

Dr Patryk Mach
Zakład Teorii Względności i Astrofizyki
Instytut Fizyki Uniwersytetu Jagiellońskiego
ul. Łojasiewicza 11, 30-348, Kraków

Kraków, 26.03.2018 r.

Autoreferat

1. Imię i Nazwisko: Patryk Mach
2. Posiadane dyplomy i stopnie naukowe
 - stopień doktora nauk fizycznych w zakresie fizyki (wyróżnienie), Uniwersytet Jagielloński, 2008 r., tytuł rozprawy: *Stability of the steady accretion in general relativistic hydrodynamics*, promotor: prof. dr hab. Edward Malec
 - tytuł zawodowy magistra fizyki (wyróżnienie), Uniwersytet Jagielloński, 2005 r., tytuł pracy magisterskiej: *O energii wiązania w hydrodynamice relatywistycznej*, promotor: prof. dr hab. Edward Malec
3. Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych
 - adiunkt, Uniwersytet Jagielloński, 2011 -
 - asystent, Uniwersytet Jagielloński, 2008 - 2011
 - doktorant, Uniwersytet Jagielloński, 2005 - 2008
4. Wskazanie osiągnięcia wynikającego z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. 2016 r. poz. 882 ze zm. w Dz. U. z 2016 r. poz. 1311.)
 - a) tytuł: *Stacjonarne modele hydrodynamiczne w newtonowskiej teorii grawitacji oraz w ogólnej teorii względności*
 - b) publikacje stanowiące cykl:
 - MM2011 Patryk Mach, Edward Malec, *Self-gravitating discs and the Sobolev inequality*, Mon. Not. R. Astron. Soc. 411, 1313 (2011), <https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2010.17764.x>
 - MM2012 Patryk Mach, Edward Malec, *Accretion and Structure of Radiating Disks*, Astron. Astrophys. 541, A128 (2012), <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201015755>
 - M2012a Patryk Mach, *All solutions of the $n = 5$ Lane-Emden equation*, J. Math. Phys. 53, 062503 (2012), <https://doi.org/10.1063/1.4725414>
 - M2012b Patryk Mach, *Virial theorem for radiating accretion discs*, Mon. Not. R. Astron. Soc. 422, 772 (2012), <https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2012.20658.x>



- MMP2012 Patryk Mach, Edward Malec, Michał Piróg, *Estimating masses of Keplerian disk systems: the case of AGN in NGC 4258*, Acta Phys. Pol. B 43, 2141 (2012), <https://doi.org/10.5506/APhysPolB.43.2141>
- MS2013 Patryk Mach, Walter Simon, *(In)finite extent of stationary perfect fluids in Newtonian theory*, Annales Henri Poincaré 14, 159 (2013), <https://doi.org/10.1007/s00023-012-0181-0>
- MMP2013 Patryk Mach, Edward Malec, Michał Piróg, *Geometry of Keplerian disk systems and bounds on masses of their components*, Acta Phys. Pol. B 44, 107 (2013), <https://doi.org/10.5506/APhysPolB.44.107>
- MMK2013 Patryk Mach, Edward Malec, Janusz Karkowski, *Spherical steady accretion flows: Dependence on the cosmological constant, exact isothermal solutions, and applications to cosmology*, Phys. Rev. D 88, 084056 (2013) <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.88.084056>
- MM2013 Patryk Mach, Edward Malec, *Stability of relativistic Bondi accretion in Schwarzschild-(anti-)de Sitter spacetimes*, Phys. Rev. D 88, 084055 (2013), <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.88.084055>
- JMMP2015 Piotr Jaranowski, Patryk Mach, Edward Malec, Michał Piróg, *General-relativistic versus Newtonian: Geometric dragging and dynamic antidragging in stationary self-gravitating disks in the first post-Newtonian approximation*, Phys. Rev. D 91, 024039 (2015), <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.91.024039>
- MM2015 Patryk Mach, Edward Malec, *General-relativistic rotation laws in rotating fluid bodies*, Phys. Rev. D 91, 124053 (2015), <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.91.124053>
- M2015 Patryk Mach, *Homoclinic accretion solutions in the Schwarzschild-anti-de Sitter space-time*, Phys. Rev. D 91, 084016 (2015), <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.91.084016>
- KMM2015 Jerzy Knopik, Patryk Mach, Edward Malec, *General-relativistic rotation laws in rotating fluid bodies: constant linear velocity*, Acta Phys. Pol. B 46, 2451 (2015), <https://doi.org/10.5506/APhysPolB.46.2451>
- CMS2016 Eliana Chaverra, Patryk Mach, Olivier Sarbach, *Michel accretion of a polytropic fluid with adiabatic index $\gamma > 5/3$: global flows versus homoclinic orbits*, Class. Quantum Grav. 33, 105016 (2016), <https://doi.org/10.1088/0264-9381/33/10/105016>
- KMMPX2016 Janusz Karkowski, Patryk Mach, Edward Malec, Michał Piróg, Naqing Xie, *Rotating systems, universal features in dragging and antidragging effects, and bounds of angular momentum*, Phys.

Stacjonarne modele hydrodynamiczne w newtonowskiej teorii grawitacji oraz w ogólnej teorii względności

Moje prace poświęcone stacjonarnym rozwiązaniom równań hydrodynamiki dzielą się na trzy kategorie. Pierwsza grupa dotyczy modeli sferycznie symetrycznej, stacjonarnej akrecji typu Bondiego-Michela. Drugą i trzecią grupę stanowią prace poświęcone stacjonarnie rotującym, samograwitującym plynom. Część z uzyskanych rezultatów ma charakter ogólny; większość dotyczy jednak konfiguracji toroidalnych – dysków (torusów) gazu rotującego wokół centralnego obiektu (czarnej dziury). Do drugiej grupy zaliczam wyniki newtonowskie. Trzecia grupa prac poświęcona jest modelom ogólnorelatywistycznym.

Modele akrecji typu Bondiego-Michela

Pierwsza dojrzała analiza stacjonarnego, sferycznie symetrycznego modelu hydrodynamicznej akrecji w centralnym polu grawitacyjnym pochodzi z pracy Bondiego z 1952 r. [1]. Bondi analizował stacjonarne rozwiązania równań hydrodynamiki (równań Eulera) zakładając keplerowski potencjał grawitacyjny oraz czysto radialny przepływ płynu (gazu). Dwa rozwiązania okazują się wyróżnione: rozwiązanie o asymptotycznie poddźwiękowym charakterze, które staje się naddźwiękowe dla dostatecznie małych odległości od centrum pola grawitacyjnego, oraz rozwiązanie, które blisko centrum jest poddźwiękowe, i które staje się naddźwiękowe asymptotycznie. Odległość od centrum, dla których wartość prędkości gazu równa jest wartości lokalnej prędkości dźwięku jest dla obu rozwiązań taka sama (tzw. punkt dźwiękowy). Rozwiązania te charakteryzuje dodatkowo maksymalna wartość tempa akrecji (przepływu) masy.

Wygodnym sposobem analizy powyższych rozwiązań jest praca w ramach teorii układów dynamicznych. Rozwiązania można analizować np. w przestrzeni fazowej prędkości radialnej oraz odległości od centrum, a odpowiedni układ dynamiczny można zapisać wprowadzając (sztuczny) parametr – zmienną niezależną. Dwa wyróżnione rozwiązania, o których była mowa powyżej, bifurkują ze wspólnego siodłowego punktu krytycznego.

Relatywistyczny odpowiednik powyższej analizy pochodzi z pracy Michela z roku 1972 [2]. Zaproponowane przez Michela uogólnienie polega na rozważeniu stacjonarnego, radialnego przepływu płynu w czasoprzestrzeni Schwarzschilda. Struktura problemu relatywistycznego jest bogatsza od odpowiadającej jej struktury newtonowskiej (o czym będzie jeszcze mowa poniżej), ale i w tym przypadku można zidentyfikować oba charakterystyczne rozwiązania oraz krytyczny punkt dźwiękowy.

Opisane wyżej dwa rozwiązania interpretuje się zwykle jako odpowiadające akrecji (rozwiązanie poddźwiękowe w nieskończoności) oraz wiatrowi gwiazdowemu (rozwiązanie asymptotycznie ponaddźwiękowe). Rozwiązanie odpowiadające akrecji jest ponadto jedynym gładkim, globalnym rozwiązaniem (określonym wszędzie na zewnątrz horyzontu), dla którego gaz spoczywa w nieskończoności.

Od technicznej strony dwie prace [MMK2013] i [MM2013] poświęcone są analizie akrecji typu Bondiego-Michela w przypadku ze stałą kosmologiczną. Konstrukcja przedstawiona w pracy [MMK2013] jest jednak nieco bardziej wyrafinowana. W pracach [MMK2013] i [MM2013] poszukiwaliśmy odpowiedzi na pytanie o wydajność akrecji w modelach kosmologicznych z dominującą stałą kosmologiczną (np. w późnych fazach cyklicznego modelu kosmologicznego Penrose'a [4]). Można się spodziewać, że dostatecznie duża (w porównaniu ze średnią gęstością materii), dodatnia wartość stałej kosmologicznej będzie przeciwdziałać akrecji. W pracy [MMK2013] rozważaliśmy wobec tego związane układy akrecyjne, w ramach modelu typu „szwajcarskiego sera”. Blisko czarnej dziury akrecja zachodzi efektywnie tak, jak opisywałby to model typu Bondiego-Michela ze stałą kosmologiczną (rozważaliśmy również numeryczne rozwiązania opisujące samograwitujący gaz). Równania opisujące akrecję typu Bondiego-Michela w czasoprzestrzeni Schwarzschilda-de Sittera (dla dodatniej stałej kosmologicznej) lub Schwarzschilda-anty-de Sittera (w przypadku ujemnej stałej kosmologicznej) można rozwiązać dokładnie, zakładając liniowe (izotermiczne) równania stanu $p = ke$, gdzie p jest ciśnieniem, a e gęstością energii, dla pewnych wartości stałej k . Trudność w odpowiedzi na pytanie o wydajność sferycznie symetrycznej, hydrodynamicznej akrecji w modelach kosmologicznych sprowadza się do umiejętnego sparametryzowania rozwiązań. W przypadku dodatniej stałej kosmologicznej odpowiedź okazuje się jednoznaczna. Nawet w grawitacyjnie związanych układach, tempo akrecji maleje wraz ze wzrostem stałej kosmologicznej. W kontekście cyklicznej kosmologii Penrose'a fakt ten należy uznać za przeszkodę w realizacji modelu: w późnych etapach ewolucji wszechświata z dominującą stałą kosmologiczną akrecja materii (gazu) na czarne dziury nie jest wydajnym sposobem „oczyszczania” przestrzeni z cząstek z niezerową masą spoczynkową. Przypadek z ujemną stałą kosmologiczną jest bardziej skomplikowany – charakter zależności pomiędzy tempem akrecji, a wartością stałej kosmologicznej zależy od parametryzacji modelu. Okazuje się, że fakt ten wynika z istnienia rozwiązań, które w odpowiedniej przestrzeni fazowej tworzą orbity homokliniczne.

Praca [MM2013] poświęcona jest stabilności akrecji typu Bondiego-Michela w czasoprzestrzeni Schwarzschilda-de Sittera oraz Schwarzschilda-anty de Sittera. Dla potrzeb pobieżnej dyskusji metrykę obu czasoprzestrzeni można za-

pisać jako

$$g = - \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2 \right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2),$$

gdzie (t, r, θ, ϕ) są sferycznymi współrzędnymi, m odpowiada masie czarnej dziury, a Λ oznacza stałą kosmologiczną. Dokładniejsza analiza wymaga w zasadzie użycia współrzędnych gładkich na horyzoncie czarnej dziury.

