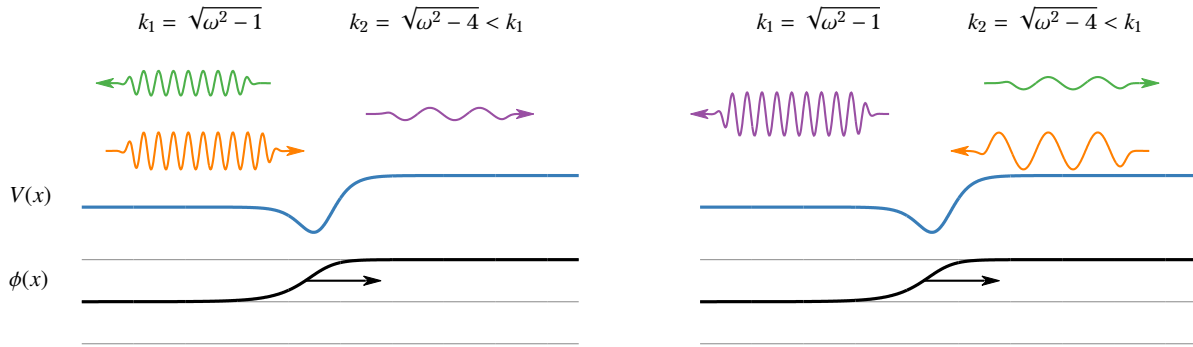
$$\left(\nabla + i\mathbf{A} \frac{\sigma_2}{2} \right)^2 \rho - K^2 \rho = 0, \quad (19)$$

gdzie σ_2 jest macierzą Pauliego. Sprężenie to odpowiedzialne jest za przemiany pomiędzy barionami i leptonami. Przypuszcza się, że proces ten miał szczególne znaczenie w fazie zdominowanej przez tarcie pod koniec ery Wielkiej Unifikacji. Na skutek różnicy mas pomiędzy leptonami i hadronami, można się spodziewać, że występowało ujemne ciśnienie promieniowania przyspieszające struny, zmniejszając efektywnie odczuwane przez nie tarcie.

Ostatnim przykładem omawianym w pracy jest rozpraszanie neutronów na worteksie w dwuwymiarowym modelu XY. Na skutek sprzężenia pomiędzy spinem i polem magnetycznym, efektywna masa neutronu ulega rozszczepieniu na dwie wartości. W wyniku rozpraszania na worteksie, ulega obrotowi spin neutronu, co może prowadzić efektywnie do pojawienia się UCP.

Asymetryczne ścianki domenowe i zanik próżni pod wpływem promieniowania.

Ciekawą konsekwencją ujemnego (i dodatniego) ciśnienia promieniowania jest ewolucja defektów w modelach z asymetrycznymi próżniami [H9]. Jak wspomnieliśmy wcześniej, tego typu modele cieszą się obecnie dość sporym zainteresowaniem [1–6]. Model sinus-Gordona ma nieskończenie wiele nierozróżnialnych próżni z grupą symetrii $\mathbb{Z}$. Model ϕ^4 posiada dwie identyczne próżnie (sy-



Rysunek 4: Schemat rozpraszania w modelu ϕ^6 . Po lewej stronie dodatnie ciśnienie promieniowania, po prawej ujemne. Fala padająca oznaczona jest kolorem pomarańczowym.

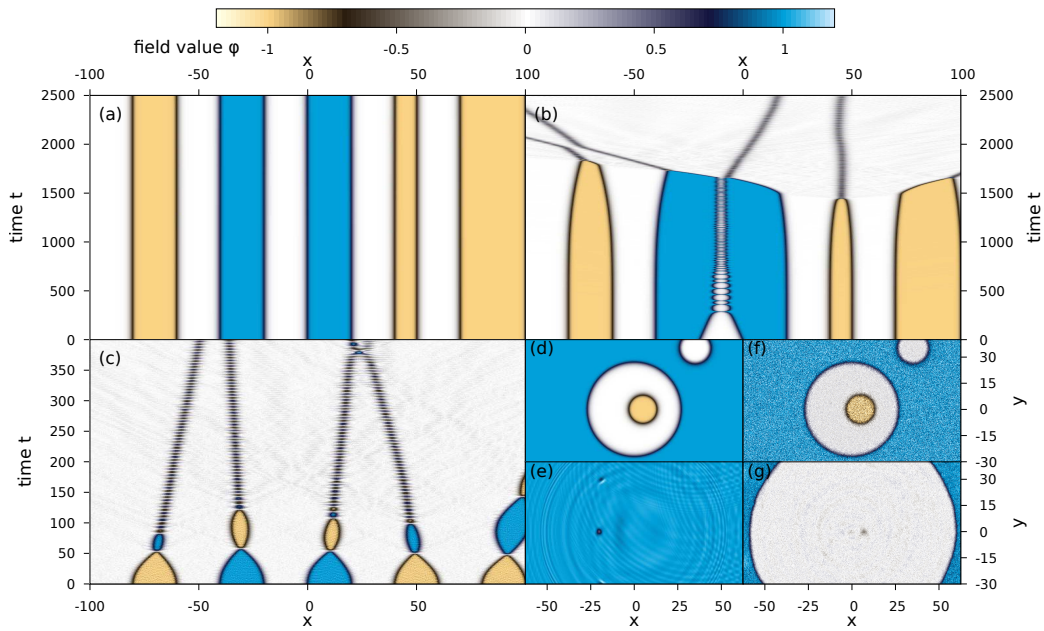
metria $\mathbb{Z}_2$). W przypadku, gdy potencjał jest wielomianem typu $U \sim \prod(\phi - \phi_i)^2$ próżnie ϕ_i nie muszą mieć takich samych własności. W szczególności wszystkie nie mogą mieć identycznych mas. Najprostszy taki model (ϕ^6) opisany jest potencjałem

$$U(\phi) = \frac{1}{2}\phi^2(\phi^2 - 1)^2. \quad (20)$$

Model ten posiada trzy próżnie: dwie $\phi = \pm 1$, wokół których małe drgania mają masę równą $m_{\pm} = 2$ oraz $\phi = 0$, wokół której małe drgania mają masę równą $m_0 = 1$. Statyczne kinki interpolujące pomiędzy sąsiednimi próżniami są stabilne. Ich profile nie są jednak symetryczne.

W świetle poprzednich naszych rozważań można spodziewać się, że fale padające na defekt od strony, gdzie małe drgania mają większą masę będą wywierać ujemne ciśnienie promieniowania (Rys. 4). Fala nadbiegająca od strony próżni, wokół której drgania mają mniejszą masę, będzie powodować dodatnie ciśnienie promieniowania. Efekt ten został potwierdzony obliczeniami analitycznymi, które bardzo dobrze zgadzają się z symulacjami numerycznymi. W efekcie każda fala, o dowolnej częstotliwości powoduje, że kink zaczyna przyspieszać w stronę próżni $\phi = \pm 1$. Co więcej, wynik ten pochodzi ze zlinearyzowanej teorii, więc efekty pochodzące od fal o różnych częstotliwościach będą się sumować. Można zatem uogólnić: każde małe zaburzenie będzie popychać soliton w kierunku próżni o większej masie.

W konkluzjach można posunąć się nawet dalej. W układzie statycznych defektów, każde zaburzenie będzie powodowało, że domeny zawierające próżnię o mniejszej masie będą się rozrastać. Spowoduje to częstsze kolizje pomiędzy kinkami. Zderzenia kinków prowadzą często do anihilacji i powstania dużej ilości promieniowania, które będzie przyspieszać i doprowadzać do jeszcze częstszych zderzeń. Jest to przykład reakcji łańcuchowej. Efekt ten został potwierdzony symulacjami numerycznymi. Gdy układ kinków był pozostawiony bez zaburzenia oddziaływania statyczne pomiędzy nimi były na tyle słabe, że w trakcie długiej ewolucji nie zaobserwowano żadnego istotnego ruchu Rys. 5 (a). Gdy jednak doprowadziliśmy do zderzenia dwóch kinków, promieniowanie powstałe w jego wyniku, doprowadziło do kolejnych zderzeń. Cała struktura bardzo szybko się



Rysunek 5: Przykładowa ewolucja statycznych kinków w modelu ϕ^6 : (a) bez zaburzenia, (b) reakcja łańcuchowa zderzeń, (c) zanikanie próżni $\phi = \pm 1$ pod wpływem losowych fluktuacji. Przykłady ewolucji kolistych domen w 2+1d: bez zaburzenia: (d)→(e), z losowymi fluktuacjami: (f)→(g).

rozpadła i pozostała próżnia $\phi = 0$ wypełniona promieniowaniem i oscylonami, będącymi pozostałościami par kink-antikink Rys. 5 (b). Taki sam efekt przyniosło dodanie zlokalizowanego zaburzenia gaussowskiego lub wypełnienie przestrzeni losowymi fluktuacjami Rys. 5 (c).

