

Abstract

The definition of a path integral of Quantum Gravity requires a regularization of the space-times and performing a summation over all regularized space-time geometries joining the in- and out- states. In the approach presented in the thesis a UV cut-off in a form of a random lattice was introduced to regularize geometries and the path integral becomes a sum over distinct triangulations of a given topological manifold. We consider a toy model, where space-time is two-dimensional. In all our considerations we assume that time can be Wick-rotated. Definition of a path integral requires additional topological restrictions on a class of allowed manifolds. One possible approach would be a minimal requirement, to restrict the summation to all manifolds with a fixed topology of space-time (usually assumed to be spherical, with possible boundaries corresponding to the boundary states). In a lattice regularization this leads to the model of Euclidean Dynamical Triangulations (EDT), where the space-time manifold is constructed by gluing flat regular simplices (equilateral triangles) along the edges with a universal length a . In this approach a distinction between time and space is lost, but can be reconstructed dynamically. The EDT geometry may be coupled to matter fields. In the continuum limit ($a \rightarrow 0$) the model is expected to be described by the two-dimensional Liouville Conformal Field Theory with a conformal charge of the matter field c . Type of matter fields (choice of c) determines the critical behaviour. Liouville theory predicts that for $c > 1$ geometry of space-times becomes unstable with complex critical exponents. The lattice EDT version can, in this case, be studied numerically and shows that a typical geometry becomes that of branched polymers with the Hausdorff dimension $d_H = 2$ and the spectral dimension $d_S = 4/3$. For $c < 1$ critical behaviour of the theory depends on c and, in particular, for $c = 0$ (pure gravity) is characterized by a Hausdorff dimension $d_H = 4$ and $d_S = 2$. An alternative version of the model is a model of Causal Dynamical Triangulations, where the topology of admissible space-time geometries is additionally reduced by the requirement of the existence of a global time foliation for each configuration. In effect critical properties of the model change. The only case studied analytically (both in the continuum and in the lattice formulation) is the case of pure gravity, where the geometry is characterized by $d_H = 2$ and $d_S = 2$. Also for CDT we may include interactions of geometry with matter, but

it was not clear if the analogue of a $c = 1$ barrier is present in this case.

The thesis consists of four papers, in which the effects of the coupling between matter and geometry for two-dimensional quantum gravity models are analysed. The introductory part of the thesis contains a general formulation of the problems studied and a short discussion of methods and results.

In the first paper we analyse the so called “Lee-Yang edge” model in the EDT formulation. The model is interesting because naively there is a disagreement between continuous critical exponents (in this case $c = -22/5$) and the lattice result, obtained using the Random Matrix Theory. In the paper we show that the effect of the operator mixing explains the difference and leads to a full agreement of the exponents. This article was prepared during a one-year stay at the Niels Bohr Institute in Copenhagen.

The remaining three papers present results of the numerical Monte Carlo analysis of the CDT 1+1 geometry coupled to one or more copies of the scalar field. In the first article we consider d copies of a massless scalar field, which in the EDT version would correspond to a geometry interacting with matter with a central charge $c = d$. We study systems with periodic boundary conditions in time and space, where the period in the time direction T is fixed (and relatively large). We show that including matter ($d > 1$) has also in this case a very important physical effect, although different than in EDT. We observe a development of the de Sitter-like semi-classical blob with the Hausdorff dimension $d_H = 3$. This effect may be interpreted as a breakdown of the original toroidal geometry to form a collapsed “spherical” one, although a value of d_H indicates that quantum effects lead to a non-trivial scaling of geometry. This geometry is further analysed in the second paper, where we show that the spectral dimension remains $d_S = 2$ also for systems with the collapsed geometry. A transition between the two regimes: that with a toroidal geometry with $d_H = 2$ for $d = 0$ and a “spherical” geometry with $d_H = 3$ for $d > 1$ may be interpreted as a phase transition. This cannot be checked, even numerically, with a discrete integer set of d . In the third paper we propose to study a possible transition using a CDT system interacting with $d = 4$ copies of a massive scalar field. Introducing a new parameter in a form of the mass we may “switch off” the field degrees of freedom, freezing them to zero (for large mass). We show that for a finite value of the mass parameter we observe a transition between the two regimes. The character of this transition suggests that it is a phase transition of the second (or higher) order.