Pierwszy poprawny dowód liniowej stabilności rozwiązania Michela podał w 1980 r. Moncrief [3]. Dowód przedstawiony w pracy [MM2013] bazuje na artykule [3]. Różnica pomiędzy oboma przypadkami związana jest z dwoma czynnikami: 1) obecnością członów związanych ze stałą kosmologiczną w równaniach określających dynamikę zaburzeń przepływu akrecyjnego, 2) różną asymptotyką rozwiązań. W pracy [MM2013] pokazaliśmy, że analityczne rozwiązania przechodzące przez punkt dźwiękowy, przedstawione w artykule [MMK2013], są liniowo stabilne. Dotyczy to zarówno globalnych rozwiązań – odpowiadających sytuacji, w której płyn rozciąga się do nieskończoności, tj. $r \rightarrow \infty$, jak i rozwiązań, których nie można przedłużyć do nieskończoności (np. rozwiązań homoklinicznych). W tym ostatnim przypadku konieczne jest założenie, że zaburzenia znikają na zewnętrznym brzegu obłoku akrecyjnego.

Istnienie homoklinicznych rozwiązań w przypadku z ujemną stałą kosmologiczną zostało zaobserwowane w pracy [MMK2013] dla politropowych równań stanu. Rozwiązania tego typu pojawiają się zarówno w czasoprzestrzeni Schwarzschilda-anty de Sittera, jak i w modelu uwzględniającym samograwitację gazu. W pracy [MMK2013] analizowaliśmy również rozwiązania odpowiadające równaniom stanu $p = e/3$, $p = e/2$ oraz $p = e$. Rozwiązania te nie są homokliniczne.

Praca [M2015] poświęcona jest różnym typom rozwiązań akrecyjnych w czasoprzestrzeni Schwarzschilda-anty de Sittera. Analiza asymptotycznej postaci równań opisujących przepływ akrecyjny z liniowym równaniem stanu $p = ke$ sugeruje istnienie homoklinicznych rozwiązań dla $k < 1/3$. Dla $k \geq 1/3$ istnieją rozwiązania globalne, o dobrze określonej asymptocie przy $r \rightarrow \infty$. Praca ta zawiera również przykładowe, analityczne rozwiązania homokliniczne uzyskane dla $p = e/4$. Wyniki te sugerują stosunkowo prostą interpretację: globalne rozwiązania asymptotyczne mogą istnieć jedynie dla dostatecznie „relatywistycznych” równań stanu, poczynając od liniowego równania postaci $p = e/3$, tj. równania charakteryzującego gaz fotonowy. Warto zauważyć, że zasięg cząstki poruszającej się w czasoprzestrzeni Schwarzschilda-anty de Sittera po radialnej geodezyjnej czasowej jest ograniczony. Cząstka poruszająca się po radialnej geodezyjnej zerowej może dotrzeć do nieskończoności ($r \rightarrow \infty$) [5].

Pracę [M2015] opublikowałem w 2015 roku. W tym samym roku Eliana Chaverra i Olivier Sarbach opublikowali artykuł, zawierający pogłębioną analizę rozwiązań Michela wraz z próbą uogólnienia znanych już wyników – uwzględ-

nienia szerszej rodziny sferycznie symetrycznych metryk oraz większej liczby barotropowych równań stanu [6]. Chaverra i Sarbach znaleźli numeryczne rozwiązanie typu homoklinicznego w przypadku akrecji w czasoprzestrzeni Schwarzschilda z politropowym równaniem stanu z wykładnikiem politropowym $\gamma > 5/3$. Pobieźną dyskusję rozwiązań zagadnienia Michela z politropowym równaniem stanu można znaleźć w pracy Begelmana [7]; brak w niej jednak informacji na temat rozwiązań homoklinicznych. Begelman zauważył natomiast, że dla wykładników politropowych $\gamma > 5/3$, równania opisujące akrecję mogą mieć dwa punkty krytyczne. Jest to czysto relatywistyczny efekt, nie mający odpowiednika w newtonowskim modelu Bondiego.

W napisanej wspólnie z Elianą Chaverrą i Olivierem Sarbachem pracy [CMS2016] zamieściliśmy obszerną i w dużej mierze kompletną analizę zagadnienia Michela, uwzględniającą przypadek z politropowym równaniem stanu z $\gamma > 5/3$. Praca ta zawiera w szczególności dowód istnienia rozwiązań homoklinicznych. Warto zauważyć, że występowanie dwóch punktów krytycznych – jednego typu siodłowego oraz jednego typu centrum, nie pociąga automatycznie istnienia orbity homoklinicznej. Przypadek, w którym istnieją dwa punkty krytyczne, a nie istnieje orbita homokliniczna ma również miejsce w problemie Michela, dla pewnych wartości parametrów modelu.

Stacjonarne, rotujące płyny w teorii newtonowskiej

Newtonowska teoria samograwitujących, rotujących płynów liczy sobie już z górą 300 lat. Jej pierwszy, trwający ponad 200 lat, okres badań związany jest z nazwiskami wybitnych uczonych: Newtona, Maclaurina, Jacobiego, Liouville’a, Dirichleta, Dedekinda, Riemanna, Roche’a, Lichtensteina, Poincarégo, Cartana. Powstałe w tym okresie prace dotyczyły głównie analizy tak zwanych figur równowagi [8]. Z fizycznego punktu widzenia ciekawsza wydaje się teoria samograwitującego płynu ściśliwego, opisanego sprzężonym układem równań: równaniem Poissona dla potencjału grawitacyjnego oraz równaniem Eulera [9]. Znajduje ona naturalne zastosowanie w opisie rotujących gwiazd. Zaskakującą zgodność z wynikami obserwacji uzyskuje się również w odniesieniu do planet typu Jowisza [10]. Z matematycznej perspektywy powyższe podejście stanowi wdzięczny oraz ambitny temat. W przeciwieństwie do ogólnorelatywistycznego odpowiednika, w ramach newtonowskiej teorii rotujących, samograwitujących płynów ściśliwych możliwe było udzielenie odpowiedzi na część podstawowych pytań. Dla przykładu, w 1972 r. Auchmuty i Beals przedstawili pierwszy ogólny dowód istnienia rozwiązań [11].

Moje prace poświęcone samograwitującym, rotującym płynom w ujęciu newtonowskim dotyczą w przeważającej mierze słabiej zbadanych konfiguracji o toroidalnej topologii. Prace te motywowane były zagadnieniem czysto relatywistycznym – opisem stacjonarnej konfiguracji płynu rotującego wokół czarnej dziury.

Stacjonarny, samograwitujący płyn doskonały opisany jest układem równań

$$\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\rho\nabla\Phi - \nabla p,$$

$$\nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) = 0,$$

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho,$$

gdzie ρ jest gęstością gazu, p ciśnieniem, $\mathbf{v}$ prędkością, Φ potencjałem grawitacyjnym, a G oznacza stałą grawitacji. Układ ten wymaga określenia równania stanu. W poniższej dyskusji ograniczę się dla prostoty do barotropowych równań stanu postaci $p = p(\rho)$.

Możliwe stacjonarne przepływy analizowali Arnold i Khesin [12]. Najprostsze dopuszczalne założenie polega na przyjęciu prędkości w postaci $\mathbf{v} = \Omega(\varpi, z)\partial_\phi = \varpi\Omega(\varpi, z)\mathbf{e}_\phi$ w cylindrycznym układzie współrzędnych (ϖ, ϕ, z) . Z klasycznego twierdzenia Poincarégo i Wavre'a wynika, że w istocie $\Omega(\varpi, z) = \Omega(\varpi)$ [9]. Wprowadzając entalpię właściwą h tak, aby $dh = dp/\rho$ oraz potencjał odśrodkowy

$$\Phi_c = -\int^\varpi d\varpi' \varpi' \Omega^2(\varpi')$$

otrzymujemy układ równań postaci

$$\begin{cases} h(\rho) + \Phi_c + \Phi = C & \text{w } U, & (1a) \\ \Delta\Phi = 4\pi G\rho & \text{w } \mathbb{R}^3, & (1b) \\ \rho > 0 & \text{w } U, & (1c) \\ \rho = 0 & \text{w } \mathbb{R}^3 \setminus U, & (1d) \end{cases}$$

gdzie C jest stałą całkowania, a U obszarem wypełnionym płynem. Tak sformułowany problem należy do zagadnień z tak zwanym swobodnym brzegiem. Obszar U nie jest dany a priori – jego kształt należy wyznaczyć w ramach procedury poszukiwania rozwiązań. Istnieje natomiast duża dowolność wyboru prawa rotacji $\Phi_c = \Phi_c(\varpi)$, podobna do tej, jaką dysponujemy wybierając równanie stanu.

Płyn rotujący wokół centralnej masy można opisać przyjmując zamiast równania (1a) równanie

$$h(\rho) + \Phi_c + \Phi - GM_c/|\mathbf{x}| = C,$$

gdzie M_c oznacza wartość centralnej masy, a $\mathbf{x}$ jest wektorem wodzącym. W takim przypadku ρ oznacza jedynie gęstość rotującego gazu, bez uwzględnienia członu pochodzącego od masy centralnej.

Powyższe zagadnienia (z centralną masą punktową lub bez niej) analizowaliśmy w pracach [MM2011], [MS2013], [M2012b], [MMP2013], a także w pobocznych pracach [MMP2012] oraz [13]. Praca [MM2012] zawiera analizę modelu uwzględniającego transport promieniowania.

Praca [MM2011] zawiera oszacowanie masy rotującego płynu uzyskane w oparciu o nierówność Sobolewa. Jest to wynik stosunkowo nietypowy i zaskakujący. Nierówności Sobolewa używa się jako jednego z podstawowych narzędzi analizy funkcjonalnej, mającego zastosowanie w teorii równań różniczkowych. W powyższej pracy wynik o fizycznym znaczeniu został uzyskany w oparciu o optymalną, numeryczną wartość stałej występującej w nierówności Sobolewa. Praca ta zawiera również numeryczne testy jakości wyprowadzonego oszacowania.

W napisanej razem z Walterem Simonem pracy [MS2013] zajmowaliśmy się warunkami, gwarantującymi przestrzenną skończoność konfiguracji stacjonarnego płynu, tj. zwartość obszaru U . Walter Simon [14] (podobnie jak Mark Heinzle i Claes Uggle [15]) badali wcześniej to samo zagadnienie dla statycznych, sferycznie symetrycznych konfiguracji, zarówno w ramach ogólnej teorii względności, jak i w teorii newtonowskiej. W obu przypadkach, o tym, czy statyczna konfiguracja o skończonej masie może być przestrzennie nieskończona decyduje jedynie postać równania stanu. W przypadku rotujących płynów o istnieniu nieskończonej rozciągłej konfiguracji o skończonej masie decyduje zarówno równanie stanu, jak i prawo rotacji. Ogólny wniosek z pracy [MS2013] sugeruje, że rotujący, samograwitujący płyn barotropowy o skończonej masie tworzy na ogół jedynie skończone konfiguracje. Łatwo wykazać, że stacjonarnie rotujący płyn nie może rozciągać się do nieskończoności w kierunku równoległym do osi obrotu. Praca [MS2013] zawiera również warunek konieczny, aby konfiguracja mogła się rozciągać do nieskończoności w płaszczyźnie równikowej. Warunek ten stosunkowo trudno spełnić.