W wyższych wymiarach poszczególne domeny oddzielone są ściankami domenowymi. Zamknięte ścianki domenowe nie są stabilne. Na skutek napięcia powierzchniowego koliste lub kuliste ścianki domenowe zapadają się. Siła ściskająca takie domeny, w przeliczeniu na jednostkę długości (lub powierzchni) ścianki, jest odwrotnie proporcjonalna do promienia $F \sim 1/R$ [11]. W symulacjach sprawdziliśmy, że faktycznie wszystkie koliste ścianki się zapadają, w przypadku, gdy w układzie nie ma dodatkowego zaburzenia, Rys. 5(d→e). Mechanizm opisany powyżej działa również w przypadku wielowymiarowych ścianek domenowych. Ciśnienie promieniowania losowych fluktuacji powoduje, że ścianki zawierające próżnię $\phi = \pm 1$ zapadają się szybciej. Małe domeny zamykające próżnię $\phi = 0$ zapadają się wolniej. Duże domeny, o rozmiarach powyżej pewnej krytycznej wartości $R_{crit} \sim 1/\langle A^2 \rangle$, będą rosnąć, Rys. 5(f→g). Jest to zatem bardzo efektywny mechanizm powodujący zanik domen, w których małe zaburzenia mają większą masę ($\phi = \pm 1$). W wyniku ewolucji na skutek małych fluktuacji, próżnia posiadająca drgania o najmniejszej masie ($\phi = 0$) jest preferowana. Jest to, swego rodzaju, złamanie symetrii modelu. Powyższy mechanizm, odpowiednio uogólniony, może dać odpowiedź na pytanie, dlaczego we Wszechświecie nie obserwuje się ani ścianek domenowych ani pozostałości po takich ściankach, pomimo, iż sądzi się, że powinny tworzyć się w

dużych ilościach na skutek mechanizmu Kibbla-Żurka [12].

Oscylony

W naszych pracach wielokrotnie przewijał się wątek oscylonów. Kilka podstawowych własności tych obiektów zostało opisanych w pracy [H2]. Jednym z oryginalnych wyników było zaobserwowanie ujemnego ciśnienia promieniowania również w przypadku tych nietopologicznych obiektów. Oscylony są skomplikowanymi obiektami, których profil oscyluje w czasie. W zależności przyspieszenia od częstości padającej fali, pojawiało się wiele pików rezonansowych. Sugeruje to, że oddziaływanie oscylonu z promieniowaniem jest bardzo nietrywialne. Ze względu na dużą złożoność problemu, nie udało się nam opracować zadowalającego opisu tego zjawiska. Pewnym krokiem w kierunku zrozumienia ciśnienia promieniowania w przypadku obiektów zależnych od czasu jest praca [X1].

Inny ciekawy wynik opublikowany w [H2] dotyczył zderzeń pomiędzy kinkiem i oscylonem. W pewnym sensie można na ten proces patrzeć jako na coś pośredniego pomiędzy zderzeniami defektów a rozpraszaniem fali na solitonie. Oscylon jest silnie nieliniowym obiektem i jest dość dobrze zlokalizowany, z wyjątkiem promieniujących ogonów. Może posiadać dość sporą energię porównywalną z masą samego kinku. Z drugiej jednak strony nie jest całkowicie stabilny, nie spełnia równań Bogomolnego oraz nie posiada ładunku topologicznego. Podczas zderzeń może przekazać część energii własnych oscylacji kinkowi, powodując, że kink po zderzeniu będzie poruszał się szybciej.

4.3.4. Efekty silnie nieliniowe pod wpływem promieniowania

Pokazaliśmy, że fale padając na soliton wywierają pewną siłę, która przyspiesza soliton jako całość. Nie jest to jednak jedyny efekt jaki fala może wywierać na soliton. W [X1] pokazaliśmy, że fala padająca może być absorbowana przez soliton wektorowy w jednym sektorze. W drugim zaś interakcja prowadzi do emisji wymuszonej. W efekcie struktura solitonu ulega zmianie. Inny, podobny przykład został opisany w [D3], jako część mojej pracy doktorskiej. Kink w modelu ϕ^4 , a raczej mod oscylacyjny kinku, absorbował energię z fali na skutek rezonansu parametrycznego. Amplituda modu mogła wzrosnąć na tyle, że dochodziło do kreacji pary kink-anty-kink.

Kreacja poprzez oscylon

Sytuacja nieco się komplikuje, gdy fale biegnące z naprzeciwka zderzają się w próżni, w miejscu gdzie nie ma żadnego defektu. Nie ma wówczas modu oscylacyjnego, który mógłby powoli gromadzić energię i doprowadzić do kreacji nowych defektów. Jednak w środku masy tworzy się obszar o zwiększonej gęstości energii. Takie lokalne zwiększenie gęstości energii może prowadzić do powstania oscylonu [H3]. Oscylony są obiektami stabilizowanymi przez nieliniowości, które posiadają bardzo długi, praktycznie nieskończony czas życia. Bardzo powoli rozprzeczają się i im mają mniejszą amplitudę tym są bardziej zdelokalizowane. W trakcie ewolucji wypromieniowują energię,

a podstawowa częstość ich drgań rośnie oraz w przypadku jednowymiarowego modelu ϕ^4 , zbliża się od dołu do progu masy. W pewnym sensie oscylony są bardzo zbliżone do oddychaczy (*breathers*) znanych z modelu sinus-Gordona, z tą jednak różnicą, że promieniają i powoli zanikają. Taki oscylon utworzony w środku masy zderzających się fal może stanowić załazek, który w podobny sposób jak mod oscylacyjny kinku gromadzi energię i może doprowadzić do kreacji pary kink-anty-kink. Tak jak w przypadku opisanym w [D3], tak i w tym, proces kreacji jest chaotyczny. Istotną różnicą jest natomiast nieliniowy charakter oscylonu. Aby opisać najważniejsze cechy dynamiki można przyjąć, że pole można zapisać jako

$$\phi = 1 + \frac{A(t)}{\cosh(x/x_0)} + \xi(x, t) \quad (21)$$

gdzie A - amplituda oscylonu, x_0 jego szerokość, ξ pole opisujące padającą falę. Po całkowaniu po zmiennej przestrzennej, efektywny lagranżjan przyjmuje następującą postać

$$L_{eff} = L_A + L_\xi + L_{int}, \quad (22)$$

gdzie

$$L_{eff} \sim \dot{A}^2 - \left(4 + \frac{1}{3x_0^2}\right) A^2 - \pi A^3 - \frac{2}{3} A^4 \quad (23)$$

a część odpowiedzialną za oddziaływanie fali i oscylonu jest

$$L_{int} = \alpha(t)A(t) + \beta(t)A^2 + \gamma(t)\dot{A} + O(A^3) + O(\xi^2) \quad (24)$$

gdzie α, β, γ to pewne funkcje związane z padającą falą zawierającą człony zależne od czasu $\sim \cos \omega t$.

Efektywne równanie zawiera częstość podstawową $\Omega_0 = \sqrt{4 + 1/(3x_0^2)}$, która jest większa niż próg masy $m = 2$, lecz na skutek nieliniowości jest obniżona do wartości poniżej m . Daje to pewne ograniczenie na minimalną amplitudę wzbudzenia przy stałym x_0 . Poprzez oddziaływanie z padającą falą amplituda oscylonu może wzrosnąć (również na skutek rezonansu parametrycznego). Po przekroczeniu pewnej krytycznej wartości nagromadzona energia może zostać uwolniona w postaci pary kink-anty-kink. Ten uproszczony obraz dość dobrze odtwarza wiele cech pełnego procesu teoriopolowego.

4.3.5. Rola małych drgań w zderzeniach solitonów

Fizycy lubią zderzać różne rzeczy. Zderzając cząstki, takie jak elektrony czy hadrony, można bardzo dużo się dowiedzieć o ich strukturze i własnościach. Nie inaczej jest z solitonami. Istnieje, co prawda, pewna klasa modeli, w których zderzenia są doskonale elastyczne. Prędkości po zderzeniu są dokładnie takie same jak przed, a trajektorie solitonów są jedynie lekko przesunięte. Dzieje się tak w modelach całkowalnych opisywanych przez równania takie jak równanie sinus-Gordona

czy równanie KdV. Oczywiście w modelach niecałkowalnych zderzenia nie są już elastyczne. W ich trakcie może dochodzić do emisji promieniowania unoszącego energię. Solitony, z definicji, są obiektami stabilnymi i mało wrażliwymi na różnego rodzaju zaburzenia. Jednak wynikiem zderzenia może być zmiana struktury solitonów lub całkowita ich anihilacja. Jednym z najciekawszych wyników badań było odkrycie struktury rezonansowej [13,14]. Okazało się, że w modelu ϕ^4 kink i antykink po pierwszym zderzeniu mogą zawrócić, zderzyć się ponownie a następnie oddalić do nieskończoności. Na diagramie zależności prędkości końcowej od prędkości początkowej można zaobserwować całą, praktycznie nieskończoną, strukturę tzw. okien dwudbiciowych. Każde okno ma swój charakterystyczny czas powrotu będący całkowitą wielokrotnością pewnej stałej wielkości. Takich powrotów i zderzeń może być znacznie więcej. Każde okno dwudbiciowe otoczone jest przez dwie struktury okien trójdbiciowych, każde okno trójdbiciowe otoczone jest przez dwie struktury okien czteroodbiciowych itd. Pojawia się bardzo charakterystyczna struktura fraktalna. Pomiędzy oknami i poniżej pewnej krytycznej prędkości $v = 0.18$ para kink-antykink wiąże się tworząc tzw. *bion*, blisko spokrewniony z *oscylonem*. Powyżej $v = 0.26$ defekty po zderzeniu oddalają się swobodnie do nieskończoności po pierwszym odbiciu.

