

AUTOREFERAT

Andrzej Görlich

Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej
Uniwersytet Jagielloński

Kraków MMXIX

Spis treści

1 Dane osobowe	3
2 Wykształcenie	3
3 Historia zatrudnienia	3
4 Główne osiągnięcie naukowe	4
4.1 Tytuł osiągnięcia naukowego	4
4.2 Publikacje wchodzące w skład osiągnięcia naukowego	4
4.3 Omówienie osiągniętych wyników	6
4.3.1 Wprowadzenie	6
4.3.2 Motywacja i cel naukowy cyklu prac	8
4.3.3 Model Kauzalnych Dynamicznych Triangulacji	10
4.3.4 Macierz transferu	21
4.3.5 Diagram fazowy i nowa faza bifurkacji	26
4.3.6 Topologia torusa	34
4.3.7 Grupa renormalizacji w modelu CDT	39
4.3.8 Pętle Wilsona	42
4.3.9 Metody numeryczne	44
4.3.10 Podsumowanie i plany naukowe	45
5 Pozostałe osiągnięcia	50
5.1 Publikacje nie wchodzące w skład osiągnięcia naukowego	50
5.2 Omówienie pozostałych osiągnięć	53
5.2.1 Generator liczb pseudolosowych oparty na C-K-systemach	53
5.2.2 Dwuwymiarowy model CDT	53
5.2.3 Czterowymiarowy model EDT	54
5.2.4 Teoria macierzy przypadkowych	55
5.2.5 Komputery kwantowe i kwantowe bramki logiczne	55

1 Dane osobowe

Imię i nazwisko: Andrzej Görlich
Data urodzenia: 22 czerwca 1982 r.
Adres e-mail: andrzej.goerlich@uj.edu.pl

2 Wykształcenie

- Stopień naukowy doktora nauk fizycznych w zakresie fizyki (z wyróżnieniem)
Uniwersytet Jagielloński, Kraków, 2010 r.
Tytuł rozprawy: „*Causal Dynamical Triangulations in Four Dimensions*”
Promotor: prof. dr hab. Jerzy Jurkiewicz
- Tytuł zawodowy magistra fizyki (z wyróżnieniem)
Studia Matematyczno-Przyrodnicze w zakresie fizyki teoretycznej
Uniwersytet Jagielloński, Kraków, 2006 r.
Tytuł pracy magisterskiej: „*Niegaussowskie macierze przypadkowe*”
Opiekun: prof. dr hab. Zdzisław Burda

3 Historia zatrudnienia

2013 - obecnie	Adiunkt, Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej, Uniwersytet Jagielloński
2014 - 2016	Associate professor, Niels Bohr Institute Uniwersytet Kopenhaski, Kopenhaga, Dania
2011 - 2013	Postdoc, Niels Bohr Institute Uniwersytet Kopenhaski, Kopenhaga, Dania
2010 - 2013	Asystent, Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej, Uniwersytet Jagielloński

4 Główne osiągnięcie naukowe

4.1 Tytuł osiągnięcia naukowego

Osiągnięciem naukowym wynikającym z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 roku o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. 2017 r. poz. 1789) jest jednotematyczny cykl publikacji zatytułowany:

**„Własności kwantowej grawitacji w ujęciu modelu
Kauzalnych Dynamicznych Triangulacji”**

4.2 Publikacje wchodzące w skład osiągnięcia naukowego

Cykl publikacji składa się z następujących artykułów:

- [H1] J. Ambjørn, A. Görlich, J. Jurkiewicz, R. Loll,
Nonperturbative quantum gravity,
Phys. Rep. **519** (2012) 127
(IF₅: 21.477, liczba cytowań: 148)
- [H2] J. Ambjørn, A. Görlich, J. Jurkiewicz, R. Loll, J. Gizbert-Studnicki, T. Trześniewski,
The semiclassical limit of causal dynamical triangulations,
Nucl. Phys. B **849** (2011) 144
(IF₅: 3.055, liczba cytowań: 46)
- [H3] J. Ambjørn, J. Gizbert-Studnicki, A. Görlich, J. Jurkiewicz,
The transfer matrix in four-dimensional CDT,
J. High Energ. Phys. **9** (2012) 017
(IF₅: 4.807, liczba cytowań: 7)
- [H4] J. Ambjørn, A. Görlich, J. Jurkiewicz, R. Loll,
Causal dynamical triangulations and the search for a theory of quantum gravity,
Int. J. Mod. Phys. D **22** (2013) 1330019
(IF₅: 1.960, liczba cytowań: 14)
- [H5] J. Ambjørn, J. Gizbert-Studnicki, A. Görlich, J. Jurkiewicz,
The effective action in 4-dim CDT. The transfer matrix approach,
J. High Energ. Phys. **6** (2014) 034
(IF₅: 4.807, liczba cytowań: 13)
- [H6] J. Ambjørn, A. Goerlich, J. Jurkiewicz, A. Kreienbuehl, R. Loll,
Renormalization group flow in CDT,
Class. Quantum Grav. **31** (2014) 165003
(IF₅: 2.894, liczba cytowań: 31)

- [H7] J. Ambjørn, A. Görlich, J. Jurkiewicz, R. Loll,
Wilson loops in CDT quantum gravity,
Phys. Rev. D **92** (2015) 024013
(IF₅: 3.797, liczba cytowań: 2)
- [H8] J. Ambjørn, Z. Drogosz, J. Gizbert-Studnicki, A. Görlich, J. Jurkiewicz, D. Nemeth,
Impact of topology in causal dynamical triangulations quantum gravity,
Phys. Rev. D **94** (2016) 044010
(IF₅: 3.797, liczba cytowań: 8)
- [H9] J. Ambjørn, J. Gizbert-Studnicki, A. Görlich, J. Jurkiewicz, N. Klitgaard, R. Loll,
Characteristics of the new phase in CDT,
Eur. Phys. J. C **77** (2017) 152
(IF₅: 4.545, liczba cytowań: 11)
- [H10] J. Ambjørn, D. Coumbe, J. Gizbert-Studnicki, A. Görlich, J. Jurkiewicz,
New higher-order transition in causal dynamical triangulations,
Phys. Rev. D **95** (2017) 124029
(IF₅: 3.797, liczba cytowań: 8)
- [H11] J. Ambjørn, J. Gizbert-Studnicki, A. Görlich, K. Grosvenor, J. Jurkiewicz,
Four-dimensional CDT with toroidal topology,
Nucl. Phys. B **922** (2017) 226
(IF₅: 3.055, liczba cytowań: 6)
- [H12] J. Ambjørn, J. Gizbert-Studnicki, A. Görlich, J. Jurkiewicz, D. Németh,
The phase structure of Causal Dynamical Triangulations with toroidal spatial topology,
J. High Energ. Phys. **06** (2018) 111
(IF₅: 4.807, liczba cytowań: 2)

IF₅ oznacza pięcioletni *Impact Factor* czasopisma w roku 2017.

Liczba cytowań wg *Web of Science*.

4.3 Omówienie osiągniętych wyników

4.3.1 Wprowadzenie

Konstrukcja kwantowej teorii grawitacji, która pogodziłaby ogólną teorię względności z mechaniką kwantową, pozostaje jednym z najistotniejszych i wciąż nierozwiązanych problemów fizyki teoretycznej. Główne osiągnięcie naukowe omówione w niniejszym autoreferacie dotyczy czterowymiarowego modelu Kauzalnych Dynamicznych Triangulacji (ang. *causal dynamical triangulations*, CDT) będącego kandydatem na taką teorię.

Próby bezpośredniego zastosowania metod kwantowej teorii pola do kwantowania klasycznej einsteinowskiej teorii grawitacji napotkały na poważne trudności. Po pierwsze, ogólna teoria względności jest perturbacyjnie nierenormalizowalna (w czterech wymiarach), co uwidacznia się już na poziomie zliczania potęg. Stała grawitacji G ma wymiar -2 w jednostkach masy i poprawki wyższego rzędu w rozwinięciu perturbacyjnym zawierają coraz wyższe potęgi skali obciążenia. Bezpośrednie rachunki potwierdziły, że ogólna teoria względności bez pól materii jest nierenormalizowalna w dwóch pętłach [1], a w obecności materii w jednej pętli [2]. Modyfikacja teorii poprzez dodanie do działania wyrazów zawierających pochodne metryki wyższego rzędu może spowodować, że teoria stanie się renormalizowalna kosztem unitarności lub niezmienniczości względem dyfeomorfizmów czasoprzestrzeni. Drugi problem dotyczy energii próżni związanej z fluktuacjami kwantowymi dowolnych pól, w tym także pola grawitacyjnego. Grawitacja powinna być czuła na energię próżni i jak dotąd nie wyjaśniono dlaczego stała kosmologiczna ma znacznie mniejszą wartość niż to wynika z obliczeń [3].

Perturbacyjna kwantowa grawitacja wciąż może być rozważana jako niskoenergetyczna teoria efektywna, jednak traci ona zdolność przewidywania na skalach poniżej długości Plancka. Chociaż ogólna teoria względności zgadza się z bardzo dużą dokładnością z obserwacjami doświadczalnymi w reżimie klasycznym, to teoria kwantowej grawitacji jest niezbędna, aby zapewnić spójny formalizm z pozostałymi oddziaływaniami, które są opisywane kwantowymi teoriami pola. Uwzględnienie efektów kwantowych jest konieczne w obszarze bardzo wysokich energii i dużych krzywizn czasoprzestrzeni. Takie warunki występowały na początku Wielkiego Wybuchu oraz w otoczeniu osobliwości skrytych za horyzontem zdarzeń czarnych dziur.

Próba odpowiedzi na powyższe problemy jest koncepcja *bezpieczeństwa asymptotycznego* przedstawiona przez Weinberga w publikacji [4], zgodnie z którą nieperturbacyjne sformułowanie kwantowej grawitacji może być renormalizowalne. Kwantowa teoria pola jest *asymptotycznie bezpieczna*, jeśli odpowiadający jej przepływ grupy renormalizacji posiada ultrafioletowy niegaussowski punkt stały ze skończeniem wymiarową powierzchnią krytyczną. Taki scenariusz pozwala, aby kwantowa teoria pola była poprawnie zdefiniowana dla wszystkich energii, nawet jeżeli nie jest perturbacyjnie renormalizowalna. Szczególnym przypadkiem są teorie *asymptotycznie swobodne*, w których punkt stały jest gaussowski. W takich teoriach, do których zalicza się m.in. chromodynamika kwantowa, oddziaływania zanikają w granicy wysokich energii. Podejścia do kwantowej grawitacji wykorzystujące metody funkcjonalnej grupy renormalizacji pozwalają na wyznaczenia przepływu Wilsonowskiej grupy renormalizacji w przestrzeni teorii składającej się ze wszystkich funkcjonatów metryki niezmienniczych ze względu na dyfeomorfizmy [5]. Wyniki sugerują istnienie ultrafioletowego niegaussowskiego punktu stałego w myśl *bezpieczeństwa asymptotycznego* [6].

Istnieje wiele podejść do teorii kwantowej grawitacji próbujących rozwiązać problem perturbacyjnej nierenormalizowalności. Do najszerzej rozwijanych należy zaliczyć *teorię strun*, która próbuje zunifikować w ramach jednej struktury matematycznej wszystkie

znane oddziaływania: silne, słabe, elektromagnetyczne, a także grawitacyjne [7]. Oddziaływanie grawitacyjne pojawia się prawie jako produkt uboczny teorii, a ogólna teoria względności jest traktowana jako niskoenergetyczna granica efektywna pewnej teorii fundamentalnej. To podejście wymaga wprowadzenia wielu nowych stopni swobody, symetrii oraz dodatkowych wymiarów czasoprzestrzeni. Pomimo wielu sukcesów, teoria strun wciąż jednak nie rozwiązała wszystkich problemów na drodze do kwantowej teorii grawitacji.

Drugi nurt badań opiera się na metodach rozwijanych w ramach teorii pola, które próbuje zastosować do nieperturbacyjnego opisu oddziaływań grawitacyjnych. Ważnym kandydatem na teorię kwantowej grawitacji jest pętlowa kwantowa grawitacja (ang. *loop quantum gravity*) implementująca Diracowską procedurę kanonicznego kwantowania do ogólnej teorii względności [8, 9, 10]. W konsekwencji holonomie koneksji stają się obiektami kwantowymi. W pętlowej kwantowej grawitacji, kwantowa geometria przestrzeni jest reprezentowana przez *sieci spinowe*, które są grafami kolorowanymi przez spiny, czyli nieredukowalne reprezentacje grupy $SU(2)$. Z powyższego podejścia wywodzi się zredukowany model pętlowej kosmologii kwantowej (ang. *loop quantum cosmology*), który zakłada jednorodność oraz izotropowość geometrii i opisuje kwantową ewolucję czynnika skali przy użyciu efektywnego hamiltonianu [11]. Modele pian spinowych (ang. *spin foam*) mogą być postrzegane jako sformułowanie pętlowej kwantowej grawitacji w ujęciu całek po trajektoriach, zyskując w ten sposób pewne podobieństwo z modelem CDT [12]. Za łącznik pomiędzy modelami piany spinowej oraz modelem CDT, można uznać grupową teorię pola (ang. *group field theory*), która jest kwantową teorią pola na rozmaitościach będącymi grupami Liego [13]. Funkcja rozdziału teorii tej definiuje nieperturbacyjną sumę po topologiach oraz geometriach rozmaitości symplecjalnych i może służyć za sformułowanie kwantowej czasoprzestrzeni w ujęciu całek po trajektoriach.

Kolejnym podejściem są modele oparte o metody geometrii nieprzemiennej (ang. *non-commutative geometry*), w których algebrę przemienną funkcji gładkich na rozmaitości zastępuje się algebrą nieprzemienną. Wprowadzają one precyzyjny formalizm pozwalający definiować geometrię na takiej algebrze [14]. Innymi słowy, współrzędne czasoprzestrzenne stają się w ten sposób nieprzemienne. Tego typu modele stosuje się zwłaszcza w fenomenologicznych podejściach do kwantowej grawitacji, np. do opisu kwantowych poprawek do propagacji cząstek, które można zmierzyć w oparciu o obserwacje wysoko energetycznych zdarzeń astrofizycznych w odległym Wszechświecie.

Podejściem szczególnie minimalistycznym w założeniach jest teoria zbiorów kauzalnych (ang. *causal sets*), która traktuje czasoprzestrzeń jedynie jako dyskretny zbiór zdarzeń z nałożoną relacją częściowego porządku [15]. Istotnym wynikiem otrzymanym ostatnio było znalezienie działania odpowiadającego działaniu Einsteina-Hilberta. Wyrażono je poprzez funkcję liczby odpowiednich struktur występujących w zbiorze częściowo uporządkowanym [16].

Model Kauzalnych Dynamicznych Triangulacji jest sieciowym oraz nieperturbacyjnym sformulowaniem teorii kwantowej grawitacji i wpisuje się w scenariusz *bezpieczeństwa asymptotycznego*. Model ten, charakteryzujący się minimalizmem założeń, bazuje na ogólnej teorii względności, formalizmie całek po trajektoriach oraz ugruntowanych metodach kwantowej teorii pola. Na dużą wagę sieciowych teorii pola będących podstawą nieperturbacyjnych definicji ciągłych kwantowych teorii pola wskazał Wilson w latach siedemdziesiątych ubiegłego wieku [17].

4.3.2 Motywacja i cel naukowy cyklu prac

Bardzo obiecującym wynikiem otrzymanym w ramach czterowymiarowego modelu Kausalnych Dynamicznych Triangulacji jest dynamiczne wyłonienie się, jako semiklasycznego tła, geometrii de Sittera stanowiącej rozwiązanie klasycznych równań Einsteina, wraz z nałożonymi kwantowymi fluktuacjami objętości przestrzennej opisywanymi przez model minisuperspace. Należy podkreślić, że sam model CDT jest podejściem nieperturbacyjnym i niezależnym od tła, a tym samym nie wprowadza ręcznie żadnej wyróżnionej geometrii. Rezultat ten jest szczególnie istotny, ponieważ jest on następstwem współgrania zarówno entropii, jak i gołego działania. Jest to jeden z najbardziej niezwykłych i nietrywialnych efektów modelu – entropia dokładnie *odbudowuje* działanie efektywne w postaci minisuperspace, ale je stabilizuje zmieniając znak czynnika konforemnego. Większość zagadnień rozważanych w przedstawionym osiągnięciu naukowym dotyczy badania zachowania członów generowanych przez entropię i ich zależności od działania fizycznego. Dalsza weryfikacja modelu wymaga zdefiniowania nowych obserwabli, które są niezmiennicze względem dyfeomorfizmów czasoprzestrzeni, w celu sprawdzenia zgodności w granicy klasycznej z ogólną teorią względności.

Niezbędnym krokiem w sieciowych teoriach pola jest zdefiniowanie granicy ciągłej, która zazwyczaj związana jest z przemianą fazową drugiego bądź wyższego rzędu. Podczas zbliżania się do takiego przejścia długość korelacji wyrażona w jednostkach stałej sieci staje się rozbieżna, co pozwala, przy jednoczesnym zmierzaniu ze stałą sieci do zera, na poprawne zdefiniowanie granicy ciągłej.

Głównym celem prezentowanego cyklu prac było zbadanie najważniejszych własności modelu CDT i jego roli jako kandydata na kwantową teorię grawitacji. W ramach realizacji powyższego celu przeprowadzono analizę następujących zagadnień:

- Usprawniono metody wyznaczania działania efektywnego dla czynnika skali poprzez uwzględnienie różnych typów sympleksów oraz rozwinięto nowe skuteczne metody w oparciu o macierz transferu (zob. rozdziały 4.3.3 i 4.3.4, [H1, H2, H3, H4, H5]). Precyzyjne wyznaczenie działania efektywnego pozwala na obserwację poprawek kwantowych oraz porównanie z modelami kosmologicznymi minisuperspace.
- Definicja pętli Wilsona na kwantowych geometriach jako nowych obserwabli, które można powiązać z klasycznym skalarciem krzywizny (zob. rozdział 4.3.8, [H7]).
- Definicja i pomiar nowych parametrów porządku niezbędnych do wyznaczenia i zbadania przejść fazowych, m.in. *maksymalna krotność wierzchołków* i *fluktuacja objętości przestrzennych* (zob. rozdziały 4.3.5 i 4.3.6, [H5, H9, H10, H12]).
- Wyznaczono diagram fazowy i rodzaje przemian fazowych modelu (zob. rozdział 4.3.5, [H5, H9, H10, H12]).
- Zbadano przepływ gołych stałych sprzężenia w ramach grupy renormalizacji w celu wyznaczenia postulowanego ultrafioletowego punktu stałego i osiągnięcia granicy ciągłej (zob. rozdział 4.3.7, [H6]).
- Zbadano wpływ topologii poprzez analizę rezultatów dla sferycznej i toroidalnej topologii przestrzeni. Model CDT umożliwia kontrolę topologii czasoprzestrzeni, co pozwala na porównanie z innymi podejściami do kwantowej teorii grawitacji postulującymi różne sposoby sumowania po topologiach, m.in. modelami tensorowymi (ang. *tensor models*), grupowymi teoriami pola, pianami spinowymi (zob. rozdział 4.3.6, [H8, H11, H12]).

- Aby otrzymać realistyczny kwantowy model kosmologiczny niezbędne jest uwzględnienie pól materii. Przeprowadzono pierwsze badania nad diagramem fazowym uwzględniające wpływ dynamicznych pól skalarnych (zob. rozdział 4.3.5, [H10]).

Wszystkie wyniki omówione w przedstawionym cyklu prac otrzymano przy wykorzystaniu samodzielnie napisanego przez habilitanta oprogramowania do symulacji Monte Carlo opartego m.in. o algorytm Metropolisa-Hastingsa.

4.3.3 Model Kauzalnych Dynamicznych Triangulacji

Wyniki przedstawione poniżej opierają się na artykułach [H1, H2, H4].

Model Kauzalnych Dynamicznych Triangulacji jest obiecującym kandydatem na teorię kwantowej grawitacji. Model ten jest niezależnym od tła i w konsekwencji nieperturbacyjnym podejściem do problemu kwantowania ogólnej teorii względności opartym o elementarne zasady fizyki teoretycznej: formalizm całek po trajektoriach i regularyzacja sieciowa [18, 19].

W odróżnieniu od innych znanych oddziaływań fundamentalnych, ogólna teoria względności będąca klasyczną teorią grawitacji opisuje dynamikę samej czasoprzestrzeni, w której rozważanym stopniem swobody jest geometria opisana tensorem metrycznym $g_{\mu\nu}(x)$. Punktem wyjścia do konstrukcji kwantowej teorii grawitacji jest klasyczne działanie Einsteina-Hilberta w czterech wymiarach

$$S_{EH}[g_{\mu\nu}] = \frac{1}{16\pi G} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-\det g} (R - 2\Lambda), \quad (1)$$

gdzie G i Λ to odpowiednio stała grawitacji i stała kosmologiczna, $\mathcal{M}$ to rozmaitość czasoprzestrzenna z pseudoriemannowską metryką $g_{\mu\nu}$ o sygnaturze Minkowskiego $\{-, +, +, +\}$, a R oznacza powiązany z nią skalar krzywizny Ricciego [20, 21] (sygnatura oraz konwencja na podstawie [22, 23]). W powyższym wzorze użyto naturalnego systemu *jednostek Plancka*, $c = \hbar = 1$, oraz przyjęto, że rozmaitość $\mathcal{M}$ nie posiada brzegu.

Metoda CDT w naturalny sposób dostosowuje do czterowymiarowych czasoprzestrzeni procedurę dyskretyzacji feynmanowskich całek po trajektoriach, które są jednym z podstawowych narzędzi służących do kwantowania klasycznych teorii pola. Formalna grawitacyjna całka po trajektoriach zdefiniowana jest jako superpozycja wszystkich wirtualnych *trajektorii* Wszechświata, reprezentowanych przez czterowymiarowe geometrie czasoprzestrzeni, ważonych działaniem Einsteina-Hilberta,

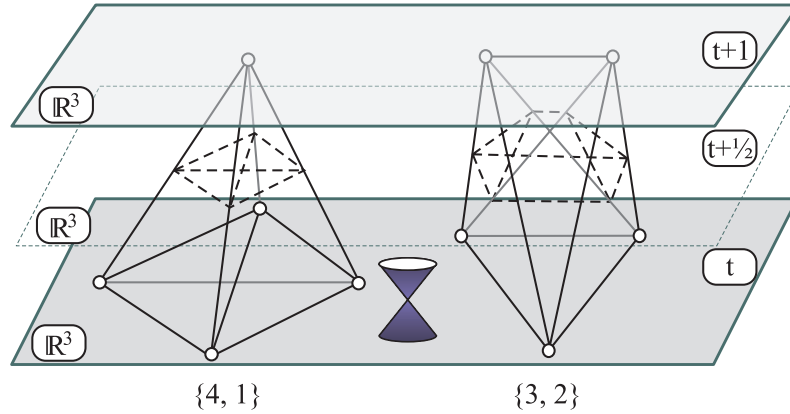
$$Z = \int \mathcal{D}_{\mathcal{M}}[g] e^{iS_{EH}[g]}. \quad (2)$$

Geometria $[g]$, inaczej nazywaną *historią*, to klasa równoważności na zbiorze metryk czasoprzestrzennych g względem dyfeomorfizmów na rozmaitości $\mathcal{M}$. Dyfeomorfizmy te tworzą grupę $\text{Diff}(\mathcal{M})$.