Graniczny przypadek, pojawiający się naturalnie w Twierdzeniu 4.2 z pracy [MS2013], stanowią bardzo dobrze znane statyczne rozwiązania politropowe, tj. rozwiązania równania Lane’a-Emdena, z indeksem $n = 5$. Równanie Lane’a-Emdena może być zapisane w postaci

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\theta}{dr} \right) + \theta^n = 0, \quad (2)$$

gdzie r jest odpowiednio przeskalowanym promieniem, a θ odpowiednio przeskalowaną entalpią właściwą. Wykładnik (indeks) n związany jest z wykładnikiem politropowym γ wzorem $\gamma = 1 + 1/n$. Wartość $n = 5$ stanowi krytyczny wykładnik związany z operatorem Laplace’a w 3 wymiarach.

Problem otrzymania oraz analizy rozwiązań równania Lane’a-Emdena należy do klasycznych zagadnień fizyki matematycznej (bądź też teoretycznej astrofizyki). Regularne rozwiązania równania Lane’a-Emdena z indeksem $n = 5$ zostały znalezione jeszcze w roku 1907 [43]. Kolejne rozwiązanie, osobliwe w $r = 0$ wynika natychmiast z symetrii skalowania równania Lane’a-Emdena z krytycznym wykładnikiem. Długo sądzono, że uzyskanie pozostałych rozwiązań jest skomplikowane i wymaga użycia funkcji eliptycznych [44]. Zupełnie

nieoczekiwanie, w 1962 roku, Srivastava znalazł kolejne rozwiązanie, wyrażone przez funkcje elementarne [45]. Część rozwiązań, które można zapisać przy pomocy funkcji eliptycznych podali Goenner i Havas [46]. Ostatnie, brakujące rozwiązania zostały wyprowadzone przeze mnie w pracy [M2012a], razem z analizą pokazującą kompletność uzyskanych rozwiązań. Wyprowadzone w pracy [M2012a] nowe rozwiązania są osobliwe w $r = 0$. Ich zastosowanie do modelowania gwiazd wymaga „klejenia” różnych rozwiązań. Z drugiej strony, stosując się one wprost w celach wykraczających poza konstruowanie modeli gwiazd – np. w opisie rozmaitości riemannowskich o stałej krzywiznie skalarnej, czy też w odniesieniu do danych Bowena-Yorka z dodatnią stałą kosmologiczną.

W pracy [M2012b] została wyprowadzona tożsamość wiralna uwzględniająca obecność centralnej masy punktowej, jak również transport promieniowania. Przedstawione wyprowadzenie wykorzystuje tożsamość Pohożajewa i jest to właściwie adaptacja rachunku z pracy [MS2013], dostosowana do przypadku z centralną masą punktową. Wyprowadzona relacja posłużyła do testowania poprawności schematów numerycznych stosowanych w późniejszych pracach. Pozwoliła ona również na wyprowadzenie części wyników przedstawionych w pracy [MMP2013].

Napisana razem z Edwardem Malcem praca [MM2012] dotyczy problemu, który w zasadzie wykracza poza sformułowanie postaci (1). W pracy tej zaproponowaliśmy model samograwitującego, kwazistacjonarnego dysku wokół czarnej dziury (masy punktowej), w którym uwzględniony byłby transport wytwarzanego w dysku promieniowania, a także jego wpływ na tempo akrecji. Model taki, nie jest wobec tego ograniczony do czysto rotujących konfiguracji, ale uwzględnia również niewielką prędkość radialną gazu. Staraliśmy się przy tym wziąć pod uwagę wzajemne sprzężenie rozważanych procesów: grawitacji dysku, jego struktury hydrodynamicznej, emisji i transportu promieniowania. Głównym ograniczeniem zaproponowanego przez nas modelu jest uwzględnienie oddziaływania promieniowania z materią w przybliżeniu optycznie cienkim, co z kolei nakłada warunki na fizyczne parametry rozważanych układów. Od technicznej strony, rozwiązania uzyskuje się rozwiązując sprzężony układ nieliniowych, eliptycznych równań różniczkowych cząstkowych, będący uogólnieniem układu (1). W pracy [MM2012] równania te rozwiązywaliśmy numerycznie.

Punktem wyjścia dla dalszych badań była napisana razem z Edwardem Malcem oraz Michałem Pirogiem praca [MMP2013]. W pracy tej analizowaliśmy szczegółowo konfiguracje z Keplerowskim prawem rotacji. Keplerowskie prawo rotacji kojarzy się naturalnie z ruchem nieważkiej materii pyłowej wokół centralnej masy. Zależność prędkości kątowej od odległości od osi obrotu ma dla kołowych orbit postać $\Omega = w/\varpi^{3/2}$, gdzie w jest stałą związaną wprost z masą centralną, $w^2 = GM_c$. Prawo rotacji powyższej postaci jest również akceptowalnym założeniem w przypadku samograwitującej materii z ciśnie-

niem. Nasuwa się wówczas pytanie o znaczenie stałej w . Wyniki numeryczne, oraz częściowe rezultaty analityczne uzyskane w pracy [MMP2013] sugerują następującą nierówność

$$GM_c \leq w^2 \leq G(M_c + M_d),$$

gdzie $M_d = \int_U d^3x \rho$ jest masą gazu. Znajomość parametrów geometrycznych stacjonarnego dysku – jego rozmiarów równikowych oraz grubości – pozwala na powiązanie (obserwowanej) wartości stałej w oraz mas M_c oraz M_d . Wynik ten wykorzystaliśmy w pracy [MMP2012] do oszacowania masy keplerowskiego dysku obserwowanego w centrum galaktyki NGC 4258.

Samograwitujące dyski były badane wcześniej w kontekście materii pyłowej [16]. Nie jest zaskoczeniem, że uzyskane przez nas dla układów hydrodynamicznych wyniki różnią się od relacji charakteryzujących pył. Hydrodynamiczny model samograwitującego, keplerowskiego dysku gazowego, rotującego wokół centralnej masy przedstawili jeszcze w roku 1995 Hashimoto, Eriguchi i Müller [17]. Skonstruowany przez nich model dysku charakteryzuje się rotacją z $w^2 = GM_c$. Jest to możliwe wyłącznie dzięki założeniu, że dominujący wpływ na mechanikę układu ma dostatecznie silne promieniowanie. Innymi słowy, autorzy zakładają rotację z $w^2 = GM_c$, a następnie poszukują rozwiązania z rozkładem promieniowania, który gwarantuje spełnienie powyższego warunku.

Rotujące płyny w ogólnej teorii względności

Przez długi czas pracom dotyczącym stacjonarnych, samograwitujących dysków wokół czarnych dziur przypisywano głównie teoretyczne znaczenie. Sytuacja ta uległa zmianie wraz z odkryciem fal grawitacyjnych pochodzących ze zlewania się układów podwójnych gwiazd neutronowych [18]. Wiedza o przebiegu takiego procesu jest w tej chwili dostępną wyłącznie w oparciu o numeryczne symulacje hydrodynamiczne. Większość symulacji tego typu przewiduje przejściową fazę, w której wokół centralnego rdzenia (czarnej dziury lub gwiazdy neutronowej) powstaje stosunkowo masywny, kwazistacjonarny, rotujący torus [19, 20, 21, 22]. Torus ten ulega ostatecznie dezintegracji, jednak czas jego istnienia jest długi w porównaniu ze skalą czasową charakteryzującą dynamikę tego układu. Masy formujących się w ten sposób torusów osiągały nawet około 30% masy centralnego obiektu.

Nasze prace dotyczące samograwitujących dysków (torusów) wokół czarnych dziur rozpoczęliśmy od konstrukcji modelu w przybliżeniu postnewtonowskim, co w efekcie doprowadziło nas do zaproponowania w artykule [MM2015] prawa rotacji odpowiadającego między innymi rotacji keplerowskiej, a w dalszej perspektywie, do jego uogólnienia uwzględniającego oddziaływanie ze spinem centralnej czarnej dziury w [23, 24].

W dotychczasowej literaturze ogólnorelatywistycznej dotyczącej samograwitujących, stacjonarnie rotujących płynów przebadano jedynie parę praw rota-

cji. Większa część prac poświęcona jest modelom odpowiadającym sztywnej rotacji. Sztywno rotujące dyski wokół czarnych dziur badali Ansorg i Petroff [25, 26]. Drugim częstym wyborem, jest liniowa relacja między odpowiednio zdefiniowanym krętem właściwym, a prędkością kątową. Numeryczne rozwiązania obrazujące dyski wokół czarnych dziur scharakteryzowane takim prawem rotacji zostały przedstawione w pionierskiej pracy [27]. Modele dysków o stałej gęstości krętu przedstawił w 2007 roku Shibata [29]. Nowe prawo rotacji zostało również zaproponowane w [28] w kontekście rotujących gwiazd.

Analizowane przez nas w pracach [MM2015], [KMMPX2016], a także [23, 24] keplerowskie prawo rotacji ma szczególne znaczenie. Wstępne analizy profili prędkości w torusach otrzymanych w ramach symulacji zlewania się gwiazd neutronowych sugerują keplerowską rotację. Keplerowska rotacja jest również charakterystyczna dla obserwowanych (np. poprzez promieniowanie maserowe) dysków akrecyjnych w aktywnych jądrach galaktyk.

Równania opisujące stacjonarny, rotujący i samograwitujący gaz można zapisać na kilka sposobów. Przytoczę tu w skrócie sformułowanie pochodzące z pracy Shibaty [29] i wykorzystywane w numerycznych obliczeniach przedstawionych w naszych artykułach [23, 24]. Sformułowanie to ma następujące zalety: 1) Obecność centralnej czarnej dziury uwzględniona jest w ramach tak zwanej metody „puncture”. 2) Rozwiązanie przechodzi automatycznie w rozwiązanie Kerra w granicy zaniedbywalnej masy gazu.

W ślad za Shibatą [29] wybieramy metrykę postaci

$$g = -\alpha^2 dt^2 + \psi^4 \left[e^{2q} (dr^2 + r^2 d\theta^2) + r^2 \sin^2 \theta (\beta dt + d\phi)^2 \right], \quad (3)$$

gdzie α, ψ, q, β są funkcjami r i θ .

Przyjmujemy tensor energii i pędu $T_{\mu\nu} = \rho(1+h)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}$, gdzie $u^r = u^\theta = 0$, $\Omega = u^\phi/u^t$. Gęstość barionowa ρ spełnia równanie $\nabla_\mu(\rho u^\mu) = 0$.

W obszarze wypełnionym płynem, równania Eulera $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ można formalnie scałkować. Otrzymuje się w ten sposób równanie postaci

$$\frac{1+h}{u^t} + \int (1+h)u_\phi d\Omega = C_1$$

lub

$$\ln \left(\frac{1+h}{u^t} \right) + \int u^t u_\phi d\Omega = C_2. \quad (4)$$

Wybieramy tę drugą możliwość oraz definiujemy $j = u^t u_\phi$.

