

Autoreferat

Piotr Korcyl

April 23, 2019

1 Imię i nazwisko

Piotr Korcyl

2 Posiadane dyplomy i stopnie naukowe

- 2010

Doktor nauk fizycznych, Uniwersytet Jagielloński

Tytuł rozprawy: *Aspects of dynamics in supersymmetric quantum mechanics with gauge symmetry*, rozprawa z wyróżnieniem

Opiekun: prof. dr hab. Jacek Wosiek

- 2006

Magister w dziedzinie fizyki teoretycznej, Uniwersytet Jagielloński

Tytuł rozprawy: *Kwantowa supersymmetria a klasyczne trajektorie*, praca z wyróżnieniem

Opiekun: prof. dr hab. Jacek Wosiek

3 Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych

październik 2016 - obecnie adiunkt w Zakładzie Dyskretnej Teorii Pola, Uniwersytet Jagielloński, (na urlopie naukowym do października 2017, od marca do sierpnia 2019 na urlopie szkoleniowym w związku ze stypendium NAWA im. Bekkera na 6-ście miesięczny pobyt na Uniwersytecie Tor Vergata w Rzymie we Włoszech)

kwiecień 2015 - październik 2017 staż podoktorski na Uniwersytecie w Ratyzbonie, Niemcy

październik 2014 - kwiecień 2015 adiunkt na Wydziale Fizyki Uniwersytetu Columbia w Nowym Jorku (nagroda Fulbright Senior Advanced Research Award), New York, NY, USA

marzec 2012 - październik 2014 staż podoktorski w DESY, NIC, Zeuthen, Niemcy

październik 2010 - wrzesień 2013 asystent w Zakładzie Teoretycznej Fizyki Komputerowej, Uniwersytet Jagielloński, (na urlopie naukowym od marca 2012),

4 Wskazanie osiągnięcia

4.1 Tytuł

Poprawa precyzji numerycznych symulacji Chromodynamiki Kwantowej na sieci metodą Monte Carlo

4.2 Spis publikacji

Prace będące podstawą osiągnięcia naukowego

- [H1] Mattia Bruno et al. "Simulation of QCD with $N_f = 2+1$ flavors of non-perturbatively improved Wilson Fermions". In: *J. High Energy Phys.* 02 (2015), p. 043. DOI: 10.1007/JHEP02(2015)043. arXiv: 1411.3982 [hep-lat].
- [H2] Krzysztof Cichy, Karl Jansen, and Piotr Korcyl. "Non-perturbative renormalization in coordinate space for $N_f = 2$ maximally Twisted Mass Fermions with tree-level Symanzik improved gauge action". In: *Nucl. Phys. B* 865 (2012), p. 268. DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2012.08.006. arXiv: 1207.0628 [hep-lat].
- [H3] Krzysztof Cichy, Karl Jansen, and Piotr Korcyl. "Non-perturbative running of renormalization constants from correlators in coordinate space using step scaling". In: *Nucl. Phys. B* 913 (2016), pp. 278–300. DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2016.09.015. arXiv: 1608.02481 [hep-lat].
- [H4] Piotr Korcyl and Gunnar S. Bali. "Non-perturbative determination of improvement coefficients using coordinate space correlators in $N_f = 2 + 1$ Lattice QCD". In: *Phys. Rev. D* 95.1 (2017), p. 014505. DOI: 10.1103/PhysRevD.95.014505. arXiv: 1607.07090 [hep-lat].
- [H5] G. S. Bali et al. "Second moment of the pion distribution amplitude with the momentum smearing technique". In: *Phys. Lett. B* 774 (2017), pp. 91–97. DOI: 10.1016/j.physletb.2017.08.077. arXiv: 1705.10236 [hep-lat].
- [H6] Gunnar S. Bali et al. "Pion distribution amplitude from Euclidean correlation functions". In: *Eur. Phys. J. C* 78.3 (2018), p. 217. DOI: 10.1140/epjc/s10052-018-5700-9. arXiv: 1709.04325 [hep-lat].

Opis:

Publikacje w ramach cyklu opatrzone są przedrostkiem H, pozostałe publikacje mają przedrostek S. Bardzo duża część wyników publikowana jest w materiałach konferencyjnych corocznej konferencji poświęconej opisywanym symulacjom International Symposium on Lattice Field Theory. Materiały których jestem współautorem opatrzone są przedrostkiem K. Pozostałe referencje do prac których nie jestem współautorem nie mają przedrostka. Referencje do wszystkich moich publikacji znajdują się na końcu.

4.3 Omówienie celu naukowego ww. prac i osiągniętych wyników

Celem naukowym zebranych prac jest poprawa dokładności przewidywań Chromodynamiki Kwantowej otrzymywanych metodą numerycznych symulacji Monte Carlo. Obliczenia numeryczne skła-

dają się z kilku etapów, każda z wyżej wymienionych prac przedstawia nowe rozwiązania umożliwiające zwiększenie precyzji końcowego wyniku. Jako przykładową obserwabę przedstawiam drugi moment amplitudy pionu. Poniżej ogólnie wprowadzam oraz motywuję potrzebę nieperturbacyjnych symulacji Monte Carlo Chromodynamiki Kwantowej, a następnie omawiam poszczególne kroki numerycznych obliczeń równocześnie umiejscawiając mój wkład w ogólnym schemacie symulacji.

4.3.1 Wprowadzenie

Model Standardowy i Chromodynamika Kwantowa

Według obecnego stanu naszej wiedzy wszystkie oddziaływania cząstek elementarnych oprócz grawitacji opisane są przez zunifikowaną teorię nazywaną Modelem Standardowym. Matematycznie sformułowana jest w języku kwantowej teorii pola z symetrią cechowania. Dla trzech oddziaływań fundamentalnych: elektromagnetycznych, słabych i silnych, postulujemy niezmienniczość względem lokalnych transformacji cechowania opartych odpowiednio na grupach $U(1)$, $SU(2)_L$ i $SU(3)$. Podstawowymi stopniami swobody są fermionowe pola materii:

- leptony: trzy dublety względem grupy $SU(2)$: (elektron e^- , neutrino elektronowe ν_e), (mion μ^- , neutrino mionowe ν_μ), (taon τ , neutrino taonowe ν_τ)
- kwarki: trzy dublety względem grupy $SU(2)$, każdy będący trypletem względem grupy $SU(3)$: (kwark dolny, kwark górny), (kwark dziwny, kwark powabny), (kwark piękny i kwark prawdziwy)

natomiast kwanty odpowiednich kombinacji potencjałów odpowiadają cząstkom: fotonowi, bozonom Z , W^+ i W^- oraz gluonom. Problem nadania masy bozonom przenoszącym oddziaływanie słabe, tj. bozonom Z , W^+ i W^- jest rozwiązywany poprzez wprowadzenie dodatkowego pola skalarnego z potencjałem o podwójnym ekstremum w którym następuje mechanizm spontanicznego łamania symetrii. Poprzez niezerową wartość oczekiwaną pola Higgsa wprowadzamy w sposób zgodny z niezmienniczością względem symetrii cechowania masę zarówno wspomnianym trzem bozonom jak i wszystkim fermionom poprzez sprzężenie Yukawy.

Tematem zebranych prac są właściwości Chromodynamiki Kwantowej czyli części Modelu Standardowego opisującego oddziaływanie silne. Lagrangian Chromodynamiki Kwantowej, korzystając z notacji PDG [1], ma postać

$$\mathcal{L} = \sum_q \bar{\psi}_{q,a} (i\gamma^\mu \partial_\mu \delta_{ab} - g_s \gamma^\mu t_{ab}^C \mathcal{A}_\mu^C - m_q \delta_{ab}) \psi_{q,b} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^A F^{A\mu\nu} \quad (1)$$

gdzie

$$F_{\mu\nu}^A = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu^A - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu^A - g_s f_{ABC} \mathcal{A}_\mu^B \mathcal{A}_\nu^C \quad (2)$$

$\psi_{q,a}$ są polami kwarkowymi o zapachu q transformującymi się w reprezentacji fundamentanej grupy $SU(3)$. Z kolei pola $\mathcal{A}_\nu^A$ opisują gluony i transformują się w reprezentacji dołączonej. t_{ab}^C są generatorami grupy $SU(3)$ spełniającymi relację $[t^A, t^B] = if_{ABC} t^C$, gdzie f_{ABC} są stałymi struktury grupy. g_s jest silną stałą sprzężenia i zarówno opisuje siłę oddziaływań kwarków z gluonami w równaniu (1) jak i gluonów z gluonami, w równaniu (2).

W zagadnieniach omawianych w zebranych pracach wiodący wkład do obserwabli fizycznych wnoszą oddziaływania silne, dlatego też w pozostałej części tego opisu skupię się wyłącznie na oddziaływaniach kwarków i gluonów, a zaniedbam poprawki i modyfikacje pochodzące od pozostałych oddziaływań, tzn. będę rozważać Chromodynamikę Kwantową jako samodzielną teorię w której stała sprzężenia oraz sześć mas kwarków są swobodnymi parametrami teorii których wartość może zostać ustalona poprzez porównanie przewidywań teoretycznych z wynikami doświadczalnymi siedmiu starannie dobranych obserwabli.

Chromodynamika Kwantowa ma kilka bardzo charakterystycznych właściwości. Jest renormalizowalną kwantową teorią pola z symetrią cechowania [2]. Wyróżnia się asymptotyczną swobodą [3], co oznacza, że zrenormalizowana stała sprzężenia dąży logarytmicznie do zera dla bardzo wysokich energii. Pomimo, że stała sprzężenia jest bezwymiarowa następuje dynamiczne wygenerowanie wymiarowej skali energetycznej nazywanej Λ_{QCD} . Pojawienie się niezerowego kondensatu kwarkowego powoduje spontaniczne złamanie symetrii chiralnej, dzięki czemu najlżejsze stany związane, piony, mają efektywnie małą masę.

Biegająca silna stała sprzężenia

Eksperymentalną informację na temat silnej stałej sprzężenia posiadamy z trzech głównych procesów eksperymentalnych: fizyki jetów w zderzeniach e^+ i e^- , fizyki jetów w zderzeniach proton-proton oraz ze zderzeń głęboko nieelastycznych (DIS). Doświadczenia przeprowadzone w ciągu ostatnich 40 lat pozwoliły zebrać i opracować wystarczająco dużo danych, które jednoznacznie pokazują zależność wartości silnej stałej sprzężenia od energii przekazywanej w procesie, np. wykres 9.3 w PDG [1]. Wykres ten jasno pokazuje istotę asymptotycznej swobody: dla rosnących energii silna stała sprzężenia maleje, natomiast dla malejących energii poniżej 1 GeV dramatycznie rośnie.

Po stronie teoretycznej zależność stałej sprzężenia od energii można wyprowadzić poprzez równania Callana-Symanzika i równania grupy renormalizacji. W języku rachunku perturbacyjnego do którego pokrótce wrócę w kolejnych paragrafach, obserwabli opisane są poprzez szeregi perturbacyjne. W wyższych rzędach rachunku zaburzeń niezbędne jest rozróżnienie gołych parametrów Lagrangianu od ich zrenormalizowanych wartości niosących znaczenie fizyczne. Zrenormalizowane obserwabli posiadają czysto techniczną zależność od skali na której przeprowadzona została procedura renormalizacji. Równania grupy renormalizacji opisują funkcjonalną zależność obserwabli od skali renormalizacji. Jeśli utożsamimy skalę renormalizacji z transferem energii w danym procesie, otrzymamy zależność obserwabli od fizycznej skali energii. Równanie grupy renormalizacji zapisane dla silnej stałej sprzężenia ma postać [1],

$$\mu_R^2 \frac{d\alpha_s}{d\mu_R^2} = \beta(\alpha_s) = -(b_0\alpha_s^2 + b_1\alpha_s^3 + b_2\alpha_s^4 + \dots), \quad (3)$$

gdzie $\alpha_s(\mu_R) = \frac{1}{4\pi}g_s^2(\mu_R)$ oraz

$$b_0 = (33 - 2n_f)/(12\pi), \quad (4)$$

$$b_1 = (153 - 19n_f)/(24\pi^2). \quad (5)$$

Ujemna wartość prawej strony równania (3) odpowiada za malenie stałej sprzężenia wraz z μ_R a zatem i za asymptotyczną swobodę.

Perturbacyjne i nieperturbacyjne metody obliczeniowe

Olbrzymi sukces rachunków teoretycznych opiera się na rozwinięciu perturbacyjnym. Jeśli ograniczymy się do wysokich skal energii, zgodnie z wnioskami z poprzedniego paragrafu, silna stała sprzężenia jest mała, a zatem oddziaływanie kwarków z gluonami i gluonów z gluonami będzie słabe. W takiej sytuacji pożyteczne okazuje się przybliżenie układu cząstek, układem swobodnym tzn. układem cząstek, które nie oddziałują ze sobą i obliczenie dla niego przewidywać dla konkretnych obserwabli. Następnie obliczając kolejne diagramy Feynmana można systematycznie uwzględnić poszczególne oddziaływania pomiędzy kolejnymi cząstkami. Choć technicznie ten program jest bardzo skomplikowany, dla niektórych obserwabli, np. dla silnej stałej sprzężenia udało się policzyć poprawki uwzględniając 5 rząd [4]. Pomimo faktu, że szereg perturbacyjny w kwantowej teorii pola jest szeregiem asymptotycznym rachunki w ramach Elektrodynamiki Kwantowej dla anomalnego momentu magnetycznego elektronu pozwoliły przewidzieć wynik eksperymentalny z dokładnością do 13 cyfr znaczących.

Rachunkowi perturbacyjnemu w Chromodynamice Kwantowej zawdzięczamy teoretyczne przewidywania dla olbrzymiej większości wysoko-energetycznych procesów zachodzących w dzisiejszych detektorach pracujących na akceleratorach cząstek takich jak RHIC w Brookhaven National Laboratory czy LHC w CERN pod Genewą, na przykład przekój czynny na produkcję cząstki Higgsa w wyniku fuzji gluonów, aby wymienić choć jeden. Obliczone perturbacyjnie rozpraszanie pojedynczych kwarków lub gluonów (partonów) w konwolucji z nieperturbacyjnymi funkcjami struktury, modelowanymi teoretycznie lub wyciągniętymi z danych eksperymentalnych, pozwalają obliczyć przekroje czynne mierzone w powyższych eksperymentach.

