

**Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Jacka Greli**  
**pt. *Dynamics of eigenvalues and eigenvectors in non-Hermitian matrix models***

Rozprawa doktorska pana mgr. Jacka Greli poświęcona jest teorii macierzy stochastycznych, a w szczególności badaniu własności widm i wektorów własnych takich macierzy dla różnych zespołów macierzy, w tym, co uwypuklone zostało w tytule pracy – macierzy niehermitowskich. Jednak oprócz zastosowań w wypadku niehermitowskim, rozprawa przynosi wiele rezultatów dotyczących „klasycznych” zespołów macierzy hermitowskich – GOE, GUE i GSE.

Rozprawa powstała na podstawie siedmiu prac autorstwa i współautorstwa pana mgr. Greli dołączonych do rozprawy. Sześć z nich zostało już opublikowanych w *Physical Review Letters*, *Nuclear Physics B*, *Journal of Physics A* (dwie prace), *Acta Physica Polonica B* oraz *Journal of Statistical Mechanics*, a więc w czasopismach o dużym i bardzo dużym znaczeniu w literaturze światowej. Ostatnia z prac, zaprezentowana w postaci preprintu, została wysłana do druku w *Physical Review E*. Jedna z prac jest publikacją jednoautorską i stanowi jeden z ważniejszych fundamentów całej rozprawy.

Teoria macierzy stochastycznych, powstała w połowie ubiegłego stulecia dla analizy własności widm kwantowych układów o wielu stopniach swobody, takich jak np. jądra atomowe ciężkich pierwiastków, przeżywa swój renesans w ostatnich dwudziestu pięciu latach spowodowany jej znakomitą przydatnością do opisu kwantowych układów chaotycznych, gdzie o konieczności opisu statystycznego decyduje nie tyle duża liczba stopni swobody, co złożoność dynamiki. Jednak zastosowania macierzy stochastycznych wykraczają daleko poza mechanikę kwantową. Z tego też powodu jest to obszar intensywnych badań teoretycznych i nowe interesujące wyniki są tu bardzo pożądane.

Szereg takich właśnie nowych i interesujących wyników dostarcza rozprawa doktorska pana mgr. Greli. W swoich badaniach zastosował on podejście zainicjowane w pracach Dysona, który zaproponował badanie własności widmowych macierzy stochastycznych poprzez analizę pewnych procesów dyfuzyjnych w przestrzeni macierzy. W takim podejściu nie postuluje się z góry wspólnego rozkładu prawdopodobieństwa elementów macierzy, jak to ma miejsce w statycznych modelach macierzy stochastycznych, ale zakłada się, że elementy te podlegają wielowymiarowemu procesowi stochastycznemu (dyfuzji). Taki proces stochastyczny indukuje odpowiednie procesy dla wartości własnych i wektorów własnych macierzy. Asymptotyczne w czasie (stacjonarne) stany tych procesów odpowiadają rozkładowi tychże wielkości w statycznych modelach macierzy stochastycznych (np. GOE, GUE, GSE i ich wariantach z dodatkowymi symetriami). Własności wartości własnych mogą być zakodowane w uśrednionym wielomianie charakterystycznym macierzy, a do wyliczania korelacji między wartościami własnymi przydatna jest uśredniona odwrotność tego wielomianu. Obie te wielkości podlegają także odpowiednim procesom stochastycznym i identyfikacja rządzących tą dynamiką równań dla różnych zespołów macierzy jest jednym z głównych celów i wyników zaprezentowanych w rozprawie badań.

Jak już wspomniałem, zgodnie z tytułem rozprawy, głównym jej celem jest badanie macierzy niehermitowskich, jednak zastosowanie opisanego powyżej skrótowno podejścia okazuje się być szczególnie skuteczne także w wypadku macierzy hermitowskich, co zostało zaprezentowane w rozdziale 2.3, opartym na dołączonej pracy nr 4, dotyczącym hermitowskich macierzy zespolonych. Pokazano, że wartość średnia wielomianu charakterystycznego, jak i jego odwrotności ewoluują zgodnie z prostymi równaniami typu dyfuzyjnego. Ważnym wynikiem jest tu uzyskanie równań obowiązujących dla dowolnego wymiaru macierzy i (co jest istotnym postępowem w stosunku do znanych poprzednio rezultatów), dla dowolnego warunku początkowego.