Niech K_{ij} oznacza krzywiznę zewnętrzną hiperpowierzchni $t = \text{const}$. Zdefiniujemy konforemnie przeskalowaną krzywiznę zewnętrzną wzorem $\hat{K}_{ij} = \psi^2 K_{ij}$. Niezerową składową β wektora shiftu przedstawiamy w postaci sumy

dwóch czynników $\beta = \beta_K + \beta_T$, przy czym β_K i β_T określamy w następujący sposób. Niezerowe składowe $\hat{K}_{ij}$ można zapisać w postaci

$$\hat{K}_{r\phi} = \frac{H_E \sin^2 \theta}{r^2} + \frac{\psi^6}{2\alpha} r^2 \sin^2 \theta \partial_r \beta_T,$$

$$\hat{K}_{\theta\phi} = \frac{H_F \sin \theta}{r} + \frac{\psi^6}{2\alpha} r^2 \sin^2 \theta \partial_\theta \beta_T.$$

Za Shibata [29] wybieramy funkcje H_E i H_F w postaci odpowiadającej metryce Kerra z masą m i parametrem krętu a , zapisanej w postaci (3). Wielkości te można zapisać jako

$$H_E = \frac{ma [(r_K^2 - a^2)\Sigma_K + 2r_K^2(r_K^2 + a^2)]}{\Sigma_K^2},$$

$$H_F = -\frac{2ma^3 r_K \sqrt{r_K^2 - 2mr_K + a^2} \cos \theta \sin^2 \theta}{\Sigma_K^2},$$

gdzie

$$r_K = r \left(1 + \frac{m}{r} + \frac{m^2 - a^2}{4r^2} \right), \quad \Sigma_K = r_K^2 + a^2 \cos^2 \theta.$$

Dla metryki Kerra otrzymuje się w tym wypadku

$$\hat{K}_{r\phi} = \frac{H_E \sin^2 \theta}{r^2}, \quad \hat{K}_{\theta\phi} = \frac{H_F \sin \theta}{r}.$$

W obecności torusa funkcję β_K zadajemy jako rozwiązanie równania

$$\frac{\partial \beta_K}{\partial r} = \frac{2H_E \alpha}{r^4 \psi^6}. \quad (5)$$

Kolejna część potrzebnych definicji związana jest z realizacją metody „puncture” [72]. Zdefiniujmy $\Phi = \alpha\psi$, $r_s = \frac{1}{2}\sqrt{m^2 - a^2}$, oraz

$$\psi = \left(1 + \frac{r_s}{r} \right) e^\phi, \quad \Phi = \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) e^{-\phi} B.$$

Równania Einsteina można zapisać w postaci

$$\begin{aligned} & \left[\partial_{rr} + \frac{2r}{r^2 - r_s^2} \partial_r + \frac{1}{r^2} (\partial_{\theta\theta} + \cot \theta \partial_\theta) \right] \phi = \\ & -2\pi e^{2q} \psi^4 \left[\rho_H - p + \frac{\rho(1+h)u_\phi^2}{\psi^4 r^2 \sin^2 \theta} \right] - \frac{A^2}{\psi^8} - \partial_r \phi \partial_r b - \frac{1}{r^2} \partial_\theta \phi \partial_\theta b \\ & - \frac{1}{2} \left[\frac{r - r_s}{r(r + r_s)} \partial_r b + \frac{\cot \theta}{r^2} \partial_\theta b \right], \end{aligned} \quad (6)$$

$$\left[\partial_{rr} + \frac{3r^2 + r_s^2}{r(r^2 - r_s^2)} \partial_r + \frac{1}{r^2} (\partial_{\theta\theta} + 2 \cot \theta \partial_\theta) \right] B = 16\pi B e^{2q} \psi^4 p, \quad (7)$$

$$\left\{ \partial_{rr} + \frac{4r^2 - 8r_s r + 2r_s^2}{r(r^2 - r_s^2)} \partial_r + \frac{1}{r^2} [\partial_{\theta\theta} + (3 \cot \theta) \partial_\theta] \right\} \beta_T =$$

$$\frac{16\pi \alpha e^{2q} J}{r^2 \sin^2 \theta} - 8 \partial_r \phi \partial_r \beta_T + \partial_r b \partial_r \beta_T - 8 \frac{\partial_\theta \phi \partial_\theta \beta_T}{r^2} + \frac{\partial_\theta b \partial_\theta \beta_T}{r^2}, \quad (8)$$

$$\left(\partial_{rr} + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_{\theta\theta} \right) q =$$

$$-8\pi e^{2q} \left(\psi^4 p - \frac{\rho(1+h)u_\phi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + \frac{3A^2}{\psi^8} + 2 \left[\frac{r - r_s}{r(r + r_s)} \partial_r + \frac{\cot \theta}{r^2} \partial_\theta \right] b$$

$$+ \left[\frac{8r_s}{r^2 - r_s^2} + 4 \partial_r (b - \phi) \right] \partial_r \phi + \frac{4}{r^2} \partial_\theta \phi \partial_\theta (b - \phi), \quad (9)$$

gdzie

$$A^2 = \frac{\hat{K}_{r\phi}^2}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{\hat{K}_{\theta\phi}^2}{r^4 \sin^2 \theta}, \quad \rho_H = \rho(1+h)(\alpha u^t)^2 - p,$$

$$J = \rho(1+h)\alpha u^t u_\phi, \quad B = e^b.$$

Powierzchnia $r = r_s$ jest horyzontem pozornym. Warunki brzegowe w $r = r_s$ mają postać

$$\partial_r \phi = \partial_r B = \partial_r \beta_T = \partial_r q = 0.$$

Powyższe równania mają strukturę podobną do struktury modelu newtonowskiego. Istotną różnicą polega na sposobie zadawania prawa rotacji – nie jako funkcji współrzędnych, ale w postaci relacji $j = j(\Omega)$ (analogiczna parametryzacja w postaci zależności krętu właściwego od prędkości kątowej jest również możliwa w przypadku newtonowskim). Jak powinna wyglądać zależność $j = j(\Omega)$ odpowiadająca rotacji keplerowskiej? W teorii newtonowskiej relacja między krętem właściwym, a prędkością kątową odpowiadającą rotacji keplerowskiej ma postać $j_0 \propto \Omega_0^{-1/3}$. Naturalny wybór $j \propto \Omega^{-1/3}$ jest wprowadzie możliwy również w kontekście ogólnorelatywistycznym, ale nie prowadzi on do modelu o cechach, których oczekiwaliśmy od rotacji keplerowskiej, a w szczególności nie pozwala na otrzymanie stacjonarnych rozwiązań opisujących dyski o dostatecznie małych masach.

W pracach [MM2015, KMMPX2016], a także [23, 24], zaproponowaliśmy w kontekście samograwitujących dysków relacje $j(\Omega)$ spełniane przez nieskończenie cienki, nieważki dysk złożony z cząstek poruszających się po kołowych geodezyjnych w płaszczyźnie równikowej w czasoprzestrzeni Schwarzschilda

(w przybliżeniu postnewtonowskim) oraz Kerra (w przypadku modeli ogólnorelatywistycznych). Okazuje się, że nałożenie powyższego warunku usuwa niejednoznaczność rozwinięcia postnewtonowskiego, pojawiającą się już w pierwszym rzędzie, w odniesieniu do stacjonarnie rotujących płynów. W pracach [KMMPX2016] oraz [23, 24] pokazaliśmy, że zaproponowane prawa rotacji pozwalają uzyskać numeryczne rozwiązania w bardzo szerokim zakresie parametrów.

Rozwinięcie postnewtonowskie

W kontekście rotujących, samograwitujących płynów rozwinięcie postnewtonowskie można przeprowadzić na co najmniej dwa sposoby. Równania (4-9) można przepisać wprowadzając jawnie wartość prędkości światła $c \neq 1$, a następnie rozwinąć je w szereg względem parametru $1/c$. Takie podejście stosowali między innymi Heilig oraz Horatschek i Petroff w odniesieniu do sztywno rotujących płynów [30, 31]. Równania (4-9), zapisane w nieco innym cechowaniu, ale z jawną wartością prędkości światła, można znaleźć w pracy [MM2015]. Druga możliwość polega na wyjściu od zupełnie ogólnych równań opisujących układ równań Eulera-Einsteina w rozwinięciu postnewtonowskim, a następnie nałożeniu warunku stacjonarności oraz pozostałych warunków symetrii związanych ze stacjonarną rotacją. Można oczekiwać, że oba podejścia powinny prowadzić do tych samych rezultatów. O ile równania Einsteina dają zgodne rozwinięcia niemal natychmiast (z dokładnością do wyrazów pierwszego rzędu), pewne trudności nastroczą pogodzenie rozwinięć równania Eulera.

Pierwszą analizę keplerowskich hydrodynamicznych dysków w rozwinięciu postnewtonowskim opublikowaliśmy wspólnie z Piotrem Jaranowskim, Edwardem Malcem oraz Michałem Pirogiem w pracy [JMMP2015]. Praca ta zawiera kilka kluczowych elementów. Wykorzystując ogólne rozwinięcie postnewtonowskie równań Eulera-Einsteina, wyprowadziliśmy równania opisujące stacjonarne, samograwitujące dyski rotujące wokół centralnej czarnej dziury. Z dokładnością do wyrazów pierwszego rzędu czarna dziura opisana jest przez odpowiednio dobrane człony typu delty Diraca.

Aby zachować przejrzystość dyskusji, przytoczę tutaj uzyskane wyrażenia. Wybieramy metrykę postaci

$$g = - \left(1 + 2 \frac{U}{c^2} + 2 \frac{U^2}{c^4} \right) (dx^0)^2 - \frac{2}{c^3} A_i dx^i dx^0 + \left(1 - 2 \frac{U}{c^2} \right) (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2)$$

z jawnie konforemnie płaską częścią przestrzenną. W dalszej kolejności wielkości odpowiadające rzędowi newtonowskiemu będziemy oznaczać indeksem „0”. Wielkości odpowiadające pierwszej poprawce postnewtonowskiej będą

oznaczane indeksem „1”: $\rho \approx \rho_0 + \rho_1/c^2$, $h \approx h_0 + h_1/c^2$, ... Potencjał $U = -GM_c/r + U_0 + U_1/c^2$ spełnia równania

$$\Delta U_0 = 4\pi G \rho_0,$$

$$\Delta U_1 = 4\pi G \left(M_c U_0(0) \delta(\mathbf{x}) + 2p_0 + h_0 \rho_0 - 2U_0 \rho_0 + \rho_1 + 2\varpi^2 \rho_0 \Omega_0^2 \right).$$

Dla funkcji A_ϕ otrzymujemy

$$\Delta A_\phi - 2 \frac{\partial \varpi A_\phi}{\varpi} = -16\pi G \varpi^2 \rho_0 \Omega_0.$$

W dalszym toku rozumowania wygodnie jest założyć jawnie postać funkcji $j(\Omega)$. Relacja wypracowana przez nas w artykule [MM2015] ma postać

$$j(\Omega) \equiv \frac{w^{1-\delta} \Omega^\delta}{1 - \frac{\kappa}{c^2} w^{1-\delta} \Omega^{1+\delta} + \frac{\Psi}{c^2}}. \quad (10)$$

Ma ona następujące własności: W rzędzie newtonowskim otrzymujemy relację potęgową $j_0 = w^{1-\delta} \Omega^\delta$. Uwzględniając równanie $j = u^t u_\phi$, otrzymujemy w rzędzie newtonowskim

$$\Omega_0 = \frac{w}{\varpi^{1-\delta}}.$$

Rotacji keplerowskiej odpowiada wybór $\delta = -1/3$. Forma prawa rotacji (10) pozwala dodatkowo uwzględnić relację pomiędzy krętem właściwym j a prędkością kątową Ω charakteryzującą nieskończenie cienki, nieważki dysk pyłowy w płaszczyźnie równikowej (ruch po kołowych geodetykach w płaszczyźnie równikowej w czasoprzestrzeni Schwarzschilda). To ostatnie rozwiązanie uzyskuje się kładąc $\kappa = (1 - 3\delta)/(1 + \delta) + \mathcal{O}(c^{-2})$ oraz $\delta = -1/3$. Stała Ψ związana jest bezpośrednio ze stałą w . W poniższych wzorach wybieramy $\Psi = 4c_0$, gdzie c_0 zadane jest wzorem (11). W ten sposób czynnik proporcjonalny do Ω_0 nie pojawia się już w wyrażeniu na poprawkę Ω_1 . W dalszym ciągu przyjmujemy $\kappa = (1 - 3\delta)/(1 + \delta) + \mathcal{O}(c^{-2})$ oraz $\Psi = 4c_0$.