Jasne jest jednak, że dla mniejszych energii, gdy Chromodynamika Kwantowa staje się silnie oddziaływującą teorią pola rachunek perturbacyjny nie będzie dobrym przybliżeniem. Poszukiwane są zatem inne metody obliczeniowe. Dużą nadzieję w ostatnich 20 latach wzbudziła teoria strun, w której znaleziono dualność polegającą na możliwości odwzorowania silnie oddziaływującej kwantowej teorii z symetrią cechowania na słabo sprzężony układ stopni swobody oddziaływujących grawitacyjnie. I choć udało się wykorzystać tę drogę do modelowania fizyki zderzeń ciężkich jonów, niestety dualność ta postulowana dla silnie symetrycznych układów nie znalazła jeszcze praktycznego zastosowania dla Chromodynamiki Kwantowej. Jedyną znaną metodą obliczeniową pozwalającą uzyskiwać przewidywania Chromodynamiki Kwantowej wprost z zasad pierwszych fizyki dla dowolnej wartości stałej sprzężenia jest sformułowanie tej teorii na euklidesowej, zdyskretyzowanej siatce czasoprzestrzennej i numeryczne oszacowanie pożądanych obserwabli. Rozwojowi metod obliczeniowych w tej metodzie poświęcona jest niniejsza rozprawa.

Sformułowanie kwantowej teorii pola na sieci

Sformułowanie Chromodynamiki Kwantowej na sieci opiera się na przepisie kwantyzacji podanej przez Richarda Feynmana poprzez sumę po trajektoriach [5]. Zgodnie z tym przepisem kwantowa wartość oczekiwana dowolnego operatora $\mathcal{O}$ zapisana może być symbolicznie jako

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int d\phi \mathcal{O}[\phi] e^{iS_{\text{QCD}}[\phi]}, \quad (6)$$

gdzie S_{QCD} jest działaniem dla Chromodynamiki Kwantowej, a ϕ reprezentuje wszystkie teorio-polowe stopnie swobody, tzn. pola $\mathcal{A}$ oraz $\bar{\psi}$ i ψ , natomiast $\mathcal{Z}$ jest funkcją rozdziału

$$\mathcal{Z} = \int d\phi e^{iS_{\text{QCD}}[\phi]}. \quad (7)$$

Całka funkcjonalna w równaniu (6) lub w równaniu (7) odpowiada sumie po wszystkich możliwych konfiguracjach pól wchodzących w skład ϕ . Równanie (6) jest zapisem czysto formalnym, choćby z tego względu, że całkowane jest nieskończenie wiele równoważnych ze względu na symetrię cechowania konfiguracji pól $\mathcal{A}$. Jednym ze sposobów nadania praktycznego sensu temu równaniu jest zapisanie go na skończonej, zdyskretyzowanej siatce czasoprzestrzennej, co sprawia że całka funkcjonalna redukuje się do skończonego iloczynu zwykłych całek po rozmaitości grupy $SU(3)$. Kolejnym krokiem jest dokonanie obrotu Wicka, w konsekwencji którego, silnie oscylująca funkcja $e^{iS_{\text{QCD}}[\phi]}$ transformuje się w dodatnią wagę Boltzmannowską $e^{-S_{\text{QCD}}[\phi]}$. Sformułowanie takie zostało zaproponowane po raz pierwszy przez Kennetha Wilsona w [6].

Wprowadzenie minimalnej stałej siatki a odpowiada twardemu obcięciu na dostępne pędy w pętlach wirtualnych cząstek, a zatem regularyzuje teorię w ultrafiolecie. Z kolei wprowadzenie skończonej objętości L odpowiada niezerowemu minimalnemu pędowi, czyli regularyzuje obserwabie w reżimie podczerwonym. Innymi słowy, dla skończonej i niezerowej wartości a i L wszystkie obserwabie mają skończoną wartość oczekiwaną. Usunięcie regularyzacji odpowiada granicy kontinuum czyli granicy $a \rightarrow 0$ i wymaga przeprowadzenia procedury renormalizacji, jak również granicy nieskończonej objętości $L \rightarrow \infty$.

Możliwe jest analityczne udowodnienie następujących twierdzeń:

- Chromodynamika Kwantowa w zregularyzowaniu na siatce jest renormalizowalna we wszystkich rzędach rachunku zaburzeń [7],
- możliwe jest odtworzenie pełnej przestrzeni Hilberta stanów z przestrzeni z metryką Minkowskiego z euklidesowych funkcji korelacji [8].

4.3.2 Numeryczne symulacje Monte Carlo kwantowej teorii pola

Oszacowanie numerycznej wartości elementu macierzowego operatora $\mathcal{O}$ wymaga obliczenia wielowymiarowej całki z równania (6). W tym celu stosuje się metody numeryczne i wykorzystuje superkomputery.

Pierwszym krokiem jest usunięcie Grassmannowskich stopni swobody z całek (6) oraz (7). Działanie S_{QCD} składa się z dwóch części: działania dla pól gluonowych S_{gauge} i działania dla pól fermionowych S_{Dirac} opisującego oddziaływanie fermionów z gluonami, przy czym

$$\begin{aligned} S_{\text{Dirac}} &= \int d^4x \sum_q \bar{\psi}_{q,a}(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu \delta_{ab} - g_s \gamma^\mu t_{ab}^C \mathcal{A}_\mu^C(x) - m_q \delta_{ab}) \psi_{q,b}(x) = \\ &= \int d^4x d^4y \sum_q \bar{\psi}_{q,a}(x) D_{a,b}^q(x,y) \psi_{q,b}(y), \end{aligned} \quad (8)$$

gdzie $D_{a,b}^q(x,y)$ jest macierza operatora Diraca dla kwarku q . Ponieważ zmienne fermionowe występują w formie kwadratowej, możliwe jest ich formalne wyciągnięcie i zastąpienie wyznacznikiem macierzy Diraca,

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \int d\mathcal{A} \mathcal{O}(\mathcal{A}) e^{-S_{\text{gauge}}[\mathcal{A}]} \prod_q \det D^q[\mathcal{A}] \quad (9)$$

Dodatkowo zamiast zmiennych $\mathcal{A}(x)$ używane są zmienne $U(x)$ będące infitezymalnymi liniami Wilsona

$$U_\mu(x) = \int_x^{x+\hat{\mu}} e^{iaA_\mu(t)} dt \quad (10)$$

dzięki czemu równanie (9) w skończonej objętości przybiera postać

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \prod_x \int dU(x) \mathcal{O}(U) e^{-S_{\text{gauge}}[U]} \prod_q \det D^q[U], \quad (11)$$

czyli V -wymiarowej całki, gdzie V jest liczbą punktów na sieci. Podstawowym algorytmem szacowania tego typu całek jest metoda Monte Carlo. Polega ona na zastąpieniu kwadratury opartej na deterministycznym podziale przedziału całkowania przez losowy wybór punktów dla których obliczana jest wartość funkcji podcałkowej. W przypadku całki w równaniu (11) losowanymi wielkościami będą konfiguracje pola cechowania $U(x)$.

Całkę w równaniu (11) można zinterpretować probabilistycznie i każdej konfiguracji pól $U(x)$ przypisać dodatnią wagę daną przez $e^{-S_{\text{gauge}}[U]}$. W podanym wyrażeniu wagi oprócz jawnej zależności od konfiguracji pola cechowania zależą również od parametrów działania $S_{\text{gauge}} = S_{\text{gauge}}(g_s)$. W praktyce zamiast silnej stałej sprzężenia g_s wykorzystuje się następujący parametr

$$\beta = \frac{6.0}{g_s^2}. \quad (12)$$

Mając N konfiguracji pól cechowania zadanych z powyższym prawdopodobieństwem dla ustalonych wartości parametrów działania S_{QCD} możemy oszacować całkę (11) poprzez średnią arytmetyczną

$$\overline{\mathcal{O}} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathcal{O}(U_n) \prod_q \det D^q[U_n] = \langle \mathcal{O} \rangle + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right), \quad (13)$$

będącą przybliżeniem poszukiwanej średniej kwantowej z błędem statystycznym znikającym jak $N^{-\frac{1}{2}}$ wraz ze wzrostem liczby konfiguracji w zestawie.

Wraz z rozwojem algorytmów stało się możliwe uwzględnienie wyznacznika fermionowego w wadze probabilistycznej pól cechowania. W aktualnych badaniach typowo generuje się zestawy konfiguracji z prawdopodobieństwem zawierającym wkład od wyznacznika kwarków u , d i s , tzn. waga ma postać

$$S_{\text{gauge}}[U_n] \det D^u[U_n] \det D^d[U_n] \det D^s[U_n], \quad (14)$$

a więc zależy nie tylko od parametru β ale również od mas kwarków m_u, m_d i m_s parametryzowanych przez parametry κ ,

$$\kappa_u = \frac{1}{2(4 + am_u)}, \quad \kappa_d, \quad \kappa_s, \dots \quad (15)$$

Tymczasem wzór (13) upraszcza się do postaci

$$\overline{\mathcal{O}} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathcal{O}(U_n) = \langle \mathcal{O} \rangle + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right). \quad (16)$$

Wzór na wielkość $\overline{\mathcal{O}}$ może stanowić numeryczny przepis na otrzymanie wartości oczekiwanej dowolnej obserwacji w Chromodynamice Kwantowej, jeśli tylko wygenerowany został zestaw N konfiguracji pól cechowania $\{U_n\}_N$ przy zadanych wartościach parametrów działania S_{QCD} . Najpopularniejszym obecnie algorytmem pozwalającym na otrzymanie $\{U_n\}_N$ jest algorytm Hybrid Monte Carlo [9] implementujący łańcuch Markowa, gdyż jako jedyny pozwala uwzględnić nielocalne wyznaczniki fermionowe w rozkładzie prawdopodobieństwa generowanych konfiguracji pól cechowania. Wcześniej, do około lat 2000, stosowano przybliżenie *quenched* w którym dla zmniejszenia kosztów symulacji przyjmowano, że wyznaczniki fermionowe mają stałą wartość równą 1.

Strategia obliczeniowa w symulacjach numerycznych Chromodynamiki Kwantowej na sieci

Podsumowując powyższe rozważania, aby otrzymać wartość oczekiwaną zadanej obserwacji w Chromodynamice Kwantowej na sieci niezbędne jest wykonanie następujących kroków

1. wygenerowanie zestawów konfiguracji pól cechowania pokrywającego odpowiedni zakres wartości parametrów działania S_{QCD} :
 - β jest powiązana poprzez związek renormalizacyjny z wartością stałej siatki a ,
 - κ po odjęciu addytywnej renormalizacji masy jest proporcjonalne do masy kwarku, a więc w przypadku κ_u proporcjonalne do kwadratu masy pionu we wiodącym rzędzie chiralnego rachunku zaburzeń [10],
 - L powinno być dobrane tak aby efekty skończonego L były zaniedbywalne,
2. pomiar zadanej obserwacji $\mathcal{O}$ na wszystkich wygenerowanych zestawach konfiguracji pól cechowania
3. obliczenie wartości oczekiwanej $\mathcal{O}$ korzystając z równania (16)
4. oszacowanie ewentualnych czynników renormalizacyjnych dla obserwacji $\mathcal{O}$
5. wykonanie ekstrapolacji
 - ewentualnie do fizycznej masy kwarków
 - ewentualnie do nieskończonej objętości
 - do granicy kontinuum

W wyniku powyższych kroków otrzymujemy wartość oczekiwaną $\overline{\mathcal{O}}$, którą można porównać z wynikiem eksperymentalnym i której wszystkie niepewności systematyczne są możliwe do oszacowania.

Kryteria niezbędne do otrzymania w pełni kontrolowanych wyników

Precyzja wyników końcowych otrzymanych w ramach obliczeń Chromodynamiki Kwantowej na sieci zależy od jakości użytych zestawów konfiguracji pól cechowania, tzn. ich liczby i rozmieszczenia w przestrzeni parametrów $\{\beta, \kappa_u, \kappa_d, \kappa_s, \dots\}$. Kryteria oceny wyników są uzgadniane przez międzynarodowy zespół ekspertów i publikowane raz na dwa lata wraz z przeglądem wszystkich najważniejszych wyników otrzymanych w ramach symulacji numerycznych Chromodynamiki Kwantowej [11]. Kryteria są ściśle powiązane z trzema ekstrapolacjami wspomnianymi w punkcie 5 powyżej. Będąc bardziej konkretnym wymagane są zespoły konfiguracji pól cechowania spełniające:

1. zespół konfiguracji o minimalnej masie pionu < 200 MeV, wraz z trzema lub więcej zespołami konfiguracji wykorzystanych w ekstrapolacji chiralnej albo dwa zespoły konfiguracji z których dla jednego masy pionu leży nie dalej niż 10 MeV od fizycznej masy neutralnego pionu a masa pionu dla drugiego zestawu jest < 200 MeV

2. przynajmniej trzy stałe sieci, z których dwie są mniejsze niż 0.1 fm oraz pokrywają zakres

$$(a_{\max}/a_{\min})^2 > 2,$$

przy założeniu, że działanie S_{QCD} jest wolne od wyrazów liniowych w a

3. zespoły konfiguracji pól cechowania o trzech różnych objętościach lub objętość spełniająca nierówność

$$\left(\frac{M_{\pi,\min}}{200\text{MeV}}\right)^2 \exp\{4 - M_{\pi,\min}L_{\max}\} \leq 1.$$

Bardzo ważne jest zatem aby pracować na odpowiednich zespołach konfiguracji pól cechowania, a stworzenie odpowiednich zespołów wymaga olbrzymich nakładów pracy i czasu. Mój wkład w ten etap prowadzenia symulacji Monte Carlo Chromodynamiki Kwantowej w ramach kolaboracji CLS opublikowany w [H1] opisuję w części 4.3.4.