Alternatywny, czy raczej komplementarny, opis dynamiki w dynamicznych zespołach macierzy stochastycznych oferuje podejście „hydrodynamiczne”. Wartości własnych nie traktuje się tu jako „gazu” oddziałujących cząstek, ale jak ciecz, której własności opisywane są za pomocą ewoluującej w czasie gęstości. Takie podejście zostało zaprezentowane w 2.5 rozprawy opartym na dołączonej publikacji nr 5 dla szeregu zespołów macierzy hermitowskich i unitarnych.

Głównemu tematowi rozprawy, tzn. stochastycznym macierzom hermitowskim poświęcony jest jej rozdział 3. Powstał on na bazie dołączonych prac nr 1, 2, 6 i 7 i zawiera najważniejsze i najoryginalniejsze wyniki otrzymane przez pana mgr. Grełę. Zaprezentowano tu po raz pierwszy (przynajmniej według mojej wiedzy o literaturze przedmiotu) badanie zespołu Ginibre’a (tzn. gaussowskiego zespołu niehermitowskich macierzy stochastycznych) za pomocą metod dynamicznych. Oprócz oczywistego faktu, że w tym wypadku wartości własne nie ewoluują w jednym wymiarze, lecz, ze względu na swój zespolony charakter, na płaszczyźnie, charakterystyczną własnością jest to, że dynamiki wartości własnych i wektorów własnych nie separują się. Za najważniejsze wyniki tej części pracy należy uznać:

- Wyprowadzenie równania dyfuzyjnego rządzącego ewolucją średniej tzw. rozszerzonego wielomianu charakterystycznego (kodującego w specyficzny sposób wartości własne macierzy niehermitowskiej), obowiązującego dla dowolnego wymiaru macierzy.
- Wyprowadzenie (sprzężonych) równań dynamiki dla gęstości spektralnej dla dużego (asymptotycznie nieskończonego) wymiaru macierzy i pokazanie jak dynamika ta, w sposób nieunikniony, sprzęga się z dynamiką wektorów własnych.
- Zastosowanie otrzymanych wyników do trzech modeli macierzy niehermitowskich.

Ciekawym wynikiem dotyczącym macierzy niehermitowskich jest znalezienie gęstości spektralnej dla pewnej klasy niehermitowskich macierzowych modeli stochastycznych dla skończonego wymiaru macierzy. W tym wypadku nie analizowano modelu dynamicznego; do otrzymania rezultatu wykorzystano metody supersymetryczne. (rozdział 3.5 bazujący na dołączonej pracy nr 7). O wadze otrzymanych wyników decyduje fakt, iż analizowany model ma dość szerokie zastosowanie w wielu obszarach.

Rozdział 4 pracy (oparty na dołączonej pracy nr 4), poświęcony jest oryginalnej metodzie analizy własności spektralnych dynamicznych modeli macierzy stochastycznych. Pozwala

ona na otrzymanie równań typu dyfuzyjnego dla takich obiektów jak średnie wielomianu charakterystycznego czy jego odwrotności, przy czym zmiennymi „przestrzennymi” są tu odpowiednie parametry – np. właśnie zmienna w wielomianie charakterystycznym, czy też zmienne w rozszerzonym wielomianie charakterystycznym w wypadku macierzy niehermitowskich. Są to właśnie równania wspomniane powyżej i ich wykorzystanie jest podstawowym narzędziem stosowanym w rozprawie. Rozdział ten kodyfikuje to narzędzie w sposób uniwersalny, stosowalny zarówno do macierzy hermitowskich jak i niehermitowskich i przynosi poważny wkład do metod badania stochastycznych modeli macierzowych.