Równania Eulera można zapisać w postaci

$$h_0 - \frac{GM_c}{r} + U_0 - \frac{\delta - 1}{2(1 + \delta)} \Omega_0^2 \varpi^2 = c_0, \quad (11)$$

$$h_1 + U_1 + \Omega_0 A_\phi - 2\varpi^2 \Omega_0^2 h_0 + \frac{3}{2} h_0^2 + 4h_0 U_0 + 2U_0^2 + \frac{\delta - 5}{4(1 + \delta)} \varpi^4 \Omega_0^4 = -c_1. \quad (12)$$

Dopełnieniem powyższych równań jest wyrażenie określające postnewtonowską poprawkę do prędkości kątowej gazu

$$\Omega_1 = -\frac{2}{1 - \delta} \Omega_0^3 \varpi^2 + \frac{1}{1 - \delta} \frac{A_\phi}{\varpi^2} - \frac{4}{1 - \delta} \Omega_0 h_0. \quad (13)$$

Zakładając keplerowskie prawo rotacji w rzędzie newtonowskim, tj. relację $\Omega_0 = w/\varpi^{3/2}$, gdzie w jest stałą, otrzymujemy

$$\Omega = \frac{w}{\tilde{\varpi}^{2/(1-\delta)}} - \frac{2}{c^2(1-\delta)}\Omega_0 \left(-\frac{GM_c}{r} + U_0 + \Omega_0^2 \tilde{\varpi}^2 \right) + \frac{A_\phi}{\tilde{\varpi}^2 c^2 (1-\delta)} - \frac{4}{c^2(1-\delta)}\Omega_0 h_0. \quad (14)$$

W powyższym wzorze $\tilde{\varpi} = \varpi(1 - U_0/c^2) + \mathcal{O}(c^{-4})$ jest obwodowym promieniem okręgu o ustalonym promieniu współrzędnościowym ϖ . Pierwsze dwa człony relatywistycznej poprawki do prędkości kątowej mają naturalną interpretację. Człon

$$-\frac{2}{c^2(1-\delta)}\Omega_0 \left(-\frac{Gm}{r} + U_0 + \Omega_0^2 \tilde{\varpi}^2 \right)$$

odpowiada za odstępstwo od ściśle keplerowskiej rotacji w potencjale centralnej masy. Człon proporcjonalny do A_ϕ opisuje tak zwane unoszenie układów inercjalnych. Zupełnie nowym rezultatem jest obecność hydrodynamicznego członu proporcjonalnego do entalpii h_0 . Człon ten nie występuje ani dla materii pyłowej, ani w przypadku sztywnej rotacji. Ponieważ jego znak jest przeciwny do znaku członu proporcjonalnego do A_ϕ , związany z powyższym członem efekt nazywamy roboczo „antywleczeniem”. W konkretnych, numerycznych przykładach wszystkie powyższe człony mogą być tego samego rzędu wielkości.

Przedstawiając powyższe wyniki należy zwrócić uwagę na następujący, kluczowy fakt. Równania (12) oraz (13) nie są od siebie niezależne. Jeśli do lewej strony równania (12) dodamy dowolną funkcję $F(\varpi)$, natomiast do wyrażenia na poprawkę do prędkości kątowej dodamy człon $-(\partial_\varpi F)/(2\varpi\Omega_0)$, to otrzymany układ równań będzie nadal stanowił poprawne rozwinięcie układu równań Eulera-Einsteina z dokładnością do wyrazów pierwszego rzędu. Innymi słowy, rozwinięcie postnewtonowskie okazuje się niejednoznaczne w odniesieniu do hydrodynamicznych układów stacjonarnych. Wyprowadzając powyższe wzory de facto usunęliśmy tę niejednoznaczność, nakładając warunek określający stałą κ – żądanie aby nieważki, nieskończenie cienki, pyłowy dysk w czasoprzestrzeni Schwarzschilda stanowił rozwiązanie wyprowadzanych równań.

Identyfikacja członu związanego z „antywleczeniem” jest prawdopodobnie głównym osiągnięciem pracy [JMMP2015]. Dokładna postać równań (12-13) została jednak wyprowadzona później: w pracach [MM2015] oraz [KMMPX2016]. Równania przedstawione w pracy [JMMP2015] odpowiadają innemu wyborowi funkcji $F(\varpi)$. Przedstawiony powyżej warunek określający wartość stałej κ , jak również sama postać relacji (10) zostały wprowadzone w napisanej wspólnie z Edwardem Malcem pracy [MM2015].

Dokładna analiza wielu postnewtonowskich rozwiązań zgodnych z powyższym schematem została przedstawiona w pracy [KMMPX2016], której współautorami są Janusz Karkowski, Edward Malec, Michał Piróg oraz Naqing Xie.

W pracy tej analizujemy również relacje między krętem, masą oraz rozmiarami dysku. Jest to aktualne oraz interesujące zagadnienie, głównie ze względu na możliwość testowania proponowanych oszacowań dotyczących wartości krętu w układach stacjonarnych w ogólnej teorii względności.

Należy jeszcze zwrócić uwagę, że przypadek z $\delta = -1$, odpowiadający z grubsza stałej liniowej prędkości rotacji, wymaga osobnej analizy. Stosowne równania zostały wyprowadzone w napisanej razem z Jerzym Knopikiem i Edwardem Malcem pracy [KMM2015].

Modele w pełni ogólnorelatywistyczne

Napisane razem z Januszem Karkowskim, Wojciechem Kulczyckim, Edwardem Malcem, Andrzejem Odrzywołkiem oraz Michałem Pirogiem prace [23, 24] poświęciliśmy rozwiązaniom równań (4-9) z prawem rotacji (10), a także z jego uogólnieniem, pozwalającym uwzględnić oddziaływanie z krętem centralnej czarnej dziury. Prac tych nie wymieniam, jako „osiągnięcia habilitacyjnego”, ponieważ w chwili pisania niniejszego tekstu są one opublikowane jedynie w formie preprintów. Uważam jednak, że stawiają one rezultaty uzyskane w pracach [JMMP2015], [MM2015], [KMMPX2016] w odpowiednim świetle. Pozwolę sobie, wobec tego, omówić krótko przedstawione w nich wyniki.

W pierwszej kolejności byliśmy zainteresowani potwierdzeniem wyników uzyskanych w ramach rozwinięcia postnewtonowskiego. Dwa aspekty wydają mi się szczególnie interesujące. Po pierwsze okazało się, że odkryte w ramach postnewtonowskiej analizy efekty słabego pola, w tym hydrodynamiczne „antywleczenie”, dają się zaobserwować w pełnych rozwiązaniach ogólnorelatywistycznych. Oczywiście ich identyfikacja oraz interpretacja możliwe są jedynie dzięki rozwinięciu postnewtonowskiemu. Okazuje się przy tym, że przewidywania modelu postnewtonowskiego dotyczące np. rozkładu prędkości kątowej (14) są wyjątkowo precyzyjne w odniesieniu do reżimu postnewtonowskiego (dysk oddalony od czarnej dziury). Drugi badany przez nas problem dotyczył poprawności określenia prawa rotacji (10). Kwestia ta wymaga pewnego komentarza. Z formalnego punktu widzenia dowolna relacja $j = j(\Omega)$ jest a priori akceptowalna jako prawo rotacji dookreślające układ równań (4-9). Nie dla każdego przepisu $j(\Omega)$ możliwe jest jednak uzyskanie rozwiązań w dostatecznie szerokim zakresie parametrów. Matematycznie ściśle rezultaty dotyczące istnienia rozwiązań są dostępne jedynie w przypadku newtonowskim [11]. W przypadku relatywistycznym dostępna jest właściwie jedynie numeryczna ewidencja – możliwość lub brak możliwości uzyskania rozwiązań. W pracach [23, 24] koncentrowaliśmy się na przypadku keplerowskim z $\delta = -1/3$. Argumenty oparte na uwzględnieniu rotacji charakteryzującej keplerowski ruch po geodezyjnych w czasoprzestrzeni Schwarzschilda sugerują w takim przypadku wybór $\kappa = 3$. Okazuje się, że jest to istotnie właściwy wybór, pozwalający uzyskać rozwiązania w wyjątkowo szerokim zakresie parametrów. Zakres tole-

rancji parametru κ (zakres, dla którego istnieją rozwiązania numeryczne) jest wyjątkowo wąski w przypadku mało masywnych dysków i zwiększa się wraz z rosnącą masą dysku.

Analogiczny argument sugeruje również, że prawo rotacji (10) z $\delta = -1/3$ i $\kappa = 3$ nie jest odpowiednie w przypadku dysków wokół rotujących czarnych dziur. Fakt ten można zauważyć w przypadku kontrrotujących dysków (dysków rotujących przeciwnie do krętu czarnej dziury). Rozwiązania tego typu można otrzymać numerycznie jedynie dla dostatecznie dużych mas dysku. Efekt ten skłonił nas do poszukiwania relacji charakteryzującej ruch po kołowych geodezyjnych w płaszczyźnie równikowej (zarówno zgodny, jak i przeciwny do krętu czarnej dziury). W pracy [24] udało się wyprowadzić tę relację w postaci dopasowanej do współrzędnych kwaziizotropowych (3), a także wyliczyć występującą we wzorze (4) całkę $\int j(\Omega)d\Omega$. Otrzymane przez nas prawo ogólnorelatywistycznej, keplerowskiej rotacji ma postać

$$j(\Omega) = -\frac{1}{2} \frac{d}{d\Omega} \ln \left\{ 1 - \left[a^2 \Omega^2 + 3w^{\frac{4}{3}} \Omega^{\frac{2}{3}} (1 - a\Omega)^{\frac{4}{3}} \right] \right\}, \quad (15)$$

gdzie a oznacza parametr krętu czarnej dziury. Dla $a = 0$ powyższa relacja sprowadza się do prawa rotacji (10) z $\delta = -1/3$ i $\kappa = 3$. Dla $a \neq 0$, uwzględnienie prawa rotacji (15) usuwa problem nieistnienia rozwiązań odpowiadających mało masywnym, kontrrotującym dyskom.

Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych

Relatywistyczne zagadnienie Riemanna

W hydrodynamice zagadnieniem Riemanna nazywa się problem początkowy z nieciągłymi danymi początkowymi w postaci dwóch stałych stanów oddzielonych płaszczyzną nieciągłości. Problem ewolucji nieciągłych danych początkowych był rozważany już przez Riemanna, chociaż fizycznie poprawne sformułowanie tego zagadnienia pochodzi z prac Rankine'a i Hugoniot'a. Współcześnie, zagadnieniem Riemanna nazywa się zagadnienie początkowe z danymi początkowymi powyższego typu dla dowolnych (nieliniowych) równań w postaci praw zachowania [32].