Wyjaśnienie tej sytuacji okazało się stosunkowo proste. Defekty, podczas zderzeń, przekazują energię do modów oscylacyjnych. Energia ta może zostać wypromieniowana lub w sprzyjających warunkach oddana z powrotem do translacyjnych stopni swobody solitonów. Dodatkowym faktem, przemawiającym za tym wyjaśnieniem było to, że charakterystyczny czas pomiędzy kolejnym zderzeniami zawsze był wielokrotnością okresu właśnie modu oscylacyjnego.

Od momentu odkrycia struktura ta przyciągała uwagę wielu badaczy, tworzone modele efektywne opisujące zderzenia w oparciu o zmienne kolektywne, takie jak wzajemna odległość solitonów czy wzbudzenie modu oscylacyjnego. Badano też również inne modele takie jak *double sine-Gordon* [15] czy sprzężone nieliniowe równanie Schrödingera [16–18], które są niecałkowalnymi wersjami znanych modeli całkowalnych. Struktura rezonansowa pojawiała się praktycznie zawsze, gdy solitony posiadały mod oscylacyjny, czasami zanikała gdy modów było zbyt dużo. Utało się jednak przekonanie, że istnienie modu jest warunkiem koniecznym istnienia okien wieloodbiciowych.

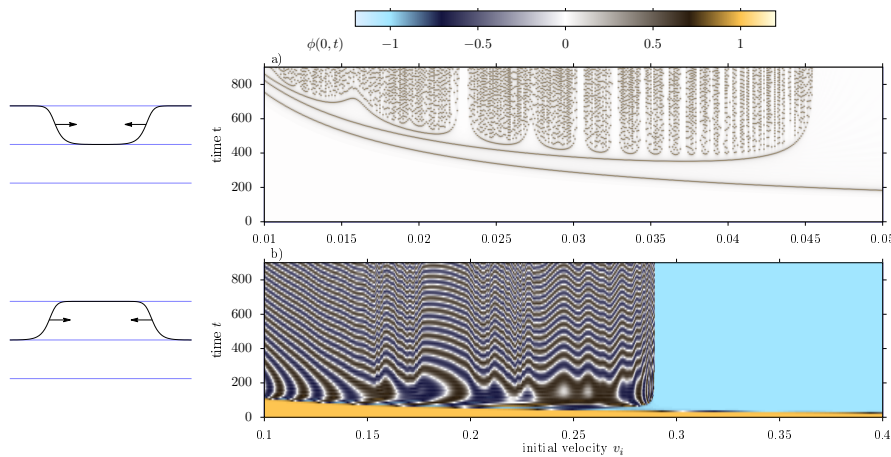
Mody pomiędzy solitonami

W kontekście powyższych badań, ogromnym zaskoczeniem było, gdy zaobserwowaliśmy podobną strukturę fraktalną w niepozornym modelu ϕ^6 opisywanym przez gęstość lagrangianu [H4]:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\phi_t^2 - \phi_x^2 - \frac{1}{2}\phi^2(\phi^2 - 1)^2. \quad (25)$$

Statyczne defekty, interpolujące pomiędzy dwiema spośród trzech próżni $\{-1, 0, 1\}$, są asymetryczne

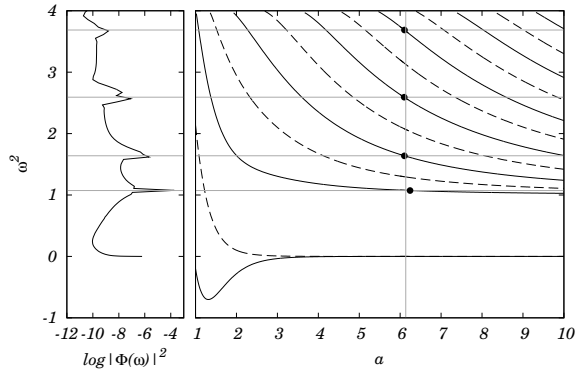
$$\phi(x) = \pm \sqrt{\frac{1 \pm \tanh x}{2}}. \quad (26)$$



Rysunek 6: Dwa typy zderzeń (tych samych kinków) w modelu ϕ^6 : (a) $(1,0) + (0,1)$ oraz (b) $(0,1) + (1,0)$. Lewa kolumna pokazuje początkowe ustawienie kinków, prawa zależność pola w środku masy $\phi(0,t)$ w zależności od czasu i początkowej prędkości. W pierwszym przypadku (a) widoczna skomplikowana struktura rezonansowa.

Defekty te wygodnie jest oznaczać wartościami próżni początkowej i końcowej. Przykładowo $(-1,0)$ oznacza kink taki, że $\phi(-\infty) = -1$ i $\phi(\infty) = 0$. Zderzenie typu $(1,0) + (0,1)$ może zakończyć się anihilacją pary lub odbiciem. Te dwa scenariusze przeplatają się tworząc strukturę fraktalną (Rys. 6 a).

Kolejnym ciekawym faktem było to, że zderzając defekty przy innym ustawieniu np. $(0,1) + (1,0)$, którego efektem końcowym może być anihilacja lub odbicie $(0,-1) + (-1,0)$, struktury takiej nie zaobserwowaliśmy (Rys. 6 b).



Rysunek 7: Widmo mocy drgań pola uwięzionego pomiędzy solitonami (lewy panel), struktura spektralna drgań pomiędzy solitonami jako funkcja odległości pomiędzy defektami (prawy panel).

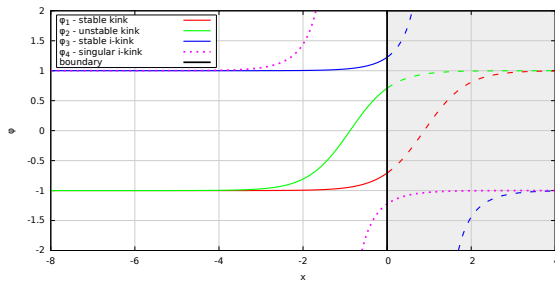
Analiza małych drgań wykazała, że kinki nie posiadają żadnych modów oscylacyjnych, zatem w świetle poprzednich badań, struktury fraktalnej nie powinno się zaobserwować w żadnym przypadku. Kluczem do zrozumienia okazała się asymetria defektów. Nie tylko same kinki, ale również zlinearyzowany potencjał, przez nie generowany, był asymetryczny. Przy jednym ustawieniu pojawiała się jama potencjału, gdzie mogły już tworzyć się mody oscylacyjne. Przy odwrotnym ustawieniu zamiast jamy pojawiała się górka potencjału i mody nie mogły się pojawić. Charakterystyczny czas pomiędzy odbiciami był wielokrotnością okresu najniższego modu przy pewnej odległości (Rys. 7).

Przedstawiony przez nas mechanizm nie wy-

maga istnienia modu oscylacyjnego, lecz jedynie pewnej asymetrii defektów i jest stosunkowo ogólny. W ostatnich latach wzrosło zainteresowanie modelami, w których występują niesymetryczne kinki i w wielu pracach pojawiły się informacje o zaobserwowaniu struktury rezonansowej powstałej na skutek opisanego przez nas mechanizmu.

Zderzenie z brzegiem

W pracy [H8] wprowadzona została modyfikacja modelu ϕ^4 . Dziedzina została zawężona do półosi $x \in (-\infty, 0]$ oraz zostały wprowadzone warunki brzegowe Nuemanna $\phi_x(0, t) = H$.



Rysunek 8: Statyczne rozwiązania dla modelu z brzegiem dla $H = 1/2$.

Rozwiązanie ϕ_1 z $X_0 > 0$ odpowiada lokalnemu minimum energii i jest rozwiązaniem stabilnym. Rozwiązanie z $X_0 < 0$ (ozn. ϕ_2) jest niestabilne i przy niewielkich perturbacjach powraca do rozwiązania ϕ_1 lub trzeciego statycznego rozwiązania $\phi_3 = -\text{ctgh}(x + X_1)$, przy czym $X_1 < 0$ (Rys. 8). Rozwiązanie to ma najniższą energię.

Rozwiązania dla $H < 0$ można otrzymać z symetrii $H \rightarrow -H$ i $\phi \rightarrow -\phi$.

Gdy $H \rightarrow 1$ próg energetyczny $E[\phi_2] - E[\phi_1]$ dąży do zera i nawet niewielka perturbacja może doprowadzić do przeskoku z ϕ_1 do ϕ_3 . Wiąże się to z emisją kinku, co jest zgodne z zasadą zachowania energii $E[\phi_2] - E[\phi_3] > M$ (gdzie $M = 4/3$ jest masą solitonu) oraz zasadą zachowania ładunku topologicznego ($\phi_3(x) \rightarrow 1$ podczas gdy $\phi_1(x) \rightarrow -1$ dla dużych $-x$).