Regularyzacja sieciowa. Prawidłowa definicja całki po trajektoriach w kontekście kwantowej teorii pola wymaga wprowadzenia odpowiednich metod regularyzacji. Jednym ze standardowych sposobów jest dyskretyzacja czasoprzestrzeni, w którym gładką geometrię zastępuje się przez sieć o stałej sieci a . Model Kauzalnych Dynamicznych Triangulacji wprowadza taką sieciową regularyzację historii czasoprzestrzennych pojawiających się w formalnej grawitacyjnej całce po trajektoriach (2). Procedura dyskretyzacji zastępuje całkę funkcjonalną przez sumę po *kauzalnych triangulacjach* $\mathcal{T}$ tworzących przeliczalny zbiór $\mathbb{T}$. W ten sposób dostarcza nieperturbacyjnej definicji grawitacyjnej funkcji rozdziału przez wyszczególnienie klasy geometrii czasoprzestrzennych, które należy uwzględnić w kwantowej superpozycji amplitud ¹,

$$Z \equiv \sum_{\mathcal{T} \in \mathbb{T}} e^{iS[\mathcal{T}]}. \quad (3)$$

¹ Suma po triangulacjach zawiera również czynnik symetrii $C_{\mathcal{T}}$ będący rzędem grupy automorfizmów grafu $\mathcal{T}$. Można go interpretować jako pozostałość po objętości grupy dyfeomorfizmów występującej w mierze $\mathcal{D}_{\mathcal{M}}[g] = \frac{\mathcal{D}_{\mathcal{M}}[g]}{\text{Vol}[\text{Diff}(\mathcal{M})]}$. Dla przejrzystości, będziemy pomijać człon $\frac{1}{C_{\mathcal{T}}}$, mając na uwadze, że występuje on pod każdą sumą po zbiorze $\mathbb{T}$. Ponieważ symulacje komputerowe operują na triangulacjach etykietowanych, czynnik ten jest automatycznie uwzględniany.

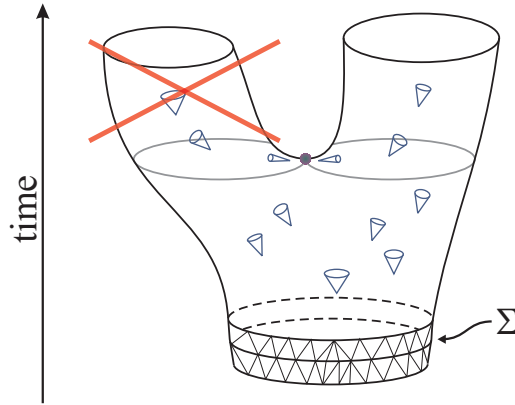


Rysunek 1: Wizualizacja dwóch typów czterosympleksów, podstawowych składników czterowymiarowego modelu Kauzalnych Dynamicznych Triangulacji. Sympleksy łączą dwie kolejne warstwy czasowe t i $t+1$. W zależności od liczby wierzchołków w każdej warstwie możemy wyróżnić sympleksy typu $\{4, 1\}$ i typu $\{3, 2\}$. Sympleksy posiadają płaską metrykę Minkowskiego, która wyznacza strukturę stożka świetlnego zaznaczoną na rysunku

Model nie postuluje dyskretnego charakteru Wszechświata, a jedynie wprowadza dyskretyzację jako metodę regularyzacji, która ostatecznie ma zostać wyeliminowana w granicy ciągłej. Długość krawędzi sympleksów a pełni rolę ultrafioletowego parametru obcięcia (ang. *cut-off*). Granicę ciągłą definiuje się jako przejście $a \rightarrow 0$, a opis własności teorii w tej granicy jest bardzo zbliżony do dyskusji zachowania w otoczeniu punktu krytycznego w fizyce statystycznej. Ta procedura może wymagać renormalizacji gołych stałych sprzężenia, aby zapewnić zachowanie pewnych wielkości fizycznych, takich jak objętość czy odległość.

Podstawowym budulcem triangulacji jest sympleks, który jest uogólnieniem do wyższych wymiarów trójkąta będącego dwuwymiarowym sympleksem. Czterosympleks to podzbiór czterowymiarowej przestrzeni Minkowskiego wyznaczony przez pięć niewspółliniowych wierzchołków parami połączonych krawędziami. Metryka indukowana wewnątrz każdego sympleksu jest płaska i wyznacza strukturę stożka świetlnego. Rysunek 1 przedstawia wizualizację dwóch typów czterosympleksów wraz ze strukturą stożka świetlnego. W czterowymiarowym modelu CDT, triangulacja oznacza czterowymiarową rozmaitość symplecjalaną o zadanej topologii złożoną z sympleksów odpowiednio złączonych parami wzdłuż czworosiecznych boków. Metryka triangulacji jest wyznaczona przez metryki poszczególnych sympleksów i strukturę ich połączeń, zaś krzywizna jest osobliwa i zlokalizowana na trójkątach. W ogólności taki kompleks symplecjalny posiada niezerową krzywiznę i nie da się go zanurzyć w przestrzeni $\mathbb{R}^4$.

Kauzalność. Głównym założeniem modelu jest istnienie globalnej foliacji całej czasoprzestrzeni, której liście indeksowane są współrzędną czasową. Pierwotne, euklidesowe podejście dynamicznych triangulacji nie wprowadzało wyróżnionego kierunku czasowego, było jednak obarczone szeregiem problemów. W czterowymiarowym euklidesowym modelu występują jedynie dwie fazy [25], które charakteryzuje odpowiednio *zapadnięta* geometria (ang. *collapsed phase*) i *spolimeryzowana* geometria (ang. *branched polymers phase*). Fazy te oddzielone są przejściem pierwszego rodzaju, z czym wiąże się brak możliwości poprawnego zdefiniowania granicy ciągłej. W obu fazach geometryczne własności konfiguracji znacząco różnią się od własności obserwowalnego Wszechświata (np. wymiarowość). Ponadto triangulacje dające wkład do całki po trajektoriach są zdominowane przez tworzenie



Rysunek 2: Wizualizacja dwuwymiarowej triangulacji wraz ze strukturą stożków świetlnych. Wyróżniony punkt oznacza rozgałęzienie czasoprzestrzeni. Model Kauzalnych Dynamicznych Triangulacji zabrania zmiany topologii przekrojów przestrzennych Σ

się wszechświatów niemowlęcych (ang. *baby universes*) i osobliwości kausalnych wynikających z braku zachowania topologii przestrzeni. Konsekwencją tego jest problem związany z różnym skalowaniem się czasu i przestrzeni.

Wprowadzenie warunku kausalności pozwoliło rozwiązać powyższe trudności. Ponadto oryginalna Lorentzowska sygnatura czasoprzestrzeni sugeruje, że tylko geometrie przyczynowe powinny dawać wkład do grawitacyjnej całki po trajektoriach [27, 28]. Warunek ten polega na założeniu globalnej hiperboliczności czasoprzestrzeni dla wszystkich trajektorii kwantowych i wprowadzeniu foliacji całej czasoprzestrzeni, której liście, nazywane *przekrojami*, tworzą trójwymiarowe przestrzenne powierzchnie Cauchy’ego Σ o ustalonej topologii. Z reguły zmiana topologii przekrojów przestrzennych wiąże się z naruszeniem przyczynowości. Rysunek 2 przedstawia dwuwymiarową triangulację wraz z narzuconą foliacją, dla której naruszony jest warunek przyczynowości. Dla wygody ustalamy okresowe warunki brzegowe w kierunku czasowym z topologią czasoprzestrzeni $\mathcal{M} = S^1 \times \Sigma$. Wybór ten jest techniczny i pozwala na pominięcie członów brzegowych. W dalszej części rozważymy dwa przypadki topologii przestrzeni, sferycznej ($\Sigma = S^3$) oraz toroidalnej ($\Sigma = T^3$).

W przypadku dyskretnym przekroje przestrzenne $\mathcal{T}^{(3)}(t)$, numerowane przez współrzędną *czasową* $t \in \mathbb{Z}$, są trójwymiarowymi triangulacjami rozmaitości Σ . Przekroje składają się z równobocznych czworościanów, których krawędzie mają długość $a_s > 0$. Metryka indukowana przestrzennych czworościanów jest metryką euklidesową. Każdemu wierzchołkowi triangulacji przypisana jest współrzędna czasowa t , odpowiadająca numerowi przekroju, do którego należy wierzchołek. Sąsiadujące przekroje $\mathcal{T}^{(3)}(t)$ i $\mathcal{T}^{(3)}(t+1)$ połączone są czterosympleksami w taki sposób aby formowały czterowymiarową warstwę o topologii $[0, 1] \times \Sigma$. Warstwy są połączone w szereg jedna za drugą tworząc rozmaitość symplecjalaną ze strukturą kausalną. Kolejne przekroje w całości leżą w przyszłości wcześniejszych przekrojów.

Foliacja wprowadza rozróżnienie krawędzi na czasowe i przestrzenne. Krawędzie przestrzenne o długości $a_s > 0$ łączą dwa wierzchołki w tym samym przekroju, zaś krawędzie czasowe o długości a_t łączą wierzchołki w sąsiadujących przekrojach. W modelu Kauzalnych Dynamicznych Triangulacji długości a_s i a_t są stałe, ale niekoniecznie równe co wprowadza współczynnik asymetrii α , taki że $a_t^2 = \alpha \cdot a_s^2$. W przypadku Lorentzowskim współczynnik α jest ujemny. Podobnie można wyróżnić dwa rodzaje czterosympleksów. Sympleksy typu $\{4, 1\}$ składają się z czterech wierzchołków w jednym przekroju tworzących czworościan przestrzenny, zaś piąty wierzchołek leży w poprzednim lub następnym

przekroju. Sympleksy drugiego typu, nazywanego $\{3, 2\}$, składają się z trzech wierzchołków leżących w jednym przekroju i dwóch wierzchołków w poprzednim lub następnym. Rysunek 1 ilustruje czterosympleksy typu $\{4, 1\}$ i $\{3, 2\}$ łączące przekroje $\mathcal{T}^{(3)}(t)$ i $\mathcal{T}^{(3)}(t+1)$. Objętości i geometria (kąty) sympleksów są różne dla obu typów i zależą jedynie od długości a_s oraz a_t . Ponieważ model CDT nie wprowadza układu współrzędnych, jest on jawnie niezmienniczy względem transformacji dyfeomorficznych zachowujących foliację (zmiany układu współrzędnych). Omawiane sformułowanie wykorzystuje jedynie niezmienniki geometryczne takie jak długości czy kąty.

Działanie Reggego. Działanie Einsteina-Hilberta (1) posiada naturalną realizację na rozmaitościach sympleksyjnych. Dla danej czterowymiarowej kauzalnej triangulacji $\mathcal{T}$ oznaczmy przez N_{41} liczbę sympleksów typu $\{4, 1\}$, a przez N_{32} liczbę sympleksów typu $\{3, 2\}$. Całkowita liczba sympleksów wynosi zatem $N_4 = N_{41} + N_{32}$. Całkowita fizyczna czterowymiarowa objętość triangulacji $\int_{\mathcal{T}} d^4x \sqrt{|\det g|}$ wyraża się przez kombinację liniową N_{41} i N_{32} . Podobnie, globalna krzywizna $\int_{\mathcal{T}} d^4x \sqrt{|\det g|} R$, którą można określić za pomocą deficytu kąta wokół trójkątów, jest liniową funkcją N_{32} , N_{41} oraz liczby wierzchołków N_0 [H1]. Działanie Einsteina-Hilberta (1) wyznaczone dla triangulacji $\mathcal{T}$ sprowadza się do prostego wzoru

$$S[\mathcal{T}] \equiv -K_0 N_0[\mathcal{T}] + K_4 N_4[\mathcal{T}] + \Delta (N_{41}[\mathcal{T}] - 6N_0[\mathcal{T}]). \quad (4)$$

Powyższe wyrażenie nazywane jest *działaniem Reggego*. Gole stałe sprzężenia K_0 , K_4 i Δ są wielkościami bezwymiarowymi i wyrażają się przez funkcje stałych G i Λ , które pojawiają się w działaniu ciągłym (1), oraz współczynnika asymetrii α [H1]. Na tym etapie znika zależność od stałej sieci a , którą następnie trzeba będzie odtworzyć. Stała K_4 jest sprzężona z N_4 i kontroluje całkowitą liczbę sympleksów, która odpowiada dyskretnej objętości, i z tego względu jest odpowiednikiem stałej kosmologicznej. Z kolei K_0 jest związane z odwrotnością stałej grawitacji G , a Δ ze współczynnikiem asymetrii α . W przypadku euklidesowym stała Δ nie występuje, jednak tutaj pełni ważną rolę ponieważ pozwala zaobserwować nowe fazy.

Obrót Wicka. W przeciwieństwie do przypadku dwuwymiarowego, w czterech wymiarach nie mamy dostępu do odpowiednich metod analitycznych i w znaczącym stopniu musimy posilkować się obliczeniami komputerowymi, aby uzyskać informacje o nieperturbacyjnych fluktuacjach geometrii. Oscylacyjny charakter całki (3) wyklucza użycie technik numerycznych. Poprawne zdefiniowanie funkcji rozdziału wymaga by wagi konfiguracji dających wkład do całki po trajektoriach były prawdopodobieństwami, czyli nieujemnymi liczbami rzeczywistymi.

Umożliwia to zastosowanie w badaniach symulacji numerycznych, w szczególności metod Monte Carlo. Problem oscylacji można ominąć stosując matematyczną procedurę nazywaną *obrotem Wicka*, która, ogólnie rzecz ujmując, sprowadza się do przedłużenia analitycznego współrzędnej czasowej do wartości urojonych. Wynikiem jest zmiana sygnatury czasoprzestrzeni z lorentzowskiej na euklidesową, a zespolone amplitudy zastąpione są rzeczywistymi prawdopodobieństwami $e^{iS^{Lor}} \rightarrow e^{-S^{Euc}}$. Wprowadzenie foliacji pozwala na rozróżnienie między krawędziami przestrzennymi i czasowymi, w wyniku czego obrót Wicka jest poprawnie zdefiniowany i polega na przedłużeniu analitycznym długości krawędzi czasowych, $a_t \rightarrow ia_t$,

$$a_t^2 = \alpha \cdot a_s^2, \quad \alpha > 0.$$

Działanie Reggego po obrocie do sektora euklidesowego i redefinicji $S^{Euc} = -iS^{Lor}$ posiada dokładnie taką samą postać, jak jego oryginalna lorentzowska wersja (4). Szczegóły

dotyczące wyprowadzenia wzoru na działanie Reggego po obrocie Wicka można znaleźć w [19].

W wyniku regularyzacji sieciowej oraz obrotu Wicka zagadnienie zostało sprowadzone do modelu mechaniki statystycznej, który możemy badać przy pomocy symulacji komputerowych. Ostatecznie, funkcję rozdziału (2) możemy zapisać jako rzeczywistą sumę po wszystkich kauzalnych triangulacjach,

$$Z = \sum_{\mathcal{T} \in \mathbb{T}} e^{-S[\mathcal{T}]}. \quad (5)$$

Zarówno euklidesowe działanie Reggego $S[\mathcal{T}]$, jak i funkcja rozdziału Z , zależą od gołych stałych sprzężenia K_0 , K_4 i Δ .

Obliczenia numeryczne. Formalna grawitacyjna całka po trajektoriach (2) po obrocie Wicka definiuje kwantową wartość oczekiwaną² obserwabli $\mathcal{O}[g]$ wyznaczonej dla geometrii $[g]$,

$$\langle \mathcal{O}[g] \rangle \equiv \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}[g] e^{-S_{EH}[g]}. \quad (6)$$

Podobnie, rozkład prawdopodobieństwa $P[\mathcal{T}] = \frac{1}{Z} e^{-S[\mathcal{T}]}$ związany z funkcją rozdziału (5), definiuje dyskretny odpowiednik

$$\langle \mathcal{O}[\mathcal{T}] \rangle \equiv \frac{1}{Z} \sum_{\mathcal{T} \in \mathbb{T}} \mathcal{O}[\mathcal{T}] e^{-S[\mathcal{T}]}. \quad (7)$$

W tym przypadku obserwabla odpowiada pomiarowi dokonanemu na triangulacji $\mathcal{T}$.

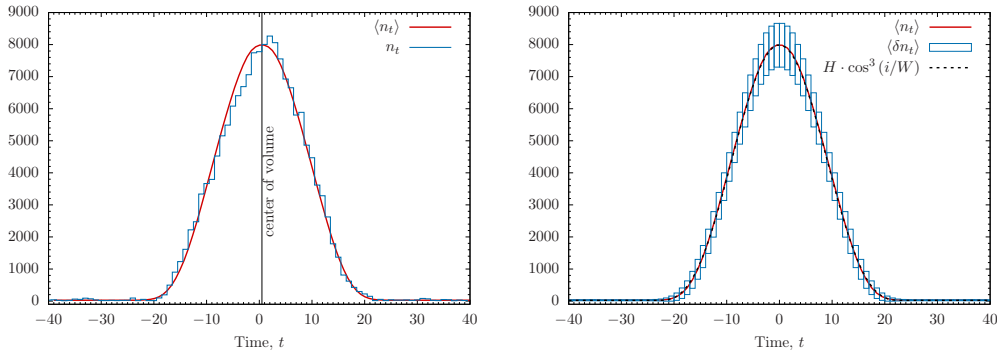
Wprowadzenie regularyzacji sieciowej kwantowej grawitacji w modelu CDT pozwala na zastosowanie metod Monte Carlo. Liczba triangulacji o skończonej objętości jest skończona, niemniej rośnie ona wykładniczo z liczbą sympleksów N_4 . Funkcja rozdziału (5) definiuje wolny od oscylacji model statystyczny. Wzór ten jest podstawą symulacji komputerowych opartych o dostosowany do modelu algorytm Metropolis-Hastingsa [29, 30]. Symulacje mają za zadanie wygenerowanie zbioru $\{\mathcal{T}^{(k)}, k = 1 \dots K\}$ statystycznie niezależnych konfiguracji Monte Carlo, czyli kauzalnych triangulacji, które następnie służą do oszacowania wartości oczekiwanej obserwabli $\mathcal{O}[\mathcal{T}]$,

$$\langle \mathcal{O}[\mathcal{T}] \rangle \approx \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathcal{O}[\mathcal{T}^{(k)}]. \quad (8)$$

Algorytm Monte Carlo generuje triangulacje $\mathcal{T}$ zgodnie z rozkładem prawdopodobieństwa $P[\mathcal{T}]$, dlatego nie występuje on w sposób jawny w powyższym wzorze.

Geometria tła. Ważnym i obiecującym wynikiem otrzymanym w ramach czterowymiarowego modelu CDT jest dynamiczne wyłonienie się semiklasycznej geometrii tła zgodnej z równaniami Einsteina [112] wraz z kwantowymi fluktuacjami objętości przestrzennej opisywanymi przez model minisuperspace Hartla i Hawkinga [26]. Ten efekt pochodzi zarówno od *golego działania Reggego* będącego dyskretną realizacją działania Einsteina-Hilberta, jak i *entropii*, która jest miarą liczby triangulacji (geometrii). Wynik ten jest bardzo nietrywialny, ponieważ, jak zostanie wykazane, entropia *odbudowuje* dokładnie działanie efektywne w postaci minisuperspace, ale je stabilizuje zmieniając znak składowej konforemnej.

² Z punktu widzenia kwantowej teorii pola, rozważana wartość oczekiwana odpowiada funkcji Greena z periodycznymi warunkami brzegowymi w kierunku czasowym.



Rysunek 3: Po lewej: Profil objętości przestrzennej n_t dla typowej konfiguracji (niebieska linia) w fazie de Sittera oraz wartość oczekiwana $\langle n_t \rangle$ (czerwona linia). Wyniki symulacji Monte Carlo dla $N_{41} = 160000$, $K_0 = 2.2$ i $\Delta = 0.6$ ($\Sigma = S^3$). Po prawej: Amplituda fluktuacji kwantowych objętości przestrzennej (niebieska linia) wokół wartości średniej (czerwona linia). Czarną przerywaną linią zaznaczono dopasowaną funkcję opisaną wzorem (9)

Wyniki omówione w niniejszym rozdziale dotyczą fazy de Sittera, a większość rachunków przeprowadzono w głębi tej fazy w jednym punkcie przestrzeni rozpiętej przez gołe stałe sprężenia.

W modelu dyskretnym podstawową obserwabłą, która dostarcza istotnych informacji o geometrii Wszechświata, jest *trójwymiarowa objętość przestrzenna* n_t zdefiniowana jako liczba czworościanów wchodzących w skład przekroju $\mathcal{T}^{(3)}(t)$. Objętości poszczególnych przekrojów sumują się do całkowitej objętości $N = N_{41} = 2 \cdot \sum_{t=1}^T n_t$, gdzie indeks $t = 1, \dots, T$ jest dyskretną współrzędną czasową numerującą przekroje.

Pojedyncza historia czasoprzestrzeni dająca wkład do funkcji rozdziału (5) nie jest trajektorią fizyczną, dokładnie w taki sam sposób, jak nie są nimi trajektorie cząstki w kwantowo-mechanicznej całce po trajektoriach. Natomiast całkowicie uzasadnione jest rozważanie *wartości oczekiwanych* obserwabli, np. $\langle n_t \rangle$ lub $\langle (n_t - \langle n_t \rangle)^2 \rangle$. Zawężając nasze rozważania do objętości przestrzennej n_t , redukujemy zagadnienie do jednowymiarowej mechaniki kwantowej.

W przypadku sferycznej topologii przekrojów przestrzennych ($\Sigma = S^3$), w pewnym obszarze stałych sprężenia, tzw. fazie de Sittera, dla typowych konfiguracji obserwujemy spontaniczne złamanie symetrii translacyjnej w kierunku czasowym. Rozkład objętości przestrzennych n_t przyjmuje kształt *dzwonowaty*. Profil przykładowej konfiguracji jest przedstawiony na rysunku 3 (niebieska linia) dla całkowitej objętości $N_{41} = 160000$ i okresie czasowym $T = 80$. Dla tej objętości, Wszechświat nie rozciąga się wzdłuż całej osi czasowej, ale jest zlokalizowany w krótszym zakresie.

Działanie Einsteina-Hilberta, i w konsekwencji działanie Reggego, jest niezmiennicze ze względu na translację w czasie. Dla periodycznych warunków brzegowych w kierunku czasowym bezpośrednio wyliczona wartość oczekiwana $\langle n_t \rangle$ byłaby funkcją stałą w czasie t i nie uwzględniałaby charakteru poszczególnych konfiguracji. Dlatego, aby uzyskać poprawny profil $\langle n_t \rangle$, przed wyliczeniem wartości średniej (8) należy *wycentrować* triangulacje ustalając położenie ich *środką masy* [I23].

Rysunek 3 (po prawej) przedstawia wartości oczekiwane $\langle n_t \rangle$ (czerwona linia) zmierzone w fazie de Sittera według powyższej procedury. Na wykresie zaznaczono amplitudę fluktuacji kwantowych objętości wokół średniej za pomocą niebieskich pudełek, których wysokość jest równa odchyleniu standardowemu $\sigma_t = \sqrt{\langle n_t^2 \rangle - \langle n_t \rangle^2}$.

Otrzymane wyniki z dużą precyzją wskazują, że uśredniony profil objętości $\langle n_t \rangle$, który odpowiada klasycznej trajektorii, jest opisany formułą

$$\langle n_t \rangle = H \cdot \cos^3(t/W). \quad (9)$$

W powyższym wzorze W oznacza rozciągłość czasową Wszechświata, a H to maksymalna objętość przestrzenna. Wykres funkcji (9) z dopasowanymi wartościami H i W , zaznaczony czarną przerywaną linią na rysunku 3 po prawej, dokładnie pokrywa się z empirycznie wyznaczoną krzywą $\langle n_t \rangle$ (czerwona linia). Równanie (9) odpowiada maksymalnie symetrycznemu rozwiązaniu klasycznych równań Einsteina z dodatnią stałą kosmologiczną, czyli euklidesowej przestrzeni de Sittera będącą geometrią czterowymiarowej sfery S^4 [H1]. Pomimo że konstrukcja wymusza topologię czasoprzestrzeni $\mathcal{M} = S^1 \times S^3$, w granicy dużego N łodyga kurczy się do rozmiarów rzędu a i topologia przeistacza się w S^4 .

