

Struktura fazowa kwantowej grawitacji w czterowymiarowym modelu Kauzalnych Dynamicznych Triangulacji

Kraków, 7 marca 2019

Autoreferat

I. Imię i nazwisko

Jakub Gizbert-Studnicki

II. Posiadane dyplomy i stopnie naukowe

- **Doktor fizyki**, Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej, Uniwersytet Jagielloński, Tytuł rozprawy doktorskiej: *The effective action in four-dimensional CDT*, 2014 r.
- **Magister fizyki**, Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej, Uniwersytet Jagielloński, 2010 r.
- **Magister ekonomii**, Szkoła Główna Handlowa w Warszawie, 1998 r.

III. Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych

- **2017 - obecnie: adiunkt**, Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej, Uniwersytet Jagielloński
- **2014 - 2017: asystent**, Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej, Uniwersytet Jagielloński

IV. Wskazanie osiągnięcia wynikającego z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. nr 65, poz. 595 ze zm.)

A. Tytuł osiągnięcia naukowego - jednotematycznego cyklu publikacji

Struktura fazowa kwantowej grawitacji w czterowymiarowym modelu Kauzalnych Dynamicznych Triangulacji

B. Jednotematyczny cykl publikacji (w porządku chronologicznym)

- [H1] J. Ambjørn, D.N. Coumbe, J. Gizbert-Studnicki, J. Jurkiewicz,
Signature change of the metric in CDT quantum gravity?,
Journal of High Energy Physics **08** (2015) 033
DOI: 10.1007/JHEP08(2015)033
Wkład: 80%
- [H2] D.N. Coumbe, J. Gizbert-Studnicki, J. Jurkiewicz,
Exploring the new phase transition of CDT,
Journal of High Energy Physics **02** (2016) 144
DOI: 10.1007/JHEP02(2016)144
Wkład: 80%
- [H3] J. Ambjørn, D.N. Coumbe, J. Gizbert-Studnicki, J. Jurkiewicz,
Searching for a continuum limit in causal dynamical triangulation quantum gravity,
Physical Review **D 93** (2016) 104032
DOI: 10.1103/PhysRevD.93.104032
Wkład: 65%
- [H4] J. Ambjørn, Z. Drogosz, J. Gizbert-Studnicki, A. Görlich, J. Jurkiewicz,
D. Németh
Impact of topology in causal dynamical triangulations quantum gravity,
Physical Review **D 94** (2016) 044010
DOI: 10.1103/PhysRevD.94.044010
Wkład: 50%
- [H5] J. Ambjørn, J. Gizbert-Studnicki, A. Görlich, J. Jurkiewicz, N. Klitgaard,
R. Loll
Characteristics of the new phase in CDT,
The European Physical Journal **C 77** (2017) 152
DOI: 10.1140/epjc/s10052-017-4710-3
Wkład: 20%

- [H6] J. Ambjørn, D. Coumbe, J. Gizbert-Studnicki, A. Görlich, J. Jurkiewicz
New higher-order transition in causal dynamical triangulations,
 Physical Review **D 95** (2017) 124029
 DOI: 10.1103/PhysRevD.95.124029
 Wkład: 50%
- [H7] J. Ambjørn, J. Gizbert-Studnicki, A. Görlich, K. Grosvenor, J. Jurkiewicz
Four-dimensional CDT with toroidal topology,
 Nuclear Physics **B 922** (2017) 226
 DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2017.06.026
 Wkład: 30%
- [H8] J. Ambjørn, J. Gizbert-Studnicki, A. Görlich, J. Jurkiewicz, D. Németh
The phase structure of Causal Dynamical Triangulations with toroidal spatial topology,
 Journal of High Energy Physics **06** (2018) 111
 DOI: 10.1007/JHEP06(2018)111
 Wkład: 50%

C. Omówienie celu naukowego wyżej wymienionych prac i osiągniętych wyników wraz z omówieniem ich ewentualnego wykorzystania.

1. Wstęp

Trzy z spośród czterech oddziaływań elementarnych (oddziaływanie elektromagnetyczne, słabe oraz silne) są przez współczesną fizykę teoretyczną opisywane w języku kwantowej teorii pola. Niechlubnym wyjątkiem pozostaje oddziaływanie grawitacyjne, którego kwantowanie wciąż napotyka na liczne problemy, sprawiając, że połączenie mechaniki kwantowej z teorią grawitacji Einsteina pozostaje od blisko 100 lat jednym z nierozwiązanych zagadnień fizyki teoretycznej. Oprócz ewidentnych problemów wynikających z braku danych eksperymentalnych¹, sformułowanie w pełni spójnej teorii *kwantowej grawitacji* napotyka na szereg wyzwań teoretycznych. Podstawowy problem zastosowania standardowych technik teorii pola do kwantowania ogólnej teorii względności (OTW) związany jest z perturbacyjną nierenormalizowalnością takiego sformułowania [1, 2]. Sprawia to, że rachunek zaburzeń wokół jakiegokolwiek rozwiązania klasycznego OTW może być co najwyżej traktowany jako teoria efektywna, stosowalna dla ograniczonego zakresu energii znacznie niższych od tzw. energii Plancka ($E \ll E_p = \sqrt{\hbar c^2/G}$), przy której ewentualne efekty kwantowe mają istotne znaczenie.² W rezultacie panuje przekonanie, że kwantowa teoria grawitacji powinna być sformułowana w sposób nieperturbacyjny i niezależny od klasycznego tła.

¹Istnieje przekonanie, że efekty kwantowej grawitacji powinny być widoczne dla skal energii rzędu tzw. energii Plancka: $E_p \approx 1.2 \times 10^{19}$ GeV, która przekracza o 15 rzędów wielkości obecne możliwości eksperymentalne. Pewnym wyjściem z tego impasu mogą być ewentualne przewidywania dotyczące wpływu efektów kwantowych na ewolucję Wszechświata lub subtelne własności zwartych obiektów astrofizycznych, co potencjalnie umożliwi obserwacyjne potwierdzenie albo falsyfikację niektórych teorii kwantowej grawitacji.

²Paradoksalnie, z uwagi na dostępne obecnie energie eksperymentalne (por. przypis 1) sformułowanie perturbacyjne można uważać za niezwykle dokładne, jednakże z uwagi na nierenormalizowalność nie może ono stanowić teorii fundamentalnej opisującej oddziaływanie grawitacyjne.

Wśród najbardziej rozpowszechnionych podejść do problemu kwantowania teorii grawitacji można wymienić pętlową grawitację kwantową (ang. Loop Quantum Gravity) [3], opartą na kanonicznym kwantowaniu (hamiltonowskiego sformułowania) OTW z wykorzystaniem opisu grawitacyjnych stopni swobody przy użyciu pętli Wilsona i holonomii koneksji. Innym popularnym podejściem jest teoria strun [4], w której grawitacyjne stopnie swobody pojawiają się w sposób naturalny, jednakże odbywa się to kosztem wprowadzenia (nieskończonej) liczby nowych stopni swobody, nowych symetrii (supersymetria) i dodatkowych wymiarów nieobserwowalnych eksperymentalnie. Istnieje również szereg innych podejść, wśród których wymienić można m.in.: modele pian spinowych (ang. Spin Foam Models), pętlową kosmologię kwantową (ang. Loop Quantum Cosmology), geometrię nieprzemienią (ang. Non-commutative Geometry), teorię zbiorów przyczynowych (ang. Causal Sets), grupową teorię pola (ang. Group Field Theory), kwantowy rachunek Regge (ang. Quantum Regge Calculus), teorię grawitacji Horavy-Lifshitz (ang. Horava-Lifshitz Gravity) i wiele innych sformułowań (przeglądowe omówienie różnych podejść do problemu kwantowania grawitacji oraz związków między nimi można znaleźć np. w [5]).

Model Kauzalnych Dynamicznych Triangulacji (ang. Causal Dynamical Triangulations), będący przedmiotem badań opisanych w niniejszym autoreferacie, należy do grupy sformułowań opartych na próbie zastosowania nieperturbacyjnych metod konwencjonalnej kwantowej teorii pola w odniesieniu do OTW Einsteina, przy użyciu minimalnej ilości dodatkowych założeń odnośnie struktury przyczynowo-skutkowej czasoprzestrzeni. Inspiracją dla takiego sformułowania jest hipoteza tzw. *asymptotycznego bezpieczeństwa* (ang. asymptotic safety) sformułowana pod koniec lat 70 XX w. przez S. Weinberga [6], który zaproponował rozszerzenie pojęcia renormalizowalności na rachunek nieperturbacyjny.³ Zgodnie z hipotezą Weinberga, w potencjalnie nieskończonej wymiarowej przestrzeni parametrów kwantowej teorii grawitacji⁴ istnieją nietrywialne ultrafioletowe punkty stałe przepływu grupy renormalizacji, definiującego zachowanie efektywnych stałych sprzężenia przy przechodzeniu do coraz wyższych skal energii. Asymptotyczne bezpieczeństwo zakłada, że Natura dopuszcza jedynie takie trajektorie przepływu, które w pobliżu ultrafioletowych punktów stałych leżą na skończonej wymiarowej hiperpłaszczyźnie (w przestrzeni parametrów teorii). Skończony wymiar hiperpłaszczyzny krytycznej określa liczbę tzw. *istotnych stałych sprzężenia* i pozwala na poprawne sformułowanie wysokoenergetycznej granicy teorii dla dowolnie dużej skali.

Hipoteza asymptotycznego bezpieczeństwa znajduje potwierdzenie w badaniach równań przepływu grupy renormalizacji kwantowej teorii grawitacji [10, 11, 12, 13, 14, 15], które wskazują na istnienie ultrafioletowych punktów stałych i skończony (zazwyczaj do trzech) wymiar podprzestrzeni krytycznych. Badania te są jednak z konieczności oparte o pewne uproszczenia (duża, lecz skończona liczba parametrów teorii branych pod uwagę). Istnieje więc potrzeba w pełni nieperturbacyjnego sformułowania uwzględniającego wszystkie potencjalnie dostępne stopnie swobody. Naturalną inspiracją jest tutaj sieciowa chromodynamika kwantowa (ang. Lattice Quantum Chromodynamics), odnosząca wielkie sukcesy w opisie nieperturbacyjnego reżimu oddziaływań silnych. Ujęcie sieciowe jest oparte na metodologii całek

³Istnieją przykłady perturbacyjnie nierenormalizowalnych kwantowych teorii pola realizujących hipotezę asymptotycznego bezpieczeństwa Weinberga, np. nieliniowy model sigma $O(N)$ [7, 8, 9].

⁴Nieskończona ilość stałych sprzężenia wynika z nieskończonej ilości "counterterms" w nierenormalizowalnym sformułowaniu perturbacyjnym kwantowej wersji OTW, kwantowe działanie efektywne może więc co do zasady zawierać dowolnie wiele członów zgodnych z symetriami teorii. Zamiast o przestrzeni możliwych parametrów (stałych sprzężenia) teorii kwantowej grawitacji można alternatywnie mówić o przestrzeni możliwych działań ją opisujących.

po trajektoriach wprowadzonej przez R. Feynmana, w której amplituda kwantowa jest określona przez sumę po wszystkich możliwych trajektoriach łączących stan początkowy i końcowy, ważoną czynnikiem fazowym zależnym od wartości klasycznego działania policzonego dla danej trajektorii. Pomimo, że klasyczna trajektoria jest tylko jedną z (nieskończenie) wielu możliwych, amplituda kwantowa jest zdominowana przez trajektorie "bliskie" klasycznej (norma jest wyrażona w jednostkach działania, czyli stałej Plancka $\hbar$). Definicja całki po trajektoriach wymaga wprowadzenia dyskretyzacji działania. Można to zrobić przybliżając ciągłą czasoprzestrzeń Minkowskiego, w której "żyją" kwantowe pola, regularną siecią o stałej a . Stała a wprowadza przy okazji naturalną regularyzację sformułowania sieciowego w postaci ultrafioletowego "cut-offu" $\sim 1/a$, który można usunąć w granicy ciągłej $a \rightarrow 0$.

Sieciowe sformułowanie kwantowej teorii pola można uogólnić na przypadek teorii grawitacji, w której klasyczne działanie OTW opisuje geometryczne stopnie swobody. Wymaga to zamiany regularnej sieci będącej dyskretyzacją płaskiej czasoprzestrzeni Minkowskiego na bardziej skomplikowaną sieć będącą dyskretyzacją kwantowej geometrii. Najprostsza możliwa dyskretyzacja polega na triangulacji złożonej z (czterowymiarowych) sympleksów. Istotne jest przy tym, że w przypadku kwantowej grawitacji rolę trajektorii w ujęciu całki Feynmana pełni sama geometria czasoprzestrzeni.⁵ W ślad za tym (formalna) całka po geometriach $[g]$,⁶ może być zdefiniowana jako suma po (wszystkich możliwych) triangulacjach $\mathcal{T}$:

$$\mathcal{Z}_{QG} = \int \mathcal{D}_{\mathcal{M}}[g] e^{iS_{HE}[g]} \rightarrow \mathcal{Z}_{CDT} \equiv \sum_{\mathcal{T}} e^{iS_R[\mathcal{T}]} . \quad (1)$$

We wzorze (1) $S_R[\mathcal{T}]$ jest działaniem Hilberta-Einsteina

$$S_{HE}[g] = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) \quad (2)$$

dla triangulacji $\mathcal{T}$, wyznaczonym przy użyciu metody obliczania krzywizny rozmaitości symplecjalnych zaproponowanej przez T. Regge [16] (krzywizna triangulacji zależy od lokalnych deficytów kątowych). Powyższe ujęcie jest w oczywisty sposób nieperturbacyjne (wszystkie, nawet "najmniej klasyczne" triangulacje wchodzi do sumy po trajektoriach), niezależne od tła (żadne klasyczne rozwiązanie nie jest odgórnie narzucane, lecz geometria wokół której zachodzą kwantowe fluktuacje pojawia się w sposób dynamiczny) i inwariantne ze względu na zmiany układu współrzędnych (triangulacje z natury abstrahują od układu współrzędnych, gdyż wszystkie geometryczne stopnie swobody są zakodowane w relacji sąsiedztwa sympleksów). Należy również podkreślić, że wprowadzona dyskretyzacja z linkami o skończonej długości a jest jedynie zabiegiem technicznym i co do zasady nie zakłada się, że kwantowa czasoprzestrzeń jest dyskretna. Podobnie jak w przypadku zwykłej sieciowej teorii pola, wysokoenergetyczna (ultrafioletowa) granica ciągła jest określona poprzez granicę długości linków $a \rightarrow 0$. Granica ta jest zazwyczaj związana z ciągłym (tzn. wyższym niż pierwszego rzędu) przejściem fazowym, w którym nieskończona długość korelacji umożliwia jednoczesne zbieganie stałej sieci $a \rightarrow 0$ i rozmiarów sieci $N \rightarrow \infty$ w taki sposób, że fizyczna długość aN pozostaje stała, zaś wartości obserwabli wyrażone w jednostkach fizycznych są skończone i dobrze określone. Zgodnie z

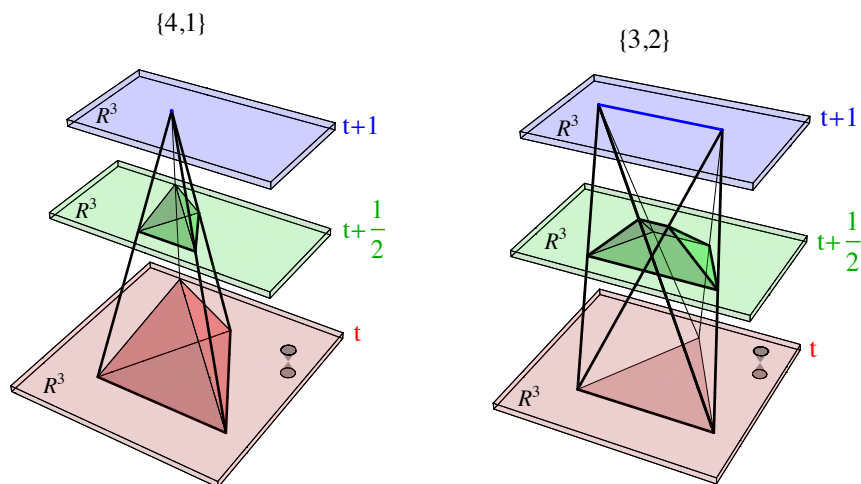
⁵Ewentualne uwzględnienie dodatkowych pól materii "żyjących" w kwantowej czasoprzestrzeni wymaga dodatkowej dyskretyzacji działania dla tych pól. W takim przypadku trajektoria uwzględnia dodatkowo odpowiednie konfiguracje pól.