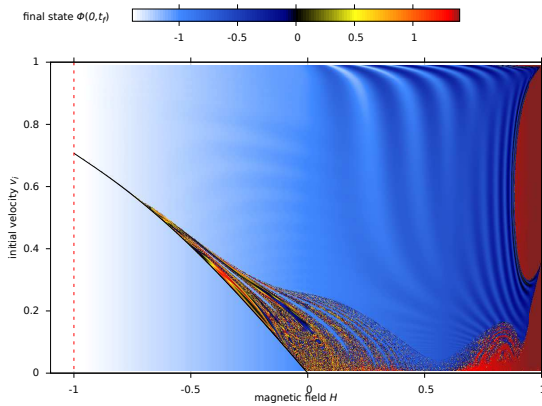
Rozwiązanie ϕ_3 nie posiada modów oscylacyjnych, natomiast ϕ_1 posiada dokładnie jeden mod, którego częstość zmienia się od 2 dla $H = 0$ do 0 dla $H \rightarrow 1$. Profil można łatwo otrzymać biorąc kombinację liniową rozwiązań równania Schrödingera dla potencjału Pöschl-Tellera spełniającą warunek brzegowy $\eta'(x = 0) = 0$.

Nasze zainteresowanie tym modelem wiązało się przede wszystkim ze zderzeniami solitonów z takim brzegiem. Dla $H = 0$ odtwarzana była sytuacja znana z modelu ϕ^4 . Ze względu na symetrię $(H, \phi) \rightarrow (-H, -\phi)$ badane były jedynie zderzenia antykinku z brzegiem opartym na próżni -1 . Dla $H < 0$ brzeg miał postać $\phi_B = -\phi_3$. Ze względu na próg energetyczny, przy niewielkich prędkościach

Takie układy z brzegiem mają spore zastosowanie w fizyce. Czasami mogą pojawić się po redukcji wymiarowej, po uwzględnieniu odpowiednich symetrii, a czasami są istotną własnością modelu (np. uwzględniając pole magnetyczne). Dla $H = 0$ odtwarzany jest model ϕ^4 zawężony do rozwiązań parzystych $\phi(-x) = \phi(x)$. Modyfikacja $H \neq 0$ wprowadza zmianę struktury rozwiązań stacjonarnych.

Dla $0 < H < 1$ dwa rozwiązania można łatwo znaleźć przesuwając kink z modelu ϕ^4 , tak aby spełnione były zadane warunki brzegowe $\left. \frac{d}{dx} \text{tgh}(x - X_0) \right|_{x=0} = H$. Rozwiązanie ozna-

nie dochodziło do pełnego zderzenia i kink odbijał się prawie całkowicie elastycznie od bariery potencjału. Gdy prędkość antykinku była dostatecznie duża, soliton zderzał się z brzegiem. W wyniku takiego zderzenia antykink mógł zostać pochłonięty przez brzeg zmieniając strukturę brzegu $\bar{K} + \Phi_3 \rightarrow \Phi_1^*$ ¹ lub mógł zostać odbity $\bar{K} + \Phi_3 \rightarrow \Phi_3 + \bar{K}^*$. Prędkości, dla których występowały różne scenariusze tworzyły strukturę fraktalną podobną do tej znanej z ϕ^4 . Dla malejących H struktura ta, w sposób ciągły zawężała się, czasami otwierały się i zamykały nowe okna wielo-odbiciowe. Ponadto cała struktura zawężała się, aż zanikała dla $H = -1$, co wiązało się z zanikiem rozwiązania typu ϕ_1 (Rys. 9).



Rysunek 9: Końcowy stan $\phi(0, T)$ po zderzeniu.

może zderzyć się z odbitym antykinkiem, co prowadzi do powstania drugorzędowej struktury fraktalnej.

W pracy tej badaliśmy też możliwość emisji kinku z brzegu poprzez wzbudzenie modu oscylacyjnego. Dla $H \rightarrow 1$ wzbudzenie nie musiało być duże i dla przypadku danych początkowych typu $\phi(x, 0) = \phi_1(x) + A\eta_B(x)$, $\phi_t(x, 0) = 0$ bardzo dobrym przybliżeniem była zależność $A_{cr} = 2\sqrt{1-H}$ pomiędzy krytyczną amplitudą A_{cr} a polem H . η_B jest profilem modu oscylacyjnego brzegu.

Wielokomponentowe pole i zderzenia wielociałowe

Zderzenia kinków badaliśmy również w modelu dwóch pól ϕ^4 , sprzężonych oddziaływaniem typu

$$U_{\text{int}}(\phi_1, \phi_2) = -\kappa \phi_1^2 \phi_2^2. \quad (27)$$

Dla $\kappa < 1$ energia w tym modelu jest ograniczona z dołu. Dla $\kappa < -1$ potencjał teoriopolowy posiada jedno minimum $\phi_1 = \phi_2 = 0$. W tym przypadku nie występują defekty topologiczne. Dla

¹oznaczenia symboliczne; gwiazdka oznacza wzbudzenie, $\bar{K}$ jest swobodnym antykinkiem; Φ_i jest rozwiązaniem typu ϕ_i

$-1 < \kappa < 1$ układ posiada cztery próżnie $(\phi_1, \phi_2) = (\pm 1, \pm 1)/\sqrt{1-\kappa}$. Możliwe jest wtedy pojawienie się 12 rodzajów defektów topologicznych łączących poszczególne próżnie. Istotne są jednak jedynie dwa. Wszystkie pozostałe można odtworzyć poprzez proste symetrie $\phi_1 \leftrightarrow \phi_2$ lub $\phi_i \rightarrow -\phi_i$. Jeden kink jest kinkiem podwójnym $\phi_1(x) = \phi_2(x) = \tanh(x)/\sqrt{1-\kappa}$, posiada on ładunek topologiczny $Q = (1, 1)$. Z symetrii można odtworzyć trzy inne rozwiązania tego typu. Drugi, interpolujący pomiędzy próżniami $(-1, 1)/\sqrt{1-\kappa} \rightarrow (1, 1)/\sqrt{1-\kappa}$, posiada profil zbliżony do $\tanh x$ w pierwszym sektorze, a w drugim ma kształt zbliżony do $\text{sech} x$, o różnej wysokości, zależnej od stałej sprzężenia κ . Niesie ze sobą ładunek topologiczny równy $Q = (1, 0)$. Rozwiązań tego typu jest łącznie osiem.

Małe drgania, wokół podwójnego kinku, można podzielić na dwie grupy. Zaburzenia niełamie symetrii $\phi_1 = \phi_2$ opisywane są przez takie samo równanie jak drgania wokół kinku w modelu ϕ^4 . Zaburzenia łamiące symetrię spełniają równanie Schrödingera dla potencjału Pöschl-Tellera o głębokości zależnej od stałej sprzężenia κ . W granicy $\kappa \rightarrow 1$ kink posiada nieskończenie wiele modów oscylacyjnych. Dla $\kappa < 0$ pojawia się mod niestabilny, którego wzbudzenie prowadzi do rozpadu $(1, 1) \rightarrow (1, 0) + (0, 1)$.

Kinki drugiego rodzaju $Q = (1, 0)$, dla których nie znaleźliśmy analitycznej postaci, posiadają tylko jeden mod oscylacyjny.

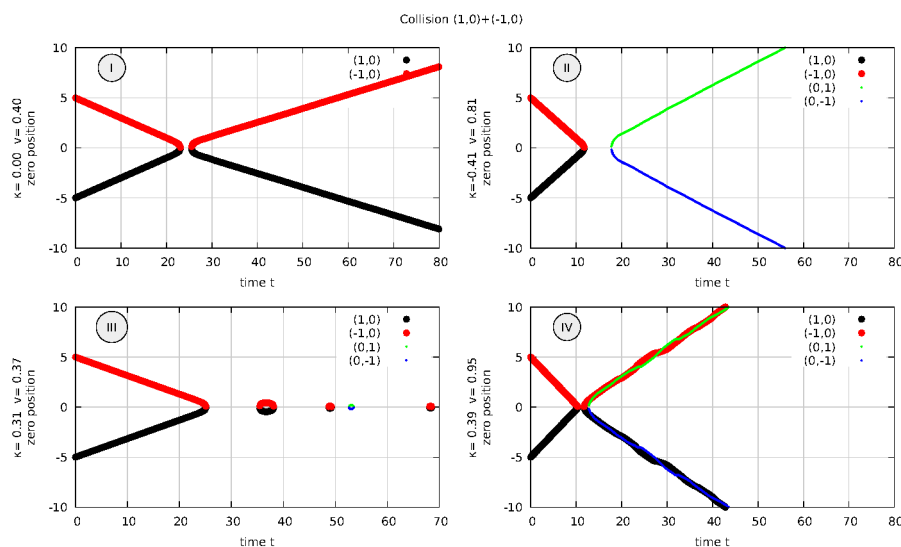
Oprócz zderzeń podwójnych kinków (np. takich o ładunku topologicznym $(-1, -1) + (1, 1)$), które odtwarzają znaną z modelu ϕ^4 fraktalną strukturę rezonansową, w modelu tym mogą wystąpić całkiem nowe rodzaje zderzeń. Przykładem mogą być następujące scenariusze Rys. 10:

$$(1, 0) + (-1, 0) \rightarrow \begin{cases} (1, 0) + (-1, 0) & \text{(I) odbicie,} \\ (0, 1) + (0, -1) & \text{(II) przewrót,} \\ (0, 0) & \text{(III) anihilacja i powstanie oscylonu,} \\ (-1, -1) + (1, 1) & \text{(IV) odbicie ze zmianą typu.} \end{cases} \quad (28)$$

W przypadku zderzeń podwójnego kinku należy jeszcze dodatkowo wziąć pod uwagę jego stabilność. Niektóre zderzenia zachodzą na tyle szybko, że rozpad następuje dopiero w trakcie zderzenia. Przy wolnych zderzeniach rozpad może nastąpić wcześniej. W takiej sytuacji problem bardziej przypomina problem zderzenia trzech ciał. W pracy przedstawiliśmy *diagramy fazowe* na płaszczyźnie prędkość-stała sprzężenia κ , pokazujące zakres parametrów dla różnych scenariuszy zderzeń.