4.3.3 Nieperturbacyjna renormalizacja oraz usunięcie wiodących efektów dyskretyzacji

Wynikiem końcowym otrzymanym z opisywanych symulacji to znaczy takim który możliwy jest do porównania z wielkością zmierzoną eksperymentalnie, jest rezultat ekstrapolacji do kontinuum czyli w granicy stałej sieci dążącej do zera. Wynik taki będzie istnieć tylko jeśli wszystkie wielkości potrzebne do jego obliczenia zostaną poprawnie zrenormalizowane. Jednym ze sposobów oszacowania stałych renormalizacyjnych jest obliczenie ich perturbacyjnie przy użyciu rachunku zaburzeń na sieci. Można argumentować że ponieważ stałe renormalizacyjne są określone przez ultrafioletową część teorii, przybliżenie perturbacyjne może być wiarygodne. W praktyce okazuje się jednak, że sieciowy szereg perturbacyjny wykazuje słabą zbieżność a szacowanie coraz wyższych rzędów jest trudniejsze niż w kontinuum z powodu dodatkowych diagramów Feynmana generowanych przez złamaną symetrię obrotową. Najczęściej używanym obecnie podejściem jest szacowanie stałych renormalizacyjnych nieperturbacyjnie poprzez zdefiniowanie warunków renormalizacyjnych przy pomocy odpowiednich funkcji korelacji. Konkretna propozycja schematu renormalizacji oparta o funkcje korelacji odpowiednich operatorów została zbadana przeze mnie w dwóch pracach [H2] i [H3] i jest opisana w rozdziale 4.3.5.

Oprócz renormalizacji drugim ważnym czynnikiem wpływającym na precyzję wyniku końcowego jest usunięcie (ang. *improvement* czyli ulepszenie) wyrazów liniowych w stałej sieci a przez co ekstrapolację kontinuum można wykonać liniowo w a^2 . W pracy [12] Symanzik zaproponował systematyczny program pozwalający usunąć wiodące efekty dyskretyzacji poprzez dodanie do działania symulowanej teorii wyżej wymiarowych operatorów irrelevantnych, tzn. takich które z przyczyn wymiarowych znikają w naiwnej granicy kontinuum. Dla przykładu, można rozwinąć zdyskretyzowane działanie symulowanej teorii, w tym przypadku Chromodynamiki Kwantowej w szereg w stałej sieci a ,

$$S_{\text{QCD}}(a) = S_{\text{QCD}}^{\text{continuum}} + aS_{\text{linear}} + a^2S_{\text{quadratic}} + \dots \quad (17)$$

Poprzez odpowiedni dobór czynnika numerycznego można dzięki temu wyeliminować wiodące wyrazy liniowe, tzn. symulować działanie

$$S_{\text{QCD}}^{\text{improved}}(a) \equiv S_{\text{QCD}}(a) - aS_{\text{linear}} = S_{\text{QCD}}^{\text{continuum}} + a^2S_{\text{quadratic}} + \dots \quad (18)$$

Współczynniki liczbowe parametryzujące operatory w S_{linear} zależą od wszystkich parametrów działania: $\beta, \kappa, \dots$ i noszą nazwę współczynników ulepszających (ang. *improvement coefficients*). Analogicznie jak dla stałych renormalizacyjnych ich wartości mogą zostać oszacowane perturbacyjnie poprzez sieciowy rachunek zaburzeń albo nieperturbacyjnie poprzez narzucenie warunków na odpowiednio dobrane funkcje korelacji. Naturalnie współczynniki ulepszające dzielą się na dwie klasy: czynniki tradycyjnie nazywane literą c które usuwają efekty dyskretyzacji które nie zależą od masy kwarków, tzn. które istnieją w teorii z bezmasowymi kwarkami oraz na współczynniki b proporcjonalne do wiodących efektów dyskretyzacji proporcjonalnych do masy kwarków. Drugą pożyteczną klasyfikacją jest podział na czynniki parametryzujące wiodące efekty dyskretyzacji generowane w działaniu, jak np. czynnik c_{SW} dzięki któremu można usunąć liniowe efekty dyskretyzacji fermionów Wilsona, oraz na czynniki parametryzujące efekty dyskretyzacji prądów oraz pozostałych operatorów których wartości oczekiwane chcielibyśmy poznać. Oczywiście przed przystąpieniem do programu generacji zespołów konfiguracji pól cechowania niezbędnym jest określenie wartości czynników ulepszających z pierwszej kategorii. Pierwszą nieperturbacyjną metodę oszacowania poszczególnych czynników ulepszających typu b zaproponowałem w pracy [H4] i opisuję w części 4.3.6.

Obydwa powyższe zagadnienia mają kluczowe znaczenie przy doborze parametrów generowanych zespołów konfiguracji pól cechowania. W działaniu S_{QCD} mamy dostęp do gołych parametrów: $\beta, \kappa_u, \dots$ podczas gdy oczekujemy, że wygenerowany zespół konfiguracji będzie się charakteryzował pożądanymi parametrami zrenormalizowanymi takimi jak stała sieci a , masa pionu m_π , czy masa kaonu m_K . Sztuka w wygenerowaniu zespołów konfiguracji polega więc na przewidzeniu renormalizacji jak również odpowiednich parametrów ulepszenia, tak aby końcowy zespół konfiguracji pól cechowania odpowiadał pożądanym parametrom z dokładnością do efektów dyskretyzacji rzędu $\mathcal{O}(a^2)$. Poniżej opisuję jak ten problem został rozwiązany przez kolaboracje CLS i opisany w pracy [H1].

4.3.4 Generacja zestawów konfiguracji pól cechowania: praca [H1]

Praca [H1] skupia się na pierwszym kroku obliczeń, czyli na generacji zestawów konfiguracji pól cechowania i prezentuje praktyczne rozwiązanie szeregu problemów związanych z tym zadaniem. Poniżej pokrótce omówię te problemy, naszkicuję zaproponowane rozwiązania i wyszczególnię mój wkład.

Istnieje wiele zaproponowanych sposobów dyskretyzacji działania Chromodynamiki Kwantowej S_{QCD} . Każde charakteryzuje się pewnymi zaletami i wadami. W pracy [H1] opisana została strategia generacji zestawów pól konfiguracji dla dyskretyzacji działania gluonowego znanej jako działanie *Lüscher-Weisz* [13, 14] w którym oprócz standardowego działania Wilsona określonego za pomocą minimalnych, kwadratowych pętli Wilsona dodaje się również człon zawierający minimalne pętłe prostokątne

$$S_{\text{gauge}} = S_{\text{Wilson}} + S_{\text{improvement}}, \quad (19)$$

$$S_{\text{Wilson}} = \frac{\beta}{6} \sum_P \text{tr} \left(1 - U(P) \right), \quad (20)$$

$$S_{\text{improvement}} = \frac{\beta}{6} c \sum_R \text{tr} \left(1 - U(R) \right), \quad (21)$$

a współczynnik c jest określony poprzez warunek znikania wiodących, kwadratowych, efektów dyskretyzacji w wiodącym rzędzie rachunku zaburzeń [15]. Podobnie, w przypadku działania fermionowego zdecydowano się na standardową dyskretyzację zaproponowaną przez Wilsona uzupełnioną członem Sheikholeslami–Wohlert’a usuwającym wiodące, liniowe, efekty dyskretyzacji [16], którego współczynnik został wyznaczony nieperturbacyjnie [17]. Takie działanie $S_{\text{QCD}}^{\text{lattice}}$ charakteryzuje się więc efektami dyskretyzacji rzędu a^2 , natomiast użycie fermionów Wilsona łamiących jawnie symetrię chiralną skutkuje między innymi addytywną renormalizacją mas kwarków. Obydwie konsekwencje okażą się kluczowe w pracach przedstawionych poniżej.

Autokorelacje i otwarte warunki brzegowe

Jak wspominałem wraz z ustaleniem wartości parametrów działania Chromodynamiki Kwantowej S_{QCD} rozkład probabilistyczny konfiguracji pól cechowania jest jednoznacznie określony i możliwe jest 'wylosowanie'/wygenerowanie konfiguracji z tego rozkładu. W praktyce dokonuje się tego poprzez numeryczną implementację łańcucha Markowa. Najprostszą realizacją łańcucha Markowa jest algorytm Metropolis’a, w którym w swojej najbardziej naiwnej formie, każda zmiana elementu macierzowego pojedynczej macierzy $U(x)$ jest akceptowana z prawdopodobieństwem cząstkowym równym

$$W(U_i \rightarrow U_{i+1}) = e^{-S_{\text{QCD}}[U_{i+1}] + S_{\text{QCD}}[U_i]}. \quad (22)$$

Podejście takie jest wyjątkowo nieefektywne w omawianym przypadku, bo działanie $S_{\text{QCD}}[U_i]$ zawiera Nielokalne wyznaczniki fermionowe, których obliczenie jest najbardziej czasochłonną częścią obliczeń. W algorytmie Metropolis’a konieczne byłoby powtórzenie tego kroku $> 10^9$ razy zanim każdej ze zmiennych zostałaby zaproponowana nowa wartość. Zdecydowanie lepszym rozwiązaniem jest algorytm Hybrid Monte Carlo (HMC) [9], który łączy elementy dynamiki molekularnej z krokiem akceptacji z algorytmu Metropolis’a. Dzięki temu w jednym kroku zmieniane są macierze $U(x)$ dla wszystkich x jednocześnie i zmiana jest akceptowana z prawdopodobieństwem cząstkowym jak w równaniu (22) co wymaga pojedynczego oszacowania wyznacznika fermionowego. Po osiągnięciu przez algorytm równowagi stochastycznej kolejne konfiguracje pól cechowania będą się pojawiać zgodnie z zażądanym prawdopodobieństwem.

Typowym problemem w praktycznej realizacji przedstawionego powyżej podejścia są autokorelacje kolejnych konfiguracji pól cechowania, czyli statystyczne powiązanie bieżącej konfiguracji od poprzedniej. W wyniku autokorelacji wzór (16) ulega modyfikacji. Wielkość autokorelacji zależy zarówno od parametrów algorytmicznych danej implementacji algorytmu HMC jak również od sytuacji fizycznej czyli od parametrów działania Chromodynamiki Kwantowej. W pracy [18] zbadana została, zależność autokorelacji od β . Pokazane zostało, że z powodu periodycznych warunków brzegowych dla pól cechowania nietrywialny ładunek topologiczny pozostaje uwięziony w symulowanej objętości, podczas gdy zasada ergodyczności wymaga aby konfiguracje pól cechowania pochodziły ze wszystkich dostępnych sektorów topologicznych teorii. Dla małych stałych sieci, $a < 0.05$ fm, fluktuacje ładunku topologicznego stają się zbyt rzadkie, a więc autokorelacje kolejnych konfiguracji stają się bardzo duże. Uniemożliwia to w praktyce poprawne oszacowanie błędów statystycznych.

Ponieważ wspomniane kryteria jakości wyników końcowych wymagają wykorzystania przynajmniej jednego zespołu konfiguracji pól cechowania o stałej sieci $a < 0.05$ fm niezbędne było rozwiązanie problemu uwięzienia ładunku topologicznego w symulowanej objętości. Rozwiązanie polegające na użyciu otwartych warunków brzegowych w jednym z czterech kierunków zostało zaproponowane

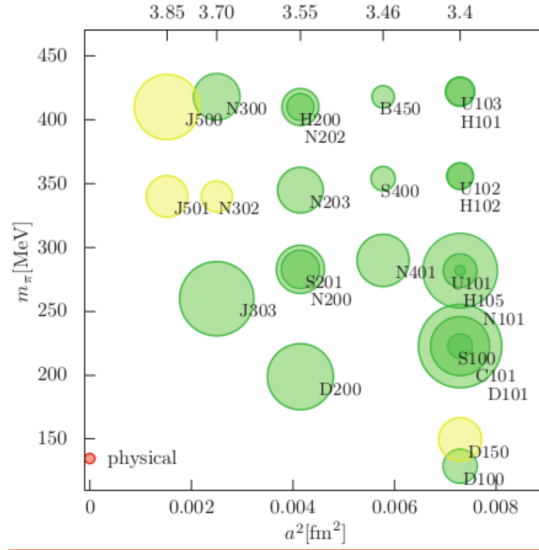


Figure 1: Zespoły konfiguracji pól cechowania wygenerowane przez kolaborację CLS na płaszczyźnie stałej sieci w fm (oś pozioma) i masy pionu w MeV (oś pionowa). Rozmiar kółek jest proporcjonalny do numerycznego kosztu każdego zespołu konfiguracji.

przez M. Lüschera w pracy [19] oraz zaimplementowane w ogólnie dostępnym kodzie komputerowym openQCD. Otwarte warunki brzegowe zdefiniowane są dla pól cechowania następująco

$$F_{0k}(x)|_{x_0=0} = F_{0k}(x)|_{x_0=T} = 0 \text{ dla } k = 1, 2, 3 \quad (23)$$

oraz dla pól fermionowych

$$P_+ \psi(x)|_{x_0=0} = P_- \psi(x)|_{x_0=T} = 0, \quad (24)$$

$$\bar{\psi}(x)P_-|_{x_0=0} = \bar{\psi}(x)P_+|_{x_0=T} = 0, \quad (25)$$

gdzie $P_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_0)$.

W pracy [H1] opisaliśmy pierwsze wyniki przedsięwzięcia polegającego na wygenerowaniu całego nowego zestawu zespołów konfiguracji pól cechowania z otwartymi warunkami brzegowymi uwzględniając wyznaczniki fermionowe kwarków u, d i s. Oprócz redukcji autokorelacji poprzez nowe warunki brzegowe kluczową częścią pracy było opracowanie strategii dobierania parametrów generowanych zespołów w taki sposób, aby zapewnić spełnienie wszystkich trzech przedstawionych powyżej kryteriów. Zadanie takie jest o tyle trudne, że wymiarową stałą sieci, a więc i fizyczną masę pionu i wszystkich innych mierzonych stanów związanych można poznać tylko po wykonaniu pełnej analizy i powiązaniu mierzonych, zrenormalizowanych wielkości z wielkościami mierzonymi w eksperymencie.