Model CDT jest niezależny od tła i na żadnym etapie nie wprowadza ręcznie geometrii tła, jednak taka klasyczna geometria opisana wzorem (9) wyłania się dynamicznie. Podstawowym testem, któremu podlega każda teoria kwantowa, jest jej zgodność w granicy klasycznej z teorią klasyczną. Z tego punktu widzenia, wynik ten jest bardzo istotny i wyróżnia omawiane podejście na tle innych kandydatów ma teorię kwantowej grawitacji.

Model minisuperspace. Trajektorja opisana wzorem (9), $\langle n_t \rangle = H \cdot \cos^3(t/W)$, pojawia się jako klasyczne rozwiązanie maksymalnie symetrycznego modelu *minisuperspace*. Ten model kosmologii kwantowej został wprowadzony przez Hartle i Hawkinga w pracy dotyczącej semiklasycznej ewolucji funkcji falowej Wszechświata [26]. Zakłada on jednorodność oraz izotropowość przestrzeni polegającą na eliminacji wszystkich stopni swobody oprócz trójwymiarowej objętości (czynnika skali). Euklidesowa metryka czasoprzestrzeni w modelu minisuperspace dana jest przez

$$ds^2 = d\tau^2 + a^2(\tau)d\Omega_3^2, \quad (10)$$

gdzie $a(\tau)$ oznacza *czynnik skali* zależny od czasu właściwego τ , a $d\Omega_3^2$ jest elementem liniowym geometrii przestrzennej jednostkowej trójwymiarowej sfery (dla $\Sigma = S^3$). Czynnik skali wyznacza fizyczną objętość przekroju przestrzennego, $v(\tau) = \int d\Omega_3 \sqrt{\det g|_{S^3}} = 2\pi^2 a(\tau)^3$.

Wstawiając metrykę (10) do działania Einsteina-Hilberta (1) w wersji euklidesowej otrzymamy działanie minisuperspace

$$S[v] = -\frac{1}{24\pi G} \int d\tau \left(\frac{\dot{v}^2}{v} + \beta v^{1/3} - 3\Lambda v \right), \quad \beta = 9(2\pi^2)^{2/3}. \quad (11)$$

Fizyczna stała G występująca w powyższym wzorze na efektywne działanie określa fizyczne kwantowe efekty i mierzy wielkość kwantowych fluktuacji wokół rozwiązania semiklasycznego. Jej relacja ze stałą K_0 i pozostałymi gołymi stałymi sprzężenia jest nietrywialna.

Działanie Einsteina-Hilberta po obrocie Wicka cechuje nieograniczony od dołu mod konforemny. W działaniu minisuperspace (11) uwidacznia się to poprzez ujemny znak wyrazu kinetycznego. W konsekwencji działanie Reggego (4) również nie jest ograniczone od dołu, jednak ze względu na ultrafioletową regularyzację sieciową jest ono zawsze skończone dla pojedynczej triangulacji. Ponieważ CDT jest modelem nieperturbacyjnym, funkcja rozdziału (5) wyłania się w wyniku subtelnej współgrania entropicznej natury triangulacji oraz gołego działania (4). Okazuje się, że *czynnik entropiczny*, odpowiadający liczbie triangulacji o danej wartości działania, tłumi nieograniczony wkład pochodzący od czynnika konforemny poprzez zmianę jego znaku. Ponadto *efektywne działanie* dla

objętości n_t zgadza się z działaniem minisuperspace (11) z przeciwnym znakiem wyrazu kinetycznego i w konsekwencji jest ograniczone od dołu [36]. Powyższy problem stanie się znów istotny w granicy ciągłej. Wraz ze zbieganiem się stałych sprzężenia do potencjalnego punktu krytycznego, czynnik entropiczny oraz działanie powinny się równoważyć i można mieć nadzieję na osiągnięcie w tej granicy poprawnego zachowania.

Klasyczna trajektoria, która jest rozwiązaniem równań Eulera-Lagrange'a dla działania minisuperspace (11), wyraża się wzorem

$$v(\tau) = 2\pi^2 R^3 \cos^3\left(\frac{\tau}{R}\right), \quad R = (\Lambda/3)^{-1/2}. \quad (12)$$

Fizyczna objętość $v(\tau)$ opisuje maksymalnie symetryczną przestrzeń dla dodatniej stałej kosmologicznej, czyli euklidesowy Wszechświat de Sittera będący czterowymiarową sferą S^4 o promieniu R .

Identyczne rozwiązanie *wylania się dynamicznie* jako geometria tła w pełnym modelu CDT (por. (9)). Należy zaznaczyć, że w tym modelu nie pomijamy żadnych stopni swobody. Ograniczając analizę do n_t , wycalkowujemy wszystkie stopnie swobody oprócz czynnika skali $a(\tau)$. Pomimo tej istotnej różnicy wyniki w obu przypadkach są zaskakująco podobne.

Działanie efektywne i macierz kowariancji. Zadziwiająca zgodność wartości oczekiwanych operatora n_t (9) z trajektorią klasyczną modelu minisuperspace (12) zachęca do zadania pytania czy również kwantowe fluktuacje objętości są poprawnie opisywane przez działanie uproszczonego modelu. Odpowiedź na to pytanie wymaga wyznaczenia działania efektywnego dla objętości przestrzennych n_t , a następnie porównania go z działaniem minisuperspace. Model CDT jest w pełni nieperturbacyjnym podejściem do kwantowej grawitacji i bierze pod uwagę zarówno *czynniki entropiczne*, jak i *gole działanie* (4). W niniejszym rozdziale wykażemy, że entropia odtwarza działanie efektywne odpowiadające działaniu minisuperspace (11) z przeciwnym znakiem składowej konforemnej, co prowadzi do jego stabilizacji. Ten efekt stanowi jeden z najciekawszych i niezwykłych własności modelu. Na podstawie rysunku 3 można wywnioskować, że amplituda fluktuacji objętości n_t wokół średniej jest mała. Uzasadnia to zastosowanie przybliżenia semiklasycznego do wyznaczenia działania efektywnego, które kontroluje objętość przestrzenną n_t .

Zawężając analizę do objętości n_t redukujemy zagadnienie do jednowymiarowej mechaniki kwantowej. Powołując się na analogię z jej sformułowaniem w języku całek po trajektoriach, wartość n_t odpowiada pozycji cząstki w kroku czasowym t na wirtualnej trajektorii dającej wkład do funkcji rozdziału. Oznaczmy przez $\eta_t = n_t - \langle n_t \rangle$ odchylenie położenia od wartości średniej. Przybliżenie semiklasyczne polega na rozwinięciu działania do członów kwadratowych w η_t ,

$$S[n = \langle n \rangle + \eta] \approx S[\langle n \rangle] + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \eta_i \mathbf{P}_{ij} \eta_j + O(\eta^3),$$

gdzie suma następuje po przekrojach $i, j = 1 \dots T$. Operator Sturm-Liouville $\mathbf{P}$ dostarcza informacji o fluktuacjach kwantowych, a jednocześnie może zostać wyznaczony na podstawie danych numerycznych. Elementy operatora $\mathbf{P}$ wyrażają się przez drugą pochodną działania wyznaczoną na trajektorii klasycznej,

$$\mathbf{P}_{ij} = \left. \frac{\partial^2 S[n]}{\partial n_i \partial n_j} \right|_{n=\langle n \rangle}. \quad (13)$$

Ponieważ Kauzalne Dynamiczne Triangulacje są modelem sieciowym, a symulacje komputerowe operują na skończonych konfiguracjach, porównanie wyników numerycznych z modelem teoretycznym powinno być przeprowadzone na poziomie dyskretnym. Dyskretna i bezwymiarowa wersja działania minisuperspace (11) z dokładnością do znaku dana jest wzorem

$$S[\{n_t\}] = \frac{1}{\Gamma} \sum_t \left(\frac{(n_{t+1} - n_t)^2}{n_{t+1} + n_t} + \mu n_t^{1/3} - \lambda n_t \right). \quad (14)$$

Stałe G, Λ, β występujące w (11) oraz krok czasowy zostały włączone do symboli Γ, μ, λ . Zastosowano tutaj standardową dyskretyzację pochodnej czasowej, $\dot{v} \rightarrow n_{t+1} - n_t$. Elementy macierzy $\mathbf{P}$ wyznaczone dla działania (14) na podstawie wzoru (13) wynoszą

$$\eta_i \mathbf{P}_{ij} \eta_j = \sum_i \frac{(\eta_{i+1} - \eta_i)^2}{k_i} - u_i \eta_i^2, \quad k_t \approx \Gamma \cdot \langle n_t \rangle, \quad u_t = \frac{\mu}{\Gamma} \langle n_t \rangle^{-5/3}. \quad (15)$$

Współczynnik kinetyczny k_t daje wkład do elementów nad/poddiagonalnych i dla dużych objętości jest proporcjonalny do średniej $\langle n_t \rangle$. Przekroje o małej liczbie sympleksów są zdominowane przez silne efekty dyskretyzacyjne. Szczegółowe zachowanie w tym obszarze zbadano w pracy [H3]. Część potencjalna u_t dająca wkład jedynie do elementów diagonalnych zachowuje się jak $\langle n_t \rangle^{-5/3}$ [I18].

W przybliżeniu semiklasycznym macierz $\mathbf{P}$ jest ściśle powiązana z propagatorem $\mathbf{C}$,

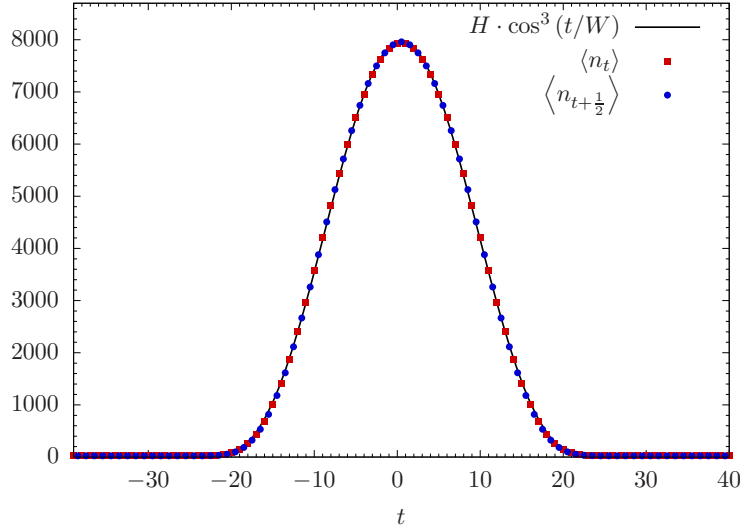
$$\mathbf{P} = \mathbf{C}^{-1}, \text{ gdzie } \mathbf{C}_{ij} \equiv \langle \eta_i \eta_j \rangle. \quad (16)$$

Macierz kowariancji $\mathbf{C}$ dla fluktuacji objętości można wyznaczyć empirycznie przy użyciu technik Monte Carlo, podobnie jak to zrobiono dla wartości oczekiwanej $\langle n_t \rangle$. Odwracając propagator otrzymamy macierz $\mathbf{P}$, którą należy porównać z przewidywaniami (15). Przybliżenie semiklasyczne jest wiarygodne w obszarze dużych objętości, gdzie n_t można traktować jako zmienną ciągłą. Czasami, ze względów numerycznych, pomiar przeprowadza się tylko dla konfiguracji o ustalonej całkowitej objętości N_{41} . Wówczas macierz $\mathbf{C}$ posiada mod zerowy, który należy usunąć, aby można było wyliczyć jej odwrotność. Szczegóły tej procedury można znaleźć w [I11].

Okazuje się, że tak wyznaczona macierz $\mathbf{P}$ rzeczywiście zgadza się z przewidywaniami (15) z dokładnością do znaku, którego zmiana wynika z uwzględnienia entropii [H1, H11]. W szczególności interesujące jest potwierdzenie istnienia podwiodącego członu potencjalnego postaci $\mu n_t^{1/3}$, który wynika z wyznaczonego współczynnika u_t . Jego pojawienie się jest szczególnie ważne, ponieważ potwierdza odtworzenie modelu minisuperspace dla sferycznej topologii przestrzennej.

Kluczowym elementem umożliwiającym poprawne wyznaczenie macierzy kowariancji, a następnie działania efektywnego dla czynnika skali, jest procedura centrowania konfiguracji, którą wprowadziłem w swojej pracy doktorskiej. Procedura ta uwzględnia złamaną symetrię translacyjną poprzez ustalenie *środku masy* konfiguracji. Szczegółowe informacje dotyczące działania efektywnego wyznaczonego z użyciem macierzy kowariancji można znaleźć w [H1]. Jest to kolejny ważny wynik, który potwierdza, że uproszczony model minisuperspace poprawnie opisuje w granicy semiklasycznej nie tylko trajektorię klasyczną, ale także kwantowe fluktuacje objętości.

Granica semiklasyczna. Przedstawiona w poprzednim rozdziale procedura wyznaczania działania efektywnego wykorzystywała macierz kowariancji, która brała pod uwagę jedynie sympleksy typu $\{4, 1\}$. W pracy [H2] udoskonalono powyższą metodę poprzez zwiększenie rozdzielczości czasowej oraz uwzględnienie liczby sympleksów typu $\{3, 2\}$.



Rysunek 4: Uśredniony profil objętości $\langle n_t \rangle$ uwzględniający czasy połówkowe i sympleksy typu $\{3, 2\}$

Przekroje przestrzenne zbudowane są z czworościanów, które stanowią podstawę sympleksów typu $\{4, 1\}$. Pomiedzy dwoma kolejnymi przekrojami o czasach t i $t + 1$ znajduje się *warstwa* o topologii $\Sigma \times [0, 1]$, w skład której wchodzi także sympleksy typu $\{3, 2\}$ (por. rysunek 1). Sympleksy te tworzą spójny obszar wewnątrz jednej warstwy, której można przyporządkować czas połówkowy $t + 1/2$. Profil $\langle n_{t+1/2} \rangle$ otrzymany po przeskalowaniu liczby sympleksów typu $\{3, 2\}$ w warstwie $t + 1/2$ przez stałą $\rho = \frac{N_{32}}{N_{41}}$, tworzy gładki i uniwersalny rozkład w połączeniu z profilem $\langle n_t \rangle$ dla sympleksów typu $\{4, 1\}$,

$$n_{t+\frac{1}{2}} \equiv \rho \cdot N_{32}(t), \quad n_t \equiv N_{41}(t), \quad \langle n_t \rangle = H \cdot \cos^3(t/W). \quad (17)$$

Wykres profilu $\langle n_t \rangle$ dla fazy de Sittera uwzględniający czasy połówkowe przedstawiono na rysunku 4.

W artykule [H2] wykorzystano rozszerzoną macierz kowariancji $\mathbf{C}_{ij} = \langle (n_i - \langle n_i \rangle)(n_j - \langle n_j \rangle) \rangle$ o rozmiarze $2T \times 2T$ indeksowaną również przez czasy połówkowe $i, j = 1, \frac{3}{2}, \dots, T + \frac{1}{2}$ oraz wyznaczono działanie efektywne uwzględniające liczbę sympleksów typu $\{3, 2\}$,

$$S_{eff} = \sum_{t \in \mathbb{Z}} \left(+ \frac{1}{\Gamma_1} \frac{(n_t - n_{t \pm \frac{1}{2}})^2}{n_t + n_{t \pm \frac{1}{2}}} - \frac{1}{\Gamma_2} \frac{(n_t - n_{t+1})^2}{n_t + n_{t+1}} + V_1(n_t) + V_2(n_{t+\frac{1}{2}}) \right). \quad (18)$$

Dodatnie znaki parametrów Γ_1 i Γ_2 występujące w części kinetycznej, wskazują, że objętości przekrojów o czasach całkowitych, $n_t \equiv N_{41}(t)$, *odpychają się* wzajemnie, zaś objętości przekrojów o czasach połówkowych, $n_{t+\frac{1}{2}} \equiv \rho \cdot N_{32}(t)$, *przyciągają się* z sąsiadującymi przekrojami. Nie występuje oddziaływanie pomiędzy objętościami dla czasów połówkowych. Wynik ten uwypukla istotną rolę sympleksów typu $\{3, 2\}$, które są odpowiedzialne za *sklepanie* sukcesywnych przekrojów. Wartość parametru ρ , którą należy użyć, aby otrzymać działanie efektywne (18) różni się od zastosowanej w równaniu (17). Po wycałkowaniu objętości o czasach połówkowych odzyskujemy działanie efektywne (14) uwzględniające jedynie sympleksy typu $\{4, 1\}$. Parametry wyrazów kinetycznych w działaniach (14) i (18)

są ze sobą ściśle powiązane,

$$\frac{1}{\Gamma} = \frac{1}{2\Gamma_1} - \frac{1}{\Gamma_2}.$$

W symulacjach komputerowych uwzględniono również nowy sposób ustalania całkowitej objętości poprzez dodanie członu kwadratowego $\varepsilon (N_{41} - \bar{N}_{41})^2$ do działania, co umożliwiło przeprowadzenie pomiarów także dla $N_{41} \neq \bar{N}_{41}$. Takie rozwiązanie nie wprowadza modu zerowego do macierzy kowariancji, którego obecność utrudnia wyznaczenie działania efektywnego i pogarsza precyzję wyników.

W publikacji [H2] przeprowadzono również badania nad własnościami granicy semiklasycznej modelu CDT. Pokazano, że makroskopowa geometria związana z semiklasyczną granicą nie jest ściśle związana z mikroskopową geometrią sympleksów. Obserwacja ta jest zgodna z nieperturbacyjnym charakterem tej granicy. Zbadano zachowanie parametru ρ jako funkcji stałych sprężenia w pobliżu przejścia fazowego A/C_{dS} . Przeprowadzono również szczegółową analizę wyrazów wyższego rzędu w krzywiźnie występujących w działaniu efektywnym.

4.3.4 Macierz transferu

Wyniki przedstawione poniżej opierają się na artykułach [H3, H5].

Przedstawiona w poprzednim rozdziale metoda wykorzystująca macierz kowariancji (16) dostarcza informacji o efektywnym działaniu dla objętości przestrzennych, a dokładniej o jego drugiej pochodnej. Niestety, to podejście charakteryzuje się dużą niepewnością wyznaczonego potencjału, ponieważ człon kinetyczny jest dominujący (podobnie jak w dyskretnym sformułowaniu mechaniki kwantowej w języku feynmanowskich całek po trajektoriach), a pochodna drugiego rzędu członu potencjalnego szybko zanika z objętością (por. (15)). W tym rozdziale przedstawiono metodę opartą o macierz transferu, która pozwala na bezpośrednie wyznaczenie działania efektywnego, a nie tylko jego pochodnych jak w przypadku macierzy kowariancji. Opisane podejście istotnie poprawia precyzję numeryczną wyników, a ponadto do uzyskania dokładnych rezultatów wystarczy użycie znacznie mniejszych systemów. W konsekwencji czas niezbędny na przeprowadzenie symulacji ulega wyraźnemu skróceniu.

Model Kauzalnych Dynamicznych Triangulacji można równoważnie zdefiniować za pomocą macierzy transferu $\mathcal{M}$ indeksowanej przez trójwymiarowe triangulacje przekrojów τ . Element $\langle \tau_1 | \mathcal{M} | \tau_2 \rangle$ odpowiada amplitudzie przejścia w pojedynczym kroku czasowym pomiędzy stanami odpowiadającymi triangulacjom τ_1 i τ_2 . Amplituda przejścia wyraża się przez superpozycję wszystkich czterowymiarowych triangulacji warstw o topologii $[0, 1] \times \Sigma$ i brzegach wyznaczonymi przez trójwymiarowe triangulacje τ_1 i τ_2 ,

$$\langle \tau_1 | \mathcal{M} | \tau_2 \rangle = \sum_{\mathcal{T} | \tau_1, \tau_2} e^{-S[\mathcal{T}]}.$$

Macierz transferu bierze pod uwagę zarówno czynnik entropiczny, zliczający triangulacje $\mathcal{T}$ łączące brzegi w jednym kroku czasowym oraz gołe działanie Reggego (4)³. Funkcja rozdziału (5) definiująca model CDT w pełni wyraża się przez macierz $\mathcal{M}$,

$$Z = \sum_{\mathcal{T} \in \mathbb{T}} e^{-S[\mathcal{T}]} = \text{Tr } \mathcal{M}^T.$$

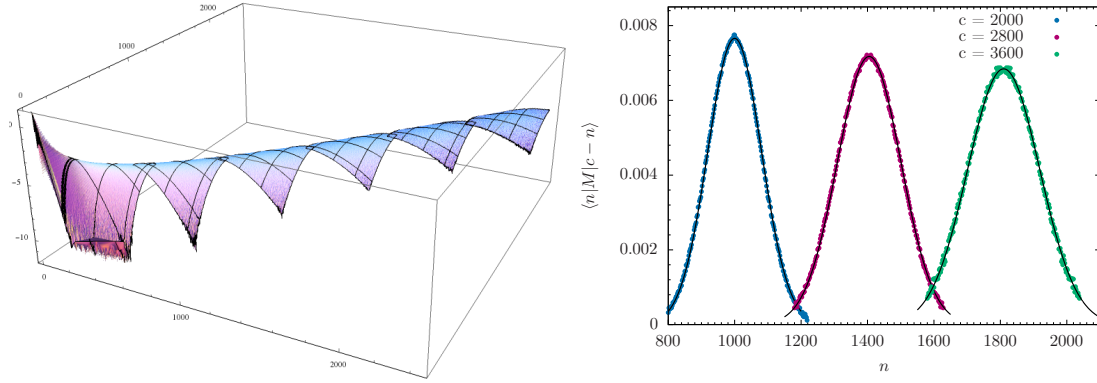
Należy zaznaczyć, że powyższy wzór jest dokładny, a nie przybliżony. Prawdopodobieństwo wystąpienia konfiguracji o T przekrojach danych triangulacjami $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_T$ wynosi

$$P^{(T)}(\tau_1, \dots, \tau_T) = \frac{1}{Z} \langle \tau_1 | \mathcal{M} | \tau_2 \rangle \langle \tau_2 | \mathcal{M} | \tau_3 \rangle \cdots \langle \tau_T | \mathcal{M} | \tau_1 \rangle. \quad (19)$$

Omawiając działanie efektywne (14) ograniczyliśmy analizę do objętości przestrzennych n_t . Podobnie możemy rozważać prawdopodobieństwo $P^{(T)}(n_1, \dots, n_T)$ znalezienia konfiguracji, której przekroje mają objętości $n_1, n_2, \dots, n_T$. Prawdopodobieństwo to jest sumą prawdopodobieństw $P^{(T)}(\tau_1, \dots, \tau_T)$ dla triangulacji zgodnych z profilem objętości czyli takich, dla których $n(\tau_t) = n_t$. Zależność tę możemy zapisać z użyciem macierzy transferu $\mathcal{M}$ oraz macierzy gęstości $\rho(n) \equiv |n\rangle\langle n| \equiv \sum_{\tau \in T_3(n)} |\tau\rangle\langle \tau|$ będącej operatorem rzutowania na podprzestrzeń rozpiętą przez elementy podzbioru $T_3(n)$ zawierającego stany $|\tau\rangle$ odpowiadające trójwymiarowym triangulacjom rozmaitości $\Sigma = S^3$ składających się z dokładnie n czworościanów,

$$P^{(T)}(n_1, \dots, n_T) = \frac{1}{Z} \text{Tr} [|n_1\rangle\langle n_1| \mathcal{M} |n_2\rangle\langle n_2| \mathcal{M} |n_3\rangle\langle n_3| \cdots |n_T\rangle\langle n_T| \mathcal{M}]. \quad (20)$$

³ Czynnik symetrii, o którym mowa w przypisie na stronie 10, można włączyć do normalizacji stanu $|\tau\rangle$, w ten sposób zostanie on automatycznie uwzględniony.