Metody numeryczne

Ze względu na tematykę, oprócz metod analitycznych główną metodą badawczą były obliczenia numeryczne. Najczęściej wiązały się one z rozwiązywaniem równań ewolucji czasowej (głównie hiperbolicznych równań różniczkowych cząstkowych), poszukiwaniem statycznych rozwiązań (układy zwyczajnych równań różniczkowych), modów oscylacyjnych, rozproszonych i rezonansowych (problemy własne). W równaniach ewolucji początkowo stosowałem proste metody dyskretyzacji pochodnych przestrzennych i czasowych, biorąc pod uwagę jedynie najbliższe punkty. Z czasem jed-



Rysunek 10: Przykłady zderzeń typu $(1,0) + (-1,0)$. Na wykresach zaznaczono zera topologiczne.

nak sięgałem po coraz bardziej zaawansowane metody np. dyskretyzację przestrzenną na podstawie pięciu punktów sprzężoną z metodą Rungego-Kutty w czasie. Czasami nawet tego typu metody były niewystarczające. W pracy [H4], ze względu na bardzo małą prędkość zderzeń i długi czas ewolucji korzystaliśmy z metod spektralnych do obliczania pochodnych przestrzennych. Za ewolucję czasową odpowiadały metody symplektyczne, gwarantujące zachowanie pewnej wielkości, blisko związanej z energią. Metody spektralne często też stosowałem w celu poszukiwania rozwiązań stacjonarnych. Za największe wyzwania, numeryczne oprócz wspomnianej już pracy [H4], uważam poszukiwanie modów rezonansowych w [H7] i [X2], ewolucję czasową (metoda split-step drugiego rzędu) i rozwiązywanie układu równań zwyczajnych ze skomplikowanymi warunkami brzegowymi w [X1] oraz poszukiwanie potencjału zlinearyzowanego posiadającego mody rezonansowe odpowiadające rezonansom Ropera i odtwarzającego zadane fizyczne własności nukleonów (połączenie wielu metod minimalizacji, poszukiwania miejsc zerowych i rozwiązywania równań różniczkowych dla problemów dwupunktowych w jednej procedurze numerycznej) [X2].

4.3.6. Podsumowanie

Za najważniejsze osiągnięcia cyklu uważam:

- odkrycie niemonotonicznej relaksacji głębokich modów oscylacyjnych;
- odkrycie ujemnego ciśnienia promieniowania w kontekście defektów topologicznych, ze szczególnym uwzględnieniem roli jaką promieniowanie odgrywa podczas ewolucji układów defektów;
- odkrycie nowego mechanizmu tworzenia się fraktalnych struktur rezonansowych podczas zderzeń kinków na skutek sprzężenia z modami powstałymi pomiędzy kinkami.

5. Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych

W trakcie doktoratu opublikowałem trzy prace [D1–D3] z czego jedną jako materiał konferencyjny [D2]. Prace [D1,D2] przedstawiają wstępne wyniki dotyczące ujemnego ciśnienia promieniowania w modelu ϕ^4 i były punktem początkowym do napisania pracy [D4] oraz motywacją do poszukiwania innych mechanizmów ujemnego ciśnienia promieniowania.

Po doktoracie zaangażowałem się w prace dotyczące statycznych właściwości skyrmionów [D5–D8]. Początkowo moja rola ograniczała się do sprawdzania wyników analitycznych i wykonywania obliczeń numerycznych. Z czasem, gdy dowiadywałem się więcej na temat skyrmionów, mój wkład w pracę rósł, co zaowocowało pracami dotyczącymi dynamiki [H7] i [X2]. Warto wspomnieć, że ostatnia praca, pomimo, że wciąż w na etapie recenzji otrzymała pozytywną opinię recenzenta JHEP i została odesłana celem dokonania małych poprawek (ujednolicenie notacji i prezentacji oraz precyzyjniejszym wyjaśnieniem niektórych fragmentów).

5.1. Spis publikacji

- [D1] T. Romańczukiewicz, “Interaction between kink and radiation in ϕ^4 model,” *Acta Phys. Polon.*, vol. B35, pp. 523–540, 2004, arXiv:[0303058](#).
- [D2] T. Romańczukiewicz, “Interaction between topological defects and radiation,” *Acta Phys. Polon.*, vol. B36, pp. 3877–3887, 2005.
- [D3] T. Romańczukiewicz, “Creation of kink and antikink pairs forced by radiation,” *J. Phys.*, vol. A39, p. 3479, 2006, DOI: [10.1088/0305-4470/39/13/022](#), arXiv:[0501066](#).
- [D4] P. Forgács, A. Lukács, and T. Romańczukiewicz, “Negative radiation pressure exerted on kinks,” *Phys. Rev.*, vol. D77, p. 125012, 2008, DOI: [10.1103/PhysRevD.77.125012](#), arXiv:[0802.0080](#).
- [D5] C. Adam, T. Romańczukiewicz, J. Sanchez-Guillen, and A. Wereszczyński, “Investigation of restricted baby Skyrme models,” *Phys. Rev.*, vol. D81, p. 085007, 2010, DOI: [10.1103/PhysRevD.81.085007](#), arXiv:[1002.0851](#).
- [D6] C. Adam, J. Sánchez-Guillén, T. Romańczukiewicz, and A. Wereszczyński, “Strongly coupled skyrme–faddeev–niemi hopfions,” *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 43, no. 34, p. 345402, 2010. [Online]. Available: <http://stacks.iop.org/1751-8121/43/i=34/a=345402>
- [D7] C. Adam, T. Romańczukiewicz, J. Sanchez-Guillen, and A. Wereszczyński, “Magnetothermodynamics of BPS baby skyrmions,” *JHEP*, vol. 11, p. 095, 2014, DOI: [10.1007/JHEP11\(2014\)095](#), arXiv:[1405.5215](#).

- [D8] C. Adam, C. Naya, T. Romańczukiewicz, J. Sanchez-Guillen, and A. Wereszczynski, “Topological phase transitions in the gauged BPS baby Skyrme model,” *JHEP*, vol. 05, p. 155, 2015, DOI: [10.1007/JHEP05\(2015\)155](https://doi.org/10.1007/JHEP05(2015)155), arXiv:[1501.03817](https://arxiv.org/abs/1501.03817).

Prace w trakcie recenzji

- [X1] T. Romańczukiewicz, “Radiation pressure in the Coupled Nonlinear Schrödinger Equation exerted on the solitons,” 2017, arXiv:[1705.06955](https://arxiv.org/abs/1705.06955).
- [X2] C. Adam, M. Haberichter, T. Romańczukiewicz, and A. Wereszczynski, “Roper resonances and quasi-normal modes of Skyrmions,” 2017, arXiv:[1710.00837](https://arxiv.org/abs/1710.00837).
- [X3] T. Romańczukiewicz and Y. Shnir, “Oscillons in the presence of external potential,” 2017, arXiv:[1706.09234](https://arxiv.org/abs/1706.09234).

5.2. Szczegółowe omówienie pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych

5.2.1. Prace opublikowane w czasie doktoratu

Relaksacja

Moja pierwsza praca [D1] skupiała się na problemie relaksacji modu oscylacyjnego kinku w modelu ϕ^4 . Głównym celem pracy była weryfikacja przewidywań opublikowanych w pracy [7]. Powtórzone zostały obliczenia analityczne ale również zostały dodane pewne nowe wyniki. Najważniejszym wkładem było zbadanie bardziej fizycznych warunków początkowych. Zakładając, że mod oscylacyjny jest wzbudzony w konkretnym momencie $t = 0$ pokazane zostało, że nie tylko jedna częstość wraz z wyższymi harmonicznymi jest wzbudzana. Ponieważ transformata Fouriera funkcji Heaviside’a zawiera wszystkie częstości, całe spektrum powinno być brane pod uwagę. Najważniejsze okazały się częstości blisko progu masy, które najdłużej zostawały w pobliżu kinku.

W zasadzie szybkość zaniku modu oscylacyjnego opisana w [7] ($A(t) \sim t^{-1/2}$) została potwierdzona ale z zastrzeżeniem, że w praktyce bardzo trudno przygotować takie warunki początkowe, które wzbudzałyby jedynie mod oscylacyjny i jego harmoniczne. W ogólnym przypadku wzbudzone zostaną również inne mody, szczególnie te blisko progu masy, które zanikają w podobny sposób co mod oscylacyjny $\sim t^{-1/2}$.