Streszczenie

Definicja całki po trajektoriach w kwantowej grawitacji wymaga regularyzacji czaso-przestrzeni oraz wykonania sumowania po wszystkich zregularyzowanych geometriach czaso-przestrzennych łączących stan wejściowy i wyjściowy. W podejściu użytym w pracy ultra-fioletowe obcięcie jest zrealizowane przez wprowadzenie przypadkowej sieci, a całka po trajektoriach staje się sumą po różnych triangulacjach topologicznej rozmaitości. Rozważamy model-zabawkę, w którym geometria czaso-przestrzeni jest dwuwymiarowa. We wszystkich rozważanych w tej pracy modelach czas został obrócony (w sensie obrotu Wicka). Definicja całki funkcjonalnej wymaga dodatkowego zdefiniowania klasy rozmaitości, uwzględnionych w sumowaniu. Jedno z możliwych podejść używa minimalnego ograniczenia, w którym uwzględnia się rozmaitości o ustalonej globalnej topologii (zazwyczaj sferycznej, z możliwymi brzegami, odpowiadającymi stanom wejściowym i wyjściowym). Dla regularyzacji sieciowej realizacją jest model Euklidesowych Dynamicznych Triangulacji (EDT), gdzie czaso-przestrzeń staje się symplecjonalną rozmaitością zbudowaną z regularnych sympleksów (trójkątów), sklejonych wzdłuż krawędzi o długości a . W tym podejściu traci się rozróżnienie między kierunkiem czasowym i przestrzennym, ale to rozróżnienie może być odzyskane dynamicznie. Geometria EDT może sprzęgać się z polami materii. W granicy ciągłej ($a \rightarrow 0$) spodziewamy się, że model może być opisany przez ciągłą dwuwymiarową konforemną Teorię Pola Liouville'a z konforemnym polem materii z ładunkiem centralnym c . Rodzaj pola materii (ładunek c) determinuje zachowanie krytyczne. Teoria Liouville'a przewiduje, że dla $c > 1$ geometria staje się niestabilna, scharakteryzowana przez zespolone wykładniki krytyczne. Wersja sieciowa EDT może, w tym przypadku, być zbadana metodami numerycznymi i wykazuje, że typowa geometria odpowiada układowi polimerów rozgałęzionych o wymiarze Hausdorffa $d_H = 2$ i wymiarze spektralnym $d_S = 4/3$. Dla $c < 1$ krytyczne zachowanie teorii jest funkcją c , w szczególności dla czystej grawitacji ($c = 0$) charakteryzuje się wymiarem Hausdorffa $d_H = 4$ i $d_S = 2$. Alternatywna wersja modelu nosi nazwę modelu Kauzalnych Dynamicznych Triangulacji (CDT). W tym modelu dopuszcza się tylko geometrie pozwalające na zdefiniowanie globalnej foliacji czasowej dla każdej konfiguracji. W konsekwencji własności krytyczne ulegają zmianie. Jedy-
nym przypadkiem zbadanym metodami analitycznymi (zarówno w wersji ciągłej,

jak sieciowej) jest czysta grawitacja, gdzie $d_H = 2$ i $d_S = 2$. Dla CDT również możemy badać sprzężenia z materią, ale nie jest oczywiste czy bariera $c = 1$ istnieje również dla tego modelu.

Rozprawę doktorską stanowią cztery publikacje, w których badane są sprzężenia materii w modelach dwuwymiarowej grawitacji kwantowej. Rozprawa zawiera też część wstępną, w której przedstawiamy zakres badanych problemów oraz krótkie omówienie metod i uzyskanych wyników.

W pierwszej publikacji badamy tzw. model "krawędzi Lee-Yanga" w sformułowaniu EDT. Model jest interesujący z tego względu, że naiwnie wydaje się prowadzić do niezgodności między ciągłym modelem Liouville'a (w tym wypadku z $c = -22/5$), a przewidywaniami sieciowymi, uzyskanymi w ramach Teorii Macierzy Przypadkowych. W artykule wykazujemy, że uwzględnienie efektu mieszania operatorów daje pełną zgodność przewidywań dotyczących eksponent krytycznych. Ta publikacja powstała w czasie rocznego pobytu na stażu w Instytucie Nielsa Bohra w Kopenhadze.

Pozostałe trzy publikacje przedstawiają rezultaty numerycznych analiz (metodami Monte Carlo) modelu CDT w 1+1 wymiarach, sprzężonego z jedną lub więcej kopiami pola skalarnego. W pierwszym artykule rozważamy model zawierający d kopii bezmasowego pola skalarnego. W wersji EDT odpowiadałoby to sprzężeniu geometrii z materią o ładunku centralnym $c = d$. W naszych obliczeniach warunki brzegowe są periodyczne w kierunkach czasowym i przestrzennym, przy czym periodyczność w kierunku czasowym jest ustalona i duża. Pokazujemy, że wprowadzenie materii ($d > 1$) ma bardzo istotny wpływ na fizyczne własności modelu, chociaż efekt ten jest inny niż w EDT. Obserwujemy pojawienie się semi-klasycznej geometrii tła, podobnej do geometrii de Sittera, o wymiarze $d_H = 3$. Możemy interpretować ten efekt jako załamanie wyjściowej toroidalnej topologii do skolapsowanej "sferycznej" geometrii, chociaż wartość d_H wskazuje na nietrywialny wpływ efektów kwantowych. Dalsza analiza "sferycznej" geometrii przeprowadzona jest w drugiej publikacji, gdzie pokazujemy, że wymiar spektralny pozostaje równy $d_S = 2$. Przejście między dwoma zachowaniami z $d_H = 2$ dla czystej grawitacji ($d = 0$) i $d_H = 3$ dla $d > 1$ może być interpretowany jako przejście fazowe. Nie można jednak tego sprawdzić, nawet stosując metody numeryczne, ze względu na dyskretny charakter d . W trzeciej publikacji proponujemy zbadanie takiego przejścia w modelu, w którym wprowadzamy oddziaływanie czterech pól skalarnych z niezerową masą. Wprowadzając parametr masowy możemy "wyłączyć" pole, zamrażając połowe stopnie swobody do zera (dla dużych mas). Wykazujemy, że dla skończonej wartości parametru masowego obserwujemy przejście między dwoma reżimami. Charakter przejścia sugeruje, że jest to przejście fazowe drugiego (lub wyższego) rzędu.