⁶Formalnie $[g]$ oznacza klasę równoważności tensorów metrycznych g z uwagi na dyfeomorfizmy opisujące identyczne geometrie.

zasadą korespondencji, poprawne sformułowanie sieciowe powinno również pozwolić na odtworzenie niskoenergetycznej (podczerwonej) granicy teorii kwantowej grawitacji, zgodnej z Ogólną Teorią Względności.

2. Model Kauzalnych Dynamicznych Triangulacji

Opisane powyżej sieciowe sformułowanie teorii kwantowej grawitacji oparte na feynmanowskiej całce po trajektoriach można w praktyce zrealizować na różne sposoby. Grupa modeli zwanych Dynamicznymi Triangulacjami opiera konstrukcję rozmaitości sympleksyjnej (triangulacji) na elementarnych blokach (typach sympleksów) o ustalonych własnościach geometrycznych - por. rys. 1. Cztero-(wymiarowy)-sympleks jest uogólnieniem trójkąta do wyższej liczby wymiarów. Każdy 4-sympleks składa się z 5 werteksów (0-sympleksów), 10 linków (1-sympleksów), 10 trójkątów (2-sympleksów) i 5 tetraedrów (3-sympleksów). Zakłada się przy tym, że 4-sympleksy są płaskie (wnętrze każdego sympleksu jest częścią przestrzeni Minkowskiego lub przestrzeni Euklidesowej, w zależności od typu sygnatury metryki czaso-przestrzeni branej pod uwagę). W ogólności sympleksy nie muszą być symetryczne, np. długości poszczególnych linków, a co za tym idzie tworzące je trójkąty i tetraedry mogą się różnić. W zależności od kształtu (symetrii) sympleksów może istnieć jeden lub więcej typów elementarnych bloków z których budowane są triangulacje. Elementarne bloki (4-sympleksy) są następnie "sklejane" ze sobą wzdłuż trójwymiarowych ścian (tetraedrów) tworząc ciągłą dyskretyzację kwantowej geometrii. Tak zbudowana triangulacja ma w ogólności niezerową krzywiznę, która jest skupiona na trójkątach (2-sympleksach) i jest jednoznacznie określona przez ich liczbę koordynacyjną - deficyt kątowy zależy wyłącznie od liczby (i ewentualnie typu 4-sympleksów) mających wspólny trójkąt. Konstrukcja ta sprawia, że działanie Regge S_R występujące we wzorze (1) ma niezwykle prostą formę, będącą liniową kombinacją kilku globalnych parametrów charakteryzujących triangulację (liczby sympleksów i trójkątów określonego typu).⁷



Rysunek 1: Elementarne bloki czterowymiarowego modelu CDT: po lewej sympleks (4, 1), po prawej sympleks (3, 2).

⁷Używając tożsamości topologicznych można użyć innych globalnych parametrów triangulacji, np. liczby sympleksów określonego typu i liczby werteksów, por. wzór (4).

Wczesne modele Dynamicznych Triangulacji, zwane dziś Euklidesowymi Dynamicznymi Triangulacjami (ang. Euclidean Dynamical Triangulations, w skrócie EDT), zakładały euklidesową (lokalna symetria $SO(4)$) sygnaturę metryki czasoprzestrzeni. W ujęciu euklidesowym wszystkie 4-sympleksy były równoboczne i identyczne (był tylko jeden elementarny blok, z którego "sklejano" triangulacje). Niestety tak sformułowany model nie prowadził do zadawalających wyników. Kierunek czasu nie był w żaden sposób wyróżniony, gdyż liczone na "odbudowanie" czasu w sposób w pełni dynamiczny. Dwu-wymiarowy "toy-model" czystej grawitacji [17, 18, 19] oraz grawitacji sprzężonej z prostymi polami materii [20, 21, 22] był możliwy do rozwiązania w sposób analityczny, jednak pokazywał on niekanoniczne skalowanie czasu i przestrzeni. Badania modelu EDT w czterech wymiarach były prowadzone przy użyciu symulacji numerycznych [23, 24, 25]. Symulacje te pokazały, że istnieją dwie fazy kwantowej geometrii, jednak żadna z nich nie przypomina klasycznej 4-wymiarowej przestrzeni opisywanej przez Ogólną Teorię Względności. W dodatku powyższe fazy są rozdzielone przejściem fazowym pierwszego rzędu [26, 27], co uniemożliwia zdefiniowanie granicy ciągłej. Ostatecznie próby "ożywienia" modelu EDT poprzez wprowadzenie dodatkowej stałej sprzężenia związanej z nietrywialną miarą w całce Feynmana [28, 29] nie doprowadziły do konkluzyjnych wyników. Najprawdopodobniej problem leży w samej (od początku euklidesowej) definicji modelu EDT, co prowadzi do potencjalnie nieograniczonych fluktuacji składowej konforemnej [30] czyniąc powyższe sformułowanie źle określonym.

Remedium na problemy modelu EDT stanowiła propozycja sformułowania lorentzowskiego (lokalna symetria $SO(3;1)$) zaproponowana pod koniec lat 90-tych XXw. przez J. Ambjørna, J. Jurkiewicza i R. Loll [31, 32]. Pomysł opierał się na wprowadzeniu dodatkowej struktury przyczynowo-skutkowej, zgodnej z globalną hiperbolicznością czasoprzestrzeni. Sformułowanie to jest dzisiaj znane pod nazwą modelu Kauzalnych Dynamicznych Triangulacji (ang. Causal Dynamical Triangulations, w skrócie CDT). Zgodnie z twierdzeniem R. Gerocha każda globalnie hiperboliczna czasoprzestrzeń $\mathcal{M}$ może być topologicznie podzielona na warstwy przestrzenne (powierzchnie Cauchy'ego) Σ parametryzowane globalnym czasem własnym T : $\mathcal{M} = \Sigma \times T$. Ponieważ zmiany topologii warstw przestrzennych prowadziłyby najprawdopodobniej do złamania przyczynowości, model Kauzalnych Dynamicznych Triangulacji zakłada, że topologia poszczególnych powierzchni Cauchy'ego Σ jest identyczna i z góry ustalona. Powyższe założenia powodują istotne ograniczenie klasy topologii i geometrii (triangulacji) wchodzących do całki po trajektoriach (1). W CDT każda warstwa przestrzenna parametryzowana (w ujęciu sieciowym) całkowitą współrzędną czasową t jest zbudowana z identycznych równobocznych tetraedrów o stałej długości linków przestrzennych a_s . Sąsiednie warstwy o współrzędnej czasowej t oraz $t \pm 1$ są połączone 4-sympleksami, zawierającymi dodatkowe linki czasowe o stałej długości a_t , "sklejonymi" ze sobą w ten sposób, że również wszystkie powierzchnie Cauchy'ego pomiędzy czasem t a $t \pm 1$ mają założoną topologię Σ . Można pokazać, że wystarczy w tym celu użyć dwóch typów 4-sympleksów (elementarnych bloków) zwanych odpowiednio sympleksami $(4, 1)$ oraz $(3, 2)$ - liczby w nawiasach oznaczają odpowiednio liczbę werteksów w czasie t oraz w czasie $t \pm 1$. O ile warstwy przestrzenne o całkowitej współrzędnej czasowej t są złożone jedynie z tetraedrów będących "podstawą" sympleksów $(4, 1)$, o tyle warstwy sparametryzowane niecałkowitym czasem t są tworzone zarówno z tetraedrów powstałych z przecięcia hiperpowierzchnią stałego czasu własnego sympleksów typu $(4, 1)$, jak i z pryzmatów utworzonych z przecięcia sympleksów typu $(3, 2)$ - por. rys. 1. Powyższe sformułowanie jest w pełni lorentzowskie (sygnatura metryki $(-, +, +, +)$): linki przestrzenne

są powiązane z linkami czasowymi relacją

$$a_t^2 = -\alpha a_s^2, \quad \alpha > 0, \quad (3)$$

zaś 4-sympleksy są częścią przestrzeni Minkowskiego z dobrze określoną strukturą stożków świetlnych. Działanie Regge-Hilberta-Einsteina dla tak określonej triangulacji przyjmuje postać [33]:

$$S_R = -(\kappa_0 + 6\Delta) N_0 + \kappa_4 (N_{(4,1)} + N_{(3,2)}) + \Delta N_{(4,1)}, \quad (4)$$

gdzie $N_{(4,1)}$, $N_{(3,2)}$ i N_0 oznaczają odpowiednio liczbę sympleksów $(4, 1)$, sympleksów $(3, 2)$ oraz werteksów w danej triangulacji, zaś κ_0 , Δ i κ_4 są bezwymiarowymi gołymi stałymi sprzężenia. κ_0 jest proporcjonalna do odwrotności stałej Newtona G , Δ jest głównie związana ze współczynnikiem asymetrii linków przestrzennych i czasowych α zdefiniowanym we wzorze (3) (symetrycznemu przypadkowi $\alpha = 1$ odpowiada $\Delta = 0$), zaś κ_4 jest proporcjonalna do stałej kosmologicznej Λ .

Konstrukcja Kauzalnych Dynamicznych Triangulacji oparta na foliacji czasoprzestrzeni pozwala na dokonanie dobrze zdefiniowanego obrotu Wicka, w wyniku którego lorentzowki globalny czas własny przechodzi w czas urojony: $t^{(L)} \rightarrow t^{(E)} = -it^{(L)}$ i w konsekwencji dostajemy przestrzeń o metryce z sygnaturą $(+, +, +, +)$. Zamiana metryki polega na analitycznym przedłużeniu parametru asymetrii $\alpha \rightarrow -\alpha$ (por. wzór (3)), w wyniku której linki czasowe przechodzą w linki przestrzennopodobne ($a_t^2 = \alpha a_s^2$, $\alpha > 0$),⁸ zaś 4-sympleksy stają się częścią przestrzeni euklidesowej. Obrót Wicka powoduje też przejście działania lorentzowskiego w działanie euklidesowe: $S_R^{(L)} \rightarrow S_R^{(E)} = -iS_R^{(L)}$. Odbywa się to poprzez analityczne przedłużenie stałych sprzężenia κ_0 , Δ i κ_4 będących funkcjami parametru asymetrii α , co jednak nie zmienia globalnej postaci działania Regge w równaniu (4).⁹ W efekcie, początkowe sformułowanie kwantowej teorii grawitacji w postaci (zdyskretyzowanej) feynmanowskiej całki po geometriach $\mathcal{T}^{(L)}$ przechodzi po obrocie Wicka w model statystyczny opisujący (euklidesowe) geometrie $\mathcal{T}^{(E)}$:

$$\mathcal{Z}_{CDT} = \sum_{\mathcal{T}^{(L)}} e^{iS_R^{(L)}[\mathcal{T}^{(L)}]} \xrightarrow{\alpha \rightarrow -\alpha} \mathcal{Z}_{CDT} = \sum_{\mathcal{T}^{(E)}} e^{-S_R^{(E)}[\mathcal{T}^{(E)}]}. \quad (5)$$

Należy podkreślić, że pomimo dokonanego obrotu Wicka struktura triangulacji "pamięta" o narzuconej foliacji czasoprzestrzeni i, jak to już zostało wspomniane, klasa (euklidesowych) triangulacji $\mathcal{T}^{(E)}$ uwzględnionych w równaniu (5) jest inna niż klasa triangulacji występujących w modelu Euklidesowych Dynamicznych Triangulacji.

Po dokonaniu obrotu Wicka (5), model Kauzalnych Dynamicznych Triangulacji może być badany metodami Monte Carlo, które umożliwiają numeryczne oszacowanie wartości oczekiwanych (jak również funkcji korelacji) obserwabli

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \sum_{\mathcal{T}} \mathcal{O}[\mathcal{T}] e^{-S_R[\mathcal{T}]} = \sum_{\mathcal{T}} \mathcal{O}[\mathcal{T}] \mathcal{P}(\mathcal{T}) \approx \frac{1}{N_{MC}} \sum_{i=1}^{N_{MC}} \mathcal{O}[\mathcal{T}^{(i)}] \quad (6)$$

na podstawie dużej liczby (N_{MC}) statystycznie niezależnych triangulacji $\mathcal{T}$ generowanych z boltzmanowskim rozkładem prawdopodobieństwa

$$\mathcal{P}(\mathcal{T}) = \frac{1}{\mathcal{Z}} e^{-S_R[\mathcal{T}]} . \quad (7)$$

⁸Z uwagi na przyjętą lorentzowską sygnaturę $(-, +, +, +)$ stosuję konwencję, w której przestrzennopodobne są interwały o kwadracie większym od zera.

⁹Zamiana działania sprowadza się w praktyce do odpowiedniego potraktowania pierwiastków występujących we wzorach na stałe sprzężenia jako funkcji zmiennej zespolonej α . Co prawda postać funkcyjna zależności κ_0 , Δ i κ_4 od parametru α przed i po obrocie Wicka jest inna, lecz działanie S_R jest nadal liniową kombinacją tych stałych sprzężenia, identyczną jak w równaniu (4).

Mechanizm generowania triangulacji, który opiera się na odpowiednio zaadaptowanym algorytmie Metropolis-Hastingsa [34, 35], umożliwia przejście od jednej konfiguracji sympleksów do innej przy użyciu zestawu lokalnych *ruchów* (tworzących, usuwających lub modyfikujących sympleksy w określonym miejscu triangulacji). W czterowymiarowym modelu CDT algorytm numeryczny wykorzystuje zestaw siedmiu ruchów, które są *kauzalne* (zachowują foliację i topologię triangulacji) oraz *ergodyczne* (dowolna triangulacja o danej topologii może być osiągnięta z innej triangulacji o identycznej topologii przez wykonanie serii ruchów). Dodatkowo prawdopodobieństwo $P(\mathcal{T}_A \xrightarrow{M} \mathcal{T}_B)$ akceptacji danego ruchu M , powodującego zmianę triangulacji $\mathcal{T}_A$ na triangulację $\mathcal{T}_B$, spełnia warunek tzw. *równowagi szczegółowej*

$$P(\mathcal{T}_A)P(\mathcal{T}_A \xrightarrow{M} \mathcal{T}_B) = P(\mathcal{T}_B)P(\mathcal{T}_B \xrightarrow{\bar{M}} \mathcal{T}_A), \quad (8)$$

gdzie $\bar{M}$ jest ruchem przeciwnym (tzn. zmieniającym triangulację $\mathcal{T}_B$ na triangulację $\mathcal{T}_A$). Warunek ten zapewnia, że prawdopodobieństwo pojawiania się triangulacji $\mathcal{P}(\mathcal{T})$ dąży do stanu stacjonarnego zgodnego z równaniem (7).

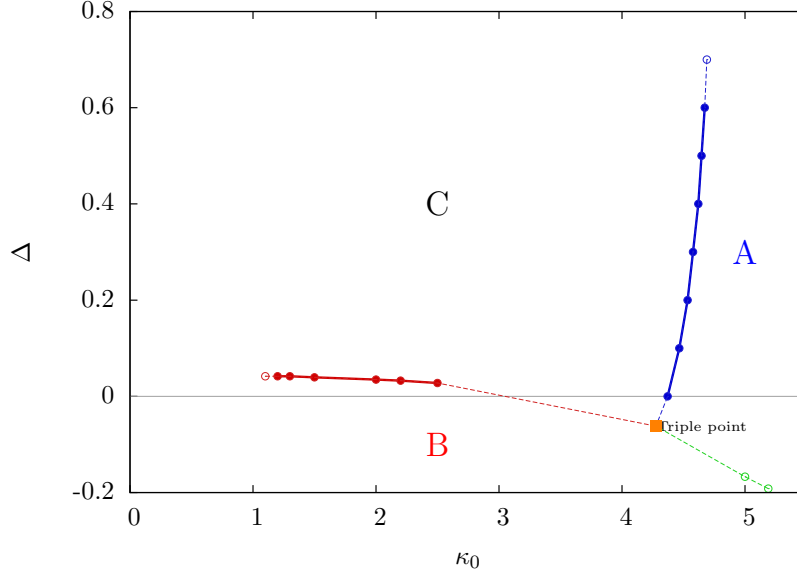
Funkcja rozdziału CDT określona we wzorze (5) zależy od wartości gołych stałych sprzężenia $\mathcal{Z}_{CDT} = \mathcal{Z}_{CDT}(\kappa_0, \Delta, \kappa_4)$ oraz dodatkowo od wyboru (ustalonej) topologii czasoprzestrzeni $\mathcal{M}$. W praktyce wygodnie jest badać właściwości modelu CDT dla określonej objętości triangulacji $N_4 = N_{(4,1)} + N_{(3,2)}$, którą można łatwo kontrolować w symulacjach numerycznych.¹⁰ Liczba możliwych triangulacji rośnie (w wiodącym rzędzie) wykładniczo z rozmiarem triangulacji: $\mathcal{Z}_{CDT} \propto \exp(\kappa_4^c N_4)$, przy czym wykładnik κ_4^c zależy od wartości stałych sprzężenia i (z uwagi na podwiodące poprawki) od rozmiaru triangulacji. Ten wykładniczy wzrost jest tłumiony przez człon kosmologiczny w działaniu Regge (4), zależny od stałej κ_4 sprzężonej do N_4 . Tym samym (w wiodącym rzędzie) $\mathcal{Z}_{CDT} \propto \exp((\kappa_4^c - \kappa_4)N_4)$ i badając zachowanie modelu dla określonej objętości należy odpowiednio ustalić $\kappa_4 \approx \kappa_4^c(\kappa_0, \Delta, N_4)$. Podsumowując, typowa symulacja Monte Carlo jest przeprowadzana dla określonego zestawu parametrów - wybranej topologii $\mathcal{M}$, objętości triangulacji: N_4 oraz wartości stałych sprzężenia κ_0 , Δ i $\kappa_4 \approx \kappa_4^c(N_4, \kappa_0, \Delta)$. Następnie należy przeprowadzić analizę efektów skończonego rozmiaru (zależności wyników od N_4) dokonując, o ile to możliwe, interpolacji do granicy nieskończonej objętości $N_4 \rightarrow \infty$.