Ujemne ciśnienie promieniowania ϕ^4

Druga część pracy [D1] skupiała się na ruchu wzbudzonym przez padającą na kink falę. Była to pierwsza praca wspominająca o ujemnym ciśnieniu promieniowania w przypadku ϕ^4 . Zostało zaproponowane analityczne wyjaśnienie i zostały przeprowadzone symulacje numeryczne. Dokładniejsza analiza tego problemu została przedstawiona w [D2, D4].

Spodziewaliśmy się, że fala ulegnie rozproszeniu i sam soliton zostanie popchnięty przez fale tak, jak małe obiekty mogą być popychane przez ciśnienie promieniowania. W symulacjach numerycznych zaobserwowaliśmy dziwne zachowanie. Pod wpływem fali, soliton zamiast przyspieszać zgodnie z kierunkiem, w którym poruszała się fala, zaczął przyspieszać w stronę jej źródła. Zjawisko to nazwaliśmy ujemnym ciśnieniem promieniowania (UCP). Liniowa analiza pokazała, że soliton jest przezroczysty dla promieniowania. Fale przechodzące przez soliton nie posiadają części odbitej, a oddziaływanie sprowadza się jedynie do zmiany fazy fali. Gdyby wziąć pod uwagę jedynie pierwszy rząd rachunku zaburzeń to soliton nie mógłby być poddawany żadnej sile. Model opisywany jest jednak przez równanie nieliniowe i kluczem do zrozumienia zachowania solitonu jest analiza w drugim rzędzie rachunku zaburzeń. Na skutek nieliniowości pojawiają się fale o częstościach dwa razy większych niż częstość fali padającej. Fale o wyższych częstościach poruszają się szybciej i niosą więcej pędu. Po przejściu przez kink, na skutek nieliniowego rozpraszania, fala niesie więcej pędu niż przyniosła fala padająca. Ponieważ całkowity pęd układu musi być zachowany, zatem kink musi zacząć przyspieszać w stronę źródła. Siła działająca na soliton, której źródłem jest opisany mechanizm jest proporcjonalna do czwartej potęgi amplitudy fali padającej. Obliczenia numeryczne okazały się być w bardzo dobrej zgodzie z obliczeniami analitycznymi.

Należy jednak podkreślić, że bezodbiciowy potencjał, jaki jest generowany przez soliton w modelu ϕ^4 jest rzadkością. Modyfikując model, dodając członów rzędu ósmego zaobserwowaliśmy, że kink przestaje być przezroczysty i efekty odbicia pochodzące z pierwszego rzędu rachunku zaburzeń, szybko zaczynają dominować. Pojawiła się siła popychająca soliton proporcjonalna do kwadratu amplitudy fali padającej. Przy niewielkim zaburzeniu mogliśmy jednak zaobserwować UCP powyżej pewnej krytycznej amplitudy, kiedy to rozpraszanie nieliniowe dawało większy efekt, niż to, wynikające z najniższego rzędu rachunku zaburzeń.

Warto również dodać, że inny model, w którym występuje potencjał bezodbiciowy, model sinus-Gordona (sG) jest modelem całkowalnym i można całkowicie odseparować promieniowanie od solitonowych stopni swobody. W efekcie kinki w modelu sG są całkowicie przezroczyste dla promieniowania i nie odczuwają z jego strony żadnej siły. Jest to wynik analityczny i dokładny. Można powiedzieć, że w modelu sG kinki są przezroczyste dla promieniowania w każdym rzędzie rachunku zaburzeń.

Kreacja na kinku

Kink poddany działaniu fali podlega nie tylko ciśnieniu promieniowania. Ciekawe jest jak promieniowanie wpływa na wewnętrzne właściwości kinku. Naturalnym kandydatem jest mod oscylacyjny, który może być wzbudzany przez padającą falę. Aby przyjrzeć się dokładniej wzbudzeniu tego modu przez promieniowanie, umieściliśmy kink w polu fali padającej z obu stron, tak aby soliton pozostał w jednym miejscu, a tym samym stanowił łatwiejszy obiekt do badania [D3]. Stosując ponownie teorię zaburzeń okazało się, że mod oscylacyjny wzbudzany jest poprzez tzw. rezonans parametryczny opisywany przez równanie Mathieu, z pewnym dodatkowym członem wymuszającym.

Rezonans parametryczny pojawia się, gdy częstość wymuszenia zbliża się do całkowitej wielokrotności częstości podstawowej drgań. Ponieważ fale o częstości równej częstości drgań modu oscylacyjnego nie mogą się propagować, pierwszym i najsilniejszym rezonansem jest rezonans związany z częstością dwukrotnie większą od częstości modu oscylacyjnego. Amplituda wzbudzenia dodatkowo jest ograniczana przez promieniowanie samego modu. Gdy jednak jego amplituda przekroczy pewną wartość krytyczną, może nastąpić kreacja i emisja pary kink-anktykink. W miejscu, gdzie wcześniej znajdował się kink pozostaje antykink. Taki proces jest bardzo chaotyczny i w przestrzeni parametrów, takich jak amplituda i częstość fali, granica oddzielająca obszary kreacji od obszarów zwykłego wzbudzenia przejawia właściwości fraktalne.

5.2.2. Statyczne właściwości solitonów

Oprócz dynamiki w prostych modelach teoriopolowych nasze badania skupiały się również na statycznych własnościach solitonów, w bardziej skomplikowanych modelach.

Zawężone modele Skyrme

W pracy [D5] badaliśmy uproszczony model *baby* Skyrme opisany lagrazianem

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} (\partial_\mu \vec{\phi} \times \partial_\nu \vec{\phi})^2 + \mu^2 V(\phi^3) \right), \quad \vec{\phi} \in \mathbb{R}^3, \quad |\vec{\phi}| = 1. \quad (29)$$

Tak otrzymany sektor jest całkowalny w 2+0 wymiarach (rozwiązania statyczne) oraz posiada pewne cechy całkowalności w 2+1 wymiarach. Celem pracy było zbadanie, za jakie właściwości skyrmionów odpowiedzialny jest ten właśnie podsektor. Ze względu na całkowalność większość wyników można było otrzymać analitycznie. W przeciwieństwie do innego, często badanego w literaturze uproszczenia, w którym pomija się człon potencjalny, w naszej pracy był on niezwykle ważny. Ponieważ nie znany jest „jedynie słuszny” potencjał, przebadane zostało kilka typowych potencjałów. Wyniki następnie zostały skonfrontowane z wynikami w pełnym modelu *baby* Skyrme. Okazało się, że zarówno topologiczne jak i geometryczne właściwości skyrmionów są dobrze opisywane już na poziomie uproszczonego modelu. Energie skyrmionów również są odtwarzane z sensowną dokładnością. Szczególnie duża zgodność uzyskuje się, gdy człon potencjalny jest dominujący. W pracy zostało również pokazane, że nie mogą istnieć topologicznie trywialne rozwiązania typu *Q-Ball*.

Magnetotermodynamika baby skyrmionów BPS

Kolejnym aspektem naszych prac były właściwości magnetotermodynamiczne materii skyrmionowej [D7] w modelu *baby* Skyrme sprzężonym z polem cechowania. Wprowadzając asymptotycznie stałe pole magnetyczne, tak naprawdę wprowadza się pewną modyfikację warunków brzegowych. Co ważne, modyfikacja ta nie łamie właściwości BPS. Innym wynikiem pracy było to, że ciśnienie można wprowadzić poprzez modyfikacje superpotencjału. Wyznaczone zostały podstawowe własności materii skyrmionowej, takie jak równanie stanu, ściśliwość magnetyczna, magnetyzacja. Jednym

z najciekawszych rezultatów pracy było stwierdzenie, że materia skyrmionowa zachowuje się jak ferromagnetyk.

Topologiczne przejścia fazowe

Zewnętrzne pole magnetyczne lub ciśnienie zmienia nie tylko własności samych solitonów. W pewnych warunkach mogą pojawić się rozwiązania, które nie były możliwe w przypadku pól swobodnych. W pracy [D8] badane było istnienie rozwiązań w modelu z potencjałem posiadającym dwie próżnie. W modelu takim może wystąpić faza bezsolitonowa, o niskiej gęstości i faza solitonowa o wysokiej gęstości. Wyznaczona została granica pomiędzy fazami na płaszczyźnie (H, P) dla różnych elektromagnetycznych stałych sprzężenia.

Hopfiony

Badaliśmy również model Skyrme–Faddeeva–Niemiego w granicy silnego sprzężenia. W takiej granicy można zaniedbać standardowy człon kinetyczny. Człon czwartego rzędu jest obowiązkowy, ze względu na argument Derricka o istnieniu defektów topologicznych. Pozbycie się członu kinetycznego zwiększa symetrię modelu. Dla jednopróżniowego potencjału zostały znalezione dwa rodzaje rozwiązań: zlokalizowane kompaktony i zanikające w nieskończoności hopfiony. Kompaktony spełniają równanie Bogomolnego a ich energie skalują się jak $|Q|^{1/2}$, gdzie Q jest indeksem Hopfa. Powyżej pewnej minimalnej wartości $|Q|$ mogą istnieć rozwiązania niekompaktonowe, których energia skaluje się liniowo z ładunkiem $|Q|$. Przebadane były również inne potencjały (np. dwupróżniowy). Wyniki otrzymane w przybliżeniu silnego sprzężenia zostały również porównane z wynikami numerycznymi dla pełnego modelu.