Przyjęta strategia

Najważniejszą częścią pracy jest opracowana strategia określająca w jaki sposób należy wykonać ekstrapolację chiralną oraz ekstrapolację do granicy kontinuum. Wszystkie zespoły konfiguracji pól cechowania spełniają warunek wystarczającej objętości, więc można przyjąć, że efekty skończonej objętości będą zaniedbywalne, przynajmniej jeśli chodzi o podstawowe obserwabie takie

jak masy albo stałe rozpadu lekkich mezonów. Wszystkie wielkości wymiarowe zostały zastąpione bezwymiarowymi kombinacjami przy użyciu sztucznej skali t_0 wprowadzonej w pracy [20] i charakteryzującej się bardzo dużą precyzją statystyczną. Aby wybrać punkty na płaszczyźnie mas kwarków parametryzowanej przez $\kappa_u = \kappa_d$ oraz κ_s zdefiniowana została trajektoria stałej sumy zredukowanych mas kwarków, $S = 2a\hat{m}_u + a\hat{m}_s = \text{const}$, gdzie

$$a\hat{m} = am - am_{\text{crit}}$$

a m_{crit} jest krytyczną masą dla której z definicji izotryplet pionowy oraz kaonowy stają się bezmasowe. am_{crit} odpowiada renormalizacji addytywnej masy i zawiera rozbieżność typu $1/a$. Wyraz taki pojawia się ponieważ użyta dyskretyzacja fermionów Wilsona łamie symetrię chiralną. Podstawową zaletą przyjętej definicji jest fakt, że liniowe efekty dyskretyzacji proporcjonalne do mas kwarków są proporcjonalne do S oraz do współczynnika ulepszenia b_g , którego wartość jest nieznaną. A zatem wzdłuż tej trajektorii efekty dyskretyzacji będą mieć zapewniony stały współczynnik, a więc mamy pewność, że w granicy kontinuum znikną. Taka trajektoria dojścia do parametrów odpowiadających fizycznym masom kwarków lekkich i kwarku dziwnego została po raz pierwszy zaproponowana przez kolaborację QCDSF w pracy [21]. Problem redukuje się zatem do znalezienia odpowiedniej wartości sumy S , która pozwoli trafić na fizyczną masę kwarków w granicy kontinuum.

W pracach opisanych w artykule [H1] byłem odpowiedzialny za wygenerowanie 3 z 12 przedstawionych tam zespołów konfiguracji pól cechowania. Zaproponowałem optymalne ustawienia algorytmiczne ograniczając numeryczny koszt symulacji. Prowadziłem symulacje i rozwiązywałem powstające problemy. Ponieważ były to pierwsze symulacje przy zastosowaniu opisanych powyżej rozwiązań (otwarte warunki brzegowe, nowy rodzaj algorytmu odwracającego macierz operatora Diraca,...) rozwiązanie bieżących problemów wymagało dogłębnego zrozumienia całości algorytmu.

W kolejnych latach nadzorowałem generację 5 kolejnych zespołów konfiguracji pól cechowania położonych na drugiej, niezależnej trajektorii w której masa kwarku dziwnego jest zawsze równa fizycznej masie kwarku dziwnego niezależnie od masy kwarków lekkich [22]. Dzięki temu, że wielkości mogą być oszacowane wzdłuż dwóch trajektorii, które w granicy kontinuum i w granicy masy pionu przyjmującej fizyczną masę pionu powinny dać tę samą wartość ekstrapolacje są bardzo ograniczone a więc otrzymane wyniki będą posiadać stosunkowo małe niepewności systematyczne. Obecny stan wygenerowanych zespołów konfiguracji pokazany jest na rysunku 1 na płaszczyźnie kwadratu stałej sieci a w fermich i masy pionu w MeV. Wielkość kółek pokazuje numeryczny koszt danego zespołu konfiguracji, zespoły konfiguracji zaznaczone na żółto ciągle są rozwijane. Wykorzystując zespoły konfiguracji układające się w poziome linie można wykonać ekstrapolacje do kontinuum przy ustalonej masie pionu. Z kolei zespoły konfiguracji układające się wzdłuż pionowych linii pozwalają wykonać ekstrapolacje do fizycznej masy pionu. Biorąc wszystkie zespoły konfiguracji można wykonać ekstrapolację do punktu fizycznego zaznaczonego czerwoną kropką.

Zniekształcenia spowodowane otwartymi warunkami brzegowymi

Oddzielną sprawą była analiza efektów otwartych warunków brzegowych na typowe obserwabale. W materiałach pokonferencyjnych [K2] opisaliśmy jaka część symulowanej objętości wykazuje zniekształcenia związane z sąsiedztwem otwartego brzegu. Okazało się, że są one widoczne na około $\frac{1}{6}$ części sieci w kierunku czasowym blisko brzegów. W tym obszarze gęstość energii $\langle E^2 \rangle$ wykazywała wzrost w stosunku do średniej wartości otrzymanej w środkowym obszarze sieci, patrz

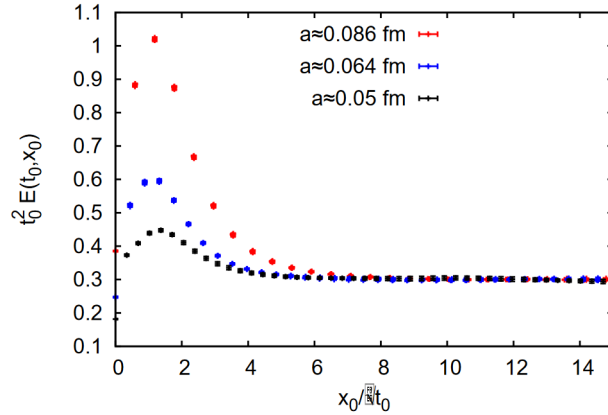


Figure 2: Wykres bezwymiarowej gęstości energii kolorowego pola cechowania $t_0^2 \langle E^2 \rangle$ jako funkcja dległości w bezwymiarowych jednostkach $x_0 / \sqrt{t_0}$ od otwartego brzegu. Wykres z pracy [K1]

wykres 2. A zatem kosztem uwolnienia się od rosnących autokorelacji związanych z uwięzieniem ładunku topologicznego okazało się zwiększenie symulowanej objętości o 30%. Oczywiście w granicy kontinuum jak również w granicy nieskończonej objętości efekt ten jest zaniedbywalny, jednak z praktycznego punktu widzenia, a zwłaszcza wykorzystania czasu komputerowego jest znaczący.

Ustawienia algorytmiczne

Osobnym zadaniem związanym z generacją zespołu konfiguracji pól cechowania jest dobór parametrów algorytmicznych zarówno algorytmu HMC jak i algorytmu szacującego odwrotność macierzy Diraca. Algorytm tego drugiego rodzaju zaimplementowany w kodzie openQCD jest wersją dwupoziomowego algorytmu typu multigrid [23], w którym widmo operatora Diraca dzielone jest na część niskoenergetyczną, której odpowiadają stany własne opisujące efekty długozasięgowe oraz na pozostałą część wysokoenergetyczną. Ustalenie parametrów algorytmu wymaga zatem przewidzenia zachowania się wartości własnych operatora Diraca podczas przemieszczania się pomiędzy kolejnymi konfiguracjami pól cechowania. Nieoptymalny dobór parametrów nie tylko może spowodować, że symulacja się załamie, ponieważ łańcuch Markowa znajdzie się w rejonie przestrzeni parametrycznej gdzie założenia algorytmiczne nie będą spełnione, ale przede wszystkim gorszą zbieżnością, a więc i znacznym wydłużeniem się czasu wykonania. Znaczne przyspieszenie symulacji można uzyskać dzieląc widmo operatora Diraca na przedziały [24] i wprowadzenie osobnych pól pseudofermionowych dla każdej części widma. Pozwala to wykorzystać różne algorytmy iteracyjne szacujące odwrotności poszczególnych części operatora Diraca: tzn. dla dolnej części stosuje się bardziej skomplikowane algorytmy jak wspomniany algorytm typu multigrid, natomiast dla wysokoenergetycznej części prostsze algorytmy typu *multishit conjugate gradient*. W efekcie otrzymujemy około 200 parametrów algorytmicznych które trzeba odpowiednio ustawić.

Wyniki opisane w tej pracy referowałem w imieniu całej kolaboracji na konferencji International Symposium on Lattice Field Theory w Nowym Jorku, USA w 2014 [K1].

4.3.5 Nieperturbacyjny schemat renormalizacji oparty o funkcje korelacji w przestrzeni położeń: prace [H2] i [H3]

W tej części opisuję schemat renormalizacyjny zaproponowany w pracy [25] oraz rozwinięty przeze mnie oraz współpracowników. Jak zostało przedstawione w części 4.3.5 stałe renormalizacyjne są niezbędne aby poprawnie zdefiniować granicę kontinuum badanych funkcji korelacji. Chromodynamika Kwantowa w sformułowaniu na sieci jest teorią renormalizowalną [7] a zatem wystarczy dodać skończoną liczbę kontrczłonów do działania aby całość była skończona w granicy znikającego regulatora. Współczynniki kontrczłonów należy zdefiniować poprzez odpowiednie warunki renormalizacyjne.

W omawianym tutaj schemacie renormalizacji warunki renormalizacyjne zostaną narzucone na dwupunktowe funkcje korelacji renormalizowanych operatorów. Interesujemy się więc funkcjami w których dwa takie same operatory rozsunięte są na odległość $x = an$. Przy okresowych warunkach brzegowych zachowana jest symetria translacji, możemy więc jeden z operatorów przypisać początkowi układu współrzędnych,

$$C_{\mathcal{O}}(x) = \langle \mathcal{O}(x) \mathcal{O}(0) \rangle \quad (26)$$

W przypadku otwartych warunków brzegowych w kierunku czasowym będziemy wymagać aby operator ten był wystarczająco daleko od brzegu sieci, najlepiej w środku sieci. Ponieważ funkcje korelacji $C_{\mathcal{O}}(x)$ maleją dosyć szybko z odległością x , jak x^{-6} , nie wprowadza to większych ograniczeń praktycznych.

Wspomniane warunki renormalizacyjne w schemacie renormalizacji opartym na funkcjach korelacji w przestrzeni położeń przyjmują więc postać

$$\langle \mathcal{O}_R(\mu, x) \mathcal{O}_R(\mu, 0) \rangle \equiv Z_{\mathcal{O}}^2(\mu = 1/\hat{x}) \langle \mathcal{O}(x) \mathcal{O}(0) \rangle \quad (27)$$

gdzie stałe renormalizacyjne $Z_{\mathcal{O}}(\mu = 1/\hat{x})$ są zdefiniowane warunkiem

$$Z_{\mathcal{O}}^2(\mu = 1/\hat{x}) \langle \mathcal{O}(\hat{x}) \mathcal{O}(0) \rangle = \langle \mathcal{O}(\hat{x}) \mathcal{O}(0) \rangle \Big|_{\text{tree-level}} \quad (28)$$

Innymi słowy dla zadanej odległości $\hat{x}$ narzucamy warunek aby zrenormalizowana funkcja korelacji była równa skończonej wartości tej funkcji korelacji obliczonej w wiodącym rzędzie rachunku zaburzeń. Skala renormalizacji odpowiada wtedy w przybliżeniu odwrotności odległości $\hat{x}$. Pozwala to zdefiniować operator $\mathcal{O}$ zrenormalizowany na skali μ

$$\mathcal{O}_R(\mu, x) = Z_{\mathcal{O}}(\mu) \mathcal{O}(x). \quad (29)$$

Istnieją oczywiście alternatywne, bardziej popularne schematy renormalizacji. Na uwagę zasługuje schemat renormalizacji RI-MOM [26] operujący na funkcjach wierzchołkowych i starający się imitować na sieci schemat $\overline{\text{MS}}$ z kontinuum oraz schemat nazywany schematem funkcyjnym Schrödingera, w którym warunki są sformułowane w języku funkcji korelacji zdefiniowanych na objętości z warunkami brzegowymi Dirichleta w kierunku czasowym [27]. Na ich tle użyty przez nas schemat wyróżnia się prostotą implementacji, niskim kosztem numerycznym oraz stosunkowo dużą precyzją numeryczną. Dodatkowo oparty jest na funkcjach korelacji niezmienniczych ze względu na symetrię cechowania w przeciwieństwie do schematu RI-MOM, który definiuje się tylko po uprzednim ustaleniu wycechowania na każdej konfiguracji. Zachowanie symetrii cechowania usuwa

niektóre problemy związane z mieszaniem się badanych operatorów z dodatkowymi operatorami dającymi wkład tylko po ustaleniu wycechowania.

Mając szereg funkcji korelacji skonstruowanych ze zrenormalizowanych operatorów $\mathcal{O}_R$ dla tej samej skali renormalizacji oraz tych samych pozostałych parametrów fizycznych, ale różnych stałych sieci, możemy wykonać ekstrapolację do kontinuum otrzymując skończoną wartość. Jednakże w tej wartości pozostanie ślad po użytym schemacie renormalizacji, dlatego najczęściej należy przetłumaczyć taką wartość do schematu wykorzystywanego w pracach fenomenologicznych tak aby możliwe było porównanie jej z wynikiem eksperymentalnym. Najpopularniejszym schematem renormalizacji w perturbacyjnej Chromodynamice Kwantowej jest schemat $\overline{\text{MS}}$, który zdefiniowany jest poprzez regularyzację wymiarową. W efekcie przetłumaczenie schematu nieperturbacyjnego do schematu $\overline{\text{MS}}$ może być dokonane wyłącznie poprzez perturbacyjne obliczenie czynnika konwersji, przy czym biegnąca stała sprzężenia pojawi się na skali równej skali renormalizacji.

Z powyższego wynika, że skala $\hat{x}$ powinna być jak najmniejsza (skala $\mu = 1/\hat{x}$ jak największa) aby zagwarantować zbieżność szeregu definiującego czynnik konwersji. Z drugiej strony skala $\hat{x}$ nie może być mniejsza niż kilka długości stałej sieci a , ponieważ wtedy w funkcji korelacji (26) dominują efekty dyskretyzacji. Dochodzimy więc do tak zwanego problemu okna ponieważ

$$a \ll \hat{x} \ll 1/\Lambda_{\text{QCD}} \quad (30)$$

gdzie skalę zbieżności szeregu perturbacyjnego oszacowujemy przez Λ_{QCD} . Problem okna pojawia się w większości nieperturbacyjnych schematów renormalizacji. Jego praktyczne spełnienie zależy od wykorzystanych funkcji korelacji (w tym przypadku funkcji $\langle \mathcal{O}(\hat{x})\mathcal{O}(0) \rangle$) jak i samych operatorów $\mathcal{O}$.