3. Cel prac stanowiących osiągnięcie naukowe

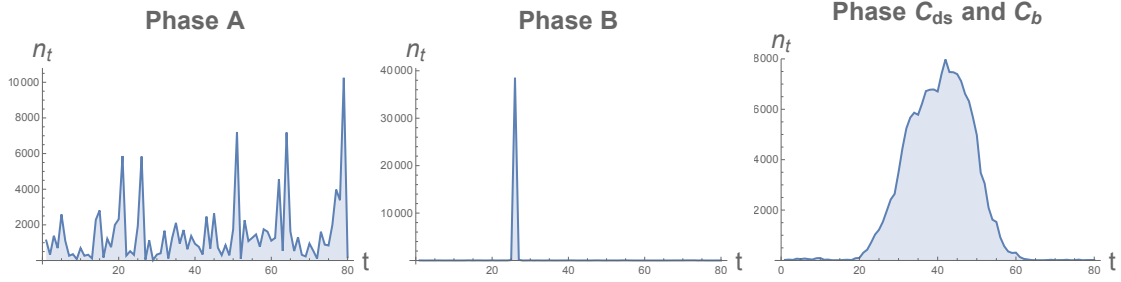
Feynmanowska całka po trajektoriach (funkcja rozdziału) modelu Kauzalnych Dynamicznych Triangulacji zależy od szeregu parametrów (stałych sprzężenia oraz wybranej topologii czasoprzestrzeni). W zależności od wyboru tych parametrów można zaobserwować rozmaite fazy kwantowej geometrii o istotnie różnych własnościach fizycznych. Badania struktury fazowej są istotne zarówno z punktu widzenia określenia podczerwonej granicy CDT (zgodnie z zasadą korespondencji powinna istnieć faza semiklasyczna, w której geometria dynamicznie tworzonego tła odpowiada rozwiązaniom OTW), jak i poszukiwania granicy ultrafioletowej (zgodnie z hipotezą asymptotycznego bezpieczeństwa granica ciągła powinna być związana z przejściem fazowym wyższego rzędu).

¹⁰Objętość triangulacji jest ustalana poprzez wprowadzenie do działania dodatkowego członu, np. $\epsilon(N_4 - \bar{N}_4)^2$, sprawiającego, że liczba sympleksów fluktuuje wokół zadanej $\bar{N}_4$ z amplitudą zależną od parametru ϵ . Wpływ tego członu można następnie usunąć podczas analizy danych. Często zamiast ustalania objętości N_4 ustala się objętość $N_{(4,1)}$, jednak dla danego wyboru parametrów κ_0 i Δ stosunek $N_4/N_{(4,1)}$ fluktuuje wokół stałej więc metoda ustalania objętości w większości przypadków nie ma znaczenia.

Początkowe badania czterowymiarowego modelu CDT były prowadzone dla ustalonej sferycznej topologii warstw przestrzennych $\Sigma = S^3$ oraz periodycznych czasowych warunków brzegowych $T = S^1$ (ze względów praktycznych w badaniach numerycznych dokonuje się zazwyczaj kompaktyfikacji współrzędnej czasowej). Tym samym globalna topologia była ustalona jako $\mathcal{M} = S^3 \times S^1$. Najważniejsze wyniki tych badań (przed pracami stanowiącymi osiągnięcie naukowe przedstawione w niniejszym autoreferacie) zostały podsumowane poniżej.



Rysunek 2: Stary diagram fazowy czterowymiarowego modelu CDT ze sferyczną topologią przestrzenną $\Sigma = S^3$.



Rysunek 3: Typowe profile objętości przestrzennych $n_t \equiv N_{(4,1)}(t)$ w różnych fazach CDT dla sferycznej topologii przestrzennej $\Sigma = S^3$.

Początkowo zaobserwowano istnienie trzech faz geometrii [36, 37], nazwanych fazami A , B oraz C - por. diagram fazowy na rys. 2. Faza A charakteryzuje się podziałem czasoprzestrzeni na szereg niewielkich, nieskorelowanych ze sobą "wszechświatów" (ang. baby universes) - por. rys. 3 przedstawiający typowy rozkład objętości warstw przestrzennych triangulacji w funkcji współrzędnej czasowej $n_t \equiv N_{(4,1)}(t)$ (liczba równobocznych tetraedrów tworzących warstwę przestrzenną jest proporcjonalna do jej fizycznej objętości). Efektywny wymiar czasoprzestrzeni w fazie A wynosi około dwóch.¹¹ Faza ta jest odpowiednikiem fazy "rozgałęzionych polimerów"

¹¹Geometria kwantowej czasoprzestrzeni zdyskretyzowana przez triangulacje ma cechy fraktalne i wymiar efektywny może się istotnie różnić od wymiaru topologicznego. Efektywny wymiar można definiować np. przy użyciu wymiaru Hausdorffa D_H lub wymiaru spektralnego D_s .

(ang. branched polymers) obserwowanej uprzednio w modelu EDT. W fazie B następuje kolaps geometrii triangulacji do pojedynczej warstwy przestrzennej o niezwykle wysokim wymiarze efektywnym (dążącym do nieskończoności wraz ze zwiększaniem rozmiaru triangulacji) - por. rys. 3. Faza ta jest odpowiednikiem fazy "skolapsowanej" (ang. crumpled) obserwowanej uprzednio w modelu EDT. Nietrywialnym wynikiem, charakterystycznym dla CDT, jest istnienie fazy C (obecnie zwanej też fazą "de Sittera" lub C_{dS}), w której pojawia się efektywnie czterowymiarowa makroskopowa geometria [38] - por. rys. 3. Jednocześnie w fazie tej po raz pierwszy zaobserwowano zjawisko redukcji wymiarowej (efektywny wymiar czasoprzestrzeni zależy od skali i wymiar spektralny zmienia się od $D_s \approx 2$ dla skali mikroskopowej do $D_s = 4$ dla skal makroskopowych) [39]. W fazie C_{dS} kwantowe fluktuacje objętości przestrzennych zachodzą wokół dynamicznie wyłaniającego się tła, zgodnego z (euklidesową) czterowymiarową czasoprzestrzenią de Sittera [40]. Fluktuacje te mogą być bardzo dobrze opisane przez działanie efektywne zgodne z modelem minisuperspace Hartle-Hawkinga, zakładającym maksymalnie symetryczną (przestrzennie jednorodną i izotropową) postać metryki [41, 42]. Jednocześnie (względna) amplituda fluktuacji kwantowych maleje wraz ze wzrostem objętości triangulacji N_4 i granicę $N_4 \rightarrow \infty$ (wewnątrz fazy C_{dS}) można traktować jako granicę podczerwoną CDT, zgodną z klasyczną OTW. Badanie związku postaci działania efektywnego CDT opisującego kwantowe fluktuacje objętości przestrzennych n_t z przejściami fazowymi [43] doprowadziło do wniosku, że w części diagramu fazowego pomiędzy fazami C_{dS} i B istnieje najprawdopodobniej dodatkowa faza kwantowej geometrii, nazwana początkowo "fazą bifurkacji" (obecnie C_b). Dodatkowo wykazano, że przejście fazowe $C_{dS} - A$ jest przejściem pierwszego rzędu [44], zaś przejście fazowe $C_b - B$ jest przejściem drugiego lub wyższego rzędu [45].

Celem prac stanowiących osiągnięcie naukowe było rozwinięcie badań struktury fazowej czterowymiarowego modelu Kauzalnych Dynamicznych Triangulacji, szczególnie w kontekście pojawienia się możliwości istnienia nowej, nieodkrytej wcześniej fazy "bifurkacji" C_b . Prace te można podzielić na trzy zagadnienia. Pierwsze zagadnienie (poruszane w pracach [H1] i [H5]) dotyczy potwierdzenia istnienia fazy C_b i określenia jej dokładnego położenia na diagramie fazowym oraz zbadania własności geometrii w tej fazie i próbie nadania jej interpretacji fizycznej. Drugie zagadnienie dotyczy analizy rzędu nowego przejścia fazowego $C_{dS} - C_b$ (prace [H2] i [H6]) oraz ponownego dokładnego zbadania własności przejścia fazowego $C_b - B$ (praca [H5]). Jak to zostało wyżej opisane, istnienie przejść fazowych wyższego rzędu wiąże się z potencjalną możliwością zdefiniowania granicy ciągłej CDT (tematem tym zajmuje się praca [H3]). Trzecie zagadnienie badawcze (prace [H4], [H7], [H8]) porusza kwestie uniwersalności struktury fazowej CDT i jej (nie)zależności od wyboru topologii czasoprzestrzeni. Badania te dotyczą wpływu zmiany topologii warstw przestrzennych ze sferycznej $\Sigma = S^3$ na toroidalną $\Sigma = T^3$.

4. Streszczenie najważniejszych wyników

Faza bifurkacji (praca [H1] i część pracy [H5])

W pracy [43] została wysnuta hipoteza istnienia nowej, wcześniej nieodkrytej fazy CDT, nazwanej fazą bifurkacji. Odkrycie nowej fazy wynikało z analizy postaci działania efektywnego CDT opisującego fluktuacje objętości warstw przestrzennych $n_t \equiv N_{(4,1)}(t)$. Analiza ta bazowała na metodologii efektywnej macierzy transferu M , opisującej amplitudę przejścia pomiędzy sąsiednimi warstwami przestrzennymi

o (całkowitej) współrzędnej czasowej t i $t + 1$. Fakt istnienia powyższej macierzy transferu został zapostulowany w pracy [46]. Macierz transferu może być powiązana z efektywnym lagranżjanem L^{eff} sparametryzowanym objętościami przestrzennymi

$$\langle n_{t+1} | M | n_t \rangle \propto \exp(-L^{eff}[n_t, n_{t+1}]) . \quad (9)$$

Postać macierzy transferu M zmierzona w fazie de Sittera (C)

$$\langle n | M_C | m \rangle = \underbrace{\exp \left[-\frac{1}{\Gamma} \frac{(n-m)^2}{(n+m)} \right]}_{\text{część kinetyczna}} \underbrace{\exp \left[-\mu \left(\frac{n+m}{2} \right)^{1/3} + \lambda \left(\frac{n+m}{2} \right) \right]}_{\text{część potencjalna: } V[n+m]}, \quad (10)$$

okazała się być zgodna z poprzednimi pomiarami L^{eff} opartymi na analizie macierzy korelacji fluktuacji objętości przestrzennych

$$L_C^{eff}[n, m] = \frac{1}{\Gamma} \frac{(n-m)^2}{n+m} + \mu \left(\frac{n+m}{2} \right)^{1/3} - \lambda \left(\frac{n+m}{2} \right) , \quad (11)$$

będącej dyskretyzacją lagranżjanu modelu minisuperspace Hartle-Hawkinga [47].

Metodologia macierzy transferu pozwoliła na pomiar działania efektywnego w innych fazach CDT. W szczególności w pracy [43] pokazano, że zmiana postaci macierzy transferu M (i w konsekwencji efektywnego lagranżjanu L^{eff}) następuje dokładnie na linii przejścia fazowego $A - C$. Podobna analiza doprowadziła do wniosku, że macierz transferu zmienia postać w pewnej odległości od linii przejścia fazowego $B - C$. Zmiana następuje w obszarze parametrów (κ_0, Δ) oznaczonego na pierwotnym diagramie fazowym (rys. 2) jako część fazy C , co wskazuje na możliwość istnienia zupełnie nowej fazy kwantowej geometrii. W obszarze tej fazy następuje bifurkacja części kinetycznej macierzy transferu [43]

$$\begin{aligned} \langle n | M_B | m \rangle = & \quad (12) \\ = & \left[\exp \left(-\frac{1}{\Gamma} \frac{((n-m) - c[n+m])^2}{n+m} \right) + \exp \left(-\frac{1}{\Gamma} \frac{((n-m) + c[n+m])^2}{n+m} \right) \right] V[n+m] . \end{aligned}$$

Bifurkacja jest określona przez funkcję $c[n+m]$, gdzie $c[n+m] \rightarrow c_0(n+m-s_b)$ dla dużych objętości ($n+m \gg s_b$) i $c[n+m] \rightarrow 0$ dla małych objętości ($n+m \ll s_b$). Parametry macierzy transferu, a w szczególności punkt bifurkacji s_b oraz jej siła c_0 zależą od wartości gołych stałych sprzężenia CDT: κ_0 i Δ .

W pracy [H1] dokonano analizy zachowania macierzy transferu w obszarze przejścia fazowego między fazą de Sittera C a nowo odkrytą fazą bifurkacji. Przejście to jest związane z granicą $s_b \rightarrow \infty$ i $c_0 \rightarrow 0$, w której macierz transferu fazy bifurkacji (12) przechodzi w macierz transferu fazy C (10). Pokazano, że na przejściu fazowym i w granicy dużej objętości ($n+m \rightarrow \infty$) można dokonać rozwinięcia równania (12) prowadzącego do efektywnego lagranżjanu

$$L_B^{eff}[n, m] \approx \frac{1}{\Gamma} \left(1 - \frac{2c_0^2(n+m)}{\Gamma} \right) \frac{(n-m)^2}{n+m} + \mu \left(\frac{n+m}{2} \right)^{1/3} - \left(\lambda - \frac{c_0^2}{\Gamma} \right) \left(\frac{n+m}{2} \right) . \quad (13)$$

Porównanie wzorów (11) i (13) prowadzi do wniosku, że przejście fazowe z fazy C do fazy bifurkacji jest związane z pojawieniem się dodatkowego czynnika

$\left(1 - \frac{2c_0^2}{\Gamma}(n+m)\right)$, który dla dużych objętości ($n+m > \Gamma/2c_0^2$) zmienia znak części kinetycznej. Tego typu zachowanie można interpretować jako efektywny obrót Wicka $t \rightarrow -it$, a więc dynamiczną zmianę efektywnej sygnatury metryki związaną z nowym przejściem fazowym.

Powyższe rozważania były oparte na analizie zachowania objętości warstw przestrzennych n_t . Obserwacją ta jest bardzo ogólna i nie bierze pod uwagę geometrycznych szczegółów triangulacji. Dlatego też dokonano bardziej szczegółowej analizy geometrii poszczególnych warstw przestrzennych. W szczególności przeanalizowano zachowanie średniej krzywizny

$$\bar{R}(t) \equiv \frac{\int d^3x \sqrt{g_{(3)}} R_{(3)}}{\int d^3x \sqrt{g_{(3)}}}, \quad (14)$$

gdzie $g_{(3)}$ i $R_{(3)}$ oznaczają odpowiednio wyznacznik (indukowanej) przestrzennej metryki i skalar Ricciego w warstwie t . Trójwymiarowa krzywizna zależy od lokalnych deficytów kątowych wokół linków przestrzennych. Dla triangulacji CDT średnią krzywiznę można policzyć ze wzoru

$$\bar{R}(t) = 2\pi \frac{N_1(t)}{N_3(t)} - 6 \arccos(1/3), \quad (15)$$

gdzie $N_1(t)$ i $N_3(t)$ są odpowiednio liczbą linków i tetraedrów w danej warstwie t . Na podstawie analizy wyników symulacji numerycznych pokazano, że w fazie bifurkacji średnia krzywizna jest różna dla warstw przestrzennych o parzystej i nieparzystej współrzędnej t . Zachowanie to jest istotnie inne niż w fazie C , w której (euklidesowe) rozwiązanie de Sittera odpowiada warstwom przestrzennym o stałej średniej krzywiznie, niezależnej od t .

