

dr hab. Tadeusz Kosztołowicz, prof. UJK
Instytut Fizyki
Uniwersytet Jana Kochanowskiego w Kielcach

Kielce, 29.01.2017

Recenzja rozprawy doktorskiej
mgra Krzysztofa Szczepańca
pt. "Noise induced effects in multivariate systems driven by Levy noises"

Recenzowana rozprawa doktorska powstała w Wydziale Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej Uniwersytetu Jagiellońskiego pod kierunkiem dr hab. Bartłomieja Dybca. Tematyka rozprawy dotyczy teoretycznego modelowania procesów dyfuzji anomalnej. Zawiera ona wyniki opublikowane w siedmiu artykułach naukowych w czasopismach z listy filadelfijskiej, przy czym w pięciu z nich Autor rozprawy jest pierwszym autorem; ukazały się one w prestiżowych czasopismach naukowych: trzy w *Journal of Statistical Mechanics* i dwa w *Physical Review E*. Dodam, że temat rozprawy związany jest z jednym z najbardziej intensywnie rozwijających się działów fizyki statystycznej w ostatnich kilkunastu latach.

Rozprawa, napisana w języku angielskim i licząca 116 stron, podzielona jest na dwa rozdziały. Pierwszy rozdział zawiera wprowadzenie i wyjaśnienia podstawowe pojęcia wykorzystywane w pracy. Autor określił w nim także zakres podjętych badań. W drugim opisywane są oryginalne wyniki otrzymane przez Autora rozprawy. Pierwszy rozdział rozprawy wprowadza w tematykę badań, obejmujących modelowanie procesów dyfuzji anomalnej (superdyfuzji) w układach, w których błędzenie losowe cząsteczek jest generowane przez szumy Levy'ego. W rozdziale tym znajdujemy opis uogólnionego centralnego twierdzenia granicznego, rozkładów α -stabilnych Levy'ego, równania Langevina z szumem Levy'ego, równania Smoluchowskiego-Fokkera-Plancka, a także wielowymiarowe rozkłady α -stabilne z wykorzystaniem miary spektralnej. Opisana jest miara spektralna i jej związek z wielowymiarowymi rozkładami α -stabilnymi, a także ze szczegółową postacią ułamkowego wielowymiarowego równania Smoluchowskiego-Fokkera-Plancka. Przedstawiony jest także uogólniony algorytm Eulera-Maruyamy numerycznego rozwiązywania równania Langevina z szumem Levy'ego. W końcowej części rozdziału znajduje się opis problemów rozpatrywanych w drugim rozdziale wraz

z krótkim wprowadzeniem. Rozdział ten jest napisany zwięźle i stanowi dobrą podstawę do modelowania procesów dyfuzji anomalnej generowanych przez szumy Levy'ego.

W drugim rozdziale rozprawy zaprezentowane są oryginalne wyniki badań Autora. Odnoszą się one do błędzenia losowego cząsteczki, które jest generowane szumami Levy'ego. Ruch cząsteczki opisany jest przez ułamkowe równanie Smoluchowskiego-Fokkera-Plancka (SFP) oraz przez odpowiadające mu równanie Langevina. Ponieważ równanie SFP ma analityczne rozwiązania jedynie dla kilku wybranych przypadków, w rozprawie funkcje opisujące dyfuzję otrzymane są poprzez symulacje (wykonane metodą Monte Carlo) błędzenia losowego cząsteczki opisanego przez równanie Langevina, przy wykorzystaniu uogólnionego algorytmu Eulera-Maruyamy. Wyniki zostały otrzymane przez uśrednienie odpowiednich wyników otrzymanych dla symulowanych trajektorii cząsteczki. W przypadku badanych procesów w układach wielowymiarowych stosowane były dwie miary spektralne, jednorodna miara na sferze i dyskretna miara kartezyjska, dla obu z nich wyniki zostały przedstawione osobno. W rozdziałach 2.1 i 2.2 badany jest średni czas wyjścia ze sfery jednowymiarowej (czyli przedziału), ze sfery wielowymiarowej oraz z wielowymiarowego sześcianu dla cząsteczki znajdującej się w chwili początkowej w środku bryły. Zadane zostały nielocalne warunki brzegowe zakładające, że obszar na brzegu i na zewnątrz sfery jest całkowicie absorbujący dla cząsteczki. Analityczny przybliżony rezultat został wyprowadzony dla przypadku $\alpha=2$, został on potwierdzony przez symulacje. W przypadku $\alpha<2$ przedstawione zostały na wykresach wyniki numeryczne. Pokazują one, że średni czas wyjścia ze sfery w zależności od parametru jest funkcją niemonotoniczną. Podobną zależność wykazuje rozkład średniego czasu wyjścia ze sfery, której część jest odbijająca. Wynik ten jest nieco zaskakujący i wydaje się być sprzeczny z intuicją, lecz Autor podaje jakościowe wytłumaczenie tego faktu. Szczegółowo został także przeanalizowany rozkład czasu wyjścia w zależności od wymiaru przestrzeni.