Rysunek 5: Po lewej: Logarytm empirycznie wyznaczonej efektywnej macierzy transferu $\langle n|M|m \rangle$ dla sferycznej topologii przestrzeni i fazy de Sittera ($K_0 = 2.2$, $\Delta = 0.6$ i $K_4 = 0.922$). Kwadratowe *łatki* odpowiadają odrębnym symulacjom różniących się zakresem objętości. Po prawej: Przykładowe przekroje antydiagonalne $\langle n|M|m \rangle$ dla kilku ustalonych wartości $c = n+m$. Czarną linią zaznaczono dopasowany rozkład Gaussa, którego szerokość wyznacza współczynnik $k(c)$. Dopasowanie jest bardzo precyzyjne i zgodne z członem kinetycznym w lagranżjanie (23)

„Stan” zagregowany $|n\rangle$ nie jest znormalizowaną sumą wektorów $|\tau\rangle$, $\tau \in T_3(n)$, ponieważ taka suma znów byłaby pojedynczym stanem czystym w przestrzeni rozpiętej przez $|\tau\rangle$. „Stan” $|n\rangle$ należy interpretować jako odpowiadający objętości n i wywodzący się z klasycznego jednorodnego rozkładu prawdopodobieństwa stanów $|\tau\rangle$ powiązanego z macierzą gęstości $\rho(n)$.

Działanie efektywne (14) otrzymane na podstawie macierzy kowariancji (16) sprzęga jedynie objętości sąsiadujących przekrojów, co potwierdza również trójdzielna postać empirycznie wyznaczonej macierzy $\mathbf{P}$. Ta własność sugeruje istnienie efektywnej macierzy transferu $\langle n|M|m \rangle$, której elementy indeksowane są objętościami przekrojów. Ponadto możliwy jest analogiczny do (19) rozkład prawdopodobieństwa $P^{(T)}(n_1, \dots, n_T)$ na iloczyn

$$P^{(T)}(n_1, \dots, n_T) = \frac{1}{Z} \langle n_1|M|n_2 \rangle \langle n_2|M|n_3 \rangle \cdots \langle n_T|M|n_1 \rangle, \quad Z = \text{Tr } M^T. \quad (21)$$

O ile wzór (19), wykorzystujący macierz indeksowaną przez trójwymiarowe triangulacje, jest wzorem dokładnym, to równanie (21) jest jedynie wzorem *efektywnym*. Niemniej, okazuje się, że powyższe wyrażenie bardzo dobrze zgadza się z wynikami numerycznymi. Istnienie efektywnej macierzy transferu nie jest oczywiste, ponieważ zaburzenia przestrzeni nie ujęte przez objętość n_t mogą się propagować i w konsekwencji mogłyby wprowadzać sprzężenie pomiędzy niekoniecznie najbliższymi przekrojami. W analogii do równania (19) element $\langle n|M|m \rangle$ odpowiada amplitudzie przejścia w jednym kroku czasowym pomiędzy stanami o zadanych objętościach.

Pomiar. Efektywną macierz transferu M można wyznaczyć na wiele sposobów korzystając ze wzoru (21) oraz prawdopodobieństw $P^{(T)}(n_1, \dots, n_T)$, które z kolei można zmierzyć posługując się symulacjami Monte Carlo. Zdefiniujmy dwupunktową funkcję otrzymaną przez wysumowanie prawdopodobieństw (21) po objętościach wszystkich przekrojów za wyjątkiem n_t i $n_{t'}$, $P^{(T)}(n_t, n_{t'}) = \frac{1}{Z} \langle n_t|M^{\Delta t}|n_{t'} \rangle \langle n_{t'}|M^{T-\Delta t}|n_t \rangle$, gdzie $\Delta t = t' - t$. Najprostsza metoda na obliczenie wartości elementu $\langle n|M|m \rangle$ (z dokładnością do normalizacji) polega na rozważeniu układu z dwoma warstwami czasowymi ($T = 2$), a druga wersja wymaga przeprowadzenia pomiarów dla przynajmniej dwóch układów o liczbie przekrojów

równych $T + 1$ i $2 \cdot T$, np. dla $T = 3, 4$,

$$\langle n|M|m \rangle \propto \sqrt{P^{(2)}(n_1 = n, n_2 = m)} \quad \text{lub} \quad \langle n|M|m \rangle \propto \frac{P^{(3)}(n_1 = n, n_2 = m)}{\sqrt{P^{(4)}(n_1 = n, n_3 = m)}}.$$

Możliwe są także inne kombinacje przedstawione w [H3].

W pracach [H3, H5] sprawdziłem, że dla fazy de Sittera i sferycznej topologii przestrzeni ($\Sigma = S^3$) efektywna macierz transferu zmierzona różnymi metodami nie zależy od liczby warstw T , a ewentualne różnice były mniejsze niż szum numeryczny. Omawianą macierz transferu M wyznaczoną empirycznie przedstawiono na rysunku 5 po lewej. Wynik ten jest istotny, ponieważ uwiarygadnia tezę o istnieniu macierzy efektywnej M i poprawności równania (21). Napisany przeze mnie program komputerowy służący do przeprowadzania symulacji Monte Carlo dla modelu CDT operuje na triangulacjach kombinatorycznych, które nie pozwalają na istnienie różnych sub-sympleksów o identycznych wierzchołkach. Z tego powodu metoda dla $T = 2$ pomimo swej prostoty, wymagała wprowadzenia daleko idących zmian w kodzie. Ponadto duże różnice w rzędach wielkości prawdopodobieństw (21) w różnych obszarach objętości wymuszają rozdzielanie obliczeń numerycznych na kilka niezależnych symulacji, których wyniki należy następnie odpowiednio połączyć. Podział widoczny jest na rysunku 5 w postaci kwadratowych *latek*. Ze względów technicznych, aby kontrolować zakres objętości przekrojów, do gołego działania dodano sztuczny człon ograniczający fluktuacje n_t , którego efekt jest następnie usuwany na etapie analizy danych. Macierz M jest funkcją stałych sprzężenia K_0 , Δ i K_4 natomiast nie zależy od liczby przekrojów T [H3, H5].

Uzyskane rezultaty są ważne, ponieważ uwiadcniają wielorakie zalety tej metody. Dostarcza ona pełnej i bezpośredniej informacji o działaniu efektywnym i znacząco poprawia dokładność numeryczną wyników w porównaniu do metody opartej o macierz kowariancji. Efektywną macierz transferu $\langle n|M|m \rangle$ można wyznaczyć empirycznie wykorzystując symulacje Monte Carlo. Ponadto brak zależności macierzy M od liczby przekrojów T pozwala na wykorzystanie rezultatów symulacji przeprowadzonych dla małych T z czym wiąże się znacznie mniejsze rozmiary systemów. W konsekwencji, zebranie odpowiednio dużej statystyki potrzebnej do wyznaczenia prawdopodobieństw wymaga istotnie mniejszych zasobów obliczeniowych i tym samym przyspiesza symulacje.

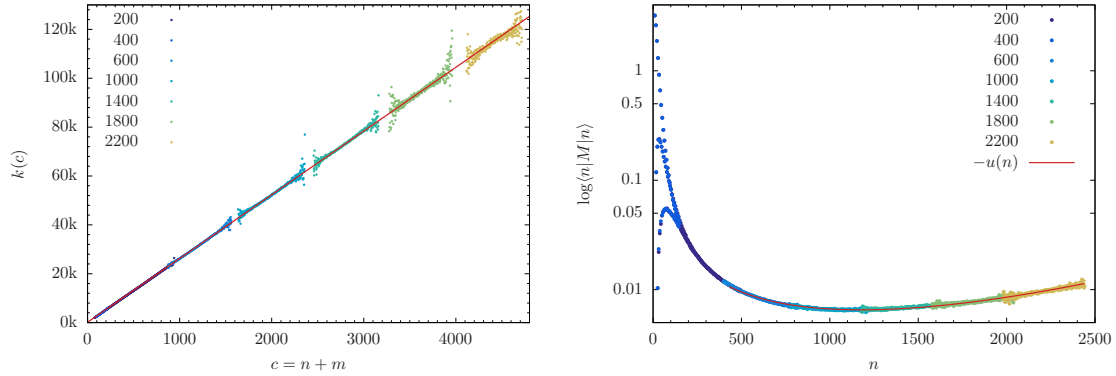
Działanie efektywne. Działanie efektywne $S[\{n_t\}]$ określa prawdopodobieństwo wystąpienia konfiguracji o profilu objętości $\{n_t\}$, a mianowicie $P^{(T)}(n_1, \dots, n_T) = \frac{1}{Z} e^{-S[\{n_t\}]}$. Ze wzoru (21) wynika bezpośredni związek między efektywną macierzą transferu M i działaniem $S[\{n_t\}]$,

$$\langle n|M|m \rangle = \mathcal{N} e^{-L_{eff}(n,m)}, \quad S[\{n_t\}] = \sum_t L_{eff}(n_t, n_{t+1}). \quad (22)$$

Dla odpowiednio dużych objętości ($n, m > 300$) elementy macierzy są z bardzo dużą dokładnością dane przez lagranżjan

$$L_{eff}(n, m) = \frac{1}{\Gamma} \left[\frac{(n-m)^2}{n+m} + \mu \left(\frac{n+m}{2} \right)^{1/3} - \lambda \frac{n+m}{2} \right]. \quad (23)$$

Wynik ten jest w pełni zgodny z działaniem efektywnym (14) wyznaczonym metodą macierzy kowariancji, a tym samym z działaniem modelu minisuperspace. Różnica pomiędzy wyrażeniem analitycznym (22, 23) a empirycznie wyznaczoną macierzą transferu M całkowicie niknie w szumie numerycznym [H3, I22].



Rysunek 6: Po lewej: Współczynnik $k(c)$ występujący w wyrażeniu kinetycznym w funkcji $c = n + m$ wraz z dopasowaniem liniowym $k(n + m) = \Gamma \cdot (n + m)$ (czerwona linia). Po prawej: Wykres $\log \langle n|M|n \rangle$ wraz z dopasowanym wyrażeniem potencjalnym $u(n) = L_{eff}(n, n)$ (czerwona linia). Na obu wykresach różne kolory oznaczają niezależne symulacje przeprowadzone dla różnych zakresów objętości

Dla małych objętości obserwujemy silne efekty związane z dyskretyzacją, jednak po pogrupowaniu elementów macierzy M trójkami względem objętości są one również opisywane powyższą funkcją z poprawką postaci $\delta \left(\frac{n+m}{2}\right)^{-\rho}$, która staje się nieistotna dla większych objętości [H3].

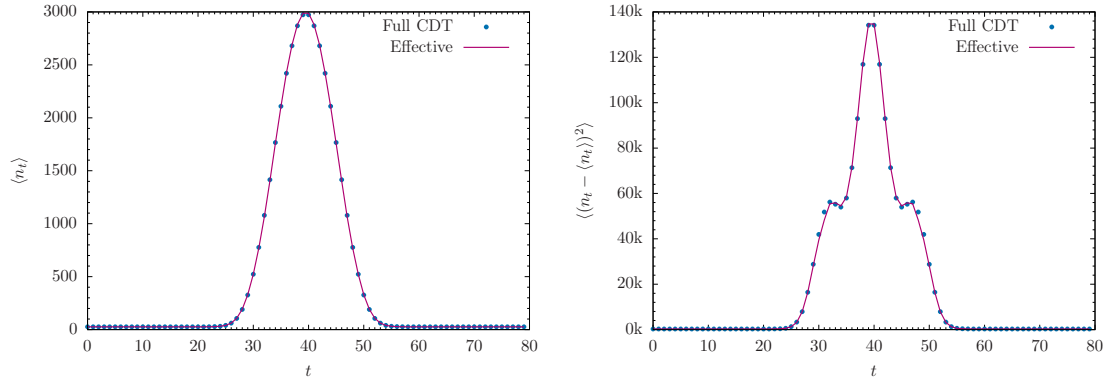
Wyraz kinetyczny. Dokładne wyliczenie wartości parametrów występujących w działaniach (14) i (23) zaczniemy od zbadania członu kinetycznego, który jest dominujący z numerycznego punktu widzenia. Można go wyznaczyć analizując antydiagonalne przekroje macierzy $\langle n|M|m \rangle$ dla ustalonego $c = n + m$. Lagranżjan (23) przewiduje, że przekroje te dane są rozkładem gaussowskim

$$\langle n|M|m \rangle = \langle n|M|c - n \rangle = \mathcal{N}(c) \exp \left[-\frac{(2n - c)^2}{k(c)} \right], \quad c = n + m. \quad (24)$$

Poprawność równania (24) potwierdzają przedstawione na rysunku 5 (po prawej) wykresy dla kilku wartości c . Szerokość dopasowanego rozkładu (24) określa wartość współczynnika $k(c)$, którego wykres znajduje się na rysunku 6 (po lewej). Liniowa zależność $k(n + m) = \Gamma \cdot (n + m)$ wynikająca z równania (23) jest bardzo wyraźnie widoczna w pełnym zakresie objętości.

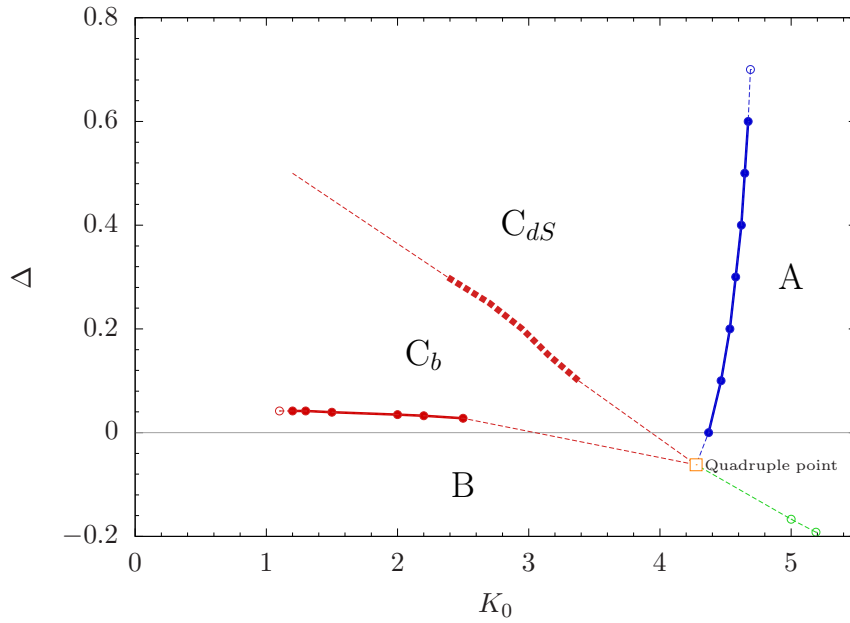
Wyraz potencjalny. Potencjał $u(n)$ lagranżjanu (23) można wyznaczyć badając diagonalę macierzy transferu lub dokładniej normalizację $\mathcal{N}(c)$ występującą w równaniu (24), $u(n) = L_{eff}(n, n) = -\log \langle n|M|n \rangle = -\log \mathcal{N}(2n)$. Rysunek 6 (po prawej) przedstawia logarytm diagonalę macierzy transferu M oraz dopasowany potencjał. Wyniki potwierdzają zależność występującą w (23), $u(n) = \frac{1}{\Gamma} (\mu n^{1/3} - \lambda n)$.

Powyższe rezultaty świadczą, że efektywna macierz transferu i działanie $S[\{n_t\}]$ są z dużą dokładnością opisywane przez lagranżjan L_{eff} (23). Zmierzone wartości parametrów występujących w działaniu (14) oraz (23) dla gołych stałych sprzężenia $K_0 = 2.2$, $\Delta = 0.6$ i $K_4 = 0.922$ wynoszą $\Gamma = 26.07 \pm 0.05$, $\mu = 16.5 \pm 0.2$, $\lambda = 0.049 \pm 0.001$. Otrzymana postać potencjału jest szczególnie ważnym wynikiem, ponieważ potwierdza ona, że semiklasyczny Wszechświat obserwowany w modelu CDT jest zgodny z modelem minisuperspace.



Rysunek 7: Porównanie średniej $\langle n_t \rangle$ (po lewej) oraz wariancji $\mathbf{C}_{tt} = \langle (n_t - \langle n_t \rangle)^2 \rangle$ (po prawej) dla pełnego modelu CDT z $T = 80$ przekrojami (w fazie de Sittera) oraz dla modelu efektywnego (21) zdefiniowanego przez macierz transferu M . W obu przypadkach do wyliczenia wartości oczekiwanych wykorzystano algorytm Monte Carlo. Dla małych objętości $n, m < 300$ użyto empirycznie wyznaczonych wartości $\langle n|M|m \rangle$, natomiast pozostałe elementy macierzy aproksymowano funkcją (23)

Weryfikacja. Dotychczasowe rezultaty pokazują, że dla małych T efektywna macierz transferu w fazie de Sittera nie zależy od liczby warstw, co wskazuje na prawdziwość rozkładu (21). W pracy [H5] pokazałem, że *efektywny model oparty o macierz transferu* ściśle odtwarza wyniki otrzymane dla pełnego modelu CDT także z dużą liczbą przekrojów. W modelu efektywnym, konfiguracja, zamiast przez triangulację $\mathcal{T}$, dana jest przez wektor $\{n_t, t = 1, \dots, T\}$ o T składowych, który odpowiada profilowi objętości. Prawdopodobieństwo konfiguracji $P(n_1, \dots, n_T)$ określone jest przez rozkład (21) i efektywną macierz transferu (23). Weryfikacja polegała na generowaniu profili objętości $\{n_t\}$ zgodnie z rozkładem (21) i porównaniu wyników zmierzonych dla objętości przestrzennej n_t z oryginalnym modelem CDT. Dodano także kwadratowy człon ustalający całkowitą objętość identyczny z tym użytym w pełnych symulacjach CDT. Ze względu na techniczny problem empirycznego wyznaczenia elementów macierzy transferu w całym niezbędnym zakresie objętości, dla $n, m > 300$ elementy $\langle n|M|m \rangle$ aproksymowano funkcją (23). Dla mniejszych objętości, gdzie dominują efekty dyskretne, użyto empirycznie wyznaczonych wartości $\langle n|M|m \rangle$. Rysunek 7 (po lewej) przedstawia uśredniony profil objętości $\langle n_t \rangle$ wyznaczony na podstawie symulacji pełnego modelu CDT (punkty) oraz modelu zredukowanego (linia). Wyniki omawianych modeli pokrywają się idealnie. W obu przypadkach liczba przekrojów wynosi $T = 80$, a średnia całkowita objętość $\bar{N}_{41} = 40k$. Drugi wykres przedstawia diagonalę macierzy kowariancji $\mathbf{C}_{tt}$, czyli wariancję objętości n_t . Znowu rezultaty efektywnego modelu (21, 23) i oryginalnego modelu CDT są zadziwiająco zgodne. Wynik ten w pełni dowodzi prawdziwości rozkładu (21) i działania efektywnego (23) dla sferycznej topologii przestrzeni w fazie de Sittera. Tym samym potwierdza istnienie efektywnej macierzy transferu $\langle n|M|m \rangle$.



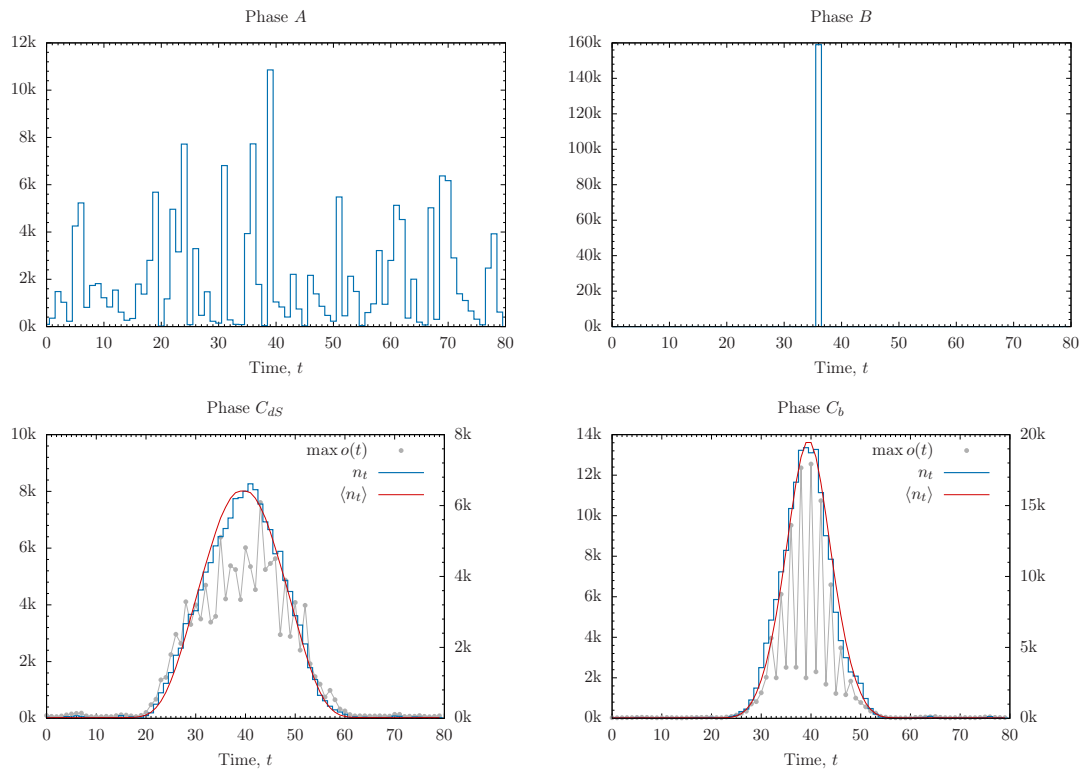
Rysunek 8: Diagram fazowy modelu CDT ze sferyczną topologią przekrojów przestrzennych. Fazy odpowiadają obszarom na płaszczyźnie rozpiętej przez gołe stałe sprzężenia $K_0 - \Delta$. Na rysunku zaznaczono cztery obserwowane fazy: fazę *spolimeryzowaną* A, fazę *zapadniętą* B, fazę *de Sittera* C_{dS} oraz nową fazę *bifurkacji* C_b

4.3.5 Diagram fazowy i nowa faza bifurkacji

Wyniki przedstawione poniżej opierają się na artykułach [H5, H9, H10].

W działaniu Reggego (4) występują trzy gołe bezwymiarowe stałe sprzężenia K_0, K_4 i Δ , które są dyskretnymi odpowiednikami *stałej grawitacji*, *stałej kosmologicznej* oraz *współczynnika asymetrii*. Ze względów technicznych wskazane jest, aby podczas symulacji Monte Carlo kontrolować całkowitą dyskretną czteroobjętość N_4 . Stała kosmologiczna K_4 , będąca mnożnikiem Lagrange’a, musi być dopasowana do swojej wartości krytycznej w celu tłumienia wkładu do funkcji rozdziału pochodzących od bardzo dużych konfiguracji. Ponieważ liczba triangulacji rośnie wykładniczo wraz z rozmiarem N_4 , wartość K_4 poniżej wartości krytycznej spowodowałaby rozbieżność funkcji rozdziału. Wartościami stałych sprzężenia K_0 i Δ możemy swobodnie sterować, dzięki czemu można wyznaczyć diagram fazowy w rozpiętej przez nie płaszczyźnie. Natomiast K_4 pełni szczególną rolę, ponieważ kontroluje liczbę sympleksów. Jej wartość jest ustalona w taki sposób, aby $\langle N_4 \rangle = \bar{N}_4$, co prowadzi do nietrywialnej zależności K_4 od (skończonej) docelowej dyskretnej objętości $\bar{N}_4$. Dopiero wzięcie granicy $N_4 \rightarrow \infty$ pociąga za sobą konieczność przypisania jej wartości krytycznej i w następstwie powoduje jej efektywne wyeliminowanie. Skończona wartość N_4 odpowiada obserwacji powierzchni krytycznej K_4^{crit} z pewnej odległości ($\propto 1/N_4$).