W pracy [33] podaliśmy pierwsze i prawdopodobnie jedyne analityczne rozwiązanie relatywistycznego, hydrodynamicznego zagadnienia Riemanna z niezerowymi prędkościami stycznymi do powierzchni nieciągłości. Jest to zagadnienie par excellence relatywistyczne. W hydrodynamice newtonowskiej odpowiednie równania zawierające składowe prędkości styczne oraz normalne do powierzchni nieciągłości rozprzegają się [34]. W wersji relatywistycznej wszystkie człony sprzęgają się poprzez czynniki Lorentza.

Pierwsze relatywistyczne rozwiązanie zagadnienia Riemanna z zerowymi prędkościami początkowymi (tzw. shock tube problem) pochodzi z pracy Thompsona [35]. Analityczne rozwiązanie relatywistycznego zagadnienia Riemanna z zerowymi prędkościami stycznymi do powierzchni nieciągłości dla izotermicznego równania stanu podali Smoller i Temple [36]. Dokładne rozwiązanie analogicznego problemu dla równania stanu gazu doskonałego uzyskali Marti i Müller [37]. Wynik ten został następnie uogólniony przez Ponsa, Martiego i Müllera dla przypadku z niezerowymi prędkościami stycznymi i równaniem stanu gazu doskonałego [38]. Uzyskane rozwiązania należą do kategorii tzw. rozwiązań dokładnych – zagadnienie początkowe dla układu równań różniczkowych cząstkowych jest sprowadzone do pewnego nieliniowego równania różniczkowego zwyczajnego oraz równań algebraicznych. Określenie „rozwiązanie dokładne” należy tu rozumieć w opozycji do wielu przybliżonych metod rozwiązywania zagadnienia Riemanna, wykorzystywanych w konstrukcji numerycznych schematów rozwiązywania równań hydrodynamiki. Z tym większym zdziwieniem odkryliśmy możliwość znalezienia analitycznych rozwiązań relatywistycznego zagadnienia Riemanna z dowolnymi prędkościami, stosujące się w przypadku izotermicznego (liniowego) równania stanu. W swojej książce „Relativistic Hydrodynamics” Rezzolla i Zanotti cytują wyniki pracy [33] jako jedyny znany dotychczas przypadek analitycznego rozwiązania [39].

Praca [40] pokazuje zastosowanie uzyskanych przez nas rozwiązań do testowania numerycznego schematu rozwiązywania zagadnień początkowych w hydrodynamice relatywistycznej. W pracy [41] przedstawiłem wyniki numerycznych symulacji relatywistycznego zagadnienia Riemanna z zaburzonym kształtem powierzchni początkowej nieciągłości. Pokazują one różne reżimy kształtowania się niestabilności. Niestabilna okazuje się na ogół powierzchnia tzw. nieciągłości kontaktowej, przy czym sama niestabilność ma charakter niestabilności Kelvina-Helmholtza.

Przestrzenie o stałej krzywiznie skalarnej

Motywacją pracy [42] był problem przedstawienia sferycznie symetrycznych riemannowskich rozmaitości o stałej krzywiznie skalarnej w jawnie konforemnie płaskiej postaci. Zagadnienie to sprowadza się do znalezienia dopuszczalnych wyrażań na czynnik konforemny, który musi spełniać równania analogiczne do równania Lane’a-Emdena z krytycznym wykładnikiem członu potęgowego, zależnym od wymiaru rozmaitości. Dyskutowane w powyższym kontekście równanie na czynnik konforemny nazywa się czasami równaniem Yamabe.

Równanie Lane’a-Emdena (2) pojawia się naturalnie jako równanie opisujące bardzo prostą strukturę newtonowskiego modelu gwiazdy zbudowanej z politropowego płynu. W trójwymiarowym przypadku, krytyczny wykładnik $n = 5$ odpowiada równaniu stanu $p \propto \rho^{1+1/n} = \rho^{6/5}$. Rozwiązania równania

Lane'a-Emdena z indeksem $n = 5$ stanowią jednocześnie możliwe postaci czynnika konforemnego odpowiadającego trójwymiarowym różniczkom riemannowskim o stałej, dodatniej krzywiznie skalarnej. Kompletną listę rozwiązań zawiera praca [M2012a]. Wszystkie rozwiązania odpowiadające ujemnej krzywiznie skalarnej, a także przypadkom cztero i sześciowymiarowym, uzyskaliśmy razem z Niallem Ó Murchadha w pracy [42]. Warto zauważyć, że równania (oraz rozwiązania) analizowane w obu pracach [M2012a] i [42] pojawiają się nieraz zupełnie nieoczekiwania w różnych kontekstach, np. w konstrukcji danych początkowych typu Bowena-Yorka dla równań Einsteina [62].

Pole Yanga-Millsa w przestrzeniach hiperbolicznych

W napisanej z Piotrem Bizoniem pracy [47] zajmowaliśmy się ewolucją pola Yanga-Millsa w czasoprzestrzeni z metryką

$$g = -dt^2 + dr^2 + \alpha^2 \cosh^2 r (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2),$$

gdzie $t, r \in \mathbb{R}$, $(\theta, \phi) \in \mathbb{S}^2$, a α jest ustalonym parametrem. Hiperpowierzchnie stałego czasu są tutaj 3-wymiarowymi, asymptotycznie hiperbolicznymi cylindrami, symetrycznymi względem transformacji $r \rightarrow -r$.

Ewolucja pola Yanga-Millsa w czterowymiarowej czasoprzestrzeni Minkowskiego jest wyjątkowo regularna. Początkowo gładkie rozwiązania pozostają gładkie w trakcie całej ewolucji oraz dążą do zera dla czasu $t \rightarrow \infty$. W zakrzywionych, globalnie hiperbolicznych, czterowymiarowych czasoprzestrzeniach ewolucja pola Yanga-Millsa może być bardziej złożona. W takich przypadkach mogą pojawiać się nietrywialne statyczne konfiguracje (rozwiązania), pełniące rolę atraktorów dla równań ewolucji pola. Jeszcze ciekawsze okazuje się zachowanie rozwiązań na granicy pomiędzy obszarami przyciągania różnych atraktorów.

W pracy [47] interesowała nas ewolucja szczególnej postaci pola Yanga-Millsa związanego z grupą $SU(2)$, opisywana równaniem

$$\partial_u W = \partial_{rr} W + \frac{\ell(\ell+1)}{\cosh^2 r} W(1 - W^2),$$

gdzie $\ell(\ell+1) = \alpha^{-2}$. Równanie to ma ciekawą, bifurkacyjną strukturę statycznych rozwiązań, pojawiających się wraz ze wzrostem parametru ℓ . Generyczne rozwiązania W dążą do niektórych spośród statycznych rozwiązań, wykazując przy tym obecność charakterystycznych modów kwazinormalnych. Nasza analiza ewolucji rozwiązań W polegała na przejściu do odpowiednio dobranych współrzędnych hiperboloidalnych, a następnie wykorzystaniu pewnego wariantu metody Galerкина. Stosunkowo prosta postać nieliniowości pozwoliła nam na użycie metody Galerкина jako narzędzia analitycznego. Praca zawiera również oparte na tej metodzie rozwiązania numeryczne.

Toroidalne powierzchnie marginalnie zewnętrznie złapane

Opublikowana niedawno praca [48] dotyczy własności powierzchni minimalnych oraz powierzchni złapanych w tak zwanych „gwiazdach o stałej gęstości”. Pod pojęciem „gwiazd o stałej gęstości” rozumiem klasę sferycznie symetrycznych danych początkowych dla równań Einsteina, rozważaną przez Nialla Ó Murchadha w [49]. „Gwiazda o stałej gęstości” składa się z dwóch obszarów: wewnętrznego, izometrycznego z fragmentem sfery S^3 , oraz zewnętrznego w postaci cięcia czasoprzestrzeni Schwarzschilda. Upraszczające założenie polega na przyjęciu zerowej krzywizny zewnętrznej – rozważamy dane początkowe o tzw. czasowej symetrii. Dane takie odpowiadają konfiguracji o stałej gęstości energii w obszarze wewnętrznym oraz zerowej gęstości energii w obszarze zewnętrznym. Granica pomiędzy obszarami (brzeg gwiazdy) może być umieszczona wewnątrz horyzontu Schwarzschilda.

Powierzchnie złapane są dwuwymiarowymi, zamkniętymi powierzchniami, dla których obie wiązki promieni świetlnych: wychodząca na zewnątrz, oraz wchodząca do wewnątrz są lokalnie zbieżne. Precyzyjną definicję można wyrazić w terminach tak zwanych skalarów optycznych $\theta_{\pm}$. Niech θ_+ odpowiada wiązce wychodzącej „na zewnątrz” danej powierzchni. Graniczny przypadek, w którym $\theta_- < 0$, a $\theta_+ = 0$ odpowiada tak zwanej powierzchni marginalnie złapanej. Powierzchnię, od której wymagamy jedynie aby $\theta_+ = 0$ nazywamy powierzchnią marginalnie zewnętrznie złapaną. Jeśli krzywizna zewnętrzna danego cięcia czasowego $K_{ij} = 0$, warunek $\theta_+ = \theta_- = 0$ jest równoważny zanikaniu średniej krzywizny powierzchni. Taką powierzchnie nazywamy powierzchnią minimalną.

Powierzchnie złapane rozważane są w literaturze na ogół w kontekście twierdzeń o osłabieniu oraz prób skonstruowania kwazilokalnej definicji czarnej dziury – w szczególności w odniesieniu do tzw. horyzontu pozornego.

Większość znanych, analitycznych przykładów powierzchni złapanych uzyskano w ramach sferycznej symetrii, nieliczne przykłady niesferycznych, marginalnie zewnętrznie złapanych powierzchni można znaleźć w pracach [50, 51, 52]. W pracy [48] skonstruowaliśmy toroidalne powierzchnie minimalne oraz powierzchnie złapane w „gwiazdach o stałej gęstości”. Wszystkie one zlokalizowane są wewnątrz horyzontu Schwarzschilda. Te z pośród powierzchni minimalnych, które znajdują się dodatkowo całkowicie wewnątrz „gwiazdy” są kongruentne z tak zwanymi torusami Clifforda. Powierzchnie te wykorzystaliśmy następnie do testowania jakości oszacowań pewnych nierówności typu izoperymetrycznego, uzyskanych przy założeniu osiowej symetrii w [53].

Kolejną pracę [54] napisałem razem z Naqingiem Xie podczas mojego pobytu w Uniwersytecie Fudan w Szanghaju. Zawiera ona analizę toroidalnych, marginalnie zewnętrznie złapanych powierzchni w zamkniętych modelach Friedmanna-Lemaître’a-Robertsona-Walkera (FLRW). Praca ta jest w

pewnym sensie uogólnieniem artykułu [48], uwzględniającym dynamikę czasoprzestrzeni. Przedstawiona w niej konstrukcja wykorzystuje fakt, że standardowe hiperpowierzchnie stałego czasu w zamkniętych modelach FLRW mają geometrię sfery S^3 . W konsekwencji analiza dwuwymiarowych powierzchni zawartych w cięciach stałego czasu w zamkniętych modelach FLRW sprowadza się w dużej mierze do badania własności powierzchni zanurzonych w sferach S^3 . To ostatnie zagadnienie stanowi otwarty i aktualny problem badawczy we współczesnej geometrii różniczkowej. W 1970 Lawson udowodnił, że dla każdej liczby $g = 1, 2, \dots$, istnieje zwarta powierzchnia minimalna zanurzona w S^3 , której genus wynosi g [55]. Przykłady takich powierzchni zostały znalezione w pracach [56, 57]. W pracy [58] Lawson zasugerował, że każda zwarta, toroidalna powierzchnia minimalna zanurzona w sferze S^3 jest torusem Clifforda. Hipoteza ta została udowodniona w 2013 roku przez Brendle'a [59].