W pracy [H2], wraz z Krzysztofem Cichym, sprawdziliśmy jak ten schemat renormalizacji sprawdza się w praktyce dla zespołów konfiguracji pól cechowania wygenerowanych przez kolaborację ETM (European Twisted Mass collaboration). Niezależnie napisaliśmy całą analizę co pozwoliło szybko wyeliminować wszystkie błędy. Wyznaczyliśmy stałe renormalizacyjne dla operatorów skalarne, pseudoskalarne, wektorowe i aksjalne. Po raz pierwszy użyliśmy tej metody do konfiguracji z dynamicznymi fermionami. Poprzez pracę przy szczególnej wartości dodatkowego parametru obecnego w dyskretyzacji działania wykorzystywanym przez kolaborację ETM efekty dyskretyzacji badanych funkcji korelacji były rzędu a^2 (więcej na ten temat znajduje się w częściach 4.3.3 oraz 4.3.6). W celu dalszej eliminacji efektów dyskretyzacji zaproponowaliśmy praktyczny przepis pozwalający wybrać ze wszystkich dostępnych danych tylko te, dla których efekty dyskretyzacji są minimalne, tym samym zmniejszając niepewności systematyczne szacowanych stałych renormalizacyjnych. Wyniki dla stałej renormalizacyjnej operatora pseudoskalarne pokazują na wykresie 3. Pierwotne dane nieperturbacyjne pokazane są w lewym górnym rogu i dla dużych skal – małych odległości – wykazują duże efekty dyskretyzacji, rzędu 50%. W prawym górnym rogu okazane zostały jedynie punkty spełniające zaproponowane przez nas kryterium minimalizujące wiodące efekty dyskretyzacji. W dolnym rzędzie z danych zostały wydzielone wiodące efekty dyskretyzacji. Ponownie po prawej stronie znajdują się jedynie dane spełniające nasze kryterium. Bardzo dobrze widać, że pozostawione i poprawione dane oscylują wokół wspólnej wartości a rozrzut jest mniejszy niż 5%. Dzięki temu możemy dość precyzyjnie wyznaczyć stałą renormalizacji dla, w omawianym przypadku, operatora pseudoskalarne. Pozostałe efekty dyskretyzacji są rzędu $\mathcal{O}(a^2g^2)$ i możliwe jest ich oszacowanie w rachunku perturbacyjnym na sieci i ich usunięcie. Nasze wyniki porównaliśmy ze stałymi renormalizacyjnymi otrzymanymi przez członków kolaboracji ETM

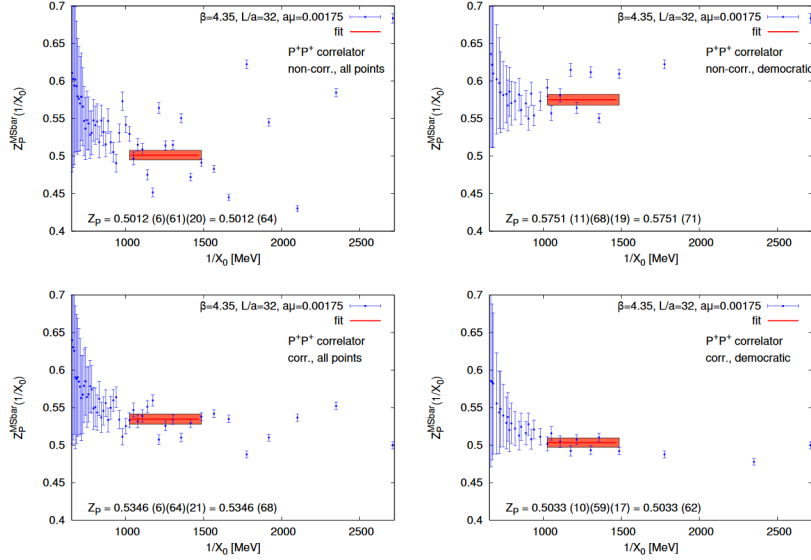


Figure 3: Oszacowanie wartości stałej renormalizacyjnej dla operatora pseudoskalarnego dla oryginalnych danych, oryginalnych danych tylko dla punktów o małych efektach dyskretyzacji, poprawionych danych, poprawionych danych tylko dla punktów o małych efektach dyskretyzacji (odpowiednio od lewego górnego wykresu do prawego dolnego). Wykres z pracy [H2]

w wspomnianym schemacie RI-MOM. Końcowymi wnioskami naszej pracy były obserwacje, że zarówno wartości stałych renormalizacyjnych jak i ich niepewności statystyczne i systematyczne w obydwu schematach są bardzo zbliżone.

Istnieje bardzo elegancki sposób ominięcia problemu okna zaproponowany przez Lüschera i Weisza [28]. Możliwe jest mianowicie nieperturbacyjne podniesienie skali renormalizacji poprzez oszacowanie czynników ewolucji w kontinuum. Czynniki ewolucji są to wielkości które opisują jak zmienia się zadana wielkość przy zmianie skali renormalizacji, np. dla operatora $\mathcal{O}$ możemy napisać

$$\sigma_{\mathcal{O}}(\mu, 2\mu) = \frac{\mathcal{O}^R(\mu, x)}{\mathcal{O}^R(2\mu, x)} = \frac{Z_{\mathcal{O}}(\mu)}{Z_{\mathcal{O}}(2\mu)}. \quad (31)$$

Ponieważ w powyższym ilorazie wszelkie rozbieżności się kasują, wielkość $\sigma_{\mathcal{O}}$ może być oszacowana w granicy kontinuum. Zaznaczając explicite zależność od regulatora, czyli stałej sieci

$$\sigma_{\mathcal{O}}(\mu, 2\mu) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{Z_{\mathcal{O}}(\mu, a)}{Z_{\mathcal{O}}(2\mu, a)}. \quad (32)$$

Znając wartości $\sigma_{\mathcal{O}}$ dla kilku wartości skal renormalizacji, np. μ , 2μ i 4μ , możemy nieperturbacyjnie zmienić skalę renormalizacji dla czynników renormalizacyjnych $Z_{\mathcal{O}}(\mu)$ otrzymując

$$Z_{\mathcal{O}}(4\mu) = \sigma_{\mathcal{O}}(4\mu, 2\mu)\sigma_{\mathcal{O}}(2\mu, \mu)Z_{\mathcal{O}}(\mu) \quad (33)$$

W takim przypadku przejście do schematu $\overline{\text{MS}}$ wykonane będzie dla czterokrotnie większej skali 4μ dla której systematyczny błąd obciążenia perturbacyjnego rozwinięcia czynnika konwersji może się okazać dużo mniejszy. Oczywiście wielkości $\sigma_{\mathcal{O}}$ dziedziczą zależność od schematu renormalizacji od stałych renormalizacyjnych, czyli będą różne dla różnych schematów renormalizacji. Podobnie jest w kontinuum, gdzie wymiary anomalne operatorów zależą w wyższych rzędach rachunku

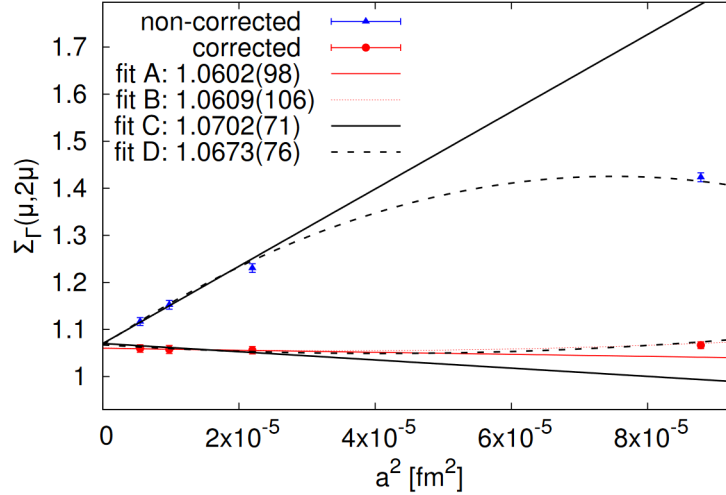


Figure 4: Ekstrapolacja do kontinuum wielkości $\sigma_P(\mu, 2\mu)$. Wykres z pracy [H3]

zaburzeń od użytego schematu renormalizacji.

W pracy [H3] sprawdziliśmy *explicite* działanie takiej procedury dla stałych renormalizacyjnych prądów skalarne, pseudoskalarne, wektorowe i aksjalne. Wygenerowałem większość potrzebnych zespołów konfiguracji oraz napisałem niezależną analizę w celu wyeliminowania błędów. Podobna praca dla popularnego schematu nieperturbacyjnej renormalizacji RI-MOM została opublikowana w [29]. W celu zmniejszenia kosztu symulacji wygenerowane zestawy konfiguracji pól cechowania nie zawierały efektów związanych z kwarkami morza. Ponownie wykorzystaliśmy działanie S_{QCD} w dyskretyzacji *twisted mass*. Ponieważ w schemacie renormalizacji opartym o funkcje korelacji w reprezentacji położenia skala renormalizacji zadana jest przez odwrotność odległości pomiędzy operatorami, kluczowym zadaniem wstępnym było wygenerowanie takich zestawów konfiguracji pól cechowania aby dla zadanej początkowej skali renormalizacji μ istniały zestawy konfiguracji dzięki którym możliwe jest oszacowanie stałych renormalizacyjnych przy skali 2μ i 4μ . Wiązało się to z koniecznością przeprowadzenia dużej liczby symulacji i znalezienia odpowiednich wartości odwrotności stałej sprężenia β dla których stała sieci przyjmowała odpowiednio wartości $\frac{1}{2}a$ i $\frac{1}{4}a$ w stosunku do początkowej wartości a .

W naszej pracy pokazaliśmy jakie są niezbędne kroki do oszacowania wielkości σ_O w schemacie renormalizacji przy użyciu funkcji korelacji w przestrzeni położenia oraz jakie są pojawiające się tam efekty dyskretyzacji. Mając do dyspozycji dane nieperturbacyjne stworzyliśmy dwa zestawy punktów, pierwszy składający się wprost z danych nieperturbacyjnych oraz drugi w którym odjęliśmy wiodące efekty dyskretyzacji rzędu a^2 w wiodącym rzędzie sieciowego rachunku zaburzeń. Obydwa zestawy różnią się wyłącznie efektami dyskretyzacji, a więc w granicy kontinuum powinny się ekstrapolować do tej samej wartości. Dzięki narzuceniu takiego warunku przy ekstrapolacji potrafiliśmy otrzymać w miarę precyzyjne wartości dla wielkości σ_O . Przykładową ekstrapolację do granicy kontinuum przedstawiam na wykresie 4. Równocześnie wykres ten obrazuje wielkość efektów dyskretyzacji obecnych w zastosowanej procedurze, poprawione i niepoprawione punkty mogą różnić się aż do 40%.

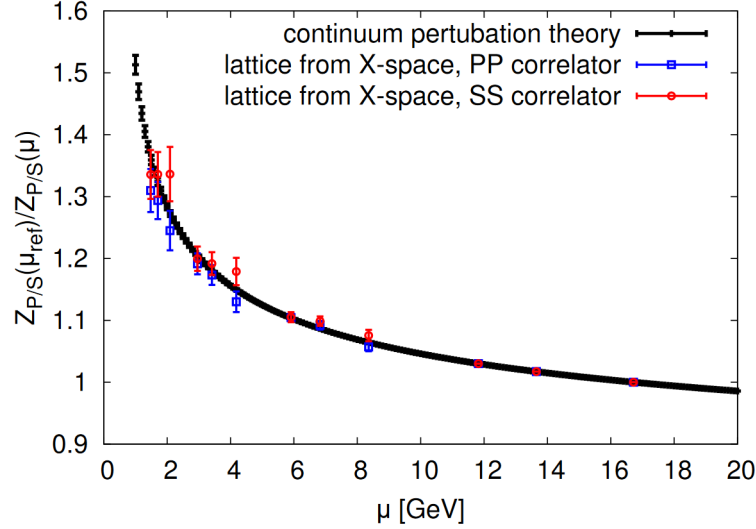


Figure 5: Biegnięcie stałych renormalizacyjnych dla operatorów skalarnego i pseudoskalarnego wraz ze zmianą skali renormalizacji. Wykres z pracy [H3]

Szczególnie ważnym wnioskiem było zwrócenie uwagi i uwzględnienie efektów skończonej objętości wpływających na wartość czynnika ewolucji σ_0 charakterystycznych dla użytego schematu renormalizacji. W pierwotnym podejściu zaproponowanym przez Lüschera i Weisza wykorzystano funkcje korelacji w sformułowaniu przy użyciu funkcjonału Schrödingera [27] gdzie skala renormalizacji jest bezpośrednio powiązana z symulowaną objętością w jednostkach fizycznych. W podejściu poprzez funkcje korelacji w przestrzeni położeń te dwie wielkości są niezależne i zbadaliśmy jakie muszą być stosunki tych wielkości aby zapewnić że efekty skończonej objętości są zaniedbywalne. Okazało się, że skala zadana przez odległość pomiędzy badanymi operatorami musi być conajmniej 8 razy mniejsza od rozmiaru symulowanej objętości, co równocześnie określa koszt numeryczny całej procedury, który jest w związku z tym dość duży.

W rezultacie tej pracy otrzymaliśmy nieperturbacyjne oszacowanie biegnięcia stałych renormalizacyjnych dla prądów skalarnego i pseudoskalarnego na przestrzeni skal od 2 GeV do 16 GeV. Wyniki te bezpośrednio tłumaczą się na biegnięcie mas kwarków zdefiniowanych w naszym schemacie renormalizacyjnym.

Wyniki opisane w tych pracach były referowane przez Krzysztofa Cichego podczas konferencji International Symposium on Lattice Field Theory w Southampton, UK w 2016 [K3].