Model Kauzalnych Dynamicznych Triangulacji w czterech wymiarach posiada bogatą strukturę fazową. Obserwujemy *cztery* jakościowo różne zachowania typowej konfiguracji w zależności od wartości stałych sprzężenia K_0 i Δ . W ramach pracy [I9] przeprowadzono wielkoskalowe symulacje komputerowe i szczegółowo omówiono trzy fazy A, B oraz fazę *de Sittera* (C_{dS}), a także rodzaje przejść fazowych pomiędzy nimi. Czwartą fazę *bifurkacji* (C_b) odkryto podczas badań dotyczących macierzy transferu w pracy [H5]. Diagram fazowy wyznaczony z użyciem symulacji Monte Carlo przedstawiono na rysunku 8.



Rysunek 9: Profile objętości n_t typowych konfiguracji dla różnych faz (niebieska linia). Dla fazy *de Sittera* (C_{ds}) oraz *bifurkacji* (C_b) przedstawiono również maksymalną krotność wierzchołków w danym przekroju oraz uśredniony rozkład objętości $\langle n_t \rangle$ (czerwona linia). Na każdym rysunku liczba przekrojów wynosi $T = 80$

Rysunek 9 zawiera profile objętości n_t typowych konfiguracji, które pojawiły się w różnych fazach podczas symulacji Monte Carlo. Poniżej omówiono charakterystyki faz:

- A** Dla dużych wartości K_0 (por. rysunek 8) wszechświat rozpada się na kauzalnie nieskorelowane i nieregularne sekwencje maksimów i minimów o rozpiętościach czasowych rzędu kilku przekrojów. Patrząc wzdłuż kierunku czasowego, obserwujemy wiele oscylujących wszechświatów połączonych przez zwężenia o pomijalnych rozmiarach (por. rysunek 9). Wymiar Hausdorffa i wymiar spektralny triangulacji wewnątrz tej fazy wynosi w przybliżeniu 2 [H12, I18]. Faza ta wykazuje podobieństwo z *fazą spolimeryzowaną* (ang. *branched polymer phase*) modelu euklidesowego (EDT) [I6]. W przeciwieństwie do obserwowanego Wszechświata, konfiguracje występujące w tej fazie nie posiadają rozmiarów przestrzennych ani rozmiaru czasowego.
- B** Dla małych wartości Δ geometria czasoprzestrzenna zapada się do pojedynczego przekroju, w którym skupiają się prawie wszystkie sympleksy. Pomimo to że przekrój ten ma topologię S^3 , wymiar Hausdorffa jest najprawdopodobniej nieskończony [I33]. W takim przypadku wszechświat nie posiada rozmiarów przestrzennych ani wymiaru czasowego i nie można mówić o geometrii w tradycyjnym rozumieniu. Faza ta jest odpowiednikiem *fazy zapadniętej* (ang. *crumpled phase*) modelu EDT [I6].
- C_{ds}** Dla większych wartości Δ obserwujemy trzecią, najbardziej interesującą z fizycznego punktu widzenia fazę, w której typowa konfiguracja ma kształt dzwonowaty (por.

rysunek 9). Pomiar wymiaru Hausdorffa potwierdza, że na dużych skalach Wszechświat jest prawdziwie czterowymiarowy [I10, I33], a konfiguracje posiadają skończone rozmiary w kierunkach przestrzennych i czasowym. Jednocześnie, wymiar spektralny wykazuje nietrywialną zależność od skali, zmieniając się od ok. 2 dla małych odległości do 4 dla dużych skal [I33, I18]. Faza ta nazywana jest również fazą *de Sittera*, ponieważ dynamicznie wyłania się czterowymiarowa geometria zgodna z semiklasycznym (euklidesowym) Wszechświatem de Sittera [I12, I11]. W przeciwieństwie do faz opisanych powyżej, fazę de Sittera można uznać za fizyczną. Tę fazę opisano szczegółowo w poprzednich rozdziałach.

C_b Kolejną fazę odkryto podczas badań dotyczących macierzy transferu w pracy [H5]. Zaobserwowano, że powyżej pewnej wartości objętości przestrzennej *grzbiet* macierzy transferu rozdziela się na dwie gałęzie. Z tego powodu nową fazę nazwano *fazą bifurkacji*. Biorąc pod uwagę jedynie objętości n_t , jej własności są bardzo zbliżone do fazy de Sittera, jednak w co drugim przekroju pojawiają się wierzchołki o bardzo dużej krotności (por. rysunek 9).

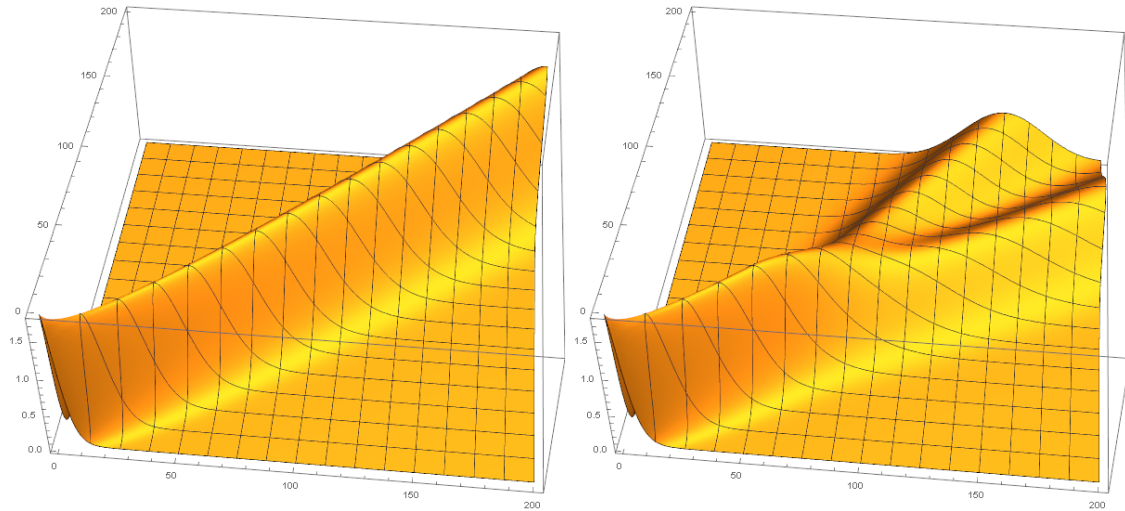
Nowa faza bifurkacji. W poprzednich rozdziałach szczegółowo omówiono działanie efektywne dla objętości przestrzennej n_t otrzymane w fazie de Sittera ($\Sigma = S^3$) przy użyciu macierzy kowariancji oraz macierzy transferu. Druga z wymienionych metod pozwala na wyznaczenie działania efektywnego także dla pozostałych faz, co zrobiono w pracy [H5]. W ramach badań zaobserwowano, że w pewnym obszarze stałych $K_0 - \Delta$ zlokalizowanym blisko fazy *B*, który dotychczas uważano za część fazy de Sittera, macierz transferu $\langle n|M|m \rangle$ rozgałęzia się i wyraża wzorem

$$\langle n|M_B|m \rangle \propto e^{-u(c)} \left[\exp \left(-\frac{((m-n)-b(c))^2}{k(c)} \right) + \exp \left(-\frac{((m-n)+b(c))^2}{k(c)} \right) \right], \quad (25)$$

gdzie $c = n + m$. Postać potencjału $u(c) = \frac{1}{\Gamma} (\mu c^{1/3} - \lambda c)$ jest taka sama jak w fazie C_{dS} , również współczynnik kinetyczny zachowuje się liniowo, $k(c) = \Gamma \cdot c$. Ponadto dla $b(c) = 0$ odzyskuje się macierz transferu (23) dla fazy de Sittera. Jednak w tym obszarze, dla c powyżej pewnej wartości c_b , funkcja $b(c)$ staje się niezerowa i zachowuje się liniowo z c , $b(c) \approx \max[0, \beta(c - c_b)]$.

Taka postać macierzy transferu M_B prowadzi do jej rozgałęziania się, co jakościowo zobrazowano na rysunku 10. W pracach [H9, H10] wykazano, że obszar ten rzeczywiście jest odrębną fazą ograniczoną dwoma przejściami fazowymi. Ze względu na bifurkację macierzy transferu nową fazę nazwano *fazą bifurkacji* lub C_b (por. rysunek 8). Dla c powyżej pewnej wartości c_b antydiagonalne przekroje efektywnej macierzy $\langle n|M|m \rangle$, $c = n + m$, nie są dane pojedynczym rozkładem gaussowskim, tak jak to ma miejsce w fazie de Sittera, tylko sumą dwóch symetrycznie rozłożonych rozkładów gaussowskich [H5]. Na późniejszym etapie badań zauważono występowanie wierzchołków o osobliwych krotnościach, gdzie krotnością wierzchołka o_p nazywamy liczbę sympleksów zawierających wierzchołek p .

Jeśli spojrzymy na macierz transferu, nie dzieje się z nią nic specjalnego podczas przekraczania linii przejścia fazowego $B - C_b$ ($\Delta \approx 0.05, K_0 = 2.2$). Natomiast fazę *B* od fazy C_b odróżnia kształt profilu objętości n_t , który w tej pierwszej całkowicie zapada się do pojedynczego przekroju, zaś w drugiej przypomina dzwonowaty rozkład występujący w C_{dS} . W szczególności fazy te są oddzielone przejściem fazowym drugiego rzędu, które charakteryzuje rozbieżność podatności parametrów porządku N_0 i N_{32} . Przejście to zostało szczegółowo zbadane [31, 32, I9, H9] (por. rysunek 8) i można je łatwo zaobserwować wykorzystując różne parametry porządku $N_0, N_{32}, \sum_t (n_{t+1} - n_t)^2, \max o_p$.



Rysunek 10: Efektywna macierz transferu $\langle n|M|m \rangle$ w fazie de Sittera (po lewej) i fazie bifurkacji (po prawej). Podobne zachowanie jakie przedstawiono na wykresie po prawej stronie występuje także w fazie B

Profil objętości konfiguracji występujących w fazie C_b przypomina profil obserwowany w fazie de Sittera (por. rysunek 9). Natomiast w fazie C_b jednorodność przestrzenna jest silnie zaburzona poprzez pojawienie się klastrów objętości przestrzennej skupionych wokół pojedynczych wierzchołków o makroskopowych krotnościach, które występują w co drugim przekroju. Na rysunku 9 przedstawiono wyniki symulacji odpowiednio dla fazy de Sittera (na dole po lewej) i fazy bifurkacji (na dole po prawej). Typowy profil objętości n_t (niebieska linia) oraz średnia $\langle n_t \rangle$ (czerwona linia) nie różnią się jakościowo pomiędzy tymi fazami, a zmiana $\langle n_t \rangle$ zachodzi w sposób ciągły wraz ze zmianą stałych sprzężenia. Szarym kolorem oznaczono największą krotność wierzchołków występujących w danym przekroju ($\max o_p(t)$, prawa oś). W fazie C_b maksymalne krotności są wielokrotnie większe niż w fazie C_{dS} oraz oscylują naprzemiennie. Rysunek 10 przedstawia macierz transferu $\langle n|M|m \rangle$ wyznaczoną w fazie de Sittera (po lewej), w której nie występuje bifurkacja, oraz w fazie bifurkacji (po prawej) z zauważalnym rozgałęzieniem macierzy M . Pomimo podobieństwa średniego rozkładu objętości $\langle n_t \rangle$, w fazie bifurkacji zauważono naruszenie czterowymiarowego skalowania rozkładu z całkowitą objętością N_{41} oraz odstępstwo profilu od kanonicznej funkcji (9). Dla małych objętości zachowanie n_t jest podobne jak w fazie de Sittera, natomiast dla dużych objętości $c = n + m \gg c_b$, profil $\langle n_t \rangle$ zmienia się w przybliżeniu wykładniczo z czasem t (por. wzór (25)). Wszystkie wymienione efekty, które odróżniają fazy C_b i C_{dS} można wytłumaczyć bifurkacją efektywnej macierzy transferu $\langle n|M|m \rangle$.

Pojawienie się bifurkacji jest związane z przejściem pomiędzy fazami C_{dS} i C_b . Powód, dla którego wcześniej przeoczono tę przemianę fazową wynika z jej mikroskopowego charakteru. Tym samym jej wykrycie wymaga użycia innych parametrów porządku niż te, które były dotychczas rozważane. Standardowe parametry porządku wykorzystywane w analizie pozostałych przejść fazowych, mianowicie N_0 i N_{32} , są wielkościami ekstensywnymi i bezpośrednio związanymi z objętością N_{41} ⁴. Analiza przejścia fazowego $C_{dS} - C_b$ wymaga wprowadzenia nowego parametru porządku jakim jest maksymalna krotność wierzchołków $\max o_p$, który uwidacznia geometryczne różnice między fazami C_{dS} i C_b .

⁴Podczas symulacji w przybliżeniu ustalano wartość N_{41} i na ogół rozważano parametry $\frac{N_0}{N_{41}}$ lub $\frac{N_{32}}{N_{41}}$.

Fazę bifurkacji wraz z przejściem $C_b - C_{dS}$ odkryto podczas badań nad efektywną macierzą transferu wykorzystujących systemy o małej liczbie przekrojów przestrzennych T [H5]. W kolejnych pracach pokazano, że to przejście występuje także dla układów o dużej liczbie przekrojów [H10]. W artykule [H9] sprawdzono wpływ wartości T na strukturę fazową modelu. Pokazano, że dla $T = 2$ sygnał przejścia $B - C_b$ jest kompatybilny z wynikami uzyskanymi dla dużej liczby przekrojów ($T = 80$). W fazie bifurkacji dla układów z $T = 2$ również zaobserwowano osobiwe wierzchołki o dużej krotności oraz wykazano, że są one nierozzerwalnie związane z bifurkacją. W fazie C_b różnica objętości sąsiadujących przekrojów zależy liniowo od maksymalnej krotności wierzchołków. Analiza krotności wierzchołków daje wgląd w geometryczny mechanizm powodujący znaczną różnicę objętości sąsiadujących przekrojów i prowadzący do bifurkacji. Osobliwy wierzchołek należy do struktury, która zawiera istotną część sympleksów typu $\{4, 1\}$, co skutkuje *nadmianem* objętości w przekroju go nie zawierającym. Jednocześnie, pojawienie się takich wierzchołków w fazie bifurkacji sygnalizuje naruszenie jednorodności i izotropowości geometrii obecnych w fazie de Sittera. Sytuacja, w której następuje złamanie symetrii jest często powiązana z przejściami fazowymi w niegeometrycznych modelach statystycznych.

W pracy [H10] przedstawiono silne argumenty, potwierdzające, że przejście pomiędzy fazami C_{dS} i C_b jest drugiego bądź wyższego rzędu. Zagadnienie to jest zasadnicze z punktu widzenia istnienia poprawnej granicy ciągłej modelu. Jako parametr porządku użyto maksymalną krotność wierzchołków, $\max o_p(t)$ (por. rysunek 9), a następnie wyznaczono punkt (pseudo)krytyczny przejścia fazowego w funkcji rozmiaru triangulacji N_{41} ,

$$\Delta_c(N_{41}) \approx \Delta_c(\infty) - \alpha N_{41}^{-1/\gamma}.$$

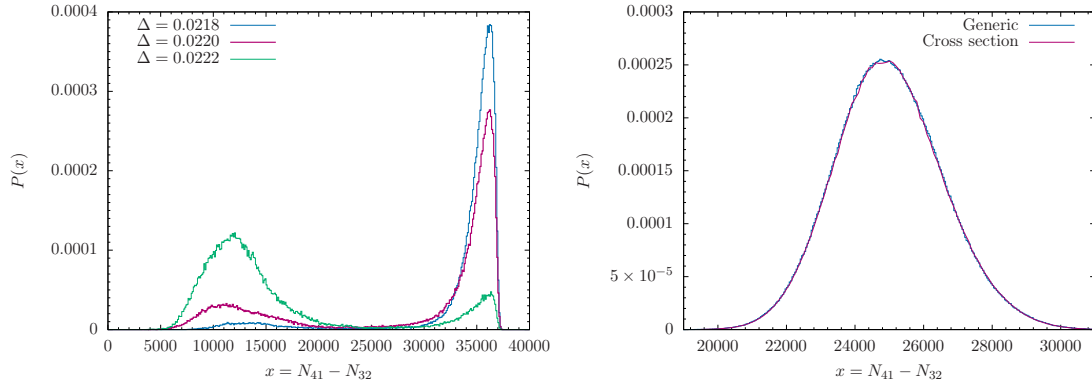
Otrzymana wartość wykładnika krytycznego $\gamma = 2.71 \pm 0.34$ potwierdza hipotezę, że przejścia fazowe $C_{dS} - C_b$ jest wyższego rzędu⁵. Poruszając się po diagramie fazowym wzdłuż linii stałego K_0 (np. $K_0 = 2.2$) począwszy od fazy C_{dS} (np. $\Delta = 0.6$, por. rysunek 8)) w kierunku malejących Δ , bifurkacja macierzy transferu pojawia się dla wartości Δ_c znacznie wyższych niż punkt przejścia fazowego $B - C_b$, które jest charakteryzowane przez *tradycyjne* parametry porządku sprzężone z gołymi stałymi sprzężenia (N_0 i N_{32}). Ekstrapolacja $\Delta_c(N_4)$ dla $N_4 \rightarrow \infty$ sugeruje skończoną wartość $\Delta_c(\infty)$ co świadczy o tym, że faza C_{dS} nie jest jedynie efektem skończonego rozmiaru [H5].

Badania przeprowadzone w ramach pracy [H5] były zainspirowane publikacją [35], która rozważa strukturę uproszczonego modelu *balls-in-boxes* z działaniem bazującym na efektywnym działaniu modelu CDT (14).

Działanie efektywne dla faz A i B. W pracy [H5] zbadano efektywną macierz transferu M oraz działanie $S[\{n_t\}]$ dla faz A i B.

Faza A. Faza A oddzielona jest od fazy C przejściem pierwszego rodzaju (por. rysunek 8) [32, 19]. Macierz transferu otrzymana na podstawie symulacji numerycznych z $T = 2$ wewnątrz tej fazy ($K_0 = 5.0$, $\Delta = 0.4$, $K_4 = 1.22$) sugeruje, że efektywny lagranżjan wyraża się wzorem $L_A(n, m) = \mu(n^\alpha + m^\alpha) - \lambda(n + m)$, $\alpha \approx \frac{1}{2}$. Należy zauważyć, że w przeciwieństwie do fazy de Sittera, w lagranżjanie $L_A(n, m)$ nie występuje wyraz kinetyczny (por. (23)). Jego brak można interpretować jako przyczynowe odseparowanie przekrojów dla różnych czasów. Zjawisko to, nazywane *asymptotyczną ciszą*, obserwowane jest zarówno w klasycznych jak i kwantowych podejściach do grawitacji w reżimie ekstremalnych krzywizn / gęstości energii [34]. W tym kontekście *nieskorelowana* faza może zyskać pewne fizyczne znaczenie.

⁵Przemianę fazową pierwszego rodzaju charakteryzuje wartość wykładnika krytycznego $\gamma = 1$.



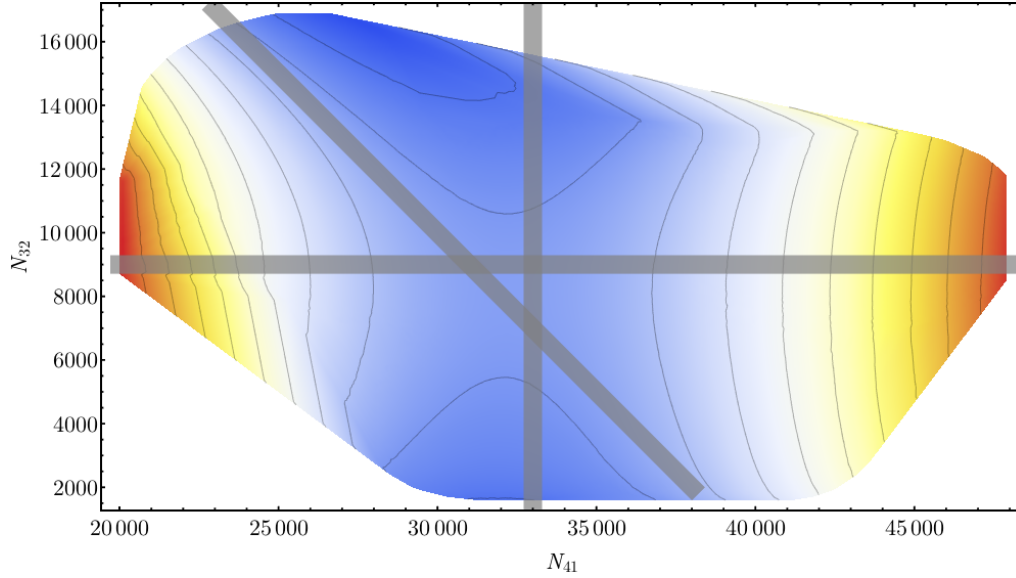
Rysunek 11: Po lewej: Rozkład prawdopodobieństwa parametru porządku $x = N_{41} - N_{32}$ wyznaczony przy ustalonej całkowitej liczbie sympleksów $N_4 = N_{41} + N_{32} = 40k$. W pobliżu przejścia fazowego $B - C_b$ ($\Delta_c \approx 0.0220$) widoczny rozkład jest dwumodalny. Po prawej: Rozkład prawdopodobieństwa $P(x)$ w pobliżu przejścia fazowego ($\Delta_c = 0.0220$) wyznaczony przy ustalonej całkowitej objętości $N_{41} = 33k$ posiada pojedyncze maksimum

Faza B. Analiza macierzy transferu w obrębie fazy B jest bardziej skomplikowana. Typowe triangulacje w tej fazie są *zapadnięte*, co oznacza, że niemal wszystkie przestrzenne czworosciany są skoncentrowane w pojedynczym przekroju. W rezultacie nie mamy informacji o korelacjach objętości. Utrudnieniem jest także silnie nieliniowa zależność pseudokrytycznej wartości K_4 od objętości. W pracy [H5] udało się wyznaczyć macierz transferu $\langle n|M|m \rangle$ w fazie B . Jej postać opisana jest wzorem (25), tak samo jak w fazie C_b . W obu fazach występuje również bifurkacja. Zaobserwowano natomiast większe wartości parametru β , które tłumaczą zapadanie się konfiguracji do pojedynczego przekroju, ponieważ wówczas preferowane są duże różnice pomiędzy objętościami sąsiadujących przekrojów.

Przejście fazowe B – C_b. Entropia i problem ustalania objętości. Interesujące zjawisko zaobserwowano podczas analizy przejścia fazowego $B - C_b$. W zależności od sposobu ustalania całkowitej czterowymiarowej objętości, co nie powinno wpływać na strukturę fazową, stwierdzono różny charakter tego przejścia. W modelu CDT, całkowitą objętość można wyrazić na dwa sposoby: za pomocą całkowitej liczby sympleksów $N_4 = N_{41} + N_{32}$ lub liczby sympleksów typu $\{4, 1\}$ oznaczonej przez N_{41} i proporcjonalnej do sumy objętości przekrojów przestrzennych.

W pracach [31, I9] zbadano przejście fazowe $B - C_b$ dla ustalonych wartości N_4 i wykazano, że jest ono drugiego rodzaju. W tym przypadku rozkład prawdopodobieństwa $P(x)$ parametru porządku, $x = N_{41} - N_{32}$ (a także N_0 lub N_{32}), w punkcie krytycznym był dwumodalny. Takie zachowanie jest charakterystyczne dla przejścia fazowego pierwszego rzędu, jednak wraz ze zwiększaniem rozmiarów triangulacji N_4 efekt stawał się łagodniejszy i maksima zaczęły się zlewać. Analiza przejścia w tym samym punkcie krytycznym ($K_0 = 2.2, \Delta = 0.0220$), ale z ustaloną wartością N_{41} , pokazała, że rozkład $P(x)$ jest unimodalny. Samo przejście charakteryzuje maksimum podatności $\chi(x) = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$ (wariancja x). Rozkład $P(x)$ przedstawiono na rysunku 11, po lewej dla ustalonej wartości N_4 a po prawej dla ustalonej wartości N_{41} .