5.2.3. Kontynuacja prac z cyklu habilitacyjnego

Natura oscylonu

W trakcie badań związanych z modelem z brzegiem [H8] zauważyliśmy jedną bardzo intrygującą własność. Pod wpływem zderzeń brzeg typu ϕ_1 był wzbudzany. Można się było tego oczywiście spodziewać, ponieważ tego typu rozwiązanie posiada mod oscylacyjny. Oscylacje jednak były również widoczne dla rozwiązania typu ϕ_3 . Zidentyfikowaliśmy je jako oscylon związany z brzegiem. Amplituda oscylacji była ściśle powiązana z częstotliwością, której wartość była poniżej progu masy. Gdy jednak H przekroczyło pewną krytyczną oscylonu nie dało się wytworzyć. Również w przypadku gdy brzeg posiadał mod oscylacyjny nie dało się zaobserwować oscylonu. Wyniki te stały się inspiracją do napisania kolejnej pracy [X3] (niestety jeszcze wciąż na etapie recenzji).

Badamy w niej powiązania pomiędzy oscylonem i modelem oscylacyjnym w prostym modelu z zewnętrznym potencjałem. Pokazaliśmy, że zmieniając adiabaticznie parametry układu w taki sposób, że mod oscylacyjny przestaje istnieć, w szczególnych przypadkach oscylacje pozostają. Jest to zatem transformacja modu oscylacyjnego w oscylon. Transformacja w drugą stronę jest również możliwa. Gdy zewnętrzny potencjał jest odpychający, pojawia się krytyczna amplituda poniżej, której

oscylon przestaje istnieć. Promieniując oscylon zbliża się do tej krytycznej amplitudy i pojawiają się silne modulacje zwiastujące rozpad oscylonu. Podobne zjawiska są obserwowane w przypadku oscylonów w wielowymiarowych modelach. W zależności od parametrów układu raz oscylon a raz mod oscylacyjny jest naturalny atraktorem dla badanych danych początkowych.

Oddziaływanie solitonów z promieniowaniem w sprzężonym, nieliniowym równaniu Schrödingera

Badaliśmy również jeszcze inny mechanizm powstawania ujemnego ciśnienia promieniowania [X1]. Niezwykle często badanym modelem, w który pojawiają się solitony, jest sprzężone (dwukomponentowe) nieliniowe równanie Schrödingera. Równanie to może efektywnie opisywać oddziałujące kondensaty Bosego-Einsteina (BEC), a także impulsy świetlne w światłowodach wykazujących dwójtomność. Szczególnie w pierwszym przypadku, w eksperymentach, można stosunkowo łatwo dobierać różne parametry równania. Dla pewnych parametrów nieliniowe równanie Schrödingera jest całkowalne i znane są dokładne rozwiązania. W takich jednak przypadkach oddziaływanie między promieniowaniem a solitonami jest trywialne i nie prowadzi do przekazania pędu. Dla innych parametrów można jednak zaobserwować bardzo ciekawe oddziaływania. W przeciwieństwie do wcześniej badanych przez nas solitonów topologicznych, solitony w tym modelu posiadają nietrywialną zależność fazy od czasu $\psi_i \sim e^{i\Omega_i t} |\psi_i|$. Poza szczególnymi przypadkami, częstości Ω_i są różne dla różnych komponentów. Fala o częstości $-\omega$, poruszająca się w pierwszym sektorze, padając na soliton ulega rozdzieleniu na cztery składowe $\{-\omega, 2\Omega_1 - \omega, \Omega_2 - \Omega_1 \pm \omega\}$. Może się zdarzyć, że rozproszona fala, w drugim komponencie, będzie niosła więcej pędu. Na soliton będzie wtedy działało ujemne ciśnienie promieniowania. Należy zaznaczyć, że takie ujemne ciśnienie promieniowania może działać jedynie na soliton wektorowy, posiadający niezerowe składowe w obu sektorach. Ciekawym wynikiem jest również to, że soliton pochłania padającą falę, co powoduje wzrost jego amplitudy w sektorze, w którym pada fala. W drugim sektorze występuje natomiast wymuszona emisja, powodując, że soliton w drugim komponencie ulega zmniejszeniu. Praca obecnie jest w trakcie recenzji.

Rezonanse Ropera

W kontekście modów kwazinormalnych badaliśmy również najbardziej ogólny model Skyrme, zawierający człony zerowe, kwadratowe, czwartego i szóstego rzędu w pochodnych pola. Motywacją było znalezienie fizycznych parametrów, pozwalającą opisać znane trzy rezonanse Ropera (1440, 1710, 1880 MeV). Wszystkie trzy mają zbliżoną szerokość Breita-Wignera (250, ~ 300 , ~ 300 MeV). Przebadaliśmy kilka, najczęściej używanych potencjałów, oraz różnych parametrów modelu. Niestety, żaden z badanych przez nas potencjałów nie prowadził do skyrmionów, dla których pierwsze trzy mody miałyby choćby w przybliżeniu tę samą szerokość.

Ponieważ poszukiwanie modów rezonansowych jest bardzo trudnym zadaniem z numerycznego punktu widzenia, a potencjał teoriopowy może być praktycznie dowolny, zdecydowaliśmy się na nieco inne podejście. Mody rezonansowe stosunkowo łatwo znajduje się w przypadku gdy potencjał zlinearyzowany V posiada analityczne rozwiązania. Dla potencjałów typu $V(r) = 2/r^2 + \delta V$, gdzie

δV jest potencjałem odcinkami płaskim, udało nam się znaleźć mody rezonansowe odpowiadające rezonansom Ropera. Opracowaliśmy również procedurę odtwarzania pełnego potencjału teoriopolo-
lowego ze zlinearyzowanego potencjału V . Podobna procedura była wcześniej stosowana w dużo prostszym modelu [19]. Pełny model posiadał dodatkowo jeszcze kilka wolnych parametrów, które należało dobrać razem z parametrami potencjału, tak aby można było odtworzyć inne fizyczne właściwości nukleonów, takie jak energia czy promień ładunku. Ostatecznie udało nam się znaleźć kilka potencjałów, które prowadziły do zadowalających rezultatów. Jest to pierwsze tego typu podejście do problemu. Prawdopodobnie w przyszłości będziemy chcieli uzyskać dużo lepsze wyniki dla innej klasy potencjałów V , być może uda się wówczas dostać jeszcze większą zgodność z danymi eksperymentalnymi.

Prace w trakcie przygotowania

Obecnie zaangażowany jestem w kilka projektów, których realizacja jest bliska ukończenia. Z P. Forgacsem i A. Lukacsem badamy ujemne ciśnienie promieniowania w przypadku worteksów w modelu Goldstone'a. W modelu tym występują dwa rodzaje małych zaburzeń: mod Goldstone'a, o zerowej masie, zmieniający fazę pola zespolonego oraz masywne zaburzenia zmieniające amplitudę pola. Ich interakcja prowadzi, między innymi do ujemnego ciśnienia promieniowania. Zebraliśmy spory materiał numeryczny oraz posiadamy pewne zrozumienie od strony analitycznej. Wortexy w tym modelu formalnie posiadają jednak nieskończoną masę, co objawia się ich nieniutonowską dynamiką. Potrafimy policzyć siłę i zmierzyć przyspieszenie (zmienne w czasie), jednak ze względu na problem nieskończonej masy trudno te dane uzgodnić. Częstość, dla której przyspieszenie i siła zmieniają znak zgadzają się z bardzo dobrą dokładnością. Aby lepiej zrozumieć ten problem badamy również uproszczoną wersję dynamiki na przykładzie pewnej klasy kinków o nieskończonej masie.

Do tej pory wszystkie prace dotyczące zderzeń kinków i rezonansowej struktury fraktalne skupiały się na modach oscylacyjnych wokół solitonu, a od czasu naszej pracy [H4] również na modach tworzących się pomiędzy solitonami. Z P. Doreyem postanowiliśmy zbadać jeszcze jeden mechanizm powstawania takiej struktury. Dodając nowy człon do potencjału z modelu ϕ^4 udało nam się otrzymać model, w którym soliton zamiast modu oscylacyjnego posiada mod rezonansowy. Własności tego modu można w łatwy sposób kontrolować poprzez pewien parametr (ϵ). Gdy $\epsilon = 0$ czas życia modu staje się nieskończony, a model przechodzi w standardowy model ϕ^4 . Gdy $\epsilon > 0$ zlinearyzowany potencjał wokół zera jest bardzo zbliżony do potencjału Pöschl-Tellera, takiego jaki występuje w modelu ϕ^4 . Jednak w pewnej odległości potencjał ulega obniżeniu i mod, który odpowiada modowi oscylacyjnemu dla przypadku $\epsilon = 0$ może tunelować. Najważniejszym otrzymanym przez nas wynikiem jest to, że strukturę rezonansową można zaobserwować również w przypadku, gdy zamiast modu oscylacyjnego jest mod kwazinormalny. Okna rezonansowe jednak zamykają się w miarę jak skraca się czas życia modu, aż przy pewnej wartości ϵ cała struktura zanika. Ponadto, również minimalna prędkość początkowa, pozwalająca na oddalenie się solitonów

po zderzeniu wzrasta. Mod rezonansowy pochłania część energii, ale zamiast oddawać ją kinkom wypromieniowuje ją do nieskończoności. Jest o bardzo efektywny mechanizm, prowadzący do anihilacji defektów nawet przy dużych prędkościach.