4.3.6 Współczynniki ulepszające dla efektów dyskretyzacji proporcjonalnych do masy kwarków: praca [H4]

W rozdziale 4.3.3 opisałem znaczenie stałych renormalizacyjnych oraz współczynników ulepszających przy ekstrapolacji do granicy znikającej stałej sieci, $a \rightarrow 0$. Za pomocą tych pierwszych odejmujemy możliwe rozbieżności w a w estymowanych elementach macierzowych, za pomocą tych drugich usuwamy wiodące efekty dyskretyzacji umożliwiając ekstrapolację w a^2 . Procedurę oszacowania stałych renormalizacyjnych z dwupunktowych funkcji korelacji opisałem w poprzednim rozdziale. Warto podkreślić, że obydwa powyższe kroki mogą wymagać innej implementacji w zależności od różnych dyskretyzacji działania S_{QCD} . W sformułowaniu tzw. *twisted*

mass [30] pojawia się efekt automatycznego ulepszenia, gdzie poprzez dobór pojedynczego dodatkowego parametru w działaniu znikają wszystkie liniowe efekty dyskretyzacji w operatorach symetrycznych względem pewnej dodatkowej symetrii. Większość operatorów interesujących z fenomenologicznego punktu widzenia zaliczają się do klasy operatorów automatycznie ulepszonych. W dyskretyzacji działania fermionowego Wilsona-Diraca wiodące efekty dyskretyzacji należy odejmować osobno i niezależnie dla każdego operatora.

Kontrola efektów dyskretyzacji bezpośrednio wpływa na precyzję wyniku końcowego. W szczególności dotyczy to ciężkich kwarków, których funkcje korelacji znikają odpowiednio szybciej wraz z odległością na jaką propaguje się kwark. Wartości parametrów b jeszcze do niedawna były znane jedynie w drugim wiodącym rzędzie przybliżenia perturbacyjnego [31]. Wartości pewnych tylko kombinacji współczynników ulepszających były znane nieperturbacyjnie [32] i umożliwiały usunięcie wiodących efektów dyskretyzacji związanych z masą kwarków. W pracy [H4] samodzielnie zaproponowałem nową metodę wyznaczania współczynników b dla każdego operatora osobno w oparciu o analizę dwupunktowych funkcji korelacji w przestrzeni położeń. Zaimplementowałem osobny kod komputerowy i wykonałem wszystkie obliczenia numeryczne. Pokazałem, że odpowiednie ilorazy takich funkcji korelacji można bezpośrednio powiązać z wartością parametru ulepszenia. Przykładowo dla funkcji korelacji operatorów pseudoskalarnych oszacowanych na odległości $x = an$ otrzymamy

$$\frac{G_P(n, am_{jk}, a\bar{m}_{jk}; g^2)}{G_P(n, am_{rs}, a\bar{m}_{rs}; g^2)} = 1 + 2b_P a(m_{rs} - m_{jk}) + 6\tilde{b}_P a(\bar{m}_{rs} - \bar{m}_{jk}) + \mathcal{O}(m^2) \quad (34)$$

gdzie m_{jk} i m_{rs} są średnimi mas dwóch kwarków propagujących się w badanej funkcji korelacji, natomiast $\bar{m}_{jk}$ i $\bar{m}_{rs}$ są średnimi wszystkich dynamicznych kwarków (w tym również kwarków morza). b_P i $\tilde{b}_P$ są poszukiwanymi współczynnikami ulepszenia. Na wykresie 6 pokazuję zasadę zaproponowanej metody dla pięciu zespołów konfiguracji pokazanych również na wykresie 1. Przedstawiam zależność ilorazu funkcji korelacji z dwoma lekkimi kwarkami i z jednym lekkim i jednym cięższym kwarkiem w zależności od różnicy mas kwarków lekkiego i cięższego. Nachylenie dopasowanej prostej odpowiada bezpośrednio wartości parametru ulepszenia dla rozważanego operatora i dla danej wartości odwrotności stałej sprzężenia β . Widać wyraźnie, że metoda działa bardzo dobrze i pozwala na precyzyjne oszacowanie współczynnika b . W tym przypadku dla każdego pojedynczego zespołu konfiguracji wziętem $m_{rs} \neq m_{jk}$, ale ponieważ to ten sam zespół konfiguracji więc $\bar{m}_{rs} = \bar{m}_{jk}$, a więc część pochodząca od $\tilde{b}$ z równania (34) znika. Korzystając z zespołów konfiguracji pól cechowania wygenerowane przez konsorcjum CLS zastosowałem tę metodę w praktyce i oszacowałem wartości współczynników b dla prądów skalarnego, pseudoskalarnego, wektorowego i aksjalnego. Najtrudniejszą częścią pracy było opracowanie takiej procedury definiowania współczynników b dla dowolnej wartości β aby nie wprowadzić efektów dyskretyzacji, które nie znikająby w granicy $a \rightarrow 0$. Wykres 7 pokazuje zależność otrzymanego współczynnika b_P od odwrotności stałej sprzężenia β . Dodatkowo pokazałem, że metoda ta, po poprawieniu sygnału statystycznego, pozwala również oszacować współczynniki $\tilde{b}$ które parametryzują efekty dyskretyzacji proporcjonalne do sumy mas kwarków i są związane wyłącznie z kwarkami morza, patrz równanie (34). Ich rozwinięcie perturbacyjne zaczyna się od rzędu g_0^4 i nie jest znane. Metoda zaproponowana w pracy [H4] pozwala oszacować ich wartość nieperturbacyjnie z dokładnością do 10%.

Aby poprawić precyzję statystyczną otrzymanych wartości współczynników b , jak na wykresie 7 zaimplementowałem metodę przerwanego rozwiązania (ang. *truncated solver method*) [33] dzięki,

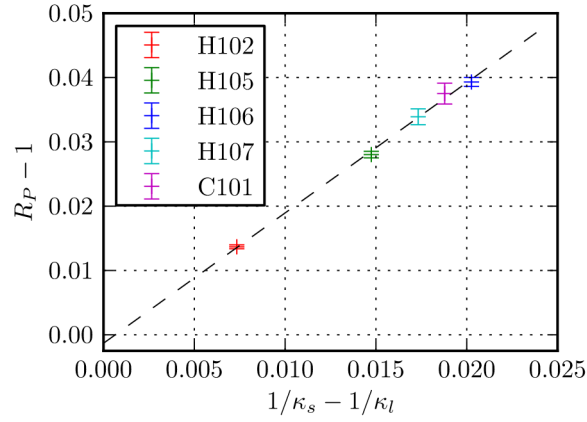


Figure 6: Zależność ilorazu dwupunktowych funkcji korelacji od różnicy mas kwarków. Nachylenie dopasowanej prostej odpowiada wartości współczynnika ulepszenia. Oznaczenia w legendzie odnoszą się do nazw zespołów konfiguracji pól cechowania, tak jak pokazane na rysunku 1. Wykres z pracy [H4]

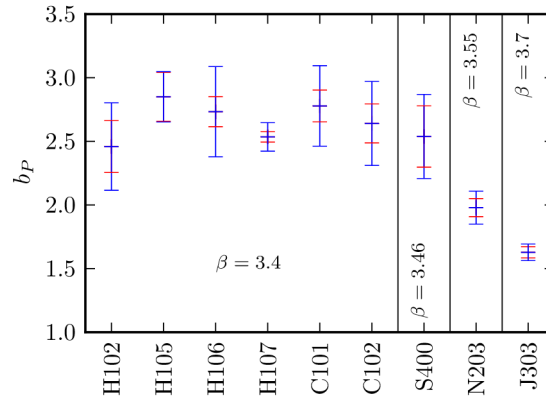


Figure 7: Zależność współczynnika ulepszenia dla biliniowego operatora pseudoskalarowego od odwrotności stałej sprzężenia β . Oznaczenia w legendzie odnoszą się do nazw zespołów konfiguracji pól cechowania, tak jak pokazane na rysunku 1. Wykres z pracy [H4]

której uzyskałem minimalny koszt numeryczny wymaganych obliczeń. W metodzie tej iteracyjne rozwiązywanie równania Diraca jest przerywane po kilku iteracjach. Metoda ta idealnie nadaje się do tego problemu, ponieważ interesuje nas jedynie funkcja korelacji $C_O(x)$ dla małych odległości. Residuum rozwiązania jest wysycane przez największe wartości propagatora kwarkowego, czyli najmniejsze odległości, wystarczy zatem kilka iteracji aby te wartości były bardzo blisko prawdziwego rozwiązania. Błąd systematyczny tej metody oszacowany jest poprzez kilka dokładnych rozwiązań i dla badanych odległości x okazuje się całkowicie zaniedbywalny.

Opublikowane wartości współczynników b są obecnie wykorzystywane przy obliczeniach stałych rozpadu mezonów D. Składają się one z cięższego kwarku powabnego, a stałe rozpadu są dane przez element macierzowy prądu aksjalnego. Usunięcie wiodących efektów dyskretyzacji proporcjonalnych do masy ma kluczowe znaczenie w celu otrzymania precyzyjnego wyniku końcowego.

Wyniki otrzymane w tej pracy referowałem na konferencji International Symposium on Lattice Field Theory w Southampton, UK w 2016 [K4].

4.3.7 Momenty dystrybucji amplitudy dla pionu: prace [H5] i [H6]

Dysponując poprawnie wygenerowanymi zespołami konfiguracji pól cechowania, stałymi renormalizacyjnymi dla operatorów opisujących fenomenologicznie interesujące procesy oraz dodatkowe wielkości takie jak współczynniki ulepszenia albo jednopętlowe oszacowanie efektów dyskretyzacji otrzymane w ramach sieciowego rachunku zaburzeń jesteśmy w stanie oszacować interesujące nas hadronowe elementy macierzowe. W tej części skupię się na jednym konkretnym przykładzie, dystrybucji amplitudy dla pionu [34].

Funkcje struktury hadronów, których przykładem jest dystrybucja amplitudy dla pionu, są potrzebne do teoretycznego opisu zdarzeń w eksperymentach fizyki wysokich energii których zderzany jest przynajmniej jeden hadron. Dzięki twierdzeniom o faktoryzacji, przekrój czynny w takich zderzeniach można zapisać jako konwolucje wysokoenergetycznego przekroju czynnego na oddziaływanie partonów (kwarku lub gluonu) oraz nieperturbacyjnej części opisującej "jak prawdopodobne" jest znalezienie takiego partonu w zderzanym hadronie. Precyzyjne definicje funkcji struktury zależą od typu zderzenia (inkluzywny/ekskluzywny) jednak mają typową strukturę: opisywane są hadronowymi elementami macierzowymi nielokalnego operatora zdefiniowanego na stożku świetlnym. Z uwagi na nieperturbacyjną naturę funkcji struktury od dawna znajdowały się one w kręgu możliwych zastosowań omawianych w tej rozprawie nieperturbacyjnych metod numerycznych w Chromodynamice Kwantowej na sieci.

Dystrybucja amplitudy dla pionu jest obiektem nieperturbacyjnym i pojawia się w opisie procesów ekskluzywnych. Opisuje strukturę wewnętrzną pionu daną przez kwarki walencyjne. W przybliżeniu wiodącego twistu jest kwantową amplitudą podstawowego stanu Fockowskiego tworzonego przez kwark o ułamku pędu x oraz antykwark o ułamku pędu $1 - x$. W języku operatorowym jest dana poprzez element macierzowy nielokalnego operatora wzdłuż linii stożka świetlnego,

$$\langle 0 | \bar{d}(z_2 n) \not{n} [z_2 n, z_1 n] \gamma_5 u(z_1 n) | \pi^+(p) \rangle = i f_\pi (p \cdot n) \int_0^1 dx e^{-i(z_1 x + z_2(1-x))p \cdot n} \phi(x, \mu^2). \quad (35)$$

gdzie n jest wektorem takim, że $n^2 = 0$, z_1 i z_2 parametryzują położenie i separację operatorów kreacji i anihilacji kwarku u i antykwarku d , f_π jest stałą rozpadu pionu w granicy chiralnej, p jest

całkowitym pędem pionu, wreszcie $[z_2 n, z_1 n]$ jest linią Wilsona łączącą obydwa punkty, natomiast μ skalą renormalizacji dystrybucji amplitudy ϕ .

Na euklidesowej siatce punktów czasoprzestrzennych potrzebnej do sformułowania numerycznego podejścia do kwantowej teorii pola niemożliwe jest zdefiniowanie nielokalnego operatora o zerowym wektorze n . Można jednak mimo wszystko powiedzieć coś o nieperturbacyjnej naturze elementu macierzowego z równania (35), jeśli ograniczymy się do jego momentów w ułamku pędu x . Biorąc jako zmienną niezależną różnicę ułamków pędu kwarku i antykwarku $\xi = 1 - 2x$ mamy [H5]

$$\langle \xi^n \rangle = \int_0^1 dx (2x - 1)^n \phi(x, \mu^2) \quad (36)$$

Rozwijając w szereg nielokalny operator z równania (35), kolejnym momentom będą odpowiadać elementy macierzowe lokalnych operatorów z rosnącą liczbą pochodnych. Interesujący jest drugi moment dany przez elementy macierzowe następujących operatorów

$$\mathcal{O}_{\rho\mu\nu}^-(x) = \bar{d}(x) \left[\overleftrightarrow{D}_{(\mu} \overleftarrow{D}_{\nu)} - 2 \overleftrightarrow{D}_{(\mu} \overrightarrow{D}_{\nu)} + \overrightarrow{D}_{(\mu} \overrightarrow{D}_{\nu)} \right] \gamma_\rho \gamma_5 u(x), \quad (37)$$

$$\mathcal{O}_{\rho\mu\nu}^+(x) = \bar{d}(x) \left[\overleftrightarrow{D}_{(\mu} \overleftarrow{D}_{\nu)} + 2 \overleftrightarrow{D}_{(\mu} \overrightarrow{D}_{\nu)} + \overrightarrow{D}_{(\mu} \overrightarrow{D}_{\nu)} \right] \gamma_\rho \gamma_5 u(x), \quad (38)$$

gdzie D_μ jest pochodną kowariantną. Okrągłe nawiasy oznaczają symetryzację po wszystkich indeksach oraz odjęcie śladu, w efekcie czego otrzymamy wkład z wiodącym twistem. Z powodu złamania symetrii obrotowej przez dyskretyzację sieciową obydwa operatory mieszają się pod wpływem renormalizacji i niezbędne jest wyznaczenie obydwu.