Pokazano również, że skoki krzywizny (pomiędzy parzystym i nieparzystym t) związane są z formowaniem się wewnątrz triangulacji klastrow sympleksów skupionych wokół "osobliwych" werteksów o makroskopowej liczbie koordynacyjnej $O(v)$.¹² Werteksy te pojawiają się wyłącznie w warstwach o wyższej średniej krzywiznie, a więc w co drugiej warstwie przestrzennej, przy czym w danej warstwie o dużym $\bar{R}(t)$ istnieje tylko jeden "osobliwy" werteks. Istnienie wyróżnionych werteksów, wokół których skupiona jest makroskopowa liczba sympleksów (a na poziomie warstw przestrzennych także tetraedrów) wskazuje, że nowe przejście fazowe związane jest ze spontanicznym złamaniem symetrii w kierunkach przestrzennych - w fazie C geometria (euklidesowej) czasoprzestrzeni de Sittera wokół której występują kwantowe fluktuacje jest przestrzennie jednorodna i izotropowa, geometria czasoprzestrzeni w fazie bifurkacji w oczywisty sposób łamie te symetrie.

Analiza mikroskopowej struktury geometrii w fazie bifurkacji pozwoliła na zaproponowanie dwóch nowych parametrów porządku:

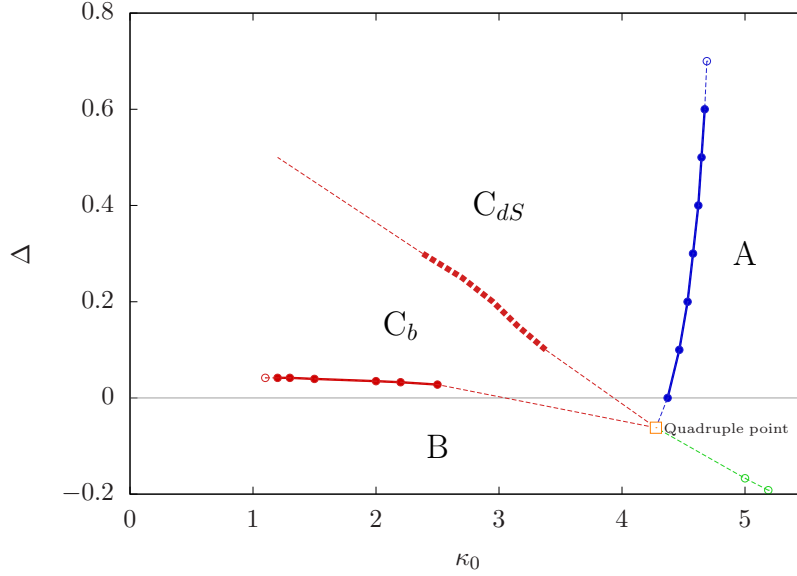
$$OP_1 = |\bar{R}(t_0) - \bar{R}(t_0 + 1)|, \quad (16)$$

$$OP_2 = \left| \max[O(v(t_0))] - \max[O(v(t_0 + 1))] \right|. \quad (17)$$

Pokazano, że powyższe parametry porządku są (w przybliżeniu) zerowe w fazie C i znacząco rosną w fazie bifurkacji, analiza ich zachowania pozwala więc na dokładną lokalizację nowego przejścia fazowego.

¹² $O(v)$ jest liczbą 4-sympleksów o wspólnym werteksie v . Liczba koordynacyjna "osobliwych" werteksów jest kilka rzędów wielkości większa niż dla pozostałych werteksów w triangulacji.

W pracy [H1] zaprezentowano ponadto po raz pierwszy nowy diagram fazowy CDT z uwzględnieniem fazy bifurkacji - por. rys. 4. Sporządzenie diagramu opierało się na analizie postaci macierzy transferu (9) zmierzonej podczas symulacji numerycznych dla sieci punktów w przestrzeni gołych stałych sprzężenia (κ_0, Δ). Potwierdzono, że faza bifurkacji zajmuje istotną część przestrzeni fazowej pomiędzy fazą C a fazą B oraz (na podstawie ekstrapolacji linii nowego przejścia fazowego) za-postulowano, że wszystkie (cztery) fazy CDT łączą się w jednym wspólnym punkcie.



Rysunek 4: Nowy diagram fazowy czterowymiarowego modelu CDT ze sferyczną topologią przestrzenną $\Sigma = S^3$.

Związek pomiędzy formowaniem się "osobliwych" werteksów a bifurkacją części kinetycznej macierzy transferu (12) był także dyskutowany w (części 4) pracy [H5] (poświęconej w większości analizie własności przejścia fazowego między fazą bifurkacji a fazą B - por. opis poniżej). W pracy tej przeanalizowano własności geometrii w fazie bifurkacji dla triangulacji o bardzo krótkim okresie czasowym $T = 2$. Wybór ten jest zgodny z wcześniejszymi pomiarami macierzy transferu [43], które doprowadziły do odkrycia nowej fazy. W szczególności pokazano, że długość okresu czasowego T nie ma wpływu na własności przejścia fazowego, zaś pojawienie się bifurkacji¹³ objętości warstw przestrzennych $\langle |n - m| \rangle > 0$ jest bezpośrednio związane z istnieniem "osobliwych" werteksów (w warstwie o mniejszej objętości). Zależność między krotnością tych werteksów $\langle O_{max} \rangle$ a bifurkacją $\langle |n - m| \rangle$ jest w dobrym przybliżeniu liniowa. Poprzez analizę skalowania krotności "osobliwych" werteksów z rozmiarem triangulacji pokazano również, że (zgodnie z wcześniejszymi obserwacjami) w danej warstwie przestrzennej powinien istnieć tylko jeden "osobliwy" werteks. Tym samym potwierdzono, że pojawianie się takich werteksów (w co drugiej warstwie przestrzennej), a co za tym idzie złamanie symetrii przestrzennej fazy de Sittera, jest najbardziej podstawową mikroskopową charakterystyką fazy bifurkacji.

¹³W układzie z dwoma warstwami o objętościach odpowiednio n i m , różnica objętości $\langle |n - m| \rangle > 0$ odpowiada niezerowej bifurkacji $c[n + m]$ we wzorze (12).

Przejścia fazowe i granica ciągła (część pracy [H5] i prace [H2], [H6], [H3])

Badanie rzędu przejść fazowych występujących w modelu CDT jest niezwykle istotne w punkcie widzenia poszukiwania granicy ciągłej, w której, zgodnie z hipotezą asymptotycznego bezpieczeństwa S. Weinberga, kwantowa grawitacja jest nieperturbacyjnie renormalizowalna. Ultrafioletowy punkt stały powinien być w ujęciu sieciowym związany z przejściem fazowym ciągłym (tzn. rzędu wyższego niż pierwszy). Dlatego też potwierdzenie istnienia takich przejść fazowych, szczególnie na granicy semiklasycznej fazy C_{dS} , jest niezwykle istotne. Problem ten został po raz pierwszy poruszony w pracach [44, 45], które dotyczyły analizy przejść fazowych pomiędzy fazą A i C (obecnie $A - C_{dS}$) oraz B i C (obecnie $B - C_b$).¹⁴ Dokonana w tych pracach analiza dotyczyła parametrów porządku OP związanych z globalnymi charakterystykami triangulacji. W szczególności, w przypadku przejścia $A - C$ analizowano zachowanie liczby werteksów w triangulacji $OP = N_0$, zaś w przypadku przejścia fazowego $B - C$ badano parametr porządku będący liniową kombinacją liczby sympleksów $(4, 1)$ i liczby werteksów $OP = \text{conj}(\Delta) \equiv N_{(4,1)} - 6N_0$. Położenie przejścia fazowego ustalano na podstawie zachowania podatności $\chi_{OP} = \langle OP^2 \rangle - \langle OP \rangle^2$, która ma lokalne maksimum na granicy dwóch faz.

Przejście fazowe $A - C$ (por. diagram fazowy na rys. 4) pojawia się, gdy dla ustalonej wartości stałej sprzężenia Δ zwiększamy κ_0 . Z uwagi na efekty skończonego rozmiaru,¹⁵ położenie punktu krytycznego κ_0^c zależy od rozmiarów sieci

$$\kappa_0^c(N_4) = \kappa_0^c(\infty) - CN_4^{-1/\tilde{\nu}}. \quad (18)$$

Zmierzony wykładnik krytyczny $\tilde{\nu} \approx 1$ wskazuje na przejście pierwszego rzędu. Podobna analiza przeprowadzona dla przejścia fazowego $B - C$, które występuje gdy dla ustalonej wartości stałej sprzężenia κ_0 zmieniamy Δ , pokazała, że położenie przejścia fazowego

$$\Delta^c(N_4) = \Delta^c(\infty) - CN_4^{-1/\tilde{\nu}} \quad (19)$$

skaluje się z wykładnikiem krytycznym $\tilde{\nu} \approx 2.5$, co wskazuje na przejście fazowe wyższego rzędu. W pracy [44] dokonano ponadto analizy zachowania się parametrów porządku na przejściu fazowym. Pokazano, że parametr porządku OP przeskakuje (w czasie symulacji Monte Carlo) pomiędzy dwoma metastabilnymi stanami, charakterystycznymi dla danej fazy. Takie zachowanie OP jest typowe dla przejść fazowych pierwszego rzędu, jest więc w pełni zrozumiałe dla przejścia fazowego $A - C$, stanowi jednak zaskoczenie w przypadku przejścia ciągłego $B - C$. Tym niemniej pokazano, że względna amplituda skoków OP/N_4 zależy od objętości sieci N_4 . W przypadku przejścia $A - C$ amplituda ta rośnie wraz z N_4 czyniąc to przejście coraz bardziej nieciągłym, zaś w przypadku przejścia $B - C$ amplituda skoków maleje ze wzrostem N_4 , a więc przejście to staje się coraz bardziej ciągłe.

Motywacją (części 3) pracy [H5]¹⁶ było powtórne dokładne zbadanie przejścia fazowego $B - C$ (po odkryciu fazy bifurkacji zwanego przejściem $B - C_b$) w celu

¹⁴Prace te powstały przed odkryciem fazy bifurkacji C_b .

¹⁵W ujęciu sieciowym nie mamy do czynienia z przejściami fazowymi w ścisłym znaczeniu tego słowa, gdyż z uwagi na ograniczony rozmiar sieci N_4 sformułowanie to jest skończone i występują jedynie duże skoki zamiast rozbieżności odpowiednich pochodnych energii swobodnej. W celu dokonania analizy rzędu przejścia fazowego niezbędne jest więc zbadanie skalowania z rozmiarem sieci $N_4 \rightarrow \infty$.

¹⁶Praca [H5] dotyczyła też badania własności geometrycznych fazy bifurkacji, co zostało już omówione powyżej.

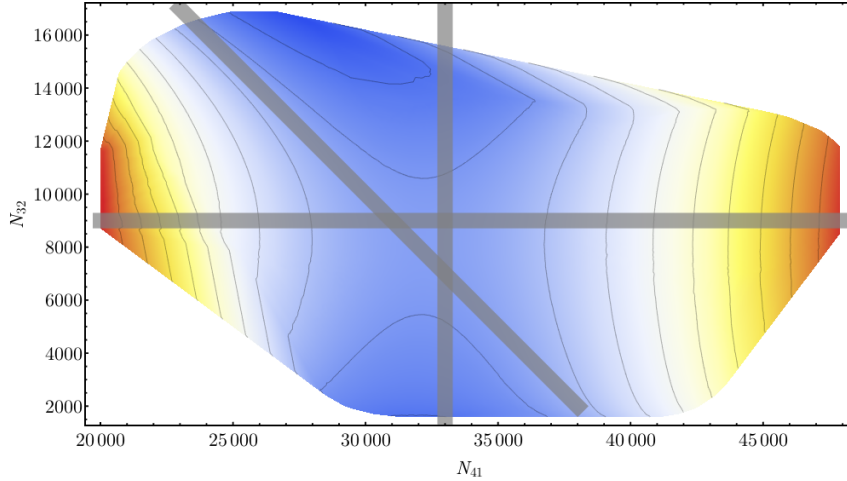
wyjaśnienia powyższych wątpliwości (skoki parametru porządku nie są typowe dla przejść fazowych wyższego rzędu). Analiza przejścia fazowego $B - C_b$ przedstawiona w pracy [H5] oparta jest o parametr porządku $OP = x \equiv N_{(4,1)} - N_{(3,2)}$, którego zachowanie jest analogiczne do parametru $OP = \text{conj}(\Delta)$ analizowanego w poprzednich pracach [44, 45]. Ciekawa obserwacja dotyczy zachowania OP na granicy faz, które zależy od wyboru sposobu ustalania objętości triangulacji. Przy symulacjach z ustaloną całkowitą objętością $\bar{N}_4$, tak jak w pracach [44, 45], parametr porządku wykazuje cechy charakterystyczne dla przejścia pierwszego rzędu przeskakując między dwoma metastabilnymi stanami (na histogramie OP można obserwować dwa przesunięte maksima). Jeśli natomiast ustalana jest objętość $\bar{N}_{(4,1)}$, powyższe skoki parametru porządku zanikają (histogram z jednym maksimum OP), zachowanie jest więc typowe dla przejść ciągłych. Powyższą obserwację można wytłumaczyć dzięki analizie entropii $\mathcal{N}(N_0, N_{(4,1)}, N_{(3,2)})$, zliczającej liczbę stanów (triangulacji $\mathcal{T}$) o tej samej wartości (gołego) działania CDT (4) $S_R = S_R(N_0, N_{(4,1)}, N_{(3,2)})$. W formalizmie tym funkcja rozdziału CDT (5) może być zapisana jako

$$\mathcal{Z}_{CDT} = \sum_{\mathcal{T}} e^{-S_R[\mathcal{T}]} = \sum_{N_0, N_{(4,1)}, N_{(3,2)}} \mathcal{N}(N_0, N_{(4,1)}, N_{(3,2)}) \cdot e^{-S_R(N_0, N_{(4,1)}, N_{(3,2)})} . \quad (20)$$

Entropia $\mathcal{N}(N_0, N_{(4,1)}, N_{(3,2)})$ może być zmierzona w symulacjach numerycznych. W pracy [H5] rozpatrywana jest zależność entropii od $N_{(4,1)}$ i $N_{(3,2)}$ (po wysumowaniu zależności od N_0)

$$\mathcal{P}(N_{(4,1)}, N_{(3,2)}) = C \cdot \sum_{N_0} \mathcal{N}(N_0, N_{(4,1)}, N_{(3,2)}) \cdot e^{-S_R(N_0, N_{(4,1)}, N_{(3,2)})} , \quad (21)$$

która w pełni wyznacza rozkład prawdopodobieństwa $P(x)$ parametru porządku $x = N_{(4,1)} - N_{(3,2)}$.



Rysunek 5: Energia swobodna $F(N_{(4,1)}, N_{(3,2)})$ w regionie przejścia fazowego $B - C_b$. Wartość F rośnie od koloru niebieskiego do czerwonego. Szare linie oznaczają przekroje opisane w tekście.

Logarytm wyrażenia (21) definiuje energię swobodną F , która w pobliżu przejścia fazowego $B - C_b$ w przestrzeni zmiennych $(N_{(4,1)}, N_{(3,2)})$ ma kształt siodła (por. rys. 5). Dobór sposobu ustalania objętości triangulacji odpowiada wyborowi pewnej szczególnej trajektorii zbliżania się do powierzchni krytycznej poprzez wybranie

określonego przekroju energii swobodnej F (entropii $\mathcal{N}$) na płaszczyźnie wyznaczonej przez $(N_{(4,1)}, N_{(3,2)})$. Ustaleniu całkowitej objętości $\bar{N}_4 = N_{(4,1)} + N_{(3,2)}$ odpowiada przekrój diagonalny: $N_{(4,1)} = \frac{\bar{N}_4 + x}{2}$, $N_{(3,2)} = \frac{\bar{N}_4 - x}{2}$, dla którego siodłowy kształt F prowadzi do rozkładu prawdopodobieństwa

$$\bar{P}(x) = \mathcal{P} \left(N_{(4,1)} = \frac{\bar{N}_4 + x}{2}, N_{(3,2)} = \frac{\bar{N}_4 - x}{2} \right) \quad (22)$$

w pełni odtwarzającego podwójne maksimum w histogramie parametru porządku. Ustalenie objętości $\bar{N}_{(4,1)}$ to przekrój wertykalny: $N_{(4,1)} = \bar{N}_{(4,1)}$, $N_{(3,2)} = \bar{N}_{(4,1)} - x$, przechodzący przez wypukły spód siodła, prowadzący do rozkładu prawdopodobieństwa

$$\tilde{P}(x) = \mathcal{P} (N_{(4,1)} = \bar{N}_{(4,1)}, N_{(3,2)} = \bar{N}_{(4,1)} - x) \quad (23)$$

zgodnego z histogramem parametru porządku bez podwójnego maksimum. Analiza zachowania szerokości rozkładu $\tilde{P}(x)$ w funkcji stałej sprzężenia $\kappa_{32} \equiv \kappa_4 + \Delta$ (co w przeprowadzanych symulacjach odpowiadało zmianie parametru Δ) pozwala dodatkowo wyznaczyć dokładny punkt przejścia fazowego Δ^c . Punkt ten odpowiada maksymalnej szerokości rozkładu $\tilde{P}(x)$ (a tym samym maksymalnej podatności $\chi_{OP=x}$) i dokładnie pokrywa się z wartością Δ^c zbadaną standardowymi metodami. Pokazano tym samym, że obserwowane (w symulacjach z ustaloną całkowitą objętością N_4) przeskoki parametru porządku na granicy faz $B - C_b$ są związane ze szczególnym zachowaniem entropii, zaś sposób ustalenia całkowitej objętości triangulacji odpowiada wyborowi specyficznej trajektorii w przestrzeni stałych sprzężenia prowadzącej do przejścia fazowego. Dlatego też zachowanie parametrów porządku, w pewnych aspektach naśladujące zachowanie obserwowane przy przejściach fazowych pierwszego rzędu, nie stoi w sprzeczności z ciągłym charakterem przejścia fazowego $B - C_b$.