Podsumowując walory merytoryczne pracy pragnę stwierdzić, że zawiera ona szereg bardzo wartościowych wyników, wnoszących istotne nowości do teorii macierzy stochastycznych, a zastosowanie metod dynamicznych do problemów niehermitowskich jest pionierskie. Autor wykazał się bardzo dużą sprawnością w posługiwaniu się zaawansowanymi metodami teorii macierzy stochastycznych, równań różniczkowych cząstkowych, transformacji całkowych i, oczywiście, teorii procesów stochastycznych.

Pewnym mankamentem kompozycyjnym pracy jest wyraźny brak konsekwentnej decyzji, czy ma być to „regularna” rozprawa doktorska, czy też raczej poprzedzony wstępem zbiór publikacji. Za tym, iż rozprawa była pomyślana jako samodzielna całość przemawia fakt, iż liczy sobie ona blisko sto stron, a więc trudno ją traktować jako jedynie omawiający publikacje wstęp. Z drugiej jednak strony, oprócz bardzo dobrej części początkowej (rozdział 1 i rozdział 2.1) przynosi zasadniczo bezpośrednie cytaty z prac oryginalnych, a w miejscach gdzie autor zdecydował się na skrócenie tekstu oryginalnego, odwołania do owych prac. W sumie więc wygodniejsze było dla mnie czytanie prac oryginalnych. Należy jednak podkreślić, że bardzo jasnym punktem części referującej pracę jest bardzo dobra i wyczerpująca bibliografia.

Choć ostatni, piąty rozdział pracy, mający na celu podsumowanie rozprawy i zarysowanie dalszych perspektyw badawczych, jest dość krótki, to jednak spełnia nieźle swą rolę – autorowi udało się krótko scharakteryzować myśli przewodnie rozprawy. Zabrakło mi tu nieco bezpośrednich odniesień do czysto fizycznych zastosowań otrzymanych wyników, a przede wszystkim choćby krótkiej refleksji (tu, lub we wstępie) dotyczącej samej metody dynamicznego podejścia do analizy stochastycznych modeli macierzowych. W szczególności, jakie korzyści przynosi zastosowanie takiego podejścia. Czy postulowanie, iż odpowiednie macierze podlegają określonym procesom stochastycznym, zamiast narzucania konkretnego rozkładu prawdopodobieństwa na ich elementy ma jakieś źródło w rzeczywistych procesach fizycznych, które staramy się opisać, czy też jest tylko pewnym elementem teorii macierzy stochastycznych, ciekawym z punktu widzenia samej tylko teorii? W tekście samej rozprawy nie znalazłem miejsca, w którym autor odnosiłby się do tego zagadnienia; krótkie wzmianki można znaleźć w pracach oryginalnych (np. wstępie do pracy nr 3), ale tylko w postaci hasłowej z odnośnikami do literatury.

Wspomniane powyżej drobne niedostatki w żaden sposób nie wpływają na moją opinię o doniosłości merytorycznych rezultatów zaprezentowanych w rozprawie. A właśnie te walory

powinny być decydujące przy ocenie osiągnięć doktoranta. Jak już powyżej wspomniałem uważam, że praca jest z tego punktu widzenia bardzo cenna. Podsumowując więc stwierdzam, że rozprawa doktorska pana mgr. Jacka Greli p.t. *Dynamics of eigenvalues and eigenvectors in non-Hermitian matrix models* spełnia wszelkie wymagania ustawowe i zwyczajowe stawiane tego typu pracom, a zaprezentowane w niej wyniki, wnoszące poważny wkład do teorii macierzy stochastycznych, stanowią podstawę do jej wyróżnienia. Wnoszę tym samym o dopuszczenie pana mgr. Jacka Grele do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Warszawa, 19.08.2016



prof. dr hab. Marek Kuś