W dalszej części pracy badana jest dyfuzja w układach, w których cząsteczka porusza się w studniach potencjału, ruch cząsteczki generowany jest przez szum Levy'ego. W rozdziale 2.3 wykazane zostało istnienie stanów stacjonarnych w dwuwymiarowych studniach potencjału harmonicznego, stany te powstają przy dostatecznie dużym nachyleniu potencjału. Przeanalizowane zostały otrzymane numerycznie stany stacjonarne dla różnych wartości parametru α . W przypadku wyboru miary spektralnej jednorodnej na sferze otrzymany został wynik analityczny dla stanu stacjonarnego, w przypadku dyskretnej kartezyjskiej miary spektralnej wynik analityczny został otrzymany jedynie dla przypadku szumu gaussowskiego, dla przypadku $\alpha<2$ zaprezentowane zostały wyniki numeryczne. W rozdziale 2.4 badana była

aktywacja rezonansowa w dychotomicznie fluktuujących dwóch symetrycznych, harmonicznym potencjałach o różnych wysokościach mierzonych na jednostkowej sferze, w układach dwu- i trójwymiarowych. Aktywacja rozumiana jest tutaj jako osiągnięcie wysokości potencjału na jednostkowej sferze przez cząsteczkę startującą z punktu, w którym potencjał osiąga minimum. Badane były warunki zajścia takiej aktywacji, na którą wpływ ma zarówno częstotliwość „przełączania” potencjałów jak i parametry szumu generującego ruch cząsteczki. Wykorzystany został średni czas pierwszego wyjścia cząsteczki z obszaru potencjału ograniczonego jego maksymalną wysokością, aktywacja ta jest efektywna przy najmniejszym czasie średniego wyjścia. Przedstawione zostały różne sposoby wyznaczania parametrów układu, przy którym aktywacja jest najbardziej efektywna. W rozdziale 2.5 zaprezentowane zostały wyniki dotyczące rezonansu stochastycznego w dwuwymiarowej „dwudołkowej” studni potencjału. Rozpatrzone zostały różne miary używane do opisu rezonansu, a także związki pomiędzy parametrami charakteryzującymi układ i szum przy spełnieniu których rezonans ma miejsce.

Zagadnienia rozpatrywane w rozprawie przedstawione są w sposób zwarty i przejrzysty. Pokazana jest wewnętrzna spójność prezentowanych rozważań. Otrzymane w rozprawie wyniki numeryczne zostały przedstawione na wielu wykresach, ponadto dla ilustracji przedstawione są także przykładowe symulowane trajektorie cząsteczki, co ułatwia interpretację zachodzących procesów. Precyzyjne określone są przyjęte założenia upraszczające obliczenia numeryczne i analityczne. Czytelnik nie powinien mieć problemu ze zrozumieniem zagadnień przedstawianych w rozprawie, chociaż z pewnym wyjątkiem: nie jest dla mnie jasny sposób otrzymania teoretycznego rozkładu prawdopodobieństwa znalezienia cząsteczki w wybranym punkcie w stanie stacjonarnym dla przypadku $\alpha=1$ dla dwuwymiarowego potencjału harmonicznego, wzór (2.71) str. 66. Podsumowując, sposób prezentacji rozważanych zagadnień świadczy o dojrzałości autora w zakresie prowadzonych badań naukowych. Można odnieść wrażenie, iż nie będzie problemem dla doktoranta kontynuowanie opisanych badań, poszerzając przy tym znacznie ich zakres. Wybrane problemy przeznaczone do dalszych badań zostały przez Autora przytoczone w końcowej części rozprawy. Rozprawa ma także walor dydaktyczny. W tym kontekście napisanie rozprawy uważam za dobry pomysł, pomimo tego, że dorobek naukowy doktoranta upoważniał go do przedstawienia zbioru artykułów naukowych.