Fakt odkrycia nowej fazy bifurkacji C_b wiązał się z koniecznością analizy własności nowego przejścia fazowego (na granicy z fazą de Sittera C_{dS}). Stwierdzenie, czy jest to przejście ciągłe (rzędu wyższego niż pierwszy) jest istotne z punktu widzenia możliwości zdefiniowania trajektorii grupy renormalizacji łączących podczerwoną granicę CDT (we wnętrzu fazy C_{dS}) z potencjalnym ultrafioletowym punktem stałym (pożądane jest aby punkt ten znajdował się na granicy fazy C_{dS}). Postać diagramu fazowego uwzględniającego fazę bifurkacji [H1], por. rys. 4, sugeruje, że faza C_b występuje w całym zakresie parametrów pomiędzy fazą C_{dS} a fazą B , diagram ten wyklucza więc możliwość bezpośredniego ciągłego przejścia między tymi fazami. Dokładna analiza nowego przejścia fazowego $C_b - C_{dS}$ została dokonana w pracach [H2] i [H6].

Praca [H2] zajmuje się problemem znalezienia parametrów porządku możliwych do wykorzystania w badaniu rzędu przejścia $C_{dS} - C_b$.¹⁷ W szczególności rozpatrywano "tradycyjne" parametry porządku oparte na globalnych własnościach triangulacji, używane przedtem przy badaniu przejść fazowych $A - B$ oraz $B - C$ [44, 45], oraz "nowe" parametry porządku (16) i (17), biorące pod uwagę mikroskopowe własności geometrii fazy C_b [H1]. W wyniku analizy zachowania poszczególnych parametrów porządku stwierdzono, że parametry "tradycyjne" nie dają statystycznie istotnego sygnału przejścia fazowego. Najlepszy sygnał daje parametr OP_2 (17), związany

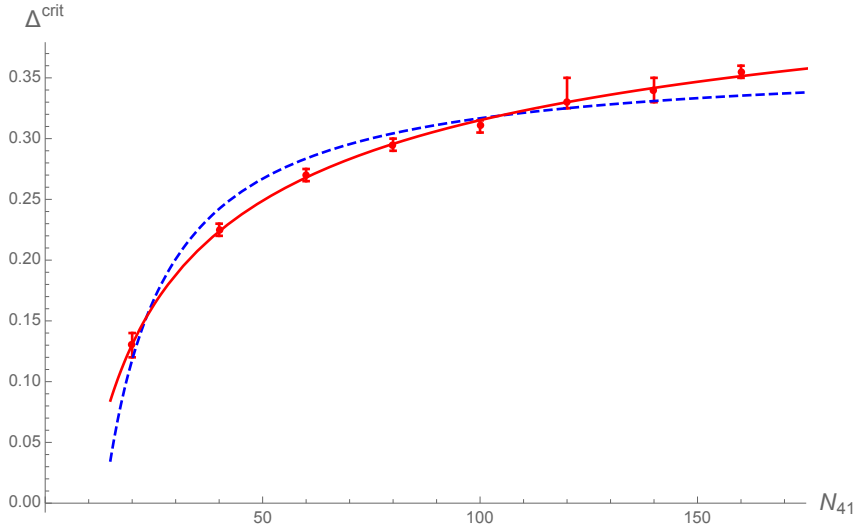
¹⁷Uwaga: w pracy [H2] faza bifurkacji jest oznaczona jako faza D .

z podstawową mikroskopową charakterystyką fazy bifurkacji - obecnością "osobliwych" werteksów o makroskopowej liczbie koordynacyjnej (werteksy takie występują w co drugiej warstwie przestrzennej triangulacji fazy C_b - por. opis powyżej). W badaniach opisanych w pracy [H2] wartość stałej sprzężenia κ_0 była ustalona, zaś przejście z fazy de Sittera C_{dS} do fazy bifurkacji C_b następowało wskutek zmniejszania wartości parametru Δ - por. diagram fazowy na rys. 4. Na podstawie analizy zachowania podatności $\chi_{OP_2} = \langle OP_2^2 \rangle - \langle OP_2 \rangle^2$ (punkt przejścia fazowego związany jest z lokalnym maksimum podatności - por. dyskusja powyżej) wyznaczono dokładne położenie punktów krytycznych Δ^c . Dokonano analizy efektów skończonego rozmiaru poprzez pomiar Δ^c dla 5 różnych objętości triangulacji $N_{(4,1)}$ i zbadanie skalowania dla $N_{(4,1)} \rightarrow \infty$

$$\Delta^c(N_{(4,1)}) = \Delta^c(\infty) - \alpha N_{(4,1)}^{-1/\nu} . \quad (24)$$

Najważniejszym wynikiem pracy [H2] jest wstępny pomiar wykładnika krytycznego $\nu = 2.6 \pm 0.6$ we wzorze (24), którego wartość wskazuje na przejście wyższego (niż pierwszy) rzędu.

Badania przejścia fazowego $C_{dS} - C_b$ były kontynuowane w pracy [H6]. W pracy tej dokonano dokładniejszej analizy skalowania (24), poprzez pomiar położenia punktów krytycznych $\Delta^c(N_{(4,1)})$ dla 8 różnych objętości triangulacji z zakresu 40000 – 160000 sympleksów typu (4, 1). Wyznaczony wykładnik krytyczny¹⁸ $\nu = 2.71 \pm 0.34$ jest większy od 1 na poziomie ufności przekraczającym 99%. Wynik ten wyraźnie wskazuje, że przejście bifurkacji jest przejściem fazowym ciągłym (por. rys. 6).



Rysunek 6: Zależność położenia punktu (pseudo-)krytycznego przejścia fazowego $C_{dS} - C_b$ od objętości triangulacji (punkty z błędami pomiarowymi). Czerwona linia ciągła pokazuje dopasowanie zależności (24) do danych pomiarowych (wykładnik krytyczny $\nu = 2.71$). Dla porównania fit z wykładnikiem krytycznym $\nu = 1$ został przedstawiony jako niebieska przerywana linia.

Powyższa teza znajduje dalsze potwierdzenie w analizie zachowania autokorelacji parametru porządku OP_2 . Przejścia fazowe wyższego rzędu są zazwyczaj związane z występowaniem efektu tzw. spowolnienia krytycznego (ang. critical slowdown).

¹⁸Uwaga: w pracy [H6] wykładnik ν jest oznaczony γ .

Efekt ten powoduje wzrost czasu autokorelacji mierzonych obserwabli w okolicy punktu krytycznego i jest on tym większy im większy rozmiar badanego systemu. Badania pokazały, że czas autokorelacji τ_{ac} ma wyraźne maksimum w punkcie przejścia pokrywającym się z Δ^c zmierzonym tradycyjnymi metodami (tzn. na podstawie analizy podatności) oraz τ_{ac} jest rozbieżny wraz ze wzrostem rozmiaru triangulacji $N_{(4,1)}$, a więc zachowuje się on w sposób typowy dla przejść fazowych ciągłych.

Pewna drobna wątpliwość odnośnie rzędu przejścia bifurkacji może wynikać z dokładnej analizy zachowania parametru porządku OP_2 w punkcie krytycznym. Już w pracy [H2] zauważono, że parametr ten zdaje się w czasie symulacji Monte Carlo przeskakiwać pomiędzy dwoma metastabilnym stanami. Przeskoki nie są tak wyraźne jak omawiane wcześniej przeskoki parametru porządku obserwowane dla przejścia fazowego $B - C_b$ (metastany nie są wyraźnie odseparowane). W pracy [H6] pokazano, że względna amplituda przeskoków $OP_2/N_{(4,1)}$ maleje ze wzrostem objętości $N_{(4,1)}$, czyniąc przejście coraz bardziej ciągłym. Właściwości przejścia bifurkacji $C_{dS} - C_b$ są tym samym analogiczne do ciągłego przejścia fazowego $B - C_b$.

Ostatnim tematem poruszonym w pracy [H6] był wpływ wprowadzenia do modelu CDT pól materii w postaci N minimalnie sprzężonych bezmasowych pól skalarnych x . Użyta w badaniach konwencja zakłada, że pola są skupione w centrum sympleksów, co prowadzi do prostej dyskretyzacji działania dla tych pól:

$$S_M(\mathcal{T}, x) = \frac{1}{2} \sum_{F=1}^N \sum_i \mu^2 (x_i^F)^2 + \frac{1}{2} \sum_{F=1}^N \sum_{i \leftrightarrow j} (x_i^F - x_j^F)^2, \quad (25)$$

gdzie $\sum_i$ oraz $\sum_{i \leftrightarrow j}$ oznaczają odpowiednio sumowanie po wszystkich 4-sympleksach oraz wszystkich parach sąsiednich sympleksów w triangulacji $\mathcal{T}$. Działanie S_M jest w feynmanowskiej całce po trajektoriach / funkcji rozdziału CDT (5) dodawane do działania czystej grawitacji S_R (4) z miarą

$$\mathcal{D}[x] = \prod_{F=1}^N \prod_i \frac{dx_i^F}{\sqrt{\pi}}. \quad (26)$$

W przeprowadzonych symulacjach numerycznych zbadano wpływ $N = 1, 2, 3$ pól skalarnych z parametrem masy $\mu^2 = 0$. W szczególności zbadano wpływ pól na profil objętości przestrzennych i amplitudę ich fluktuacji oraz na położenie przejścia fazowego bifurkacji $C_{dS} - C_b$. Stwierdzono, że zarówno w fazie C_{dS} , jak i fazie bifurkacji C_b , pola skalarnie wpływają w niewielki sposób na zawężenie profili objętości i amplitud ich fluktuacji (w funkcji t). Dodanie pól skalarnych nie wpłynęło istotnie na położenie przejścia fazowego.

Położenie ultrafioletowego punktu stałego (zgodnego z hipotezą asymptotycznego bezpieczeństwa) w przestrzeni stałych sprzężenia CDT nie jest znane.¹⁹ Punkt ten może się potencjalnie znajdować w dowolnym miejscu ciągłego przejścia fazowego. Naturalnym kandydatem wydaje się być punkt w którym zbiegają się linie wszystkich przejść fazowych (por. diagram fazowy na rys. 4). Pierwsze próby zdefiniowania trajektorii grupy renormalizacji prowadzących od granicy podczerwonej CDT (we wnętrzu fazy C_{dS}) do granicy ciągłej podjęto w pracy [48]. Wnioski z tej pracy nie były w pełni konkluzywne. Dodatkowo, analiza była prowadzona przed odkryciem

¹⁹W tym kontekście sytuacja jest bardziej skomplikowana niż w sieciowym ujęciu chromodynamiki kwantowej, która jest asymptotycznie swobodna, a więc posiada trywialny ultrafioletowy punkt stały dla zerowej stałej sprzężenia.

fazy bifurkacji C_b , zaś część rozpatrywanych trajektorii przekraczała granicę nowego przejścia fazowego. Temat poszukiwania granicy ciągłej CDT został ponownie poruszony w pracy [H3]. Praca ta dotyczy analizy zachowania efektywnej długości linków triangulacji a (w jednostkach fizycznych) we wnętrzu fazy de Sittera C_{dS} . Użyto dwóch niezależnych metod pomiaru efektywnej stałej sieci.

Pierwsza metoda parta jest na analizie fluktuacji objętości przestrzennych. We wcześniejszych pracach [41, 42] pokazano, że w fazie semiklasycznej C_{dS} fluktuacje te są w bardzo dobry sposób opisane poprzez (dyskretyzację) modelu minisuperspace Hartle-Hawkinga, uzyskiwanego z OTW przy założeniu maksymalnie symetrycznej (tzn. przestrzenie jednorodnej i izotropowej) postaci metryki. W symulacjach numerycznych CDT można zmierzyć fluktuacje liczby tetraedrów budujących poszczególne warstwy przestrzenne $\delta N_3(t) = N_3(t) - \langle N_3(t) \rangle$. Amplituda tych fluktuacji określona jest przez parametr Γ występującym w zdyskretyzowanym działaniu efektywnym (11) (por. dyskusja powyżej). Analiza wymiarowa związków między sieciową (bezwymiarową) dyskretyzacją a ciągłym (wymiarowym) modelem minisuperspace prowadzi do wniosku, że amplituda fluktuacji Γ jest powiązana ze stałą Newtona, odpowiadającą w jednostkach naturalnych $\hbar = c = 1$ (kwadratowi) długości Plancka, $G \equiv l_{pl}^2$ relacją: $G \propto \Gamma \cdot a_{abs}^2$, gdzie a_{abs} oznacza fizyczną długość linków w triangulacji. Dokładna analiza pozwala wyliczyć współczynnik proporcjonalności, co umożliwia obliczenie efektywnej stałej sieci

$$a_{abs} = \sqrt{\frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{C_4} s_0^2 \Gamma}} l_{pl}. \quad (27)$$

We wzorze (27) C_4 oznacza (bezwymiarową) efektywną objętość pojedynczego 4-sympleksu, zaś s_0 jest mierzona w symulacjach numerycznych (bezwymiarową) rozpiętością czasową profilu objętości $\langle N_3(t) \rangle$, zgodnego z (dyskretyzacją) euklidesowego rozwiązania de Sittera. Wyznaczenie efektywnej objętości C_4 wymaga przyjęcia pewnych dodatkowych założeń. W pracy [H3] dyskutowane są trzy metody ustalenia C_4 , dające zbliżone wyniki szacunku a_{abs} .

Druga metoda analizy efektywnej stałej sieci CDT oparta jest na analizie wymiaru spektralnego $D_s(\sigma)$. Prawdopodobieństwo $P_r(\sigma)$ powrotu do punktu startowego hipotetycznej cząstki dokonującej dyfuzji wewnątrz (riemanowskiej) przestrzeni zależy od wymiaru tej przestrzeni. Pozwala to zdefiniować (efektywny) wymiar spektralny: $D_s(\sigma) = -2 d \log P_r(\sigma) / d \log \sigma$. W przypadku dyskretyzacji w postaci triangulacji CDT, hipotetyczna cząstka startuje w losowo wybranym 4-sympleksie i w każdym kroku dyfuzji σ przeskakuje do któregoś z sąsiadów 4-sympleksu w którym się aktualnie znajduje. Wyniki są uśredniane po wielu punktach startowych w danej triangulacji i po wielu triangulacjach generowanych w symulacjach numerycznych. W pracy [39] pokazano, że wewnątrz fazy semiklasycznej C_{dS} wymiar spektralny D_s w nietrywialny sposób zależy od skali (czasu dyfuzji) ($D_s(\sigma \rightarrow 0) \simeq 2$ i $D_s(\sigma \rightarrow \infty) = 4$). W pracy [H3] dokonano dokładnego pomiaru dla krótkich czasów dyfuzji $D_s(\sigma \rightarrow 0) \sim 3/2$, potwierdzając jednocześnie zachowanie wymiaru spektralnego zgodne z czterowymiarową makroskopową geometrią $D_s(\sigma \rightarrow \infty) \sim 4$. Wymiar spektralny zmierzony dla różnych wartości gołych stałych sprzężenia CDT wewnątrz fazy C_{dS} można z dużą dokładnością przeskalować do uniwersalnej krzywej, poprzez skalowanie czasu dyfuzji $\sigma \rightarrow \sigma/a_{rel}^2$. Tym samym skalowanie $D_s(\sigma)$ zmierzonego w różnych punktach przestrzeni fazowej CDT pozwala na wyznaczenie (względnej zmiany) stałej sieci a_{rel} .