Poszukiwane momenty dystrybucji amplitudy pionu mogą być odczytane z elementów macierzowych operatorów z równań (37), (38) pomiędzy stanem próżni a stanem z jednym pionem poruszającym się z zadaniem pędem p . W celu poprawy sygnału statystycznego niezbędne jest aby zastąpić punktowy operator kreacji pionu poprzez operator nielokalny w kierunkach przestrzennych taki, którego kształt najlepiej imituje funkcję falową poruszającego się pionu. Dotychczas wykorzystywano nielokalny operator pionu w spoczynku, dopiero w pracy [35] zaproponowano konstrukcję operatora odpowiadającego hadronowi o zadanim pędzie. W pracy [H5] zaimplementowałem i zastosowałem zaproponowany sposób oraz przeprowadziłem większość symulacji związanych ze zbadaniem jak nowy operator wpływa na jakość sygnału dla elementów macierzowych operatorów z równań (37) i (38). Razem ze współpracownikami wykazaliśmy, że istotnie wykorzystanie nowego operatora poprawia sygnał i pozwala otrzymać precyzję statystyczną podobną do tej otrzymanej tradycyjnymi technikami przy kilkukrotnie mniejszym koszcie numerycznym. Dla przykładu na wykresie 8 pokazuję zależność drugiego momentu dystrybucji amplitudy pionu od masy pionu. Dane pochodzące z czterech różnych zespołów konfiguracji pól cechowania są na tyle dokładne że pozwalają na precyzyjną ekstrapolację do fizycznej wartości masy pionu. W oparciu o te wyniki odegrałem wiodącą rolę w przeprowadzeniu pomiarów na 42 zespołach konfiguracji pól cechowania wygenerowanych przez kolaborację CLS, co pozwoliło nam po raz pierwszy oszacować wartość drugiego momentu dystrybucji amplitudy pionu w granicy kontinuum [R1] (praca jest w recenzji).

Równolegle do pracy [H5] opracowaliśmy metodę obliczania dystrybucji amplitudy pionu bez konieczności szacowania jej momentów. W pracy [H6] zaproponowaliśmy aby dystrybucję amplitudy pionu otrzymać bezpośrednio jako funkcję ułamka pędu x z odpowiedniej trzypunktowej funkcji korelacji w przestrzeni położeń [36]. Podejście to również zaczyna się od nielokalnego elementu

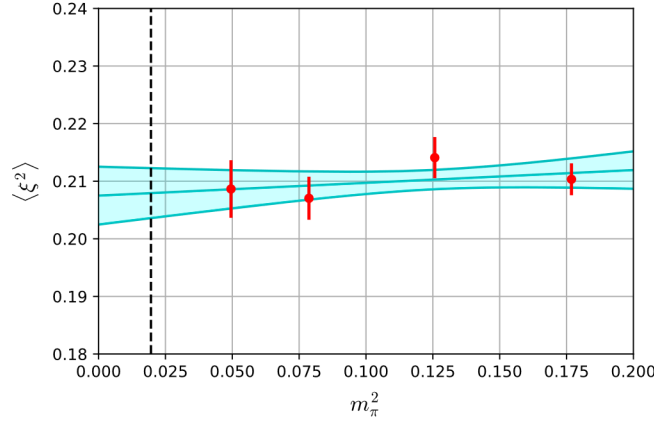


Figure 8: Zależność drugiego momentu dystrybucji amplitudy dla pionu od masy pionu. Wykres z pracy [H5]

macierzowego z równania (35) z trzema różnicami: operatory kwarkowe $\bar{d}$ i u są rozsunięte na odległość z w kierunku czysto przestrzennym oraz linia Wilsona jest zastąpiona linią fermionową, tzn. kwarkiem o zapachu innym niż u i d (lecz o identycznej masie dla uproszczenia rachunków). Rachunkiem perturbacyjnym w kontinuum można pokazać, że taki element macierzowy

$$T(p \cdot n(z_2 - z_1), (z_2 - z_1)^2) \equiv \langle 0 | \{ \bar{d} q \}(z_2 n) \{ \bar{q} \gamma_5 u \}(z_1 n) | \pi^+(p) \rangle \quad (39)$$

można powiązać z dystrybucją amplitudy pionu poprzez

$$T(p \cdot z, z^2) = f_\pi \frac{p \cdot z}{2\pi^2 z^4} \Phi(p \cdot z, z^2) \quad (40)$$

oraz

$$\Phi(p \cdot z, z^2) = \int_0^1 du e^{i(u-\frac{1}{2})(p \cdot z)} \phi(u, \mu^2) + \mathcal{O}(\alpha_s) + \text{wyrazy o wyższym twistie} \quad (41)$$

Podstawową zaletą zaproponowanego podejścia w porównaniu z podobnymi metodami opartymi o efektywną teorię dużego pędu [37] (ang. LaMET, *Large Momentum Effective Theory*) jest brak konieczności szacowania dodatkowych stałych renormalizacyjnych dla nielokalnych operatorów ponieważ wystarczają standardowe stałe renormalizacyjne dla fermionowych operatorów biliniowych. Jest to szczególnie ważne ponieważ linia Wilsona generuje rozbieżność liniową $1/a$, której renormalizacja wprowadza stosunkowo dużą niepewność statystyczną i systematyczną. Dlatego też w równaniu (39) możemy założyć, że operatory w nawiasach klamrowych są zrenormalizowane i wyrażone w schemacie $\overline{\text{MS}}$.

W pracy [H6] w której pomagałem analizować efekty dyskretyzacji zaproponowanej trójpunktowej funkcji korelacji oraz uczestniczyłem w dyskusjach pokazaliśmy, że metoda pozwala otrzymać nietrywialne wyniki, tzn. sygnał statystyczny jest na tyle dobry, że będzie można oszacować poszukiwaną dystrybucję amplitudy pionu. W kolejnej pracy [S1], po poprawieniu implementacji pomiarów i wykorzystaniu stochastycznego szacowania trójpunktowej funkcji korelacji, pokazaliśmy dodatkowo, że zaproponowana metoda może pozwolić na otrzymanie danych w reżimie w którym pozwolą na rozróżnienie pomiędzy różnymi modelami fenomenologicznymi opisującymi

dystrybucję amplitudy pionu.

Wyniki otrzymane w tych pracach prezentowałem podczas zaproszonego referatu plenarnego na konferencji International Workshop on Meson Physics w Krakowie w 2018 [K5], podczas konferencji International Conference on Physics Opportunities at an Electron-Ion Collider w Ratyzbonie w 2018, oraz na rzecz kolaboracji RQCD podczas konferencji International Symposium on Lattice Field Theory w East Lansing, USA w 2018 [K6].

4.3.8 Podsumowanie

W zaprezentowanym cyklu prac pokazałem mój wkład we wszystkie aspekty symulacji Monte Carlo Chromodynamiki Kwantowej. Dopiero złożenie wszystkich elementów razem, od optymalnej implementacji wielu algorytmów na zadanej architekturze superkomputera, generacji odpowiednich zespołów konfiguracji pól cechowania, poprzez odpowiednią renormalizację i ulepszenie użytych operatorów aż do oszacowania ich elementów macierzowych pozwala na otrzymanie wyników interesujących fenomenologicznie z dobrą precyzją statystyczną i systematyczną. Podsumowując mój wkład w poszczególne kroki chciałbym wyszczególnić:

- przygotowałem i poprowadziłem symulacji 3 z 12 zespołów konfiguracji pól cechowania, w tym zespołu o masie pionu najbliższej masie fizycznej,
- pokazałem przydatność nieperturbacyjnego schematu renormalizacji opartego o funkcje korelacji w przestrzeni położeń,
- pokazałem możliwość użycia technik step scaling do schematu renormalizacji opartego o funkcje korelacji w przestrzeni położeń oraz oszacowanie efektów dyskretyzacji i skończonej objętości,
- zaproponowałem metodę nieperturbacyjnego oszacowania współczynników ulepszenia b ,
- zaproponowałem metodę nieperturbacyjnego oszacowania współczynników ulepszenia $\tilde{b}$, których wartości nie były znane nawet w przybliżeniu perturbacyjnym,
- zastosowałem nowe techniki konstrukcji operatorów interpolacyjnych dla hadronów o niezerowym pędzie do wyznaczenia drugiego momentu dystrybucji amplitudy pionu i przeprowadziłem większość potrzebnych obliczeń,
- uczestniczyłem w sprawdzeniu nowej metody szacowania dystrybucji amplitudy pionu wprost z funkcji korelacji oszacowanej na odległościach przestrzennopodobnej w przestrzeni położeń.

Tematycznie powiązane z powyższymi wynikami są prace będące w trakcie recenzji: [R2], [R1], [R3]

5 Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych

5.1 Nieperturbacyjna renormalizacja Efektywnej Teorii Ciężkiego Kwarku

Uczestniczę w pracach mających na celu nieperturbacyjne oszacowanie parametrów Efektywnej Teorii Ciężkiego Kwarku (ang. *Heavy Quark Effective Theory*) na sieci. Moim wkładem jest zbadanie w wiodącym i drugim rzędzie rachunku zaburzeń jakości zapronowanych warunków

renormalizacyjnych, tzn. sprawdzenia czy poprawnie opisują względne efekty rzędu $1/m_b$, przy jakich warunkach układ 19 równań definiujący te parametry posiada rozwiązanie i w jaki sposób niepewności statystyczne funkcji korelacji definiujących ten układ równań przenoszą się na niepewności statystyczne końcowych parametrów. Parametry teorii efektywnej są niezbędne, aby obliczyć masy i stałe rozpadu mezonów zawierających jeden kwark powabny. Moje wyniki opublikowałem w materiałach konferencyjnych [K7], [K8], [K9].

Niezależnie zaproponowałem alternatywny sposób renormalizacji Efektywnej Teorii Ciężkiego Kwarku. Samodzielnie przeprowadziłem symulacje i oszacowałem część poszukiwanych parametrów. Wyniki prezentowałem na konferencji International Symposium on Lattice Field Theory i znajduję się w materiałach pokonferencyjnych [K10].

5.2 Supersymetryczne mechaniki kwantowe Yanga-Millsa

Nieopublikowane materiały zebrane podczas studiów doktoranckich na temat supersymetrycznych mechanik kwantowych Yanga-Millsa opublikowałem w trzech samodzielnych artykułach: [S2], [S3], [S4]. W pracach obliczyłem analitycznie widmo energetyczne tych układów dla grupy symetrii $SU(3)$, po czym znalazłem uogólnienie do grupy symetrii $SU(N)$ oraz obliczyłem indeks Wittena dla dowolnej grupy $SU(N)$. Równocześnie opracowałem podejście numeryczne które pozwala analizować podobne układy z dowolnym superpotencjałem [S5]

5.3 Symulacje na układach FPGA

W pracach [K11], [R4], oraz [R5] zaproponowałem wykorzystanie układów logiki programowalnej (ang. *FPGA*) do symulacji Chromodynamiki Kwantowej na sieci. Wraz ze współautorem opisaliśmy zalety takiego rozwiązania oraz wyniki wydajności, które zmierzaliśmy na dostępnych układach.

5.4 Pozostałe prace

Jestem również współautorem pozostałych prac, które nie zostały zacytowane w powyższym omówieniu i zostały opublikowane po doktoracie: [K12], [S1], [K13], [S6], [K14], [S7], [K15].

Pozostałe prace mojego współautorstwa opublikowane po doktoracie

- [S1] Gunnar S. Bali et al. "Pion distribution amplitude from Euclidean correlation functions: Exploring universality and higher-twist effects". In: *Phys. Rev. D* 98.9 (2018), p. 094507. DOI: 10.1103/PhysRevD.98.094507. arXiv: 1807.06671 [hep-lat].
- [S2] Piotr Korcyl. "Solutions of D=2 supersymmetric Yang-Mills quantum mechanics with $SU(N)$ gauge group". In: *J. Math. Phys.* 52 (2011), p. 052105. DOI: 10.1063/1.3586800. arXiv: 1101.0591 [math-ph].
- [S3] Piotr Korcyl. "Analytic calculation of Witten index in D=2 supersymmetric Yang-Mills quantum mechanics". In: *J. Math. Phys.* 53 (2012), p. 102102. DOI: 10.1063/1.4748524. arXiv: 1101.0668 [hep-th].
- [S4] Piotr Korcyl. "Gauge invariant plane-wave solutions in supersymmetric Yang-Mills quantum mechanics". In: *J. Math. Phys.* 52 (2011), p. 042102. DOI: 10.1063/1.3566359. arXiv: 1008.2975 [math-ph].

- [S5] Piotr Korcyl. “Recursive approach to supersymmetric quantum mechanics for arbitrary fermion occupation number”. In: *Acta Phys. Polon.* B41 (2010), p. 795. arXiv: 0912.5265 [hep-th].
- [S6] Piotr Korcyl, Mateusz Koren, and Jacek Wosiek. “Wilson loops with arbitrary charges”. In: *Acta Phys. Polon.* B46.2 (2015), p. 247. DOI: 10.5506/APhysPolB.46.247. arXiv: 1411.6461 [hep-lat].
- [S7] Piotr Korcyl, Mateusz Koren, and Jacek Wosiek. “On non-trivial spectra of trivial gauge theories”. In: *Acta Phys. Polon.* B44 (2013), pp. 713–720. DOI: 10.5506/APhysPolB.44.713. arXiv: 1210.6632 [hep-th].