Niedawno ukazała się praca [20], w której autorzy twierdzą, że pewne własności modelu ϕ^4 można zaobserwować w odpowiednio wygiętych wstążkach grafenowych. Są dwie próżnie (wstążka wygięta w górę lub w dół). Wyniki, opierające się na symulacjach molekularnych pokazały, że w takich wstążkach mogą istnieć zagięcia, które bardzo przypominają kinki z modelu ϕ^4 . Można badać zderzenia kinków i inne właściwości dynamiczne. Nawiązaliśmy bliższy kontakt z autorami. Po głębszej analizie okazało się, że kinki w grafenie są jednak bardziej skomplikowane i do ich opisanie nie wystarczy zwykłe równanie ϕ^4 . Występują np. dwa rodzaje kinków o ładunku topologicznym $Q = 1$. Jeden z nich, o nieco niższej energii, ma niesymetryczny przekrój. Co ciekawe, w symulacjach numerycznych można było zaobserwować ujemne ciśnienie promieniowania. Efekt ten był widoczny jedynie w przypadku fal o polaryzacji poprzecznej w płaszczyźnie wstążki. Fale wzbudzone podłużnie i poprzecznie do płaszczyzny wstążki powodują dodatnie ciśnienie promieniowania. Prace wciąż trwają.

Obecnie prowadzimy prace mające na celu głębsze zrozumienie relaksacji głębokich modów i błysków promieniowania podczas przejścia harmonicznego przez próg masy. Aby maksymalnie uprościć wszelkie rozważania i mieć możliwość opisu analitycznego skonstruowaliśmy uproszczony model typu modelu Lamba: cząstka punktowa opisywana równaniem wahadła matematycznego sprzężona z polem Kleina-Gordona. Układ ten można opisać równaniami:

$$\ddot{H} + \Omega^2 \sin(H - \bar{H}) + \mu\phi(0,t) = 0, \quad (30)$$

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} + \phi = 0, \quad \phi_x(0,t) = H(t). \quad (31)$$

Przy braku sprzężenia $\mu = 0$, wahadło matematyczne może oscylować dowolnie małą częstością $0 < \omega < \Omega$. Znane są dokładne analityczne rozwiązania. W granicy $\omega \rightarrow 0$ pod progiem masy $m = 1$ znajduje się nieskończenie wiele harmoniczych. Poprzez sprzężenie $\mu \neq 0$ energia z wahadła jest wypromieniowywana. W efekcie zmniejsza się amplituda i rośnie częstość. Kolejne harmoniczne wychodzą ponad próg masy. Ze względu na prostotę modelu część wyników jesteśmy w stanie otrzymać analitycznie.

Prace wciąż trwają.

5.3. Literatura

- [1] A. Demirkaya, R. Decker, P. G. Kevrekidis, I. C. Christov, and A. Saxena, “Kink Dynamics in a Parametric ϕ^6 System: A Model With Controllably Many Internal Modes,” 2017,” arXiv:1706.01193.

- [2] D. Bazeia, E. E. M. Lima, and L. Losano, “Kinks and branes in models with hyperbolic interactions,” *Int. J. Mod. Phys.*, vol. A32, no. 26, p. 1750163, 2017, DOI: [10.1142/S0217751X17501639](https://doi.org/10.1142/S0217751X17501639), arXiv:[1705.02839](https://arxiv.org/abs/1705.02839).
- [3] A. M. Marjaneh, V. A. Gani, D. Saadatmand, S. V. Dmitriev, and K. Javidan, “Multi-kink collisions in the ϕ^6 model,” *JHEP*, vol. 07, p. 028, 2017, DOI: [10.1007/JHEP07\(2017\)028](https://doi.org/10.1007/JHEP07(2017)028), arXiv:[1704.08353](https://arxiv.org/abs/1704.08353).
- [4] F. C. Simas, A. R. Gomes, and K. Z. Nobrega, “Degenerate vacua to vacuumless model and kink–antikink collisions,” *Phys. Lett.*, vol. B775, pp. 290–296, 2017, DOI: [10.1016/j.physletb.2017.11.013](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2017.11.013), arXiv:[1702.06927](https://arxiv.org/abs/1702.06927).
- [5] R. Menezes and D. C. Moreira, “New models for asymmetric kinks and branes,” *Annals Phys.*, vol. 383, pp. 662–679, 2017, DOI: [10.1016/j.aop.2017.03.013](https://doi.org/10.1016/j.aop.2017.03.013), arXiv:[1612.05973](https://arxiv.org/abs/1612.05973).
- [6] I. Takyi and H. Weigel, “Collective Coordinates in One-Dimensional Soliton Models Revisited,” *Phys. Rev.*, vol. D94, no. 8, p. 085008, 2016, DOI: [10.1103/PhysRevD.94.085008](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.94.085008), arXiv:[1609.06833](https://arxiv.org/abs/1609.06833).
- [7] N. S. Manton and H. Merabet, “ ϕ^4 kinks: Gradient flow and dynamics,” *Nonlinearity*, vol. 10, p. 3, 1997, DOI: [10.1088/0951-7715/10/1/002](https://doi.org/10.1088/0951-7715/10/1/002), arXiv:[hep-th/9605038](https://arxiv.org/abs/hep-th/9605038).
- [8] L. D. Roper, “Evidence for a P_{11} pion-nucleon resonance at 556 mev,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 12, pp. 340–342, Mar 1964, DOI: [10.1103/PhysRevLett.12.340](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.12.340).
- [9] P. Bizon, T. Chmaj, and A. Rostworowski, “On asymptotic stability of the Skymion,” *Phys. Rev.*, vol. D75, p. 121702, 2007, DOI: [10.1103/PhysRevD.75.121702](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.75.121702), arXiv:[math-ph/0701037](https://arxiv.org/abs/math-ph/0701037).
- [10] G. H. Derrick, “Comments on nonlinear wave equations as models for elementary particles,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 5, no. 9, pp. 1252–1254, 1964, DOI: [10.1063/1.1704233](https://doi.org/10.1063/1.1704233), arXiv:<https://doi.org/10.1063/1.1704233>. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1063/1.1704233>
- [11] H. Arodź and R. Pełka, “Evolution of interfaces and expansion in width,” *Phys. Rev. E*, vol. 62, pp. 6749–6759, Nov 2000, DOI: [10.1103/PhysRevE.62.6749](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.62.6749).
- [12] T. W. B. Kibble, “Phase Transitions in the Early Universe,” *Acta Phys. Polon.*, vol. B13, p. 723, 1982.
- [13] “Resonance structure in kink-antikink interactions in ϕ^4 theory,” *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 9, no. 1, pp. 1 – 32, 1983, DOI: [10.1016/0167-2789\(83\)90289-0](https://doi.org/10.1016/0167-2789(83)90289-0).
- [14] P. Anninos, S. Oliveira, and R. A. Matzner, “Fractal structure in the scalar $\lambda(\phi^2 - 1)^2$ theory,” *Phys. Rev.*, vol. D44, pp. 1147–1160, 1991, DOI: [10.1103/PhysRevD.44.1147](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.44.1147).

- [15] D. K. Campbell, M. Peyrard, and P. Sodano, "Kink-antikink interactions in the double sine-Gordon equation," *Physica D Nonlinear Phenomena*, vol. 19, pp. 165–205, Mar. 1986, DOI: 10.1016/0167-2789(86)90019-9.
- [16] J. Yang and Y. Tan, "Fractal structure in the collision of vector solitons," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 85, pp. 3624–3627, Oct 2000, DOI: 10.1103/PhysRevLett.85.3624.
- [17] M. I. W. Roy H Goodman, Philip J Holmes, "Interaction of sine-Gordon kinks with defects: phase space transport in a two-mode model," *Physica D*, vol. 161, pp. 21–44, 2002, DOI: 10.1016/S0167-2789(01)00353-0.
- [18] J. Yang, "Vector solitons and their internal oscillations in birefringent nonlinear optical fibers," *Studies in Applied Mathematics*, vol. 98, no. 1, pp. 61–97, 1997, DOI: 10.1111/1467-9590.00041.
- [19] M. Bordag and A. Yurov, "Spontaneous symmetry breaking and reflectionless scattering data," *Phys. Rev. D*, vol. 67, p. 025003, Jan 2003, DOI: 10.1103/PhysRevD.67.025003.
- [20] R. D. Yamaletdinov, V. A. Slipko, and Y. V. Pershin, "Kinks and antikinks of buckled graphene: A testing ground for the φ^4 field model," *Phys. Rev. B*, vol. 96, p. 094306, Sep 2017, DOI: 10.1103/PhysRevB.96.094306.



Podpis wnioskodawcy