W pracy [54] skupiliśmy się na analizie uogólnionych torusów Clifforda – torusów o stałej średniej krzywiznie – zanurzonych w cięciach stałego czasu (sferach S^3). W szczególności interesowała nas zmiana charakteru takich powierzchni (złapane, marginalnie złapane, itd.) z upływem czasu. Wykorzystując odpowiednie współrzędne toroidalne, problem ten można rozwiązać analitycznie. Praca [54] zawiera dwa dodatkowe elementy: dowód, niestabilności skonstruowanych powierzchni marginalnie złapanych (w sensie Anderssona, Marsa i Simona [60, 61]), a także dalsze oszacowania jakości nierówności izoperymetrycznych udowodnionych w [53].

Dane Bowena-Yorka z dodatnią stałą kosmologiczną

W napisanej razem z Jerzym Knopikiem pracy [62] analizowaliśmy uogólnienie danych Bowena-Yorka w przypadku z dodatnią stałą kosmologiczną. W pracy [64] Bowen i York zaproponowali klasyczną już konstrukcję danych początkowych dla równań Einsteina w ramach tak zwanej metody konforemnej. Metoda ta polega na poszukiwaniu rozwiązań równań więzów w postaci metryki związanej konforemnie z pewną dobrze znaną, wyjściową metryką (często jest to metryka płaska) oraz krzywizny zewnętrznej związanej konforemnie z zadany z góry bezśladowym tensorem o zerowej dywergencji (względem wyjściowej metryki). Od technicznej strony, metoda konforemna sprowadza się do rozwiązania nieliniowego, eliptycznego równania, spełnianego przez czynnik konforemny – tak zwanego równania Lichnerowicza. W artykule [63] Bizoń, Pletka i Simon uwzględnili obecność dodatniej stałej kosmologicznej dla podzbioru danych Bowena-Yorka opisujący przypadek z krętem. Ich konstrukcja prowadzi do wyjątkowo eleganckiego przypadku równania Lichnerowicza, które może być rozważane na skompaktyfikowanej dziedzinie $S^1 \times S^2$. Pracę [62] poświęciliśmy analizie bifurkacji występujących w przestrzeni rozwiązań tego równania. Zawiera ona w szczególności, oparty na twierdzeniu Vanderbauwh-

de [65], dowód istnienia punktów bifurkacji. Spotykamy się tutaj z ciekawym rodzajem tak zwanych bifurkacji łamiących symetrię. Rozwiązania o symetrii $O(2)$ działającej na sferze S^2 bifurkują z gałęzi rozwiązań o symetrii $O(2) \times O(2)$ na $S^1 \times S^2$. W pracy [62] zostały również przedstawione numeryczne rozwiązania należące do różnych gałęzi, a także specjalna spektralna metoda numeryczna służąca do ich otrzymywania.

Ściany domenowe w czasoprzestrzeni Kerra

Praca [66] związana jest z moją opieką nad tzw. Diamentowym Grantem wykonywanym przez Filipa Ficka. W pracy tej zostały numerycznie przebadane przykłady oddziaływania ścian domenowych w modelu ϕ^4 z czarnymi dziurami Schwarzschilda oraz Kerra. Sam temat został zaproponowany przez Filipa Ficka w kontekście prowadzonych eksperymentalnych poszukiwań egzotycznej materii. Od technicznej strony jest on dobrze sprecyzowanym zagadnieniem dotyczącym ewolucji pola skalarowego w zakrzywionych czasoprzestrzeniach. Przeprowadzone eksperymenty numeryczne polegały na badaniu rozpraszania ściany domenowej (kinku) na czarnej dziurze Schwarzschilda lub Kerra. Rachunki zostały wykonane przy założeniu osiowej symetrii, tj. z osią symetrii czasoprzestrzeni Kerra ułożoną prostopadle do płaszczyzny ściany domenowej. We wszystkich zbadanych przypadkach ściany domenowe wykazywały stabilność względem przejścia przez czarną dziurę, powracając do planarnej symetrii. Samo przejście przez czarną dziurę powoduje powstanie zaburzeń o ciekawej strukturze, które ulegają następnie dyspersji. Stosunkowo nieoczekiwane okazało się, że wpływ krętu czarnej dziury na przebieg rozpraszania ściany domenowej jest w zasadzie wyłącznie ilościowy. Nie zaobserwowaliśmy znaczących różnic jakościowych pomiędzy przypadkami scharakteryzowanymi różną wartością krętu.

Hydrodynamiczne symulacje akrecji na czarne dziury z niewielkim krętem

Napisana razem z Michałem Pirogiem i José Fontem praca [73] przedstawia wyniki hydrodynamicznych symulacji przepływu akrecyjnego typu Michela (sferyczna akrecja płynu doskonałego na czarną dziurę Schwarzschilda), zaburzonego poprzez dodanie niewielkiej wartości krętu w szerokim otoczeniu płaszczyzny równikowej. Modele tego typu były badane w ramach hydrodynamiki newtonowskiej ze zmodyfikowanym potencjałem grawitacyjnym w [74]. Nasza praca [73] przedstawia ogólnorelatywistyczną wersję modeli zaproponowanych w artykule [74]. Użyty przez nas kod numeryczny został zaadaptowany z pracy [75] poświęconej relatywistycznej akrecji typu Bondiego-Hoyle'a. Konieczne modyfikacje wymagały uwzględnienia wszystkich składowych prędkości, zrównoleglenia, opracowania schematu zapisu danych, a w jednej z wersji również

pełnej trójwymiarowej implementacji. Istotną cechą użytego przez nas sformułowania jest wykorzystanie współrzędnych Eddingtona-Finkelsteina. Pozwala ono na ulokowanie wewnętrznego brzegu siatki numerycznej (w kierunku radialnym) wewnątrz czarnej dziury, a w konsekwencji wyeliminowanie efektów związanych z niedokładnościami implementacji warunków wypływu zadawanych na tym brzegu – ewentualne odbicia od wewnętrznego brzegu siatki nie wydostają się na zewnątrz horyzontu czarnej dziury. Istnieje oczywiście liczna literatura poświęcona relatywistycznym, hydrodynamicznym symulacjom przepływów akrecyjnych w ustalonych metrykach Schwarzschilda czy Kerr. Cechą wyróżniającą symulacje przedstawione w pracy [73] są duże fizyczne rozmiary siatki – zewnętrzny brzeg ulokowany nawet w odległości 4000 promieni Schwarzschilda, jak również stosownie długie czasy ewolucji. Tego typu „wyśrubowane” parametry służą zminimalizowaniu wpływu, jaki na przebieg ewolucji w pobliżu czarnej dziury wywierają warunki brzegowe zadane na zewnętrznym brzegu siatki.

Uzyskane wyniki zgadzają się jakościowo z rezultatami otrzymanymi w pracy [74]. W rozważanych modelach tempo akrecji spada znacząco poniżej poziomu charakterystycznego dla niezaburzonej akrecji Michela. Dodanie krętu skutkuje ponadto pojawieniem się gęstego, kwazistacjonarnego torusa zbudowanego z materii rotującej wokół czarnej dziury (i również w pewnym stopniu akreującej na czarną dziurę). Wszystkie modele o dostatecznie niskiej asymptotycznej wartości prędkości dźwięku mają charakter „turbulentny”.

Najważniejsze wyniki uzyskane przed doktoratem

Moje najciekawsze wyniki otrzymane przed uzyskaniem doktoratu dotyczą ogólnorelatywistycznego modelu stacjonarnej akrecji typu Bondiego-Michela z uwzględnieniem samograwitacji płynu. Wyniki te przedstawione są w pracach [67, 68, 69, 70, 71]. Praca [67] zawiera sformułowanie sferycznie symetrycznego modelu stacjonarnej akrecji płynu doskonałego na czarną dziurę z uwzględnieniem samograwitacji płynu. Metryka czasoprzestrzeni w takim modelu jest rozwiązaniem odpowiedniego układu równań Eulera-Einsteina. W przeciwieństwie do modelu Michela – akrecji w ustalonej czasoprzestrzeni Schwarzschilda – w modelu z samograwitacją płyn nie rozciąga się do nieskończoności. Warunki brzegowe nakładane są w pewnej bardzo dużej, ale skończonej odległości od centrum. Podstawowa różnica w stosunku do modelu Michela polega jednak na wpływie samograwitacji płynu na tempo akrecji charakteryzujące rozwiązanie przechodzące przez punkt dźwiękowy. Tempo akrecji osiąga maksimum dla stosunku masy płynu do masy całości konfiguracji m_f/m wynoszącym $m_f/m = 1/3$. Małe wartości tempa akrecji charakteryzują konfiguracje z $m_f/m \approx 0$, a także konfiguracje z $m_f/m \approx 1$.

Ten ostatni przypadek – z większością masy skupioną w obłoku akrecyjnym i

stosunkowo mało masywną czarną dziurą – sugeruje naturalne pytanie o stabilność rozwiązań. Zagadnieniu temu poświęcone są prace [68, 69, 70, 71], zarówno analityczne, jak i numeryczne. Praca [68] zawiera analizę stabilności newtonowskiego modelu akrecji typu Bondiego, uwzględniającego samograwitację płynu. Analiza ta przeprowadzona jest w rzędzie liniowym. Prace [69, 70, 71] przedstawiają wyniki numeryczne, uzyskane w ramach newtonowskiej teorii grawitacji oraz ogólnej teorii względności. W tym przypadku rozwiązywane były pełne, nieliniowe równania opisujące zachowanie się zaburzeń stacjonarnego rozwiązania. Wszystkie zbadane rozwiązania okazały się stabilne, włącznie z przypadkami, dla których $m_f/m \approx 1$. W praktyce zaburzenia wchodzą swobodnie pod horyzont czarnej dziury, spod którego się już nie wydostają. Nie oznacza to jednak, że dostatecznie duże zaburzenia nie mogą wydostawać się spod horyzontu akustycznego. Przykłady zaburzeń znajdujących się początkowo całkowicie pod horyzontem akustycznym, a następnie wydostających się na zewnątrz, zostały przedstawione w pracy [71]. Są to zaburzenia o dostatecznie dużej amplitudzie, które w krótkim czasie prowadzą do powstania nieciągłości (fali uderzeniowej).