Doniesienia konferencyjne mojego współautorstwa

- [K1] Piotr Korcyl. “The CLS 2+1 flavor simulations”. In: *PoS LATTICE2014* (2015), p. 029. DOI: 10.22323/1.214.0029. arXiv: 1501.00094 [hep-lat].
- [K2] Mattia Bruno et al. “On the extraction of spectral quantities with open boundary conditions”. In: *PoS LATTICE2014* (2014), p. 089. DOI: 10.22323/1.214.0089. arXiv: 1411.5207 [hep-lat].
- [K3] Krzysztof Cichy, Karl Jansen, and Piotr Korcyl. “Step scaling in coordinate space: running of the quark mass”. In: *PoS LATTICE2016* (2016), p. 186. DOI: 10.22323/1.256.0186. arXiv: 1610.07801 [hep-lat].
- [K4] Piotr Korcyl and Gunnar S. Bali. “Non-perturbative determination of improvement coefficients using coordinate space correlators in $N_f = 2+1$ lattice QCD”. In: *PoS LATTICE2016* (2016), p. 190. DOI: 10.22323/1.256.0190. arXiv: 1609.09477 [hep-lat].
- [K5] Piotr Korcyl. “News from the Lattice: example of the pion distribution amplitude”. In: *EPJ Web Conf.* 199 (2019), p. 01011. DOI: 10.1051/epjconf/201919901011. arXiv: 1809.06071 [hep-lat].
- [K6] Gunnar S. Bali et al. “Pion and Kaon Distribution Amplitudes from lattice QCD: towards the continuum limit”. In: *36th International Symposium on Lattice Field Theory (Lattice 2018) East Lansing, MI, United States, July 22-28, 2018*. 2018. arXiv: 1811.06050 [hep-lat].
- [K7] Michele Della Morte et al. “Non-perturbative matching of HQET heavy-light axial and vector currents in $N_f = 2$ lattice QCD”. In: *PoS LATTICE2016* (2017), p. 199. DOI: 10.22323/1.256.0199.
- [K8] Piotr Korcyl. “On one-loop corrections to matching conditions of Lattice HQET including $1/m_b$ terms”. In: *PoS LATTICE2013* (2014), p. 380. DOI: 10.22323/1.187.0380. arXiv: 1312.2350 [hep-lat].
- [K9] Piotr Korcyl. “Fixing the parameters of Lattice HQET including $1/m_B$ terms”. In: *PoS Beauty2013* (2013), p. 071. DOI: 10.22323/1.190.0071. arXiv: 1307.5080 [hep-ph].
- [K10] Piotr Korcyl, Christoph Lehner, and Tomomi Ishikawa. “Non-perturbative renormalization of the static quark theory in a large volume”. In: *PoS LATTICE2015* (2016), p. 254. DOI: 10.22323/1.251.0254. arXiv: 1512.00069 [hep-lat].
- [K11] Piotr Korcyl and Grzegorz Korcyl. “Implementation of the conjugate gradient algorithm on FPGA devices”. In: *36th International Symposium on Lattice Field Theory (Lattice 2018) East Lansing, MI, United States, July 22-28, 2018*. 2018. arXiv: 1811.03683 [hep-lat].

- [K12] Gunnar S. Bali et al. “Baryonic and mesonic 3-point functions with open spin indices”. In: *EPJ Web Conf.* 175 (2018), p. 06014. DOI: 10.1051/epjconf/201817506014. arXiv: 1711.02384 [hep-lat].
- [K13] Zbigniew Ambroziński and Piotr Korcyl. “Numerical investigations of Supersymmetric Yang-Mills Quantum Mechanics with 4 supercharges”. In: *PoS LATTICE2014* (2015), p. 253. DOI: 10.22323/1.214.0253. arXiv: 1411.6904 [hep-lat].
- [K14] Piotr Korcyl and Mateusz Koren. “Screening in two-dimensional gauge theories”. In: *PoS LATTICE2012* (2012), p. 060. DOI: 10.22323/1.164.0060. arXiv: 1212.0569 [hep-lat].
- [K15] Piotr Korcyl and Mateusz Koren. “Preliminary study of two-dimensional SU(N) Yang-Mills theory with adjoint matter by Hybrid Monte Carlo approach”. In: *PoS LATTICE2011* (2011), p. 071. DOI: 10.22323/1.139.0071. arXiv: 1111.4682 [hep-lat].

Prace będące w toku recenzji

- [R1] Gunnar S. Bali et al. “Light-cone distribution amplitudes of pseudoscalar mesons from lattice QCD”. In: (2019). arXiv: 1903.08038 [hep-lat].
- [R2] Piotr Korcyl. “Alleviating the window problem in large volume renormalization schemes”. In: (2017). arXiv: 1705.06119 [hep-lat].
- [R3] Gunnar S. Bali et al. “Baryon distribution amplitudes in QCD”. In: (2019). arXiv: 1903.12590 [hep-lat].
- [R4] Grzegorz Korcyl and Piotr Korcyl. “Towards Lattice Quantum Chromodynamics on FPGA devices”. In: (2018). arXiv: 1810.04201 [cs.DC].
- [R5] G. Korcyl and P. Korcyl. “Investigating the Dirac operator evaluation with FPGAs”. In: (2019). arXiv: 1904.08616 [cs.DC].

Pozostałe referencje

- [1] M. Tanabashi et al. “Review of Particle Physics”. In: *Phys. Rev. D* 98 (3 Aug. 2018), p. 030001. DOI: 10.1103/PhysRevD.98.030001. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.98.030001>.
- [2] C. N. Yang and R. L. Mills. “Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance”. In: *Phys. Rev.* 96 (1 Oct. 1954), pp. 191–195. DOI: 10.1103/PhysRev.96.191. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.96.191>.
- [3] David J. Gross and Frank Wilczek. “Ultraviolet Behavior of Non-Abelian Gauge Theories”. In: *Phys. Rev. Lett.* 30 (26 June 1973), pp. 1343–1346. DOI: 10.1103/PhysRevLett.30.1343. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.30.1343>.
- [4] P. A. Baikov, K. G. Chetyrkin, and J. H. Kühn. “Five-Loop Running of the QCD coupling constant”. In: *Phys. Rev. Lett.* 118.8 (2017), p. 082002. DOI: 10.1103/PhysRevLett.118.082002. arXiv: 1606.08659 [hep-ph].
- [5] R. P. Feynman. “Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics”. In: *Rev. Mod. Phys.* 20 (2 Apr. 1948), pp. 367–387. DOI: 10.1103/RevModPhys.20.367. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.20.367>.

- [6] Kenneth G. Wilson. “Confinement of quarks”. In: *Phys. Rev. D* 10 (8 Dec. 1974), pp. 2445–2459. DOI: 10.1103/PhysRevD.10.2445. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.10.2445>.
- [7] T. Reisz. “A Convergence Theorem for Lattice Feynman Integrals With Massless Propagators”. In: *Commun. Math. Phys.* 116 (1988), p. 573. DOI: 10.1007/BF01224902.
- [8] Konrad Osterwalder and Robert Schrader. “AXIOMS FOR EUCLIDEAN GREEN’S FUNCTIONS”. In: *Commun. Math. Phys.* 31 (1973), pp. 83–112. DOI: 10.1007/BF01645738.
- [9] Simon Duane et al. “Hybrid Monte Carlo”. In: *Physics Letters B* 195.2 (1987), pp. 216–222. ISSN: 0370-2693. DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(87\)91197-X](https://doi.org/10.1016/0370-2693(87)91197-X). URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037026938791197X>.
- [10] J Gasser and H Leutwyler. “Chiral perturbation theory to one loop”. In: *Annals of Physics* 158.1 (1984), pp. 142–210. ISSN: 0003-4916. DOI: [https://doi.org/10.1016/0003-4916\(84\)90242-2](https://doi.org/10.1016/0003-4916(84)90242-2). URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0003491684902422>.
- [11] S. Aoki et al. “FLAG Review 2019”. In: (2019). arXiv: 1902.08191 [hep-lat].
- [12] Kurt Symanzik. “Continuum limit and improved action in lattice theories. 1. Principles and ϕ^4 theory”. In: *Nucl. Phys. B* 226 (1983), p. 187. DOI: 10.1016/0550-3213(83)90468-6.
- [13] Peter Weisz. “Continuum limit improved lattice action for pure Yang-Mills theory. 1.” In: *Nucl. Phys. B* 212 (1983), p. 1. DOI: 10.1016/0550-3213(83)90595-3.
- [14] Martin Lüscher and Peter Weisz. “On-shell improved lattice gauge theories”. In: *Commun. Math. Phys.* 97 (1985). [Erratum: *Commun. Math. Phys.* **98**, 433 (1985)], p. 59. DOI: 10.1007/BF01206178.
- [15] M. Lüscher and P. Weisz. “On-shell improved lattice gauge theories”. In: *Communications in Mathematical Physics* 97.1 (Mar. 1985), pp. 59–77. ISSN: 1432-0916. DOI: 10.1007/BF01206178. URL: <https://doi.org/10.1007/BF01206178>.
- [16] Bijan Sheikholeslami and R. Wohlert. “Improved continuum limit lattice action for QCD with Wilson fermions”. In: *Nucl. Phys. B* 259 (1985), p. 572. DOI: 10.1016/0550-3213(85)90002-1.
- [17] John Bulava and Stefan Schaefer. “Improvement of $N_f = 3$ Lattice QCD with Wilson Fermions and tree-level improved gauge action”. In: *Nucl. Phys. B* 874 (2013), p. 188. DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2013.05.019. arXiv: 1304.7093 [hep-lat].
- [18] Stefan Schaefer, Rainer Sommer, and Francesco Viotto. “Critical slowing down and error analysis in lattice QCD simulations”. In: *Nucl. Phys. B* 845 (2011), pp. 93–119. DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2010.11.020. arXiv: 1009.5228 [hep-lat].
- [19] Martin Lüscher and Stefan Schaefer. “Lattice QCD without topology barriers”. In: *J. High Energy Phys.* 07 (2011), p. 036. DOI: 10.1007/JHEP07(2011)036. arXiv: 1105.4749 [hep-lat].
- [20] Martin Lüscher. “Properties and uses of the Wilson flow in lattice QCD”. In: *JHEP* 08 (2010). [Erratum: *JHEP*03,092(2014)], p. 071. DOI: 10.1007/JHEP08(2010)071, 10.1007/JHEP03(2014)092. arXiv: 1006.4518 [hep-lat].
- [21] Wolfgang Bietenholz et al. “Tuning the strange quark mass in lattice simulations”. In: *Phys. Lett. B* 690 (2010), p. 436. DOI: 10.1016/j.physletb.2010.05.067. arXiv: 1003.1114 [hep-lat].

- [22] Gunnar S. Bali et al. “Lattice simulations with $N_f = 2 + 1$ improved Wilson fermions at a fixed strange quark mass”. In: *Phys. Rev. D* 94.7 (2016), p. 074501. DOI: 10.1103/PhysRevD.94.074501. arXiv: 1606.09039 [hep-lat].
- [23] Andreas Frommer et al. “Adaptive aggregation based domain decomposition multigrid for the Lattice Wilson Dirac operator”. In: *SIAM J. Sci. Comput.* 36 (2014), A1581. DOI: 10.1137/130919507. arXiv: 1303.1377 [hep-lat].
- [24] Martin Hasenbusch. “Speeding up the hybrid Monte Carlo algorithm for dynamical fermions”. In: *Physics Letters B* 519.1 (2001), pp. 177–182. ISSN: 0370-2693. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0370-2693\(01\)01102-9](https://doi.org/10.1016/S0370-2693(01)01102-9). URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269301011029>.
- [25] Guido Martinelli et al. “Nonperturbative improvement of composite operators with Wilson fermions”. In: *Phys. Lett. B* 411 (1997), p. 141. DOI: 10.1016/S0370-2693(97)01007-1. arXiv: hep-lat/9705018 [hep-lat].
- [26] Guido Martinelli et al. “A general method for nonperturbative renormalization of lattice operators”. In: *Nucl. Phys. B* 445 (1995), p. 81. DOI: 10.1016/0550-3213(95)00126-D. arXiv: hep-lat/9411010 [hep-lat].
- [27] Martin Lüscher et al. “The Schrödinger functional: A Renormalizable probe for non-Abelian gauge theories”. In: *Nucl. Phys. B* 384 (1992), pp. 168–228. DOI: 10.1016/0550-3213(92)90466-0. arXiv: hep-lat/9207009 [hep-lat].
- [28] Karl Jansen et al. “Nonperturbative renormalization of lattice QCD at all scales”. In: *Phys. Lett. B* 372 (1996), pp. 275–282. DOI: 10.1016/0370-2693(96)00075-5. arXiv: hep-lat/9512009 [hep-lat].
- [29] R. Arthur and P. A. Boyle. “Step Scaling with off-shell renormalisation”. In: *Phys. Rev. D* 83 (2011), p. 114511. DOI: 10.1103/PhysRevD.83.114511. arXiv: 1006.0422 [hep-lat].
- [30] Roberto Frezzotti et al. “Lattice QCD with a chirally twisted mass term”. In: *JHEP* 08 (2001), p. 058. arXiv: hep-lat/0101001 [hep-lat].
- [31] Yusuke Taniguchi and Akira Ukawa. “Perturbative calculation of improvement coefficients to $O(g^2a)$ for bilinear quark operators in Lattice QCD”. In: *Phys. Rev. D* 58 (1998), p. 114503. DOI: 10.1103/PhysRevD.58.114503. arXiv: hep-lat/9806015 [hep-lat].
- [32] Marco Guagnelli et al. “Nonperturbative results for the coefficients b_m and $b_A - b_P$ in $O(a)$ improved Lattice QCD”. In: *Nucl. Phys. B* 595 (2001), p. 44. DOI: 10.1016/S0550-3213(00)00675-1. arXiv: hep-lat/0009021 [hep-lat].
- [33] Gunnar S. Bali, Sara Collins, and Andreas Schafer. “Effective noise reduction techniques for disconnected loops in Lattice QCD”. In: *Comput. Phys. Commun.* 181 (2010), pp. 1570–1583. DOI: 10.1016/j.cpc.2010.05.008. arXiv: 0910.3970 [hep-lat].
- [34] “Exclusive processes in quantum chromodynamics: Evolution equations for hadronic wavefunctions and the form factors of mesons”. In: *Physics Letters B* 87.4 (1979), pp. 359–365. ISSN: 0370-2693. DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(79\)90554-9](https://doi.org/10.1016/0370-2693(79)90554-9). URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269379905549>.
- [35] Gunnar S. Bali et al. “Novel quark smearing for hadrons with high momenta in lattice QCD”. In: *Phys. Rev. D* 93.9 (2016), p. 094515. DOI: 10.1103/PhysRevD.93.094515. arXiv: 1602.05525 [hep-lat].

- [36] V. Braun and Dieter Mueller. "Exclusive processes in position space and the pion distribution amplitude". In: *Eur. Phys. J. C* 55 (2008), pp. 349–361. DOI: 10.1140/epjc/s10052-008-0608-4. arXiv: 0709.1348 [hep-ph].
- [37] Xiangdong Ji. "Parton Physics on a Euclidean Lattice". In: *Phys. Rev. Lett.* 110 (2013), p. 262002. DOI: 10.1103/PhysRevLett.110.262002. arXiv: 1305.1539 [hep-ph].

A handwritten signature in blue ink, appearing to read "Piotr Konul".

Podpis wnioskodawcy