Wyniki obydwu metod pomiaru efektywnej długości linków a_{abs} i a_{rel} są jakościowo zgodne. Stała sieci wyraźnie maleje wraz ze zbliżaniem się do przejścia fazowego

$A - C_{ds}$ (z rosnącą wartością κ_0). Pomiary wykonane w pobliżu linii tego przejścia fazowego pokazują, że stała sieci słabo zależy od parametru Δ . Jak to już zostało opisane powyżej, przejście fazowe $A - C_{ds}$ jest najprawdopodobniej przejściem fazowym pierwszego rzędu, dlatego też nie nadaje się ono na granicę ciągłą. Wyniki pracy [H3] sugerują, że efektywna stała sieci nieznacznie maleje wraz z przesuwaniem się w górę wzdłuż linii tego przejścia (por. diagram fazowy na rys. 4), co może sugerować, że granica ciągła znajduje się w regionie przejścia $A - C_{ds}$ dla bardzo dużych wartości Δ (być może przejście to kończy się w którymś miejscu przestrzeni fazowej punktem krytycznym wyższego rzędu, lub też trzeba rozważyć granicę $\Delta \rightarrow \infty$). W tym względzie wyniki pracy [H3] nie są w pełni konkluzywne, gdyż z uwagi na silnie malejącą efektywność algorytmu numerycznego CDT w pobliżu punktu spotkania wszystkich faz (por. diagram fazowy na rys. 4) nie zdołano wykonać pomiarów w tym regionie przestrzeni parametrów (κ_0, Δ) . W związku z tym wciąż istnieje możliwość, że perspektywiczna granica ciągła CDT jest związana z punktem spotkania wszystkich faz.

Wpływ topologii warstw przestrzennych (prace [H4], [H7] i [H8])

Wszystkie opisane powyżej analizy modelu Kauzalnych Dynamicznych Triangulacji w czterech wymiarach były dokonywane dla ustalonej sferycznej topologii warstw przestrzennych $\Sigma = S^3$. W związku z tym pojawia się naturalne pytanie o wpływ zmiany wybranej topologii przestrzennej na uzyskane wyniki. Istotne jest zbadanie jak zmiana topologii triangulacji uwzględnianych w całości po trajektoriach (5) wpływa na strukturę fazową CDT, a w szczególności na własności fazy semiklasycznej, o ile taka faza istnieje dla innych topologii.

Jak wiadomo różne rozwiązania klasycznej OTW mogą mieć różne właściwości topologiczne i określone rozwiązania mogą być (nie)możliwe dla określonego wyboru topologii czasoprzestrzeni. Z uwagi na nieperturbacyjny i niezależny od tła charakter sformułowania CDT, żadne klasyczne rozwiązanie OTW wokół którego następują kwantowe fluktuacje nie jest odgórnie narzucane, niezwykle interesujące jest więc pytanie czy (i ewentualnie jakie) rozwiązania semiklasyczne pojawiają się dynamicznie dla określonego wyboru topologii. Badania opisane w pracach [H4], [H7] i [H8] dotyczą czterowymiarowego modelu CDT z toroidalną topologią warstw przestrzennych $(\Sigma = T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1)$.²⁰

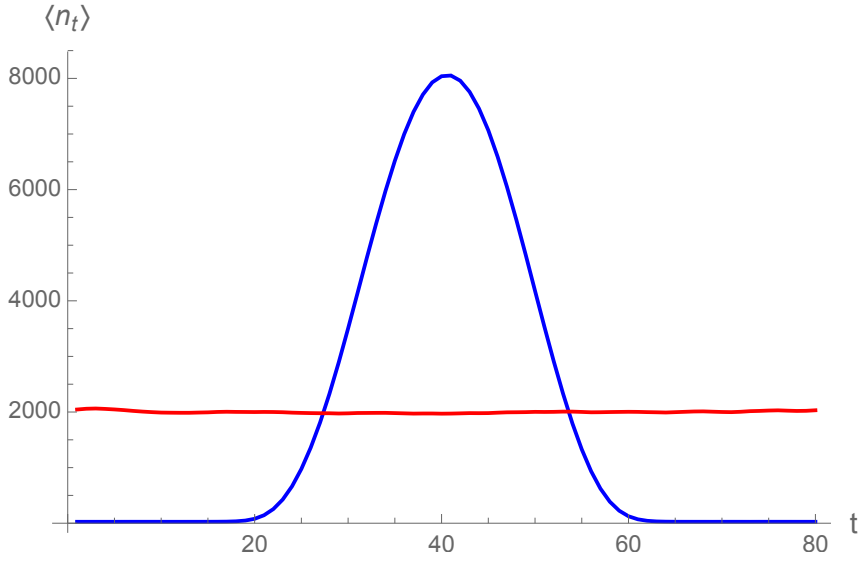
Prace [H4] i [H7] dotyczą badania zachowania CDT z przestrzenną topologią torusa w obszarze gołych stałych sprzężenia (κ_0, Δ) leżących uprzednio wewnątrz fazy semiklasycznej. W przypadku sferycznej topologii warstw przestrzennych w fazie tej obserwowano fluktuacje objętości przestrzennych zgodne z modelem minisuperspace Hartle-Hawkinga [41, 42], uzyskiwanego przy założeniu maksymalnie symetrycznej (przestrzennie jednorodnej i izotropowej) metryki zależnej od czynnika skali $a(t)$

$$ds^2 = dt^2 + a^2(t)d\Omega^2, \quad (28)$$

gdzie $d\Omega^2$ jest elementem liniowym na jednostkowej 3-sferze. Fluktuacje te zachodziły wokół (wynikającego z modelu minisuperspace) rozwiązania zgodnego z cztero-

²⁰W badaniach tych, podobnie jak w badaniach z topologią sferyczną, przyjęto periodyczne czasowe warunki brzegowe S^1 , tak więc topologia czterowymiarowej czasoprzestrzeni $\mathcal{M} = T^3 \times S^1$. Warto podkreślić, że, tak jak poprzednio, kierunek czasu jest wyróżniony. Dodatkowo liczba warstw przestrzennych, a więc długość okresu czasowego T jest ściśle określona i stała. W przeciwieństwie do tego objętość części przestrzennych (powierzchni Cauchyego o topologii T^3) może dowolnie fluktuować.

wymiarowym (euklidesowym) wszechświata de Sittera [40], stąd faza semiklasyczna była też nazywana fazą de Sittera (C lub C_{dS}). Warto przy tym zauważyć, że w przypadku tradycyjnego modelu minisuperspace następuje rzeczywista redukcja większości stopni swobody i model ten ogranicza się wyłącznie do mechaniki kwantowej czynnika skali $a(t)$. W przypadku CDT wszystkie przestrzenne stopnie swobody (a ściślej ujmując ich dyskretna wersja) są obecne, zaś pomiar działania efektywnego opisującego fluktuacje objętości (czynnika skali) polega na uśrednieniu (wyciąkaniu) pozostałych stopni swobody. Zgodność działania efektywnego CDT z modelem minisuperspace nie jest więc a priori oczywista. Rozwiązanie semiklasyczne CDT powstaje w wyniku subtelnej równowagi pomiędzy (gołym) geometrycznym działaniem $S_R[\mathcal{T}]$ (4) a entropią stanów (liczbą triangulacji $\mathcal{T}$ o danej wartości działania $S_R[\mathcal{T}]$), mającymi równie istotne znaczenie w całce po trajektoriach (5).



Rysunek 7: Profil objętości przestrzennych $\langle n_t \rangle$ w fazie semiklasycznej CDT z topologią przestrzenną sferyczną (niebieska linia) i toroidalną (czerwona linia).

Pierwsza obserwacja, dokonana w pracy [H4], dotyczy zmiany postaci profilu objętości przestrzennych (liczby tetraedrów budujących daną powierzchnię Cauchyego) $n_t \equiv N_{(4,1)}(t)$ w wyniku zmiany topologii (por. rys. 7). W przypadku topologii sferycznej profil objętości w fazie semiklasycznej miał charakterystyczny kształt „bąbla”, w którym objętości przestrzenne zachowywały się jak $\langle n_t \rangle \propto \cos^3(C \cdot t)$, zgodnie z czynnikiem skali wynikającym z euklidesowego rozwiązania de Sittera (4-sfery o stałej krzywiznie wewnętrznej). W przypadku topologii toroidalnej obserwujemy „płaski” profil objętości n_t , pasujący raczej do rozwiązania z zerową krzywizną. Dalsze wnioski można wyciągnąć z analizy macierzy kowariancji fluktuacji przestrzennych objętości $C_{t,t'} \equiv \langle (n_t - \bar{n}_t)(n_{t'} - \bar{n}_{t'}) \rangle$. Macierz $C_{t,t'}$ dostarcza informacji o postaci (drugich pochodnych) działania efektywnego CDT $S_{eff}[n_t]$, opisującego fluktuacje objętości przestrzennych. Pomiary macierzy kowariancji w „generycznym” punkcie przestrzeni fazowej (κ_0, Δ) wewnątrz fazy semiklasycznej, wykonane dla zestawu różnych rozmiarów triangulacji $\langle N_{(4,1)} \rangle = \bar{V}_4$ i długości okresu czasowego $T = t_{tot}$, pozwoliły na wyznaczenie (zdyskretyzowanego) działania efektywnego dla topologii

toroidalnej. Działanie to ma postać

$$S_{eff}^{(T^3)} = \sum_t \left(\frac{(n_t - n_{t+1})^2}{\Gamma(n_t + n_{t+1} - 2n_0)} + \lambda n_t + \mu n_t^{-\gamma} \right). \quad (29)$$

Część kinetyczna działania jest taka sama jak w przypadku topologii sferycznej, różni się natomiast część potencjalna. W topologii sferycznej występował potencjał $\propto n_t^{1/3}$ związany ze stałą dodatnią krzywizną w klasycznym (sferycznym) modelu minisuperspace. W przypadku topologii toroidalnej klasyczny potencjał w modelu minisuperspace nie występuje (zerowa krzywizna płaskiej przestrzeni o topologii torusa), można natomiast zaobserwować szybko malejący potencjał $\propto n_t^{-\gamma}$. Numeryczna wartość wykładnika γ zmierzona w symulacjach numerycznych wynosi $\gamma \approx 1.16$. Zachowanie modelu CDT z topologią przestrzenną torusa jest więc analogiczne jak w przypadku CDT z topologią sferyczną. Fluktuacje objętości przestrzennych są z dobrą dokładnością opisane poprzez klasyczne działanie typu minisuperspace, tym razem z przestrzennym elementem liniowym (28) $d\Omega^2$ dla płaskiej przestrzeni euklidesowej. Potencjał $\propto n_t^{-\gamma}$ w toroidalnym modelu minisuperspace nie występuje, może być więc on traktowany jako podwiodąca poprawka kwantowa.²¹

Dodatkową częścią pracy [H4] (załącznik) była analiza postaci minimalnej triangulacji 3-torusa, odkrytej w symulacjach numerycznych. Problem ten jest interesujący głównie z matematycznego punktu widzenia, ma też jednak pewne implikacje fizyczne. Jak to już zostało opisane, symulacje numeryczne CDT oparte są na algorytmie Monte Carlo, który zmienia triangulacje przy użyciu lokalnych ruchów zachowujących topologię triangulacji. Istnieje możliwość zainicjowania algorytmu z dowolnie wybranej (prostej do "ręcznego" stworzenia) konfiguracji i takiego ustawienia parametrów symulacji, by wyjściowa triangulacja stawała się coraz mniejsza (np. można ustalić kosmologiczną stałą sprzężenia $\kappa_4 > \kappa_4^c$ - por. dyskusja punkcie 2). Po dostatecznie długim czasie działania symulacji Monte Carlo otrzymamy system fluktuujący wokół minimalnej możliwej objętości. Przy stałej wartości okresu współrzędnej czasowej T oznacza to że również przekroje przestrzenne fluktuują wokół minimalnych triangulacji 3-torusa. Można więc zidentyfikować minimalne triangulacje przestrzenne i zbadać ich własności. Okazuje się, że minimalna triangulacja 3-torusa, osiągnięta w wyniku opisanych powyżej symulacji numerycznych, jest wysoce nietrywialna. Składa się ona z $N_3 = 90$ tetraedrów sklejonych ze sobą w taki sposób, że mają wspólne jedynie $N_0 = 15$ werteksów, przy czym każdy werteks jest połączony linkiem z każdym innym werteeksem. Triangulacja ta jest bardzo symetryczna (otoczenie każdego z werteksów jest takie samo). Fizyczne znaczenie ma wielkość minimalnej triangulacji, znacząco większa niż w przypadku minimalnej triangulacji o topologii sferycznej. Oznacza to, że efekty dyskretyzacji w symulacjach CDT z topologią torusa mogą być znacznie większe niż w symulacjach z topologią sferyczną. Wynik ten sugeruje, że należy zachować szczególną ostrożność przy analizie efektów skończonego rozmiaru w tym przypadku.

Analiza semiklasycznego rozwiązania CDT z topologią przestrzenną torusa była kontynuowana w pracy [H7]. Przedstawiona w pracy [H4] analiza działania efektywnego w pojedynczym punkcie przestrzeni fazowej (κ_0, Δ) oparta była na wielu odrębnych symulacjach numerycznych macierzy kowariancji $C_{t,t'} \equiv \langle (n_t - \bar{n}_t)(n_{t'} - \bar{n}_{t'}) \rangle$.

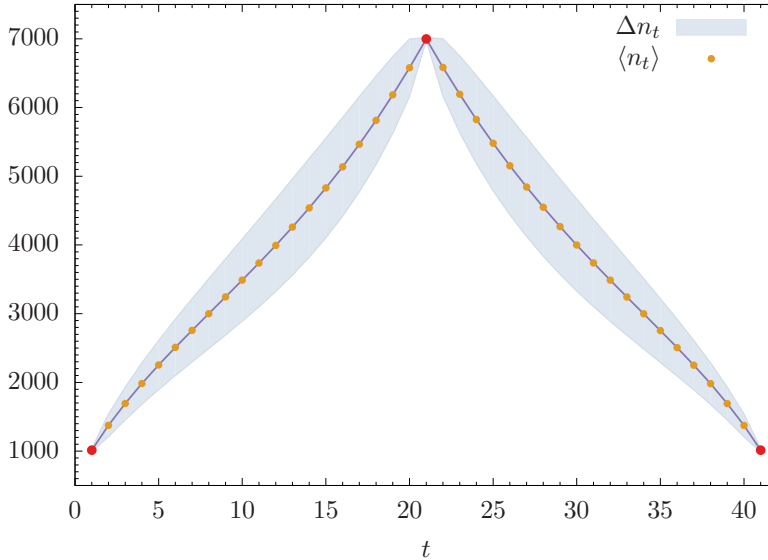
²¹Istnienie podobnej poprawki w CDT z topologią sferyczną nie jest wykluczone, jednak jej obserwacja nie była dotychczas możliwa z uwagi na wiodący wkład klasycznego potencjału $\propto n_t^{1/3}$.

Wiązało się to z (płaskim) kształtem rozwiązania semiklasycznego $\langle n_t \rangle \simeq \langle N_{(4,1)} \rangle / T$, który sprawia, że zbadanie postaci funkcyjnej zależności działania od n_t wymaga przeprowadzenia symulacji dla całego zestawu parametrów: $\langle N_{(4,1)} \rangle = \bar{V}_4$, $T = t_{tot}$. Taka metoda pomiaru jest uciążliwa numerycznie (wymaga zaangażowania dużych zasobów komputerowych) oraz prowadzi do większych niedokładności pomiarowych. W celu dokładniejszego wyznaczenia postaci i wartości parametrów działania efektywnego w pracy [H7] zaproponowano dwie nowe metody pomiaru.