Literatura

- [1] H. Bondi, On spherically symmetrical accretion, Mon. Not. R. Astron. Soc. 112, 195 (1952)
- [2] F.C. Michel, Accretion of matter by condensed objects, Astrophys. Space Sci. 15, 153 (1972)
- [3] V. Moncrief, Stability of stationary, spherical accretion onto a Schwarzschild black hole, Astrophys. J. 235, 1038 (1980)
- [4] R. Penrose, The Road to Reality: A Complete Guide to the Laws of the Universe, Jonathan Cape, London, 2005
- [5] N. Cruz, M. Olivares, J.R. Villanueva, The geodesic structure of the Schwarzschild anti-de Sitter black hole, Class. Quantum Grav. 22 1167 (2005)
- [6] E. Chaverra, O. Sarbach, Radial accretion flows on static, spherically symmetric black holes, Class. Quantum Grav. 32, 155006 (2015)
- [7] M.C. Begelman, Accretion of $\gamma > 5/3$ gas by a Schwarzschild black hole, Astron. Astrophys. 70, 583 (1978)
- [8] S. Chandrasekhar, Ellipsoidal Figures of Equilibrium, Yale University Press, New Haven, 1969
- [9] J.L. Tassoul, Theory of Rotating Stars, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1978
- [10] H. Cao, D.J. Stevenson, ArXiv e-prints, 1508.02764 (2015)
- [11] J. Auchmuty, R. Beals, Variational solutions of some nonlinear free boundary problems, Arch. Rat. Mech. Anal. 43, 255 (1971)
- [12] V.I. Arnold, B.A. Khesin, Topological Methods in Hydrodynamics, Springer, 1998

- [13] J. Knopik, P. Mach, A. Odrzywolek, The shape of a rapidly rotating polytrope with index unity, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 467, 4965 (2017)
- [14] W. Simon, On journeys to the Moon by balloon, *Class. Quantum Grav.* 10, 177 (1993)
- [15] J.M. Heinzle, C. Uggla, Newtonian stellar models, *Annals of Physics* 308, 18 (2003)
- [16] J.-M. Huré, F. Hersant, C. Surville, N. Nakai, T. Jacq, AGN disks and black holes on the weighting scales, *Astron. Astrophys.* 530, 145 (2011)
- [17] M. Hashimoto, Y. Eriguchi, E. Müller, Equilibrium structure of self-gravitating Keplerian disks, *Astron. Astrophys.* 297, 135 (1995)
- [18] B.P. Abbott et al., GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral, *Phys. Rev. Lett.* 119, 161101 (2017)
- [19] W. Kastaun, F. Galeazzi, Properties of hypermassive neutron stars formed in mergers of spinning binaries, *Phys. Rev. D* 91, 064027 (2015)
- [20] P. Kumar, L. Rezzolla, A novel paradigm for short gamma-ray bursts with extended x-ray emission, *Astrophys. J.* 802, 95 (2015)
- [21] A. Endrizzi, R. Ciolfi, B. Giacomazzo, W. Kastaun, T. Kawamura, General Relativistic Magnetohydrodynamic Simulations of Binary Neutron Star Mergers with the APR4 Equation of State, *Class. Quantum Grav.* 33, 164001 (2016)
- [22] M. Shibata, Sh. Fujibayashi, K. Hotokezaka, K. Kiuchi, K. Kyutoku, Y. Sekiguchi, M. Tanaka, Modeling GW170817 based on numerical relativity and its implications, *arXiv:1710.07579*
- [23] J. Karkowski, W. Kulczycki, P. Mach, E. Malec, A. Odrzywolek, M. Piróg, General-relativistic rotation: self-gravitating fluid tori in Keplerian motion around black holes, *arXiv:1712.05673* (2017)
- [24] J. Karkowski, W. Kulczycki, P. Mach, E. Malec, A. Odrzywolek, M. Piróg, Selfgravitating axially symmetric disks in general-relativistic rotation, *arXiv:1802.02848* (2018)
- [25] M. Ansorg, D. Petroff, Black holes surrounded by uniformly rotating rings, *Phys. Rev. D* 72, 024019 (2005)
- [26] M. Ansorg, D. Petroff, Negative Komar Mass of Single Objects in Regular, Asymptotically Flat Spacetimes, *Class. Quantum Grav.* 23, L81 (2006)
- [27] S. Nishida and Y. Eriguchi, A general relativistic toroid around a black hole, *Astrophys. J.* 427, 429 (1994)
- [28] F. Galeazzi, S. Yoshida, Y. Eriguchi, Differentially-rotating neutron star models with a parametrized rotation profile, *Astron. Astrophys.* 541, A156 (2012)
- [29] M. Shibata, Rotating black hole surrounded by self-gravitating torus in the puncture framework, *Phys. Rev. D* 76, 064035 (2007)
- [30] U. Heilig, On the Existence of Rotating Stars in General Relativity., *Commun. Math. Phys.*, 166, 457 (1995)
- [31] S. Horatschek, D. Petroff, Uniformly rotating homogeneous rings in post-Newtonian gravity, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 408, 1749 (2010)
- [32] L.C. Evans, *Równania różniczkowe cząstkowe, PWN, Warszawa, 2012*
- [33] P. Mach, M. Piętka, Exact solution of the hydrodynamical Riemann problem

- with nonzero tangential velocities and the ultrarelativistic equation of state, *Phys. Rev. E* 81, 046313 (2010)
- [34] L.D. Landau, J.M. Lifszyc, *Hydrodynamika*, PWN, Warszawa, 2009
 - [35] K.W. Thompson, The special relativistic shock tube, *J. Fluid Mech.* 171, 365 (1986)
 - [36] J. Smoller, B. Temple, Global solutions of the relativistic Euler equations, *Commun. Math. Phys.* 156, 67 (1993)
 - [37] J.M^a Martí, E. Müller, The analytical solution of the Riemann problem in relativistic hydrodynamics, *J. Fluid Mech.* 258, 317 (1994)
 - [38] J.A. Pons, J.M^a Martí, E. Müller, The exact solution of the Riemann problem with non-zero tangential velocities in relativistic hydrodynamics, *J. Fluid Mech.* 422, 125 (2000)
 - [39] L. Rezzolla, O. Zanotti, *Relativistic Hydrodynamics*, Oxford University Press, Oxford (2013)
 - [40] P. Mach, Analytic Solutions of the Riemann Problem in Relativistic Hydrodynamics and their Numerical Applications, *Acta Phys. Pol B Proceedings Supplement* 2, 575 (2009)
 - [41] P. Mach, Instabilities of the Riemann problem in relativistic hydrodynamics", *AIP Conf. Proc.* 1458, 459 (2012)
 - [42] Patryk Mach, Niall Ó Murchadha, Spherically symmetric Riemannian manifolds of constant scalar curvature and their conformally flat representations, *Class. Quantum Grav.* 31, 135001 (2014)
 - [43] R. Emden, *Gaskugeln: Anwendungen der Mechanischen Wärmetheorie auf Kosmologische und Meteorologische Probleme*, Teubner, Berlin (1907)
 - [44] S. Chandrasekhar, *An Introduction to the Study of Stellar Structure*, University of Chicago Press, Chicago Illinois (1939)
 - [45] S. Srivastava, A New Solution of the Lane-Emden Equation of Index $n = 5$, *Astrophys. J.* 136, 680 (1962)
 - [46] H. Goenner, P. Havas, Exact solutions of the generalized Lane-Emden equation, *J. Math. Phys.* 41, 7029 (2000)
 - [47] P. Bizoń, P. Mach, Global dynamics of a Yang-Mills field on an asymptotically hyperbolic space, *Trans. Amer. Math. Soc.* 369, 2029 (2017)
 - [48] J. Karkowski, P. Mach, E. Malec, N. Ó Murchadha, N. Xie, Toroidal trapped surfaces and isoperimetric inequalities, *Phys. Rev. D* 95, 064037 (2017)
 - [49] N. Ó Murchadha, How large can a star be? *Phys. Rev. Lett.* 57, 2466 (1986)
 - [50] M. Korzyński, Isolated and dynamical horizons from a common perspective, *Phys. Rev. D* 74, 104029 (2006)
 - [51] I. Ben-Dov, Outer trapped surfaces in Vaidya spacetimes, *Phys. Rev. D* 75, 064007 (2007)
 - [52] J.L. Flores, S. Haesen, M. Ortega, New examples of marginally trapped surfaces and tubes in warped spacetimes, *Class. Quantum Grav.* 27, 145021 (2010)
 - [53] M. Khuri, N. Xie, Inequalities between size, mass, angular momentum, and charge for axisymmetric bodies and the formation of trapped surfaces, *Ann. Henri Poincaré*, online, DOI:10.1007/s00023-017-0582-1 (2017)

- [54] P. Mach, N. Xie, Toroidal marginally outer trapped surfaces in closed Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker spacetimes: Stability and isoperimetric inequalities, *Phys. Rev. D* 96, 084050 (2017)
- [55] H.B. Lawson, Complete minimal surfaces in S^3 , *Ann. Math.* 92, 335 (1970)
- [56] H. Karcher, U. Pinkall, I. Sterling, New minimal surfaces in S^3 , *J. Diff. Geom.* 28, 169 (1988)
- [57] N. Kapouleas and S.-D. Yang, Minimal surfaces in the three-sphere by doubling the Clifford torus, *Am. J. Math.* 132, 257 (2010)
- [58] H.B. Lawson, The unknottedness of minimal embeddings, *Inventiones Mathematicae* 11, 183 (1970)
- [59] S. Brendle, Embedded minimal tori in S^3 and the Lawson conjecture, *Acta Math.* 211, 177 (2013)
- [60] L. Andersson, M. Mars, and W. Simon, Local Existence of Dynamical and Trapping Horizons, *Phys. Rev. Lett.* 95, 111102 (2005)
- [61] L. Andersson, M. Mars, and W. Simon, Stability of marginally outer trapped surfaces and existence of marginally outer trapped tubes, *Adv. Theor. Math. Phys.* 12, 853 (2008)
- [62] P. Mach, J. Knopik, Rotating Bowen-York initial data with a positive cosmological constant, *arXiv:1801.08359* (2018)
- [63] P. Bizoń, S. Pletka, W. Simon, Initial data for rotating cosmologies, *Class. Quantum Grav.* 32, 175015 (2015)
- [64] J.M. Bowen, J.W. York, Time-asymmetric initial data for black holes and black-hole collisions, *Phys. Rev. D* 21, 2047 (1980)
- [65] A. Vanderbauwhede, Local bifurcation and symmetry, *Research Notes in Mathematics*, 75, Pitman, Boston MA (1982)
- [66] F. Ficek, P. Mach, Planar domain walls in black hole spacetimes, *Phys. Rev. D* 97, 044012 (2018)
- [67] J. Karkowski, B. Kinasiewicz, P. Mach, E. Malec, Z. Świerczyński, Universality and backreaction in a general-relativistic accretion of steady fluids, *Phys. Rev. D* 73, 021503(R) (2006)
- [68] B. Kinasiewicz, P. Mach, E. Malec, Selfgravitation in general-relativistic accretion of steady fluids, *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics* 4, 197 (2007)
- [69] P. Mach, Selfgravitation and stability in spherical accretion, *Acta. Phys. Pol. B* 38, 3935 (2007)
- [70] P. Mach, Edward Malec, On the stability of self-gravitating accreting flows, *Phys. Rev. D* 78, 124016 (2008)
- [71] P. Mach, On the stability of steady general-relativistic accretion and analogue black holes, *Reports on Mathematical Physics* 64, 257 (2009)
- [72] S. Brandt, B. Brügmann, A Simple Construction of Initial Data for Multiple Black Holes, *Phys. Rev. Lett.* 78, 3606 (1997)
- [73] P. Mach, M. Piróg, J.A. Font, Relativistic Low Angular Momentum Accretion: Long Time Evolution of Hydrodynamical Inviscid Flows, *Class. Quantum Grav.* 35, 095005 (2018)



- [74] D. Proga, M. Begelman, Accretion of Low Angular Momentum Material onto Black Holes: Two-dimensional Hydrodynamical Inviscid Case, *Astrophys. J.* 582, 69 (2003)
- [75] P. Papadopoulos, J.A. Font, Relativistic hydrodynamics around black holes and horizon adapted coordinate systems, *Phys. Rev. D* 58, 024005 (1998)