W mojej opinii rozprawa ma pewien słabszy punkt. Rozprawa ma charakter teoretyczny, jednak pożądanym byłoby przedstawienie potencjalnych zastosowań rozważanych modeli do opisu procesów zachodzących w przyrodzie. Co prawda konkretne procesy indukowane szumem niegaussowskim wspomniane są w części wstępnej, jednak szkoda, że autor nie podał chociażby

potencjalnych praktycznych zastosowań wyników zaprezentowanych w rozprawie. Należy przy tym dodać, iż takie wskazanie nie musi być łatwe, bowiem większość wyników empirycznych związanych z błędzeniem losowym cząsteczek dotyczy przypadków dyfuzji normalnej lub subdyfuzji. Chciałbym także zwrócić uwagę na nieco niefortunne sformułowanie, które pojawia się na str. 34. Otóż Autor czyni uwagę, z której wynika, że rozwiązania równań Smoluchowskiego-Fokkera-Plancka (prezentowane powyżej tej uwagi) mogą być wyznaczone przy pomocy metody Monte Carlo. Metoda ta stosowana jest w rozprawie do symulacji trajektorii cząsteczki w oparciu o równanie Langevina, Można oczywiście założyć, iż uśrednienie symulowanych trajektorii pokryje się z rozwiązaniem równania SFP (co Autor pokazuje dla wybranych przypadków stanu stacjonarnego), jednak nie można jej traktować jako metody numerycznej rozwiązania równania różniczkowego SFP. W tym kontekście odczuwam pewien niedosyt, iż Autor nie odniósł się, nawet krótko, do metod numerycznego rozwiązywania równań SFP, które prowadziłyby do przybliżonych analitycznych rozwiązań. Dodam, że powyższe uwagi nie wpływają na moją wysoką ocenę rozprawy.

Podsumowując, wysoko oceniam dokonania Autora przedstawione w rozprawie doktorskiej. Należy podkreślić wagę wyników uzyskanych przez Autora w trakcie jego pracy naukowej i przedstawionych w rozprawie dla procesów błędzenia losowego cząsteczki generowanego przez szumy Levy'ego takich jak: wykazanie niemonotoniczności czasu wyjścia z ograniczonego obszaru względem parametru α , wykazanie istnienia stanów stacjonarnych w potencjałach harmonicznym, warunków, przy których następuje aktywacja rezonansowa w dwu- i trójwymiarowych dychotomicznie fluktuujących potencjałach oraz zachodzenie rezonansu stochastycznego w „dwudółkowej” studni potencjału. Autor pokazał także skuteczność stosowanej metody symulacji trajektorii błędzenia losowego cząsteczki generowanego przez szumy Levy'ego do opisu procesów związanych z superdyfuzją, a także fakt, że metody opisu badania efektów wywołanych szumami Levy'ego, stosowane poprzednio w układach jednowymiarowych, mogą być skutecznie zastosowane w układach wielowymiarowych przy różnych wyborach miary spektralnej.

W mojej ocenie praca doktorska mgra Krzysztofa Szczepańca spełnia kryteria art.13 ust.1 Ustawy z dn. 14.03.2003 roku o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz stopniach i tytułach w zakresie sztuki (Dz. U. Nr 65 poz. 595 z późn. zm.). Oceniając pozytywnie, tak pod względem formalnym jak i merytorycznym rozprawę doktorską zwracam się do Rady Wydziału Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej Uniwersytetu Jagiellońskiego z wnioskiem o dopuszczenie mgra Krzysztofa Szczepańca do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Zwracam się również z wnioskiem do Wysokiej Rady o wyróżnienie rozprawy doktorskiej mgra Krzysztofa Szczepańca. Uzasadnienie przedstawiam w dwóch głównych punktach:

- Doktorant prowadzi badania na wysokim poziomie merytorycznym, osiągając szereg nowych, cennych wyników dotyczących anomalnej dyfuzji cząsteczek, których błędzenie losowe generowane jest przez szumy Levy'ego. Dodatkowym argumentem jest także bardzo dobrze napisana rozprawa doktorska, mająca swój walor dydaktyczny.
- Dotychczasowy dorobek naukowy doktoranta należy ocenić wysoko, biorąc pod uwagę ilość i jakość publikacji. Rozprawa zawiera wyniki opublikowane w siedmiu artykułach naukowych w czasopismach z listy filadelfijskiej, przy czym w trzech opublikowanych w *Journal of Statistical Mechanics* i dwóch opublikowanych w *Physical Review E* Doktorant jest pierwszym autorem. W mojej ocenie Autor rozprawy wniósł swój wkład w rozwój teorii procesów dyfuzji anomalnej generowanej przez szumy Levy'ego.

Łodzień Kontorowicz