Metoda pierwsza jest ponownie oparta na analizie macierzy kowariancji fluktuacji objętości przestrzennych. Tym razem, w celu ominięcia problemu (płaskiego) profilu objętości przestrzennych n_t , użyto niestandardowych warunków brzegowych. Uzyskano je dzięki dodaniu do gołego działania CDT (4) członu ustalającego lokalne objętości przestrzenne w dwóch warstwach przestrzennych o współrzędnej $t = 1$ i $t = h \equiv T/2 + 1$:

$$S_{fix} = \frac{1}{2}\epsilon [(n_1 - \hat{n}_1)^2 + (n_h - \hat{n}_h)^2] . \quad (30)$$

Zmiana działania powoduje, że objętość przestrzenna wybranych powierzchni Cauchyego n_1 i n_h fluktuuje wokół odpowiednio $\hat{n}_1$ i $\hat{n}_h$. Dzięki ustaleniu $\hat{n}_1 \neq \hat{n}_h$ przebieg profilu $\langle n_t \rangle$ i towarzyszących mu fluktuacji objętości Δn_t jest nietrywialny (por. rys. 8). Wpływ dodatkowego członu (30) na fluktuacje objętości w warstwie n_1 i n_h można łatwo usunąć z wyników numerycznych podczas analizy danych. Pomiar działania efektywnego dla CDT z topologią torusa, dokonany w identycznym punkcie przestrzeni fazowej (κ_0, Δ) w fazie semiklasycznej jak w pracy [H4], potwierdził postać działania (29) i pozwolił na dokładniejsze wyznaczenie wykładnika $\gamma \approx 3/2$ w (kwantowej) części potencjalnej. Dzięki analizie równań ruchu wynikających z (ciągłej wersji) działania (29) pokazano, że obserwowany w symulacjach numerycznych przebieg (wartości oczekiwanej) profilu objętości $\langle n_t \rangle$ jest zgodny z rozwiązaniem klasycznym.



Rysunek 8: Profil objętości przestrzennych $\langle n_t \rangle$ oraz amplituda fluktuacji Δn_t w fazie semiklasycznej CDT z topologią przestrzenną torusa przy ustalaniu lokalnych objętości zgodnie z równaniem (30) ($\hat{n}_1 = 1000$, $\hat{n}_h = 7000$).

Druga metoda analizy działania efektywnego, przedstawiona w pracy [H7], oparta jest na pomiarze macierzy transferu $\langle n_t | M | n_t + 1 \rangle$ (9) - por. opis powyżej. Macierz

ta (o ile istnieje)²² daje pełną informację o fluktuacjach objętości, a w szczególności określa łączny rozkład prawdopodobieństwa określonego profilu objętości przestrzennych n_t ($t = 1, \dots, T$):

$$P^{(T)}(n_1, \dots, n_T) \propto \langle n_1 | M | n_2 \rangle \langle n_2 | M | n_3 \rangle \dots \langle n_T | M | n_1 \rangle . \quad (31)$$

Macierz transferu M zmierzona w symulacjach numerycznych przeprowadzonych ponownie w tym samym punkcie przestrzeni fazowej (κ_0, Δ) w fazie semiklasycznej, pozwala na bardzo dokładne wyznaczenie działania efektywnego - zgodnie z wzorem (9) daje ona pełną informację o działaniu efektywnym, a nie tylko (tak jak macierz korelacji $C_{t,\nu}$) o jego drugich pochodnych. Uzyskane wyniki potwierdziły wcześniejsze obserwacje, a w szczególności wartość wykładnika w części potencjalnej działania $\gamma \approx 3/2$. Zauważono, że dokładna wartość numeryczna γ zależy nieco od zakresu danych użytych do fitu, co sugeruje, że zmierzona potęgowa postać (kwantowego) potencjału efektywnego $\propto n_t^{-\gamma}$ może być jedynie wiodącym przybliżeniem bardziej skomplikowanej postaci funkcyjnej.

Przeprowadzono również analizę poprawności zastosowania metodologii macierzy transferu do badania działania efektywnego w fazie semiklasycznej CDT z topologią torusa. W szczególności, zależność (31) pozwala odtworzyć profil objętości przestrzennych $\langle n_t \rangle$ i profil amplitudy ich fluktuacji Δn_t na podstawie samej macierzy M . Profile te można następnie porównać z wynikami symulacji numerycznych pełnego modelu CDT.²³ Przeprowadzone testy wykazały dobrą zgodność na poziomie jakościowym, jednak dokładne nałożenie profili objętości wymaga drobnej korekty stałej sprzężenia κ_4 (gołej stałej kosmologicznej). Zgodność profili amplitudy fluktuacji jest nieco mniejsza. Prowadzi to do wniosku, że w przypadku toroidalnym mogą istnieć nielocalne poprawki do macierzy transferu M wprowadzające długozasięgowe korelacje objętości.

Wyniki prac [H4] i [H7] potwierdziły istnienie w modelu CDT z przestrzenną topologią torusa fazy semiklasycznej C , odpowiadającej fazie de Sittera C_{dS} występującej w modelu z przestrzenną topologią sferyczną. Pojawiło się więc naturalne pytanie, czy w przypadku topologii toroidalnej można także zaobserwować pozostałe fazy (lub ich odpowiedniki) oraz czy położenie tych faz w przestrzeni gołych stałych sprzężenia (κ_0, Δ) pokrywa się z przypadkiem topologii sferycznej. Tematem tym zajmuje się praca [H8]. Przedstawia ona wyniki dokładnego badania struktury fazowej toroidalnego CDT w oparciu o analizę czterech parametrów porządku

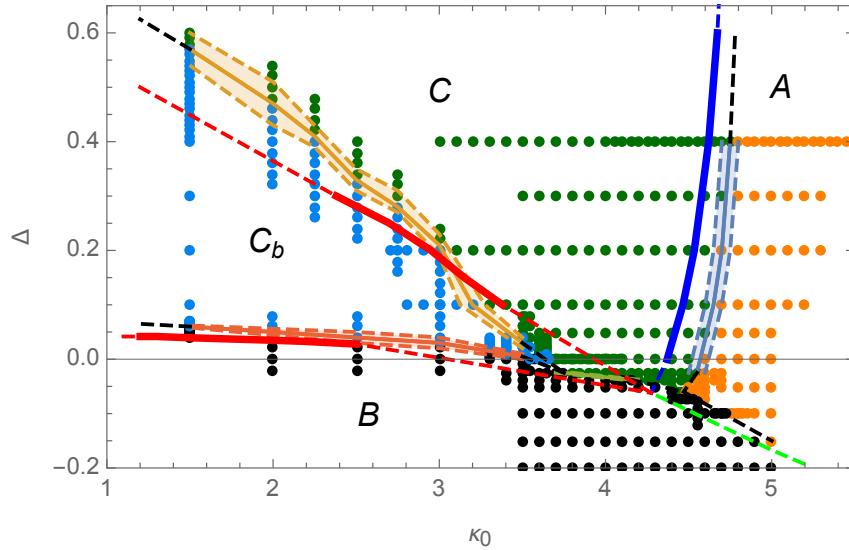
$$\begin{aligned} OP_1 &= N_0/N_4 , \\ OP_2 &= N_{(3,2)}/N_{(4,1)} , \\ OP_3 &= \sum_t (n_{t+1} - n_t)^2 , \\ OP_4 &= \max_v O(v) , \end{aligned} \quad (32)$$

analogicznych do parametrów używanych we wcześniejszych badaniach przejść fazowych w CDT z topologią sferyczną [44, 45, H2, H6] (por. dyskusja powyżej). Zachowanie parametrów porządku potwierdziło fakt istnienia w topologii toroidalnej

²²W ogólności macierz M może być nielokalna, tzn. rozkład fluktuacji objętości przestrzennej n_t może nie być zależny wyłącznie od objętości $n_{t \pm 1}$.

²³Podobne badanie przeprowadzone w fazie semiklasycznej modelu CDT ze sferyczną topologią przestrzenną pokazało pełną zgodność profili $\langle n_t \rangle$ oraz Δn_t generowanych przy użyciu macierzy M oraz w pełnym modelu CDT [43].

(odpowiedników) wszystkich faz kwantowej geometrii zaobserwowanych uprzednio w topologii sferycznej. Dokładne położenie linii przejść fazowych zostało ustalone na podstawie analizy występowania lokalnych maksimów podatności poszczególnych parametrów porządku $\chi_{OP} = \langle OP^2 \rangle - \langle OP \rangle^2$ (por. dyskusja powyżej). Najważniejszym wynikiem tych badań jest sporządzenie diagramu fazowego toroidalnego CDT - por. rys. 9. Diagram ten jest jakościowo w pełni zgodny z diagramem fazowym sferycznego CDT. Linie przejść fazowych $A - C$ oraz $B - C_b$ są lekko przesunięte w porównaniu z przypadkiem sferycznym (pogrubione ciągłe linie na rys. 9), jednak jest to najprawdopodobniej spowodowane efektami skończonego rozmiaru.²⁴ Badania struktury fazowej toroidalnego CDT pokazały, że wcześniejsza hipoteza istnienia wspólnego punktu "poczwórnego" (w którym spotykają się linie wszystkich czterech przejść fazowych) wydaje się mniej prawdopodobna. Topologia torusa umożliwiła wykonanie pomiarów w obszarze przestrzeni fazowej (κ_0, Δ) w okolicy hipotetycznego punktu "poczwórnego", niemożliwych do przeprowadzenia w topologii sferycznej.²⁵ Pomiary te sugerują, że punkt połączenia faz A , B i C jest nieco przesunięty względem punktu połączenia faz C_b , B , i C , tym samym istnieje rejon przestrzeni fazowej, w którym faza semiklasyczna C sąsiaduje bezpośrednio z fazą B . Dodatkowo w przypadku modelu CDT z topologią przestrzenną torusa zaobserwowano silną histerezę parametrów porządku na przejściu fazowym bifurkacji $C_b - C$, która nie była wcześniej obserwowana dla topologii sferycznej. Wynik ten sugeruje możliwość zmiany rzędu wspomnianego przejścia fazowego, ale jest też możliwe, że jest on spowodowany silnymi efektami skończonego rozmiaru.



Rysunek 9: Diagram fazowy czterowymiarowego modelu CDT z toroidalną topologią przestrzenną $\Sigma = T^3$. Dla porównania, pogrubione linie (czerwone i niebieska) oznaczają granice faz dla sferycznej topologii przestrzennej $\Sigma = S^3$.

²⁴Położenie punktów (pseudo)krytycznych zależy od rozmiaru systemu (por. dyskusja w części dotyczącej przejść fazowych i granicy ciągłej). Dodatkowo, z uwagi na inny rozmiar minimalnej triangulacji (por. dyskusja powyżej), efekty skończonego rozmiaru mogą się nieco różnić w zależności od wybranej topologii.

²⁵W topologii sferycznej takie pomiary były niemożliwe z uwagi na występującą w okolicy punktu połączenia faz ekstremalnie małą efektywność algorytmu numerycznego - niektóre rodzaje ruchów Monte Carlo praktycznie przestawały być wykonywane, co prowadziło do faktycznego "zamrożenia" triangulacji.

5. Podsumowanie

Badania stanowiące osiągnięcie naukowe opisane w pracach [H1] - [H8] i streszczone w niniejszym autoreferacie stanowią ważny krok w poznaniu struktury fazowej kwantowej grawitacji w czterowymiarowym modelu Kauzalnych Dynamicznych Triangulacji. Początkowo (przed powstaniem w/w prac) w CDT z przestrzenną topologią sferyczną odkryto istnienie trzech faz, w tym fazy semiklasycznej, na granicy której istnieje linia przejścia fazowego wyższego rzędu. Zapostulowano też możliwość istnienia nowej, czwartej fazy.

Nowe badania znacząco rozwinęły wcześniejsze odkrycia. W szczególności udało się jednoznacznie potwierdzić fakt istnienia fazy bifurkacji (C_b), wyznaczyć jej dokładne położenie na diagramie fazowym, a także nadać fizyczną interpretację nowemu przejściu fazowemu (złamanie przestrzennej symetrii jednorodności i izotropowości fazy semiklasycznej, możliwa zmiana efektywnej sygnatury metryki) [H1, H5]. Ustalono, że faza C_b znajduje się w zakresie przebadanych parametrów na granicy fazy semiklasycznej C_{ds} , odgradzając tę fazę od odkrytego wcześniej przejścia fazowego ciągłego ($B - C_b$). Jednocześnie udało się potwierdzić, że nowe przejście fazowe ($C_b - C_{ds}$) jest również przejściem wyższego rzędu [H2, H6], co daje nadzieję na poprawne zdefiniowanie ultrafioletowej granicy ciągłej [H3]. Naturalną kontynuację badań stanowiło sprawdzenie uniwersalności struktury fazowej CDT ze względu na zmianę ustalonej topologii warstw przestrzennych (z topologii sferycznej na toroidalną). Początkowo potwierdzono istnienie fazy semiklasycznej, opisywanej poprawnie przez model minisuperspace (z pewną poprawką kwantową) [H4, H7], następnie zaś istnienie pozostałych faz i zgodność diagramów fazowych [H8].

Badania te przyczyniły się do znacznego pogłębienia wiedzy o modelu Kauzalnych Dynamicznych Triangulacji w czterech wymiarach. Wnoszą też one istotny wkład w ogólne zrozumienie własności czasoprzestrzeni w ultra-małych (subplanckowskich) skalach. W kontekście tym niezwykle interesujące są związki pomiędzy modelem CDT a innymi podejściami, takimi jak grawitacja Horavy-Lifshitz, badania przepływu grupy renormalizacji, czy pętlowa grawitacja kwantowa (przeładową analizę tych związków można znaleźć np. w pracy [5]). Poznanie struktury fazowej CDT stanowi istotny krok w sformułowaniu teorii kwantowej grawitacji i otwiera pole do dalszych badań. W szczególności niezwykle perspektywiczne jest dalsze badanie modelu dla topologii przestrzennej torusa. Wybór tej topologii pozwala na zdefiniowanie nowych interesujących obserwacji (np. pętle Wilsona z nietrywialną liczbą nawinięć w kierunkach przestrzennych, pola skalarne z nietrywialnymi przestrzennymi warunkami brzegowymi, semiklasyczne współrzędne przestrzenne, itp.) [49] oraz przeprowadzenie dokładnych symulacji numerycznych w pobliżu punktu/punktów spotkania się wszystkich faz.

V. Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo - badawczych oraz działalność dydaktyczna, organizacyjna i popularnonaukowa

A. Działalność naukowo-badawcza

Prowadzona przeze mnie działalność badawcza przed uzyskaniem stopnia naukowego doktora dotyczyła, podobnie jak wskazane powyżej osiągnięcie naukowe, własności modelu Kauzalnych Dynamicznych Triangulacji w czterech wymiarach (omówionego

szczegółowo w IV części niniejszego autoreferatu). Badania te prowadziłem początkowo w ramach studiów magisterskich na Wydziale Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej Uniwersytetu Jagiellońskiego (WFAIS UJ). Jak to już zostało wspomniane powyżej, istotną cechą modelu CDT jest istnienie właściwej granicy semiklasycznej, zgodnej z OTW Einsteina. W tzw. fazie C_{ds} na odległościach większych niż długość Plancka otrzymujemy dynamicznie kreowaną geometrię tła odpowiadającą czterowymiarowej czasoprzestrzeni de Sittera. Dodatkowo, mierzone w symulacjach numerycznych w fazie C_{ds} fluktuacje kwantowe objętości przestrzennych są z bardzo dużą dokładnością opisywane przez działanie efektywne zgodne z modelem Hartle-Hawkinga o maksymalnej symetrii tzw. modelem minisuperspace, pomimo „wycalkowania” wszystkich stopni swobody oprócz czynnika konforemnego zamiast ich „zamrażania”. Pomiar działania efektywnego w symulacjach numerycznych CDT był możliwy dzięki analizie macierzy kowariancji fluktuacji objętości przestrzennych. Moje początkowe badania dotyczyły zmiany sposobu pomiaru macierzy kowariancji w celu uniknięcia występującej w niej uprzednio mody zerowej związanej ze sposobem ustalania globalnej objętości symulowanego kwantowego wszechświata. Zaproponowana przeze mnie nowatorska metoda ustalania całkowitej cztero-objętości triangulacji pozwoliła na bardzo dokładny pomiar działania efektywnego i szczegółową analizę granicy semiklasycznej z uwzględnieniem efektów dyskretyzacji. Umożliwiło to analizę podwiodących poprawek związanych z członami wyższego rzędu w krzywiznie, uprzednio niemożliwych do zaobserwowania, jak również skonstruowanie bardziej skomplikowanego dyskretnego działania efektywnego uwzględniającego przekroje przestrzenne niecałkowitego czasu własnego. Uzyskane wyniki zostały opisane w pracy magisterskiej „Reduction of the zero mode contribution in volume fluctuations of CDT”, którą obroniłem z wyróżnieniem w 2010r., oraz opublikowane w pracy [42].