Mechanizm stojący za takim zachowaniem wytłumaczono w pracy [H9]. Aby zachować zgodność z wynikami uzyskanymi w pracach [31, I9] analizowano triangulacje z liczbą przekrojów $T = 80$. Podczas symulacji w przybliżeniu jest ustalana liczba sympleksów, całkowita lub typu $\{4, 1\}$, poprzez dodanie członu kwadratowego do działania, odpowiednio



Rysunek 12: Energia swobodna $F(N_{41}, N_{32})$ dla punktu krytycznego na przejściu $B - C_b$ ($\kappa_{41} = 0.9856$, $\kappa_{32} = 0.9636$, $\kappa_0 = 2.3320$). Kolor niebieski oznacza najmniejsze wartości, a czerwony największe. Szare linie oznaczają przekroje przedstawione na rysunku 11, ukośna linia odpowiada stałej wartości N_4 (rysunek 11 po lewej), a pionowa stałej wartości N_{41}

$$S_{fix}^{\bar{N}_4}(N_4) = \varepsilon(N_4 - \bar{N}_4)^2 \text{ lub } S_{fix}^{\bar{N}_{41}}(N_{41}) = \varepsilon(N_{41} - \bar{N}_{41})^2.$$

Przejścia fazowe związane są z nieciągłością pochodnych energii swobodnej, która jest wynikiem współgrania entropii oraz gołego działania, a fazy charakteryzowane są przez minima energii swobodnej. Ponieważ działanie modelu CDT (4) jest liniową kombinacją liczby wierzchołków (N_0), liczby sympleksów typu $\{4, 1\}$ (N_{41}) oraz typu $\{3, 2\}$ (N_{32}), a zatem jest w pełni regularne, przejścia fazowe muszą mieć swoje źródło w entropii. W celu wyznaczenia energii swobodnej $F(N_{41}, N_{32})$ rozważano działanie Reggego (4) w funkcji N_0 , N_{41} i N_{32} , mianowicie $S[\mathcal{T}] = -\kappa_0 N_0 + \kappa_{41} N_{41} + \kappa_{32} N_{32}$, gdzie $\kappa_0 = K_0 + 6\Delta$, $\kappa_{41} = K_4 + \Delta$ i $\kappa_{32} = K_4$. Funkcję rozdziału (5) można zapisać za pomocą czynnika entropicznego $\mathcal{N}(N_0, N_{41}, N_{32})$, który jest równy liczbie kauzalnych triangulacji o zadanej topologii i odpowiedniej liczbie N_0 , N_{41} oraz N_{32} ,

$$Z(\kappa_0, \kappa_{41}, \kappa_{32}) = \sum_{\mathcal{T} \in \mathbb{T}} e^{-S[\mathcal{T}]} = \sum_{N_0, N_{41}, N_{32}} \mathcal{N}(N_0, N_{41}, N_{32}) e^{-S(N_0, N_{41}, N_{32})}. \quad (26)$$

Aby wyjaśnić różnice w rozkładach parametru porządku $P(x)$ dla różnych sposobów ustalania rozmiaru systemu wyznaczono (z przeciwnym znakiem) energię swobodną w funkcji N_{41} i N_{32} w obszarze przejścia fazowego,

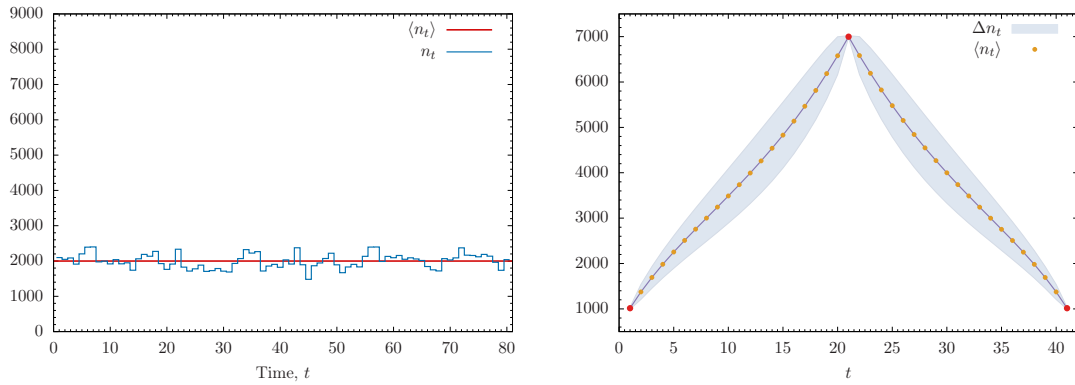
$$F(N_{41}, N_{32}) = \log Z(N_{41}, N_{32}) = -\kappa_{41} N_{41} - \kappa_{32} N_{32} + \log \sum_{N_0} \mathcal{N}(N_0, N_{41}, N_{32}) \cdot e^{\kappa_0 N_0}, \quad (27)$$

gdzie $Z(N_{41}, N_{32})$ oznacza sumę po N_0 występującą w (26) z ustalonymi wartościami N_{41} i N_{32} .

Symulacje Monte Carlo pozwalają na wyznaczenie prawdopodobieństwa występowania konfiguracji o danej liczbie sympleksów typu $\{4, 1\}$ oraz $\{3, 2\}$,

$$P(N_{41}, N_{32}) = \frac{1}{Z(\kappa_0, \kappa_{41}, \kappa_{32})} Z(N_{41}, N_{32}), \quad F(N_{41}, N_{32}) \propto \log P(N_{41}, N_{32}). \quad (28)$$

Ze względu na różnice w rzędach wielkości prawdopodobieństwa $P(N_{41}, N_{32})$, dodano do działania człon $S_{fix}(N_{41}, N_{32}) = \varepsilon(N_{41} - \bar{N}_{41})^2 + \varepsilon(N_{32} - \bar{N}_{32})^2$ kontrolujący zakres objętości N_{41} oraz N_{32} . Symulacje przeprowadzono dla kilkunastu wartości $\bar{N}_{41}$ i $\bar{N}_{32}$, a następnie scalono wyniki po uprzednim usunięciu efektu sztucznego członu $S_{fix}(N_{41}, N_{32})$. Rysunek 12 przedstawia krajobraz energii swobodnej $F(N_{41}, N_{32})$. Przekroje zaznaczone szarymi liniami, odpowiadają stałym wartościom N_4 (ukośna linia) oraz N_{41} (pionowa linia), dla których rozkłady prawdopodobieństwa parametru porządku $P(x)$ przedstawiono na rysunku 11. Okazało się, że dla stałych sprzężenia w pobliżu przejścia fazowego $B - C_b$, funkcja $F(N_{41}, N_{32})$ przyjmuje kształt siodła, które rozszerza się w kierunku rosnącego N_{41} . Takie zachowanie tłumaczy dlaczego rozkład $P(x)$ dla ustalonej wartości N_4 jest bimodalny, zaś dla ustalonego N_{41} posiada jedno maksimum. Warto też zauważyć, że minimum rozkładu $P(x)$ dla $N_4 = \text{const}$ odpowiada jednocześnie maksimum rozkładu dla $N_{41} = \text{const}$.



Rysunek 13: Po lewej: Profil objętości przestrzennej n_t typowej konfiguracji (niebieska linia) dla topologii toroidalnej w fazie C będącej odpowiednikiem fazy C_{dS} w przypadku sferycznym. Średni rozkład objętości $\langle n_t \rangle$ (czerwona linia) jest stały w czasie (por. rysunek 3 po lewej). Po prawej: Trajektoria klasyczna $\langle n_t \rangle$ przy ustalonych wartościach n_1 i n_{21} dla $T = 40$ przekrojów

4.3.6 Topologia torusa

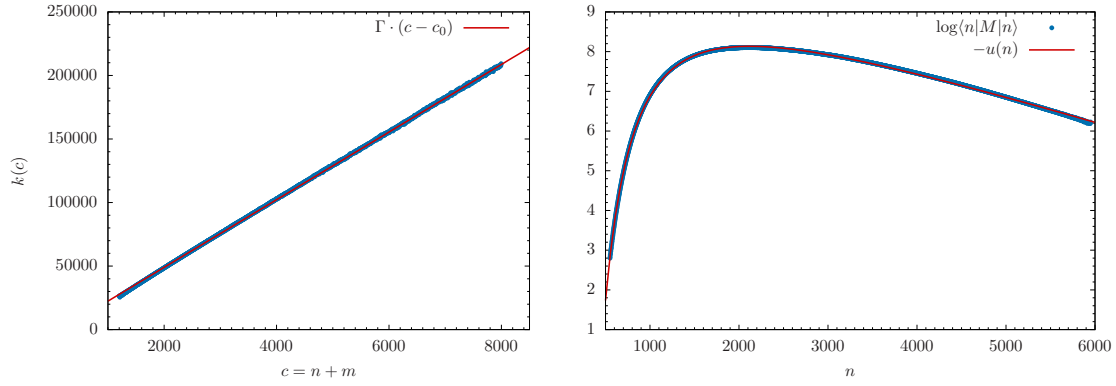
Wyniki przedstawione poniżej opierają się na artykułach [H8, H11, H12].

Podczas konstrukcji kwantowej teorii grawitacji pojawia się istotne pytanie - *w jaki sposób należy uwzględnić możliwe topologie wszechświata?* Odpowiedzi na to pytanie nie są jednoznaczne. W tym rozdziale omówimy rolę topologii czasoprzestrzeni w 3+1-wymiarowym modelu Kausalnych Dynamicznych Triangulacji, w którym topologia przestrzennych liści foliacji jest kontrolowana.

W pracy [H8] podjęto pierwszą próbę zbadania wpływu topologii przestrzennej na wyniki otrzymane w tym modelu. We wcześniejszych publikacjach rozważano jedynie sferyczną topologię przestrzeni ($\Sigma = S^3$), natomiast w tej pracy omówiono wyniki symulacji dla topologii toroidalnej ($\Sigma = T^3$).

Geometria tła. Kausalne Dynamiczne Triangulacje są modelem niezależnym od tła i tym samym nie wprowadzają ręcznie żadnej wyróżnionej geometrii. Wyniki sugerują, że dla toroidalnej topologii przestrzeni również istnieje semiklasyczna faza C , podobna do fazy C_{dS} dla topologii sferycznej, w której obserwujemy wyłonienie się semiklasycznej czterowymiarowej euklidesowej geometrii de Sittera wraz nałożonymi kwantowymi fluktuacjami [H8, H11]. Jeżeli wyłonienie się semiklasycznej geometrii jest uniwersalną cechą modelu CDT, można oczekiwać, że wraz ze zmianą topologii przestrzeni na toroidalną inne semiklasyczne rozwiązanie będzie dominujące w fazie C .

W publikacji [H8] pokazano, że narzucając toroidalną topologię przestrzenną rzeczywiście obserwujemy dynamicznie wyłaniającą się semiklasyczną geometrię tła. Jednak już na tym etapie uwidacznia się podstawowa różnica w porównaniu z topologią sferyczną, średnia objętość $\langle n_t \rangle$ nie ma już rozkładu dzwonowatego, lecz jest stałą funkcją czasu t . Profil objętości n_t typowej konfiguracji dla toroidalnej topologii przestrzennej przedstawiono niebieską linią na rysunku 13 (po lewej). Oscyluje on wokół średniego rozkładu $\langle n_t \rangle$, który zaznaczono czerwoną linią, a którego wartość jest stała w czasie i wynosi $\frac{N_{41}}{T}$. Ten wykres należy porównać z rysunkiem 3 przedstawiającym wyniki pomiarów tych obserwacji dla topologii sferycznej w fazie de Sittera. Aby wyjaśnić różnice w średnim rozkładzie objętości dla obu topologii należy zbadać działanie efektywne.



Rysunek 14: Po lewej: Mianownik wyrazu kinetycznego działania efektywnego zachowuje się liniowo z objętością, $k(c) = \Gamma \cdot (c - c_0)$. Człon kinetyczny jest identyczny dla topologii sferycznej i toroidalnej. Po prawej: Logarytm diagonali efektywnej macierzy transferu $\langle n|M|n \rangle$ wraz z dopasowanym potencjałem postaci $u(n) = \mu n^{-3/2} + \lambda n$. Wykresy należy porównać z rysunkiem 6 przedstawiającym wyniki dla topologii sferycznej

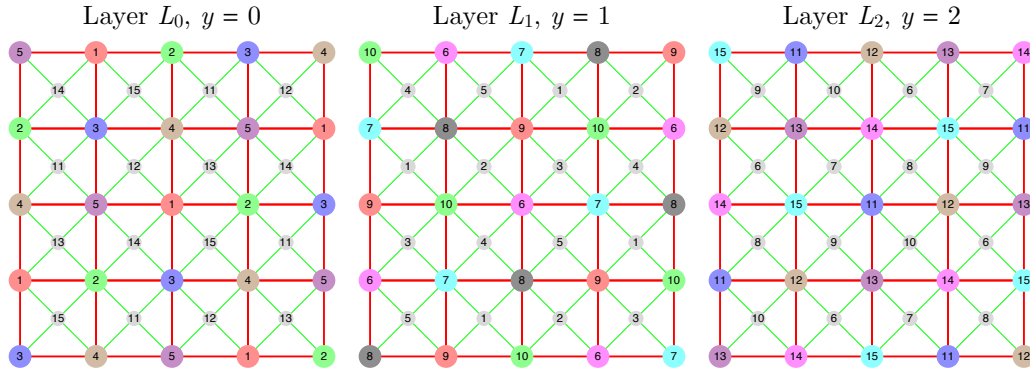
Działanie efektywne. Dla sferycznej topologii przestrzeni działanie modelu minisuperspace w pełni wyjaśnia zarówno średni rozkład objętości jak i jej kwantowe fluktuacje. Rozwiązanie równań ruchu dla działania (11) w postaci (12) jest konsekwencją potencjału, który przyjmuje postać $\beta \cdot v^{1/3}$ i w uproszczonym modelu wynika ze stałej dodatniej krzywizny geometrii sfery S^3 . Działanie modelu minisuperspace dla toroidalnej geometrii przekrojów przestrzennych wynosi $S[v] = -\frac{1}{24\pi G} \int d\tau \left(\frac{\dot{v}^2}{v} - 3\Lambda v \right)$, brak członu potencjalnego wynika z zerowej krzywizny przekrojów. Trajektoria klasyczna, która minimalizuje to działanie przy założeniu ustalonej całkowitej objętości i okresowych warunków brzegowych jest funkcją stałą $v(\tau) = \text{const}$. Wynik ten jest zgodny z przedstawionymi obserwacjami, jednak jak się okaże w pełnym modelu CDT występuje również dodatkowy człon potencjalny.

W artykule [H8] wyznaczono działanie efektywne dla objętości przestrzennych n_t analizując macierz kowariancji. Ta metoda, omówiona na stronie 17, pozwala na wyznaczenie drugiej pochodnej działania dla wartości n_t równym średniej $\langle n_t \rangle$, które w przypadku toroidalnym są identyczne dla wszystkich przekrojów. Z tego powodu, aby zbadać zależność działania od objętości należy przeprowadzić wiele symulacji z różnymi rozmiarami systemu. Zmierzone działanie odpowiada dyskretyzacji wyrażenia ciągłego

$$S[v] = \int d\tau \left(\frac{1}{\Gamma} \frac{\dot{v}^2}{v} + \mu v^{-\gamma} + \lambda v \right), \quad \mu > 0, \gamma = 1.16 \pm 0.5. \quad (29)$$

W pracy [H11] znacząco poprawiono dokładność z jaką wyznaczono działanie efektywne poprzez zastosowanie metody macierzy transferu, którą przedstawiono w rozdziale 4.3.4. Wyniki okazały się zgodne z formułą (29), ale z wartością wykładnika wynoszącą $\gamma = 1.5 \pm 0.1$.

Człon kinetyczny działania efektywnego jest uniwersalny i identyczny dla obu topologii, a wartość współczynnika $\Gamma \approx 26$ jest taka sama w granicy błędu (w punkcie $K_0 = 2.2, \Delta = 0.6$). Mianownik wyrazu kinetycznego pokazany na rysunku 14 (po lewej) zależy liniowo od objętości, $k(v) = \Gamma \cdot v$. Wykres jest identyczny jak w przypadku sferycznym przedstawionym na rysunku 6. Istotnie różny jest natomiast człon potencjalny, który w przypadku toroidalnym dany jest wzorem $u(n) = -\log \langle n|M|n \rangle = \mu n^{-3/2} + \lambda n$. Logarytm diagonali efektywnej zmierzonej macierzy transferu M przedstawiono na rysunku 14



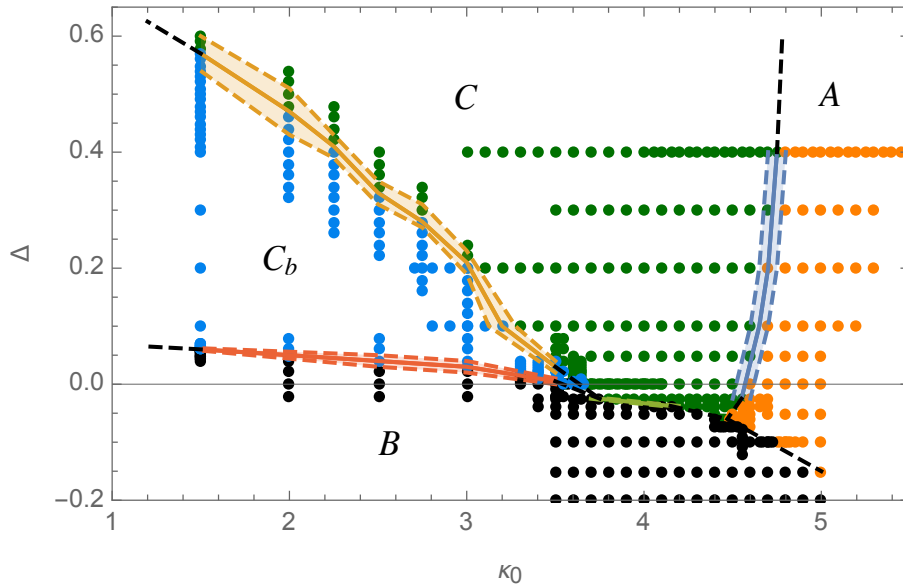
Rysunek 15: Struktura najmniejszej triangulacji sześcianu o topologii T^3 składa się z 15 wierzchołków zaznaczonych kolorowymi punktami. Wierzchołki można podzielić na trzy rozłączne warstwy o periodycznej strukturze z okresem równym 5. Czerwone linie łączą punkty należące do tej samej warstwy

(po prawej). Porównując wykresy $\log \langle n|M|n \rangle$ na rysunkach 6 i 14, odpowiednio dla $\Sigma = S^3$ i $\Sigma = T^3$, widać, że w pierwszym przypadku diagonalą jest funkcją wypukłą, w drugim zaś wklęsłą. Takie zachowanie tłumaczy dzwonowaty profil trajektorii klasycznej $\langle n_t \rangle$ dla topologii sferycznej oraz stały profil w przypadku toroidalnym. Wklęsły kształt diagonal $\langle n|M|n \rangle$ oznacza, że preferowana jest jedna wartość objętości n_t , dla której przypada maksimum. Jego położenie zależy od stałej kosmologicznej λ kontrolowanej przez gołą stałą sprzężenia K_4 , która dopasowana jest w taki sposób, aby całkowita objętość $\langle N_{41} \rangle$ była równa docelowej $\bar{N}_{41}$.

Brak dominującego potencjału pochodzącego od semiklasycznego modelu minisuperspace stanowi zaletę, ponieważ pozwala na łatwiejszą obserwację kwantowych poprawek. Dla $\Sigma = S^3$ semiklasyczny człon $v^{1/3}$ jest dominujący i możliwe, że w jego obecności ewentualny wyraz $v^{-\gamma}$ pozostaje niezauważalny dla dużych objętości.

Ponadto w pracy [H11] udoskonalono metodę wyznaczania działania efektywnego z użyciem macierzy kowariancji poprzez modyfikację warunków brzegowych polegającą na ustaleniu objętości dwóch przekrojów, pierwszego n_1 oraz środkowego n_h , $h = T/2 + 1$. W ten sposób wymuszono różny od stałego średni profil objętości, co umożliwia wyznaczenie elementów macierzy kowariancji w pojedynczej symulacji dla różnych wartości $\langle n_t \rangle$. Wyniki potwierdziły postać działania w formie (29), a klasyczna trajektoria $\langle n_t \rangle$ przy tak zadanych warunkach brzegowych była z nim kompatybilna.

Regularna i minimalna triangulacja o topologii T^3 . Oprogramowanie służące do przeprowadzania symulacji numerycznych w ramach modelu CDT zapewnia, że ruchy Monte Carlo, które lokalnie modyfikują triangulację, nie naruszają topologii. Wprowadzenie nowej topologii sprowadza się do konstrukcji początkowej konfiguracji o zadanej topologii. Punktem wyjścia do zbudowania takiej konfiguracji dla topologii toroidalnej, $\mathcal{M} = S^1 \times T^3 = T^4$, jest triangulacja hipersześcianu T^4 składająca się z 16 sympleksów i opisana w artykule [37]. Oprogramowanie dla modelu CDT operuje na triangulacjach kombinatorycznych, które nie dopuszczają istnienia dwóch krawędzi o identycznych wierzchołkach. Dlatego początkowa konfiguracja składała się z triangulacji hipersześcianu T^4 dwukrotnie odbitego lustrzanie w każdym z czterech kierunków. W efekcie warstwa odpowiadająca jednemu krokowi składa się z 1024 sympleksów co jest wartością znacznie większą niż w przypadku $\Sigma = S^3$, w którym wystarcza 30 sympleksów.



Rysunek 16: Diagram fazowy modelu CDT z toroidalną topologią przekrojów przestrzennych w płaszczyźnie (K_0, Δ) . Struktura fazowa dla topologii sferycznej i toroidalnej jest zbliżona. Występuje odcinek oddzielający bezpośrednio fazy B i C

Z matematycznego punktu widzenia ciekawym zagadnieniem jest struktura najmniejszej trójwymiarowej triangulacji kombinatorycznej o topologii $\Sigma = T^3$. Naiwnie, można by uważać, że najmniejsza taka triangulacja powinna się składać z $3 \times 3 \times 3 = 27$ wierzchołków. W pracy [H8] znaleziono oraz szczegółowo opisano najmniejszą kombinatoryczną triangulację T^3 . Okazało się, że posiada ona znacznie ciekawszą strukturę, która składa się z zaledwie 15 wierzchołków. Tworzą one trzy rozłączne warstwy, które się wzajemnie przeplatają zgodnie ze schematem przedstawionym na rysunku 15. Warstwa połączona w kierunku $+1$ jest jednocześnie warstwą w kierunku $-1/2$. Badając niezmienniki pętli biegnących po krawędziach triangulacji pokazano, że rzeczywiście istnieją trzy klasy nieściągalnych pętli. Warto również zauważyć, że najmniejsza triangulacja T^3 składa się z 90 czworościanów, czyli znacznie więcej niż dla topologii S^3 (5 czworościanów), co może tłumaczyć silniejsze efekty skończonego rozmiaru obserwowane dla topologii toroidalnej.

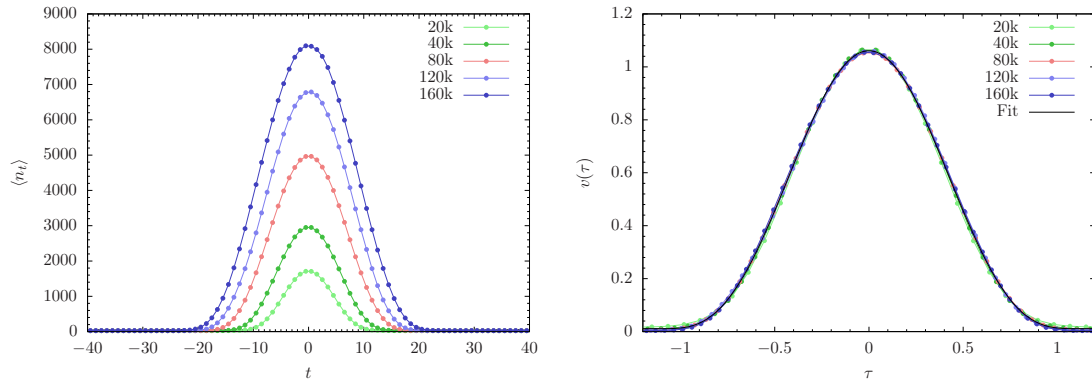
Diagram fazowy dla topologii toroidalnej. W artykule [H12] zbadano strukturę fazową modelu Kauzalnych Dynamicznych Triangulacji z toroidalną topologią przekrojów przestrzennych ($\Sigma = T^3$) i periodycznymi warunkami brzegowymi. Diagram fazowy otrzymany na podstawie wielkoskalowych symulacji komputerowych, przedstawiony na rysunku 16, jest bardzo podobny do struktury fazowej dla sferycznej topologii przestrzennej. Wyniki potwierdzają istnienie czterech faz, które są bezpośrednimi odpowiednikami faz obserwowanych wcześniej dla $\Sigma = S^3$. Położenie linii współlistnienia faz $A - C$ i $B - C_b$ w przestrzeni parametrów (K_0, Δ) jest zbliżone w obu topologiach, a drobne odchylenia mogą wynikać z różnicy rozmiarów konfiguracji oraz skali efektów skończonego rozmiaru - najmniejsza triangulacja T^3 jest znacznie większa niż dla S^3 .

Ekstrapolacja zmierzonych linii przejścia fazowego sugeruje, że przypadku sferycznym wszystkie cztery fazy spotykają się w jednym punkcie *poczwórnym*. Wynik ten jednak nie jest jednoznaczny, ponieważ ze względów technicznych symulacje Monte Carlo w tym regionie są mało efektywne. Punkt *poczwórny* jest szczególnie interesujący, ponieważ w oparciu o scenariusz asymptotycznego bezpieczeństwa jest on naturalnym kandydatem na granicę

ultrafioletową modelu CDT [H6, 38]. Wydaje się, że w przypadku toroidalnym sytuacja jest inna. Linia oddzielająca fazy C_b i C nie łączy się z innymi liniami w jednym punkcie (por. rysunek 16). W rezultacie istnieje odcinek bezpośrednio oddzielający fazę zapadniętą B i fazę semiklasyczną C . Obecnie analizujemy czy efekt ten jest rzeczywiście konsekwencją zmiany topologii oraz prowadzimy badania nad wyznaczeniem rodzaju przejść fazowych. Wymagają one intensywnych symulacji dla różnych rozmiarów sieci w celu ekstrapolacji wyników do nieskończonej objętości i wyznaczenia wykładników krytycznych.

Dla topologii sferycznej przejście między fazami C_{dS} i A cechuje bimodalny rozkład prawdopodobieństwa parametrów porządku $\frac{N_0}{N_{41}}$ i $\frac{N_{32}}{N_{41}}$. Oznacza to, że konfiguracje przeskakują pomiędzy dwoma stanami metastabilnymi, jednym dla fazy A , drugim dla fazy C_{dS} [I9]. Separacja maksimów rośnie wraz z rozmiarem systemu, co jest charakterystyczne dla przejścia fazowego pierwszego rodzaju. W przypadku toroidalnym przejście między tymi fazami jest dużo łagodniejsze. Nie obserwujemy podwójnych maksimów w rozkładzie prawdopodobieństw parametrów porządku, niemniej przejście fazowe jest sygnalizowane przez maksimum znormalizowanej podatności $\frac{\chi(N_{32}/N_{41})}{\langle N_{32}/N_{41} \rangle}$.

Dla topologii sferycznej wykazano, że przejście fazowe $C_b - C_{dS}$ jest drugiego lub wyższego rodzaju [H10]. W przypadku toroidalnym obserwujemy silną histerezę poruszając się od fazy C_b do C lub na odwrót. W pewnym zakresie stałych sprężenia konfiguracja, nawet po symulacjach trwających wiele miesięcy, pozostaje w jednym z dwóch stanów metastabilnych w zależności od początkowej triangulacji. Histereza maleje wraz ze wzrostem rozmiaru systemu, a jej obecność można tłumaczyć silniejszymi efektami skończonego rozmiaru.



Rysunek 17: Po lewej: Średni rozkład objętości $\langle n_t \rangle$ dla różnych rozmiarów systemu. Po prawej: Przeskalowany profil fizycznej objętości $v(\tau)$ nie zależy od rozmiaru systemu przy skalowaniu stałej sieci $a \propto N_4^{-1/d_H}$ dla wymiaru Hausdorffa $d_H = 4$

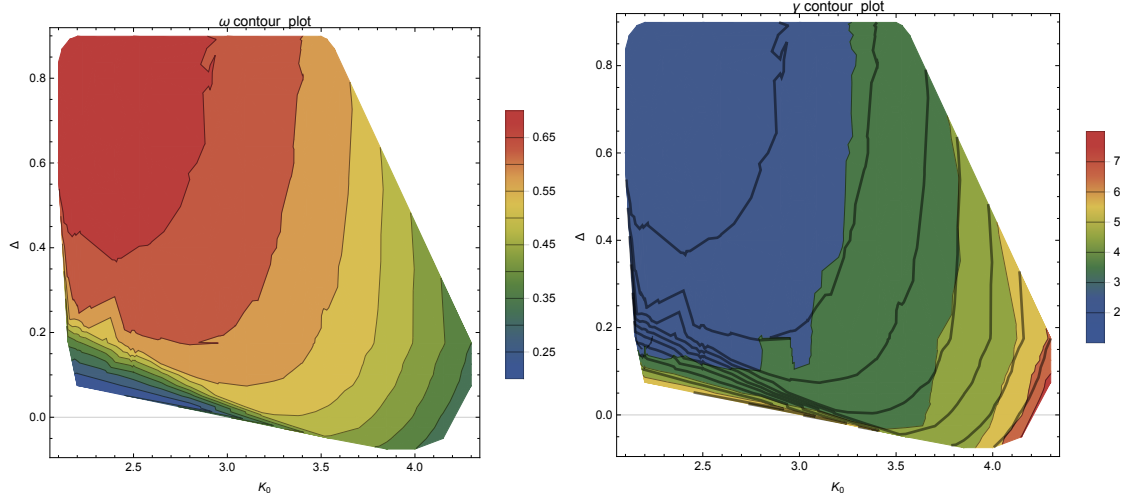
4.3.7 Grupa renormalizacji w modelu CDT

Wyniki przedstawione poniżej opierają się na artykule [H6].

Niezbędnym krokiem w sieciowych teoriach pola jest zdefiniowanie granicy ciągłej, która zazwyczaj związana jest z przemianą fazową drugiego rzędu. Pierwsze badania nad przepływem gołych stałych sprzężenia w ramach grupy renormalizacji w celu wyznaczenia postulowanego ultrafioletowego punktu stałego i osiągnięcia granicy ciągłej zostały przeprowadzone w publikacji [H6]. Formalnie, w granicy ultrafioletowej stała sieci a , która w modelu CDT oznacza długość boków sympleksów, zmierza do zera, jednocześnie należy powiązać a z fizycznymi jednostkami długości. Z reguły jako punkt odniesienia używa się długości korelacji. W przypadku grawitacji wciąż nie mamy do dyspozycji odpowiedniej długości korelacji, można jednak posłużyć się całkowitą objętością systemu i wyrazić relacje skalowania względem tej objętości w pobliżu punktu stałego. Uzyskane rezultaty pozwalają na bliższe porównanie z ciągłymi podejściami do kwantowej grawitacji wykorzystującymi techniki funkcjonalnej grupy renormalizacji i mogą służyć do niezależnego sprawdzenia scenariuszy dotyczących ultrafioletowych punktów stałych w tych teoriach.

W pracy [H6] zdefiniowano *linie stałej fizyki* w przestrzeni rozpiętej przez gołe stałe sprzężenia K_0 i Δ , na których fizyczne wielkości charakteryzujące makroskopowy Wszechświat są zachowane podczas zmierzania ze stałą sieci a do zera. Tymi wielkościami są całkowita fizyczna czteroobjętość, $V_4 = N_4 \cdot a^4$, trójwymiarowa objętość w funkcji czasu właściwego $v(\tau)$ oraz amplituda fluktuacji kwantowych objętości wokół średniej $\delta v(\tau)$. Ciągłe funkcje $v(\tau)$ i $\delta v(\tau)$ wyrażają się przez ich dyskretne odpowiedniki $\langle n_t \rangle$ i $\delta n_t = \sqrt{\langle (n_t - \langle n_t \rangle)^2 \rangle}$. Linie przepływu stałych sprzężenia wyznaczono za pomocą symulacji Monte Carlo.

Wymiar Hausdorffa. Dla ustalonych wartości gołych stałych sprzężenia K_0 i Δ w fazie de Sittera ($\Sigma = S^3$) obserwujemy skalowanie profilu objętości $\langle n_t \rangle$ jakiego możemy się spodziewać dla prawdziwie czterowymiarowego Wszechświata. Wymiar czasowy i trzy wymiary przestrzenne skalują się jednakowo ze stałą sieci $a \propto N_4^{-1/d_H}$, gdzie $d_H = 4$ jest



Rysunek 18: Po lewej: Zależność parametru ω określającego kształt Wszechświata od gołych stałych sprzężenia K_0 i Δ . Po prawej: Zależność parametru γ związanego z amplitudą fluktuacji kwantowych objętości przestrzennej od gołych stałych sprzężenia. Szare linie oznaczają poziomice o stałej wartości ω

wymiarem Hausdorffa,

$$\begin{aligned}
 t &\longrightarrow \tau = N_4^{-1/4} \cdot t, \\
 \langle n_t \rangle = \frac{3}{4\omega} N_4^{3/4} \cdot \cos^3 \left(\frac{t}{\omega N_4^{1/4}} \right) &\longrightarrow v(\tau) = N_4^{-3/4} \langle n_t \rangle = \frac{3}{4\omega} \cos^3 \left(\frac{\tau}{\omega} \right), \\
 \delta n_t = \gamma N_4^{1/2} \cdot F \left(\frac{t}{\omega N_4^{1/4}} \right) &\longrightarrow \delta v(\tau) = N_4^{-3/4} \delta n_t = \gamma N_4^{-1/4} \cdot F \left(\frac{\tau}{\omega} \right).
 \end{aligned} \tag{30}$$

Powyższy wzór pokazuje, że czasowa rozciągłość Wszechświata zachowuje się jak $N_4^{1/4}$, a objętość przestrzenna w danym czasie jak $N_4^{3/4}$. Takiej zależności od całkowitej liczby sympleksów N_4 można oczekiwać dla czterowymiarowej czasoprzestrzeni. Przeskalowany profil objętości $v(\tau)$ nie zależy od rozmiaru systemu N_4 i stałej sieci a , co przedstawiono na rysunku 17. Z tego powodu $v(\tau)$ interpretujemy jako fizyczną trójwymiarową objętość przestrzenną, a τ jako fizyczny czas własny. Parametr ω określa szerokość i tym samym kształt rozkładu. Parametr γ określający amplitudę kwantowych fluktuacji fizycznej objętości, $\delta v(\tau) \propto \gamma N_4^{-1/4}$, powinien zachowywać się jak $\gamma \propto N_4^{1/4}$, aby fizyczne fluktuacje były stałe. Wprawdzie podstawowym budulcem modelu CDT są czterowymiarowe sympleksy, otrzymane skalowanie (30) jest nietrywialne i nie jest obserwowane np. w pozostałych fazach.

Przeptyw grupy renormalizacji. W artykule [H6] zdefiniowano linie stałej fizyki w przestrzeni rozpiętej przez stałe sprzężenia w taki sposób, aby własności fizyczne były na nich zachowane. Linia, parametryzowana przez stałą sieci a lub liczbę sympleksów N_4 , określa zależność gołych stałych sprzężenia $K_0 = K_0(N_4)$ i $\Delta = \Delta(N_4)$ od rozmiaru systemu w taki sposób, aby profil $v(\tau)$ oraz amplituda fluktuacji fizycznej objętości $\delta v(\tau)$ się nie zmieniały. Pierwszy warunek narzuca stałą wartość parametru $\omega = \omega(K_0, \Delta) = \text{const}$, który decyduje o kształcie profilu objętości. Drugi warunek wymusza skalowanie $\gamma(K_0, \Delta) \propto N_4^{1/4}$ w granicy ultrafioletowej $N_4 \rightarrow \infty$. Krajobraz przedstawiający zależność

parametrów $\omega(K_0, \Delta)$ i $\gamma(K_0, \Delta)$ od gołych stałych sprzężenia pokazano na rysunku 18. Poziomice na wykresie po lewej stronie łączą punkty o identycznej wartości ω i kształcie profilu $v(\tau)$, zostały one również nałożone szarą linią na wykresie po prawej stronie przedstawiającym wartości parametru γ .

Analiza wyników symulacji komputerowych dla skończonej liczby sympleksów N_4 nie wskazuje, aby któraś z linii stałej fizyki przecinała linię przejścia fazowego drugiego rzędu $B - C$. Początkowo, dla mniejszych wartości N_4 , linie stałego $\omega(K_0, \Delta)$ przechodzą prawie równolegle wzdłuż przejścia fazowego $B - C$, a następnie zakręcają w pobliżu punktu potrójnego, który znajduje się w prawym dolnym rogu wykresów. Linia następnie przebiega w kierunku rosnących wartości stałej sprzężenia Δ wzdłuż przejścia fazowego $A - C$. Poruszanie się po krzywej w omówionym kierunku powoduje, że wartość parametru $\gamma(K_0, \Delta)$ powoli rośnie, a wraz z nią możliwe jest zwiększenie rozmiaru systemu N_4 i jednocześnie zmniejszenie stałej sieci a . Podczas analizy założono, że skalowanie (30) zachodzi w całym obszarze fazy de Sittera i dla wszystkich wartości N_4 .

Możliwe są także inne scenariusze wyznaczania *linii stałej fizyki* uwzględniające np. asymetrię pomiędzy długościami krawędzi czasowych i przestrzennych. Dopuszczając anizotropię między czasem a przestrzenią, jak ma to miejsce w modelach grawitacji Hořavy-Lifshitz, przepływ stałych sprzężenia może zmierzać w kierunku przejścia fazowego $B - C$.

4.3.8 Pętle Wilsona

Wyniki przedstawione poniżej opierają się na artykule [H7].

Model Kauzalnych Dynamicznych Triangulacji jest nieperturbacyjną próbą konstrukcji kwantowej teorii grawitacji bez wprowadzania układu współrzędnych. Weryfikacja modelu, np. zgodności w granicy klasycznej z ogólną teorią względności, wymaga zdefiniowania obserwabli, które są niezmiennicze względem dyfeomorfizmów czasoprzestrzeni (w tym przypadku zachowujących foliację). Znalezienie takich obserwabli nie jest trywialne. W modelu CDT znanych jest tylko kilka takich obserwabli, dla których wykonano ilościowe pomiary, m.in. profil objętości przestrzennych, wymiar Hausdorffa i wymiar spektralny [I12, H2, I33]. Wszystkie z nich opierają na pomiarze długości i objętości. Klasyczna teoria grawitacji wykorzystuje, natomiast, do opisu czasoprzestrzeni krzywiznę będącą funkcją pochodnych tensora metrycznego $g_{\mu\nu}(x)$. W modelu CDT istnieje dyskretna lokalna definicja składowa krzywizny, która jednak prowadzi do osobliwości w granicy ciągłej.

W publikacji [H7] zaproponowano konstrukcję w ramach modelu CDT pętli Wilsona, które dostarczają informacji o krzywiznie. Ostatecznym celem jest konstrukcja i pomiar kwantowych obserwabli wprowadzających pojęcie *krzywizny* w nieperturbacyjnej kwantowej grawitacji, która jest dobrze zdefiniowana i daje skończone wartości w skali Plancka, a na skalach makroskopowych przechodzi w standardową krzywiznę ogólnej teorii względności. Przeniesienie równoległe U_γ wzdłuż krzywej $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}$ wyraża się przez eksponentę uporządkowaną wzdłuż drogi

$$U_\gamma = \mathcal{P} \exp \left[- \oint_\gamma \Gamma_\sigma^\sigma \frac{\partial \gamma^\sigma}{\partial \lambda} d\lambda \right] \in SO(4), \quad [\Gamma_k]_\nu^\mu = \Gamma_{k\nu}^\mu,$$

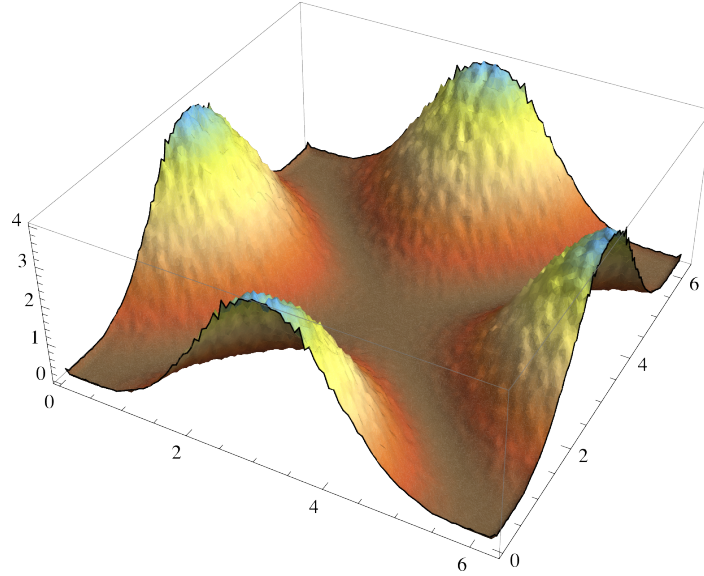
gdzie symbole Christoffela $\Gamma_{\sigma\nu}^\mu$ definiują koneksję Leviego-Civity zgodną z metryką $g_{\mu\nu}(x)$. Dla krzywej zamkniętej (pętli) U_γ jest holonomią. Tensor krzywizny można w pełni wyznaczyć z infinitezymalnych holonomii i z tego powodu mają one istotne znaczenie. W przypadku teorii pola z cechowaniem, pole cechowania A_μ pełni rolę koneksji, a ślad holonomii, $\text{Tr } U_\gamma$, nazywany jest pętlą Wilsona. Pętle Wilsona odgrywają ważną rolę m.in. w chromodynamice kwantowej.

Czterowymiarowe sympleksy w modelu CDT są podzbiorem przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^4$ z płaską metryką indukowaną. W sympleksach możemy tymczasowo wprowadzić identyczny kartezjański układ współrzędnych, a jego konkretny wybór nie ma wpływu na wynik końcowy. Ponieważ koneksja wewnątrz płaskich sympleksów znika, nietrywialny wkład do holonomii U_γ pojawia się jedynie gdy krzywa przechodzi z jednego sympleksu do sąsiadującego przecinając czworościenny bok będący ich częścią wspólną. Z tego powodu w omawianym modelu dyskretnym wystarczy rozważać krzywe zamknięte przebiegające przez środki sympleksów s_i , $\gamma = (s_1, s_2, \dots, s_n, s_1)$. Holonomia U_γ w naturalny sposób wyraża się poprzez iloczyn macierzy przejścia $U(s_j, s_i)$ pomiędzy układami współrzędnych sąsiadujących sympleksów s_i i s_j ,

$$U_\gamma = U(s_1, s_n)U(s_n, s_{n-1}) \cdots U(s_2, s_1), \quad U(s_j, s_i) \equiv \frac{\partial x_j^\mu}{\partial x_i^\nu} \in O(4). \quad (31)$$

W czterowymiarowym modelu CDT krzywizna zlokalizowana jest jedynie na trójkątach, dlatego holonomia dla pętli, która nie obiega żadnego trójkąta, jest macierzą jednostkową. Podobnie, infinitezymalne holonomie wokół pojedynczego trójkąta są bezpośrednio związane z deficytem kąta i badają geometrię na skali obciążenia zdominowanej przez artefakty sieciowe.

Wydobycie fizycznych informacji, które można porównać z makroskopową krzywizną w granicy klasycznej, wymaga zastosowania odpowiednich procedur uśredniania po pętlach.



Rysunek 19: Empirycznie wyznaczony rozkład kątów θ_1 i θ_2 charakteryzujących holonomie U_γ . Kąty te nie zależą od wyboru kartezjańskiego układu współrzędnych w sympleksach

Można również oczekiwać, że w granicy ciągłej pętle Wilsona będą podlegać renormalizacji. Aby wygenerować pętle, dla których wyliczymy holonomie (31), wprowadzono dynamiczną cząstkę punktową o masie m sprzężoną z geometrią poprzez działanie

$$S_\gamma = m \int_\gamma dl \rightarrow m_0 L, \quad dl = \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{d\gamma^\mu}{ds} \frac{d\gamma^\nu}{ds}} ds. \quad (32)$$

W modelu CDT linia świata cząstki składa się z L odcinków łączących środki sympleksów tworząc zamkniętą pętlę wzdłuż kierunku czasowego. Dyskretne działanie dla takiej cząstki wyraża się przez jej gołą masę m_0 i długość L , $S_\gamma = m_0 L$. Tak zdefiniowane pętle Wilsona są poprawnymi obserwablami.

Holonomia U_γ wciąż zależy od wyboru układu współrzędnych w początkowym sympleksie s_1 . Wartościami niezmienniczymi względem transformacji układu współrzędnych są dwa kąty θ_1 i θ_2 , które parametryzują elementy maksymalnego torusa $T = SO(2) \times SO(2)$ dla grupy $SO(4)$ ⁶. Rozkład tych kątów wyznaczony na podstawie symulacji Monte Carlo przedstawiono na rysunku 19. Wyniki otrzymane dla fazy de Sittera pokazują, że dla rozważanej klasy pętli Wilsona rozkład holonomii dany jest przez jednorodny rozkład z miarą Harra na $SO(4)$, od którego nie zauważono mierzalnych odchyleń. Nie zaobserwowano również korelacji, lokalizacji wokół np. identyczności, ani spodziewanych efektów dyskretnych wynikających ze skończonej liczby możliwych macierzy przejścia $U(s_j, s_i)$. Na podstawie tak długich pętli Wilsona jakie rozważano w pracy [H7] nie można wydobyć informacji dotyczących krzywizny geometrii, o ile nie są ukryte w korelacjach wyższego rzędu. Otwarte pozostaje pytanie w jaki sposób zdefiniować klasę zamkniętych krzywych, które są na tyle małe, aby można je było interpretować jako uśrednioną krzywiznę w granicy ciągłej, a jednocześnie na tyle duże, aby nie były zdominowane przez efekty dyskretyzacyjne.

⁶ Przy założeniu $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 < \pi$, kąty θ_1 i θ_2 można jednoznacznie wyznaczyć ze śladów $\frac{1}{2} \text{Tr } U_\gamma = \cos \theta_1 + \cos \theta_2$ i $\frac{1}{4} \text{Tr } U_\gamma^2 + 1 = \cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2$, które są niezmiennicze względem transformacji podobieństwa odpowiadającej zmianie układu współrzędnych.

4.3.9 Metody numeryczne

Wciąż nie dysponujemy odpowiednimi narzędziami analitycznymi, które pozwoliłyby skutecznie badać omawiane podejście do kwantowej grawitacji w czterech wymiarach. Konstrukcja modelu Kauzalnych Dynamicznych Triangulacji pozwala jednak na zastosowanie obliczeń numerycznych i studia nad nim w dużej mierze opierają się na wynikach symulacji komputerowych. Znaczący postęp we wzroście mocy obliczeniowej procesorów⁷, jaki dokonał się w ostatnim półwieczu, spowodował, że metody sieciowe również zyskują na znaczeniu.