Po ukończeniu studiów magisterskich kontynuowałem pracę naukową w ramach studiów doktoranckich na WFAIS UJ. Prowadzone przeze mnie badania dotyczyły w szczególności nowych metod pomiaru działania efektywnego CDT oraz analizy występujących w tym modelu przejść fazowych. Dla czterowymiarowego modelu CDT udało się wykazać istnienie efektywnej macierzy transferu indeksowanej przez objętość przestrzenną (por. szczegółowy opis w części IV powyżej). Chociaż w modelu CDT nie redukujemy żadnych stopni swobody, mierzona w fazie semiklasycznej C_{ds} macierz transferu zgadza się z efektywnym działaniem modelu minisuperspace i poprawnie opisuje ewolucję kwantowego wszechświata. Wyniki te zostały opublikowane w pracy [46]. Jak to już zostało powyżej wspomniane, czterowymiarowy model Kausalnych Dynamicznych Triangulacji posiada bogatą strukturę fazową. Początkowo zidentyfikowano istnienie trzech istotnie różnych faz kwantowej geometrii, nazwanych A , B i C_{ds} . Wspomniana powyżej nowa metoda pomiaru działania efektywnego przy pomocy macierzy transferu umożliwiła bezpośrednie wyznaczenie i analizę postaci działania efektywnego w poszczególnych fazach modelu CDT oraz analizę przejść fazowych. Najważniejszym wynikiem prowadzonych badań było zapostulowanie możliwości istnienia nowej, dotychczas niezbadanej fazy kwantowej geometrii w modelu CDT. Nowa faza, nazwana fazą bifurkacji (C_b), charakteryzuje się bifurkacją części kinetycznej efektywnej macierzy transferu. Wykazano, że mierzona w symulacjach numerycznych macierz transferu właściwie opisuje zachowanie profili objętości przestrzennych w nowo odkrytej fazie C_b oraz dokonano pomiaru szeregu własności kwantowej geometrii w tej fazie. Wyniki te zostały opisane w przygotowanej przeze mnie rozprawie doktorskiej „The effective action in four-dimensional

CDT”, którą obroniłem z wyróżnieniem w 2014r., oraz w pracy [43].

Poza publikacjami, na mój dorobek naukowy składa się udział w wielu międzynarodowych i krajowych konferencjach naukowych, w ramach których dwunastokrotnie przedstawiłem wyniki swoich badań w formie wystąpień ustnych oraz jeden raz w formie plakatu. Wielokrotnie wyniki moich prac były także prezentowane przez współautorów badań. Wystąpienia te zaowocowały trzema publikacjami pokonferencyjnymi, których jestem (współ)autorem [50, 51, 52].

B. Podsumowanie bibliometryczne dorobku

Całkowita liczba artykułów w czasopismach z listy JCR: 11 (w tym 8 po doktoracie)
Sumaryczny impact factor publikacji: 55,982 (w tym na [H1-H8] przypada 39,592)
Liczba cytowań wg bazy WoS / Google Scholar: 127 / 215
Indeks Hirsha wg WoS / Google Scholar: 7 / 9

C. Działalność dydaktyczna, organizacyjna i popularnonaukowa

Działalność dydaktyczna, organizacyjna i popularnonaukowa stanowi istotny element mojej dotychczasowej pracy. Prowadzenie zajęć dydaktycznych rozpocząłem podczas studiów doktoranckich na Wydziale Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej Uniwersytetu Jagiellońskiego (WFAIS UJ) oraz kontynuowałem w ramach pracy, początkowo na stanowisku asystenta, a następnie adiunkta na WFAIS UJ. W latach 2010-2017 wielokrotnie prowadziłem zajęcia dla studentów z następujących przedmiotów: logika i teoria mnogości, zajęcia wyrównawcze z matematyki, zajęcia uzupełniające - algebra, ekonofizyka, podstawy fizyki - mechanika, podstawy programowania, podstawy programowania - język C z elementami C++, I pracownia fizyczna - laboratorium, fizyka - laboratorium. Począwszy od 2018 r. jestem także głównym pomysłodawcą, organizatorem oraz wykładowcą serii zajęć dotyczących modelowania ilościowego w finansach, przeznaczonych dla studentów kierunków ścisłych i przyrodniczych zainteresowanych problematyką ekonomiczną. W ramach pracy dydaktycznej dwukrotnie sprawowałem nieformalną opiekę naukową (w charakterze pomocniczego opiekuna) nad licencjatami przygotowywanymi przez Jacka Stępnia i Tomasza Sabałę pod kierownictwem naukowym prof. dr hab. Zdzisława Burdy. Obecnie sprawuję nieformalną opiekę naukową nad magistrantem Grzegorzem Czelustą oraz jestem promotorem pomocniczym w dwóch otwartych przewodach doktorskich mgr Zbigniewa Drogosza oraz mgr Dániela Németha pod kierownictwem naukowym prof. dr hab. Jerzego Jurkiewicza.

Moja aktywność przejawia się także na polu działalności organizacyjnej. Jestem sekretarzem naukowym Zakładu Teorii Układów Złożonych na WFAIS UJ, członkiem Komisji ds. badań naukowych i rozwoju przy władzach WFAIS UJ oraz przedstawicielem pomocniczych pracowników naukowych w Radzie Instytutu Fizyki oraz Radzie Wydziału WFAIS UJ. Byłem aktywnym członkiem komitetu organizacyjnego dwóch konferencji naukowych: Quantum Gravity in Cracow 4 (Kraków, 2015 r.) i Trzeciej Konferencji Polskiego Towarzystwa Relatywistycznego (Kraków, 2016 r.).

Jestem także zaangażowany w pozyskiwanie środków finansowych na prowadzone badania naukowe. W latach 2013-2015 byłem kierownikiem projektu naukowego ”Działanie efektywne w czterowymiarowym modelu CDT”, realizowanego w ramach

grantu PRELUDIUM 3 finansowanego przez Narodowe Centrum Nauki (sporządzony przeze mnie wniosek o finansowanie projektu zajął pierwsze miejsce w rankingu panelu ST2). Od 2017 r. jestem kierownikiem projektu naukowego "Wpływ topologii na strukturę fazową kwantowej grawitacji w modelu Kauzalnych Dynamicznych Triangulacji", realizowanego w ramach grantu SONATA 12 finansowanego przez Narodowe Centrum Nauki (sporządzony przeze mnie wniosek o finansowanie projektu zajął drugie miejsce w rankingu panelu ST2).

Jestem również aktywny na polu działalności popularyzującej naukę. W szczególności jestem autorem trzech publikacji popularnonaukowych (jednej z tematyki finansów [53] i dwóch z dziedziny fizyki [54, 55]) oraz byłem prelegentem w ramach cyklu wykładów "Bliżej Nauki" (organizowanego przez WFAIS UJ), gdzie przedstawiłem popularnonaukowy wykład pod tytułem "Dynamiczne Triangulacje, czyli kwantowy Wszechświat z klocków LEGO", w przystępny sposób wprowadzający słuchaczy w problematykę prowadzonych przeze mnie badań naukowych (<https://www.youtube.com/watch?v=xl9H12XwIsg>).

Literatura

- [1] Marc H. Goroff and Augusto Sagnotti. The Ultraviolet Behavior of Einstein Gravity. *Nucl.Phys.*, B266:709, 1986.
- [2] Gerard 't Hooft and M.J.G. Veltman. One loop divergencies in the theory of gravitation. *Annales Poincare Phys.Theor.*, A20:69–94, 1974.
- [3] Dah-Wei Chiou. Loop Quantum Gravity. *Int. J. Mod. Phys.*, D24(01):1530005, 2014.
- [4] J. Polchinsky. *String Theory*. Cambridge University Press, 1998.
- [5] Jakub Mielczarek and Tomasz Trześniewski. Towards the map of quantum gravity. *General Relativity and Gravitation*, 50(6):68, 2018.
- [6] Steven Weinberg. General Relativity, an Einstein Centenary Survey. 1997.
- [7] E. Brézin and J. Zinn-Justin. Renormalization of the Nonlinear σ Model in $2 + \epsilon$ Dimensions – Application to the Heisenberg Ferromagnets. *Phys. Rev. Lett.*, 36:691–694, Mar 1976.
- [8] K. Gawdzki and A. Kupiainen. Renormalizing the nonrenormalizable. *Phys. Rev. Lett.*, 55:363–365, Jul 1985.
- [9] Björn H. Wellegehausen, Daniel Körner, and Andreas Wipf. Asymptotic safety on the lattice: The Nonlinear $O(N)$ Sigma Model. *Annals Phys.*, 349:374, 2014.
- [10] M. Reuter. Nonperturbative evolution equation for quantum gravity. *Phys. Rev. D*, 57:971–985, Jan 1998.
- [11] Daniel F. Litim. Fixed points of quantum gravity. *Phys.Rev.Lett.*, 92:201301, 2004.
- [12] Max Niedermaier and Martin Reuter. The asymptotic safety scenario in quantum gravity. *Living Reviews in Relativity*, 9(1):5, Dec 2006.

- [13] Alessandro Codello, Roberto Percacci, and Christoph Rahmede. Investigating the Ultraviolet Properties of Gravity with a Wilsonian Renormalization Group Equation. *Annals Phys.*, 324:414–469, 2009.
- [14] Dario Benedetti, Pedro F. Machado, and Frank Saueressig. Asymptotic safety in higher-derivative gravity. *Mod.Phys.Lett.*, A24:2233–2241, 2009.
- [15] Daniel F. Litim. Renormalisation group and the Planck scale. *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.*, A369:2759–2778, 2011.
- [16] T. Regge. General Relativity Without Coordinates. *Nuovo Cim.*, 19:558–571, 1961.
- [17] F. David. Planar Diagrams, Two-Dimensional Lattice Gravity and Surface Models. *Nucl. Phys.*, B257:45, 1985.
- [18] V.A. Kazakov, Alexander A. Migdal, and I.K. Kostov. Critical Properties of Randomly Triangulated Planar Random Surfaces. *Phys.Lett.*, B157:295–300, 1985.
- [19] D. V. Boulatov, V. A. Kazakov, I. K. Kostov, and Alexander A. Migdal. Analytical and Numerical Study of the Model of Dynamically Triangulated Random Surfaces. *Nucl. Phys.*, B275:641, 1986.
- [20] F. David. Conformal Field Theories Coupled to 2D Gravity in the Conformal Gauge. *Mod. Phys. Lett.*, A3:1651, 1988.
- [21] Jan Ambjorn, B. Durhuus, and T. Jonsson. A Solvable 2-d gravity model with $\gamma > 0$. *Mod. Phys. Lett.*, A9:1221–1228, 1994.
- [22] P. Di Francesco, P. Ginsparg, and J. Zinn-Justin. 2d gravity and random matrices. *Physics Reports*, 254(1):1 – 133, 1995.
- [23] Jan Ambjorn and Jerzy Jurkiewicz. Four-dimensional simplicial quantum gravity. *Phys.Lett.*, B278:42–50, 1992.
- [24] M.E. Agishtein and Alexander A. Migdal. Simulations of four-dimensional simplicial quantum gravity. *Mod.Phys.Lett.*, A7:1039–1062, 1992.
- [25] S. Catterall, John B. Kogut, and R. Renken. Phase structure of four-dimensional simplicial quantum gravity. *Phys.Lett.*, B328:277–283, 1994.
- [26] P. Bialas, Z. Burda, A. Krzywicki, and B. Petersson. Focusing on the fixed point of 4-D simplicial gravity. *Nucl.Phys.*, B472:293–308, 1996.
- [27] Bas V. de Bakker. Further evidence that the transition of 4-D dynamical triangulation is first order. *Phys.Lett.*, B389:238–242, 1996.
- [28] J. Ambjorn, L. Glaser, A. Goerlich, and J. Jurkiewicz. Euclidian 4d quantum gravity with a non-trivial measure term. *JHEP*, 1310:100, 2013.
- [29] Daniel Coumbe and John Laiho. Exploring Euclidean Dynamical Triangulations with a Non-trivial Measure Term. *JHEP*, 1504:028, 2015.
- [30] A. Dasgupta and R. Loll. A Proper time cure for the conformal sickness in quantum gravity. *Nucl.Phys.*, B606:357–379, 2001.

- [31] Jan Ambjorn and R. Loll. Nonperturbative Lorentzian quantum gravity, causality and topology change. *Nucl.Phys.*, B536:407–434, 1998.
- [32] Jan Ambjorn, J. Jurkiewicz, and R. Loll. A Nonperturbative Lorentzian path integral for gravity. *Phys.Rev.Lett.*, 85:924–927, 2000.
- [33] Jan Ambjorn, J. Jurkiewicz, and R. Loll. Dynamically triangulating Lorentzian quantum gravity. *Nucl. Phys.*, B610:347–382, 2001.
- [34] N. Metropolis, A. W. Rosenbluth, M. N. Rosenbluth, A. H. Teller, and E. Teller. Equation of State Calculations by Fast Computing Machines. *J. Chem. Phys.*, 21:1087–1092, 1953.
- [35] W Keith Hastings. Monte Carlo Sampling Methods Using Markov Chains and Their Application. 57, 04 1970.
- [36] J. Ambjorn, J. Jurkiewicz, and R. Loll. Reconstructing the Universe. *Phys.Rev.*, D72:064014, 2005.
- [37] J. Ambjorn, A. Gorlich, S. Jordan, J. Jurkiewicz, and R. Loll. CDT meets Horava-Lifshitz gravity. *Phys.Lett.*, B690:413–419, 2010.
- [38] J. Ambjorn, J. Jurkiewicz, and R. Loll. Emergence of a 4-D world from causal quantum gravity. *Phys. Rev. Lett.*, 93:131301, 2004.
- [39] J. Ambjorn, J. Jurkiewicz, and R. Loll. The Spectral Dimension of the Universe is Scale Dependent. *Phys.Rev.Lett.*, 95:171301, 2005.
- [40] J. Ambjorn, A. Gorlich, J. Jurkiewicz, and R. Loll. Planckian Birth of the Quantum de Sitter Universe. *Phys.Rev.Lett.*, 100:091304, 2008.
- [41] J. Ambjorn, A. Gorlich, J. Jurkiewicz, and R. Loll. The Nonperturbative Quantum de Sitter Universe. *Phys.Rev.*, D78:063544, 2008.
- [42] J. Ambjorn, A. Gorlich, J. Jurkiewicz, R. Loll, J. Gizbert-Studnicki, et al. The Semiclassical Limit of Causal Dynamical Triangulations. *Nucl.Phys.*, B849:144–165, 2011.
- [43] Jan Ambjorn, Jakub Gizbert-Studnicki, Andrzej Gorlich, and Jerzy Jurkiewicz. The effective action in 4-dim CDT. The transfer matrix approach. *JHEP*, 1406:034, 2014.
- [44] Jan Ambjorn, S. Jordan, J. Jurkiewicz, and R. Loll. Second- and First-Order Phase Transitions in CDT. *Phys. Rev.*, D85:124044, 2012.
- [45] J. Ambjorn, S. Jordan, J. Jurkiewicz, and R. Loll. A Second-order phase transition in CDT. *Phys.Rev.Lett.*, 107:211303, 2011.
- [46] J. Ambjørn, J. Gizbert-Studnicki, A.T. Görlich, and J. Jurkiewicz. The transfer matrix in four-dimensional CDT. *Journal of High Energy Physics*, 2012(9):17, Sep 2012.
- [47] J. Hartle and S. Hawking. Wave function of the universe. *Phys. Rev. D*, 28:2960–2975, Dec 1983.

- [48] J. Ambjorn, A. Gorlich, J. Jurkiewicz, A. Kreienbuehl, and R. Loll. Renormalization Group Flow in CDT. *Class. Quant. Grav.*, 31:165003, 2014.
- [49] Jan Ambjørn, Zbigniew Drogosz, Jakub Gizbert-Studnicki, Andrzej Görlich, and Jerzy Jurkiewicz. Pseudo-Cartesian coordinates in a model of Causal Dynamical Triangulations. *arXiv*, 1812.10671, 2018.
- [50] J. Ambjørn, J. Gizbert-Studnicki, A. T. Görlich, J. Jurkiewicz, and R. Loll. The transfer matrix in four dimensional causal dynamical triangulations. *AIP Conference Proceedings*, 1514(1):67–72, 2013.
- [51] Jan Ambjorn, Daniel Coumbe, Jakub Gizbert-Studnicki, and Jerzy Jurkiewicz. Recent results in CDT quantum gravity. In *Proceedings, 14th Marcel Grossmann Meeting on Recent Developments in Theoretical and Experimental General Relativity, Astrophysics, and Relativistic Field Theories (MG14) (In 4 Volumes): Rome, Italy, July 12-18, 2015*, volume 4, pages 3891–3896, 2017.
- [52] Jakub Gizbert-Studnicki. Phase structure of Causal Dynamical Triangulations in 4D. *Acta Phys. Polon. Supp.*, 10:305, 2017.
- [53] J. Gizbert-Studnicki. Arbitraż indeksowy. *Parkiet*, 79(1479), 2000.
- [54] J. Gizbert-Studnicki. CDT czyli kwantowy wszechświat w komputerze. *Nauka prowadzi w przyszłość*, 2014.
- [55] J. Gizbert-Studnicki. Causal dynamical triangulation, czyli kwantowy Wszechświat z klocków lego. *Foton*, 129, 2015.

J. Studnicki