We wszystkich publikacjach wchodzących w skład cyklu wykorzystano kod komputerowy do symulacji samodzielnie napisany przez habilitanta, którego główną część stanowi implementacja algorytmu Monte Carlo Metropolis-Hastingsa [30]. Symulacje komputerowe używane w badaniach nad modelem polegają na generowaniu triangulacji zgodnie z rozkładem prawdopodobieństwa zadany przez funkcję rozdziału (5), co pozwala na wyliczenie wartości oczekiwanych odpowiednich obserwabli. Wymagają one znacznych zasobów obliczeniowych, dlatego ważne jest, aby dysponować efektywnym kodem programu. Ponieważ kluczowym kryterium jest wydajność kodu, całość oprogramowania stworzono w języku C, zaś do analizy danych wykorzystano narzędzia *Mathematica*, *Julia* oraz *AWK*.

Oprogramowanie wykorzystywane do symulacji rozwijałem na przestrzeni ostatnich kilku lat dokonując szeregu usprawnień oraz modyfikacji. Wprowadziłem nowe rozwiązania algorytmiczne i optymalizacje, które w szczególności uwzględniały współczesne procesory wielordzeniowe. Te zmiany zmniejszyły czas wykonania kodu o ok 50%.

Parallel rejection. Wąskim gardłem symulacji jest etap termalizacji konfiguracji, przeprowadzany zazwyczaj na początku każdej serii symulacji. Nie czerpie on korzyści z naiwnych metod zrównoleglenia i w dużej mierze zależy od prędkości pojedynczego rdzenia procesora, która nie rośnie tak szybko jak moc całkowita. W ostatnim roku zaimplementowałem algorytm *parallel rejection* [40], który pozwala na równoległe przetwarzanie łańcucha Markowa w kilku wątkach. Aby jego zastosowanie było efektywne, muszą być spełnione pewne warunki, mianowicie akceptancja ruchów Monte Carlo musi być niska. Wykorzystanie efektywnych struktur danych i algorytmów pozwoliło na osiągnięcie wysokiego współczynnika akceptancji. Jednak dla pewnych obszarów gołych stałych sprzężenia, zwłaszcza w szczególnie interesującym otoczeniu przejść fazowych, mamy do czynienia ze zjawiskiem *krytycznego spowolnienia*, które objawia się m.in. niską akceptancją. W takim przypadku metoda *parallel rejection* pozwala na kilkukrotne przyspieszenie symulacji.

Replica exchange. Kolejnym wprowadzonym usprawnieniem jest metoda nazywana *replica exchange* lub *parallel tempering*. Polega ona na wymianie konfiguracji pomiędzy niezależnymi łańcuchami Markowa. Ze względu na bardzo mały narzut związany komunikacją poszczególnych wątków, umożliwia kilkudziesięciokrotne zmniejszenie czasu autokorelacji (zależnie od liczby rdzeni). Ta metoda sprawdza się szczególnie dobrze w pobliżu przejść fazowych wyższego rzędu.

Korelator pola skalarne. Podstawowym obiektem rozpatrywanym w teoriach pola jest propagator pola. Standardowa technika jego numerycznego wyznaczania w modelach Dynamicznych Triangulacji, polegająca na liczeniu średniej iloczynu wartości pól, cechuje się olbrzymimi błędami numerycznymi dla dużych odległości. Aby rozwiązać ten problem opracowałem metodę, która wykorzystuje związek pomiędzy korelatorem pola skalarne a ewolucją rozkładu prawdopodobieństwa znalezienia cząstki w procesie dyfuzji. Nowa metody wyznaczania korelacji przestrzennych pola skalarne jest znacznie szybsza i obciążona mniejszym błędem.

⁷Rozumianych nie tylko jako procesory ogólnego przeznaczenia (CPU), ale również graficzne (GPU) czy tensorowe (TPU).

4.3.10 Podsumowanie i plany naukowe

Cykl prac przedstawiony w niniejszym autoreferacie dotyczy modelu Kauzalnych Dynamicznych Triangulacji, który jest sieciowym i nieperturbacyjnym podejściem do problemu kwantowania ogólnej teorii względności. Stworzenie kwantowej teorii grawitacji pozostaje jednym z najważniejszych wyzwań fizyki teoretycznej. W omówionych artykułach zbadano własności niezbędne do sprawdzenia czy rozważane podejście rzeczywiście jest poprawną kwantową teorią grawitacji. Charakterystyczną cechą modelu jest dynamiczne wyłonienie się semiklasycznej geometrii tła, która odpowiada przestrzeni de Sittera będącej rozwiązaniem klasycznych równań Einsteina [H1, H4]. Wokół trajektorii klasycznej obserwujemy kwantowe fluktuacje objętości przestrzennej, które są opisywane przez efektywne działanie modelu minisuperspace. Wynik ten jest szczególnie ważny i nietrywialny, ponieważ jest on efektem współgrania zarówno entropii, jak i gołego działania. Entropia dokładnie *odbudowuje* działanie efektywne w postaci minisuperspace, ale je stabilizuje zmieniając znak czynnika konforemnego. Istotna część przedstawionego osiągnięcia naukowego dotyczyła badania zachowania członów generowanych przez entropię i ich zależności od działania fizycznego.

Podstawowym sprawdzianem, któremu powinna podlegać teoria kwantowa jest jej zgodność w granicy klasycznej z klasycznym odpowiednikiem. W publikacjach [H2, H3, H5] rozwinięto i usprawniono metody wyznaczania działania efektywnego dla czynnika skali, co pozwoliło na wyznaczenie poprawek kwantowych oraz na porównanie modelu CDT z semiklasycznymi modelami kosmologicznymi minisuperspace. Pomimo małych rozmiarów triangulacji semiklasyczny opis okazał się zaskakująco dokładny. W pracy [H7] wprowadzono również nowe obserwable na kwantowych geometriach, np. pętle Wilsona, które mogą posłużyć do sprawdzenia zachowania modelu w granicy klasycznej.

W granicy ciągłej stała sieci zmierza do zera przy jednoczesnym zachowaniu wielkości fizycznych, co pociąga za sobą rozbieżność długości korelacji wyrażonej w jednostkach sieci, która jest na ogół powiązana z przejściami fazowymi wyższego rzędu. Z tego punktu widzenia wyznaczenie rodzajów przemian fazowych występujących w modelu ma kluczowe znaczenie. W pracach [H5, H9, H10] zdefiniowano nowe parametry porządku, a następnie dokładnie zbadano strukturę fazową modelu. W szczególności odkryto nową fazę bifurkacji, która charakteryzuje się istnieniem osobiwych wierzchołków triangulacji o bardzo wysokich krotnościach. W publikacji [H6] przeprowadzono nowatorskie badania nad przepływem gołych stałych sprzężenia w ramach grupy renormalizacji w celu wyznaczenia ultrafioletowego punktu stałego i osiągnięcia granicy ciągłej. W artykule [H10] po raz pierwszy uwzględniono wpływ dynamicznych pól skalarnych na diagram fazowy.

W pracach [H8, H11, H12] podjęto próbę odpowiedzi na pytanie o znaczenie topologii Wszechświata. Rozważany model umożliwia kontrolę topologii czasoprzestrzeni, co pozwala na porównanie z innymi podejściami do kwantowej teorii grawitacji. Ta własność umożliwiła także porównanie wyników dla sferycznej i toroidalnej topologii przestrzeni. Dla topologii toroidalnej zaobserwowano istotnie różną geometrię tła wynikającą z innej postaci członu potencjalnego w działaniu efektywnym. Brak potencjału w semiklasycznym modelu minisuperspace pozwolił na obserwacje poprawek kwantowych. Diagram fazowy wyznaczony dla obu topologii okazał jakościowo równoważny.

Plany naukowe

Proponowane kierunki badań obejmują następujące zagadnienia:

Pole skalarne. Jednym z najciekawszych problemów badawczych, który należałoby rozważyć w nadchodzących latach, dotyczy uwzględnienia obecności materii w czterowymiarowym modelu CDT. Aby otrzymać realistyczny kwantowy model kosmologiczny

niezbędne jest uwzględnienie odpowiedniej liczby pól materii [39]. Ważnym zagadnieniem jest wyznaczenie wpływu pól materii na działanie efektywne oraz diagram fazowy.

Cząstka masowa. Dodanie do modelu semiklasycznej cząstki punktowej, stanowiącej źródło pola grawitacyjnego, umożliwi zbadanie w modelu kwantowym oddziaływania pomiędzy masową cząstką (trajektorią cząstki) a geometrią czasoprzestrzeni, w której propaguje się pole grawitacyjne. Dynamiczna cząstka masowa sprzęga się z geometrią jedynie poprzez wyraz w działaniu proporcjonalny do czasu własnego cząstki, gdzie współczynnikiem proporcjonalności jest jej masa. Ciekawym zagadnieniem będzie sprawdzenie wpływu cząstki np. na wartość oczekiwaną krzywizny czasoprzestrzeni w otoczeniu trajektorii i być może obserwacja efektów kwantowych.

Kolejnym etapem jest zbadanie oddziaływania pomiędzy dwiema cząstkami masowymi. Chociaż w działaniu nie występuje wyraz opisujący wzajemne oddziaływanie cząstek, ich trajektorie mogą się efektywnie sprzęgać poprzez kwantową geometrię czasoprzestrzeni. Można mieć nadzieję, że taki układ pozwoli na obserwację klasycznej siły ciężenia w modelu kwantowym. Taki wynik byłby niezwykle interesujący, ponieważ podstawowym wymaganiem wobec teorii kwantowej grawitacji jest jej zgodność w granicy klasycznej z ogólną teorią względności.

Powyższy scenariusz motywuje również do wprowadzenia innych niż dotychczas używane periodycznych warunków brzegowych w kierunku czasowym. Warunki brzegowe typu Dirichleta, polegające na ustaleniu dwóch trójwymiarowych geometrii przekrojów przestrzennych występujących w pewnej odległości czasowej od siebie, pozwolą na obserwację wpływu cząstki masowej na względne położenie wspomnianych przekrojów, a także na lepszą kontrolę wzajemnego położenia trajektorii cząstek. Umożliwią również sprawdzenie zgodności z innymi niż maksymalnie symetrycznymi rozwiązaniami równań Einsteina.

Cechą charakterystyczną fazy bifurkacji jest obecność osobliwych wierzchołków o bardzo dużej krotności występujących w co drugim przekroju przestrzennym. Wierzchołki te układają się na linii w kierunku czasowym. Nasuwa się pytanie, czy istnieją korelacje pomiędzy taką linią a linią świata cząstek masowych.

Topologia. Jakościowe różnice zaobserwowane pomiędzy topologią sferyczną i toroidalną, widoczne zarówno w kształcie trajektorii klasycznej, jak i działaniu efektywnym, motywują do zadania pytania co jest ich rzeczywistą przyczyną. Zgodność z modelem minisuperspace wskazywałby, że istotna jest krzywizna geometrii o danej topologii. Z drugiej strony lokalna wartość krzywizny fluktuuje bardzo mocno, a typowe konfiguracje znacząco różnią się od maksymalnie symetrycznych, i wydaje się, że z kombinatorycznego punktu widzenia (czyli liczby triangulacji) większe znaczenie ma topologia. Odpowiedzi na powyższe pytanie może udzielić zbadanie innych topologii w modelu CDT, w szczególności przestrzeni rzutowej $\mathbb{RP}^3$, która posiadając taką samą algebrę jak $SO(3) \sim S^3$, również ma stałą krzywiznę skalarną, jednocześnie mając inną topologię.

Oprogramowanie. Przemianę fazową między fazą bifurkacji oraz fazą de Sittera, a także pomiędzy fazą B oraz fazą de Sittera, charakteryzuje bardzo silna histereza, utrudniająca precyzyjne wyznaczenie położenia przejścia oraz jego rodzaju. Histereza jest szczególnie widoczna w przypadku toroidalnym. Aby rozwiązać ten problem planowane jest zastosowanie metod Monte Carlo dla zespołu multikanonicznego, na przykład algorytmu Wanga-Landaua [41]. Metody te wprowadzają dodatkową wagę konfiguracji, która przybliża odwrotność rozkładu parametru (porządku) odseparowującego obie fazy, i tym samym zwiększają prawdopodobieństwo tunelowania przez *doliny* wielomodalnego rozkładu prawdopodobieństwa pomiędzy stanami metastabilnymi.

Literatura

- [1] M. H. Goroff, A. Sagnotti, *The ultraviolet behavior of Einstein gravity*, Nucl. Phys. B **266**, 709 (1986)
- [2] G. 't Hooft, M. Veltman, *One loop divergencies in the theory of gravitation*, Ann. Inst. Poincaré **20**, 69 (1974)
- [3] S. Weinberg, *The Cosmological Constant Problems in Sources and Detection of Dark Matter and Dark Energy in the Universe*, Springer, Berlin, Heidelberg, pp. 18-26 (2001)
- [4] S. Weinberg, *Ultraviolet divergences in quantum theories of gravitation in General relativity: an Einstein centenary survey* ed. S. W. Hawking and W. Israel, Cambridge University Press, pp. 790-831 (1979)
- [5] M. Reuter, *Nonperturbative evolution equation for quantum gravity*, Phys. Rev. D **57** (1998) 971
- [6] M. Reuter, F. Saueressig, *Functional renormalization group equations, asymptotic safety, and quantum Einstein gravity in Geometric and Topological Methods for Quantum Field Theory* (pp. 288–329), eds. H. Ocampo, E. Pariguan, and S. Paycha, Cambridge: Cambridge University Press, 2010
- [7] J. Polchynski, *String Theory*, Cambridge University Press (2005)
- [8] A. Ashtekar, *New Variables for Classical and Quantum Gravity*, Phys. Rev. Lett. **57**, 2244 (1986)
- [9] A. Ashtekar and J. Lewandowski, *Background independent quantum gravity: a status report*, Class. Quantum Grav. **21**, R53 (2004) [gr-qc/0404018]
- [10] C. Rovelli, *Quantum Gravity*, Cambridge University Press (2004)
- [11] M. Bojowald, *Loop Quantum Cosmology in 100 Years of Relativity. Space-Time Structure: Einstein and Beyond* ed. A. Ashtekar, World Scientific, Singapore, 2005
- [12] A. Perez, *Spin foam models for quantum gravity*, Class. Quantum Grav. **20** (2003) R43
- [13] L. Freidel, *Group Field Theory: An Overview*, Int J Theor Phys **44** (2005) 1769
- [14] A. Connes, *Gravity coupled with matter and the foundation of non-commutative geometry*, Comm. Math. Phys. **182** (1996) 155
- [15] J. Henson, *The causal set approach to Quantum Gravity in Approaches to Quantum Gravity: Toward a New Understanding of Space, Time and Matter* (pp. 393–413), ed. D. Oriti, Cambridge: Cambridge University Press, 2009
- [16] D. Benincasa, F. Dowker, *Scalar curvature of a causal set*, Phys. Rev. Lett. **104** (2010) 181301
- [17] K. G. Wilson, *Confinement of quarks*, Phys. Rev. D **10** (1974) 2445
- [18] J. Ambjørn, J. Jurkiewicz and R. Loll, *A non-perturbative Lorentzian path integral for gravity*, Phys. Rev. Lett. **85**, 924 (2000)

- [19] J. Ambjørn, J. Jurkiewicz and R. Loll, *Dynamically triangulating Lorentzian quantum gravity*, Nucl. Phys. B **610**, 347 (2001) [hep-th/0105267].
- [20] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman and Company (1973)
- [21] R. M. Wald, *General relativity*, The University of Chicago Press (1984)
- [22] S. W. Hawking, *The Path-Integral Approach to Quantum Gravity in General relativity: an Einstein centenary survey* ed. S. W. Hawking and W. Israel, Cambridge University Press (1979)
- [23] G. W. Gibbons and S. W. Hawking, *Action integrals and partition functions in quantum gravity*, Phys. Rev. D **15**, 2752 (1977)
- [24] J. Ambjørn, J. Jurkiewicz, Phys. Lett. **B278** (1992) 42
- [25] P. Bialas, Z. Burda, A. Krzywicki, B. Petersson, Nucl. Phys. B **472** (1996) 293; P. Bialas, Z. Burda, B. Petersson, J. Tabaczek, Nucl. Phys. B **495** (1997) 463
- [26] J.B. Hartle and S.W. Hawking, *Wave function of the universe*, Phys. Rev. D **28** (1983) 2960 (1983)
- [27] C. Teitelboim, *Causality versus gauge invariance in quantum gravity and supergravity*, Phys. Rev. Lett. **50** (1983) 705-708
- [28] C. Teitelboim, *The proper time gauge in quantum theory of gravitation*, Phys. Rev. D **28** (1983) 297-309
- [29] N. Metropolis, A. Rosenbluth, M. Rosenbluth, A. Teller and E. Teller, *Equations of State Calculations by Fast Computing Machines*, J. Chem. Phys. **21**, 1087 (1953)
- [30] W.K. Hastings, *Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications*, Biometrika **57**, 97 (1970)
- [31] J. Ambjørn, S. Jordan, J. Jurkiewicz, R. Loll, *Second-order phase transition in causal dynamical triangulations*, Phys. Rev. Lett. **107** (2011) 211303
- [32] J. Ambjørn, S. Jordan, J. Jurkiewicz, R. Loll, *Second- and First-Order Phase Transitions in CDT*, Phys. Rev. D **85** (2012) 124044
- [33] J. Ambjørn and S. Varsted, *Three-dimensional simplicial quantum gravity*, Nucl. Phys. B **373**, 557 (1992)
- [34] J. Mielczarek, *Asymptotic silence in loop quantum cosmology*, AIP Conf. Proc. **1514** (2012) 81
- [35] L. Bogacz, Z. Burda, B. Wacław, *Quantum widening of CDT universe*, Phys. Rev. D **86** (2012) 104015
- [36] A. Dasgupta and R. Loll, *A proper-time cure for the conformal sickness in quantum gravity*, Nucl. Phys. B **606**, 357 (2001) [hep-th/0103186]
- [37] P.S. Mara, *Triangulations for the Cube*, Journal of Combinatorial Theory A **20** (1976) 170

- [38] J. Ambjørn, D. Coumbe, J. Gizbert-Studnicki, J. Jurkiewicz, *Searching for a continuum limit in causal dynamical triangulation quantum gravity*, Phys. Rev. D **93** (2016) 104032
- [39] J. Hartle, S. W. Hawking, T. Hertog, *Classical universes of the no-boundary quantum state*, Phys. Rev. D **77** (2008) 123537
- [40] J. Laiho, S. Bassler, D. Coumbe, D. Du, J. T. Neelekanta, *Lattice quantum gravity and asymptotic safety*, Phys. Rev. D **96** (2017) 064015
- [41] F. Wang, D. P. Landau, *Efficient, Multiple-Range Random Walk Algorithm to Calculate the Density of States*, Phys. Rev. Lett. 86 (2001) 2050

5 Pozostałe osiągnięcia

5.1 Publikacje nie wchodzące w skład osiągnięcia naukowego

Publikacje naukowe w czasopismach znajdujących się w bazie Journal Citation Reports (JCR)

Okres po doktoracie (od września 2010)

- [I1] A. Görlich, M. Kalomenopoulos, K. Savvidy, G. Savvidy,
Distribution of periodic trajectories of C-K systems MIXMAX pseudorandom number generator,
Int. J. Mod. Phys. C **28** (2017) 1750032
- [I2] J. Ambjørn, A. Görlich, J. Jurkiewicz, H. Zhang,
The microscopic structure of 2D CDT coupled to matter,
Phys. Lett. B **746** (2015) 359
- [I3] J. Ambjørn, A. Görlich, J. Jurkiewicz, H. Zhang,
A $c=1$ phase transition in two-dimensional CDT/Horava-Lifshitz gravity?,
Phys. Lett. B **743** (2015) 435
- [I4] J. Ambjørn, A. Görlich, J. Jurkiewicz, H. Zhang,
The spectral dimension in 2D CDT gravity coupled to scalar fields,
Mod. Phys. Lett. A **30** (2015) 1550077
- [I5] J. Ambjørn, A. Görlich, A. C. Ipsen, H. Zhang,
A note on the Lee-Yang singularity coupled to 2d quantum gravity,
Phys. Lett. B **735** (2014) 191
- [I6] J. Ambjørn, L. Glaser, A. Görlich, J. Jurkiewicz,
Euclidian 4d quantum gravity with a non-trivial measure term,
J. High Energ. Phys. **10** (2013) 100
- [I7] J. Ambjørn, L. Glaser, A. Görlich, Y. Sato,
New multicritical matrix models and multicritical 2d CDT,
Phys. Lett. B **712** (2012) 109
- [I8] J. Ambjørn, A. Görlich, J. Jurkiewicz, H. Zhang,
Pseudo-topological transitions in 2D gravity models coupled to massless scalar fields,
Nucl. Phys. B **863** (2012) 421

Okres przed doktoratem (do sierpnia 2010)

- [I9] J. Ambjørn, A. Görlich, S. Jordan, J. Jurkiewicz, R. Loll,
CDT meets Hořava-Lifshitz gravity,
Phys. Lett. B **690** (2010) 413
- [I10] J. Ambjørn, A. Görlich, J. Jurkiewicz, R. Loll,
Geometry of the quantum universe,
Phys. Lett. B **690** (2010) 420
- [I11] J. Ambjørn, A. Görlich, J. Jurkiewicz, R. Loll,
Nonperturbative quantum de Sitter universe,
Phys. Rev. D **78** (2008) 063544

- [I12] J. Ambjørn, A. Görlich, J. Jurkiewicz, R. Loll,
Planckian birth of a quantum de Sitter universe,
Phys. Rev. Lett. **100** (2008) 091304
- [I13] V. Corato, P. Silvestrini, A. Görlich, P. Korcyl, J. Wosiek, L. Stodolsky,
Simulations of quantum gates with decoherence,
Phys. Rev. B **75** (2007) 184507
- [I14] Z. Burda, A. Görlich, B. Waclaw,
Spectral properties of empirical covariance matrices for data with power-law tails,
Phys. Rev. E **74** (2006) 041129
- [I15] Z. Burda, A. Görlich, J. Jurkiewicz, B. Waclaw,
Correlated Wishart matrices and critical horizons,
Eur. Phys. J. B **49** (2006) 319
- [I16] Z. Burda, A. Görlich, A. Jarosz, J. Jurkiewicz,
Signal and noise in correlation matrix,
Physica A **343** (2004) 295

Materiały konferencyjne:

- [I17] A. Görlich,
Causal Dynamical Triangulations with Toroidal Topology,
Acta Phys. Pol. B **10** (2017) 311
- [I18] A. Görlich,
Introduction to 4D Causal Dynamical Triangulations,
Acta Phys. Pol. B **44** (2013) 2559
- [I19] J. Ambjørn, A. Görlich, J. Jurkiewicz, R. Loll,
The Quantum Universe,
Acta Phys. Pol. B **39** (2008) 3309
- [I20] A. Görlich,
Background Geometry in 4D Causal Dynamical Triangulations,
Acta Phys. Pol. B **39** (2008) 3343

Publikacje naukowe w czasopismach innych niż znajdujące się w bazie JCR**Rozdziały w książkach:**

- [I21] J. Ambjørn, A. Görlich, J. Jurkiewicz, R. Loll,
Quantum Gravity via Causal Dynamical Triangulations in *Springer Handbook of Spacetime* (pp. 723-741), eds. A. Ashtekar, V. Petkov; Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2014
- [I22] A. Görlich, *The Transfer Matrix in Four-Dimensional Causal Dynamical Triangulations* in *Relativity and Gravitation*, Springer Proceedings in Physics **157** (pp. 505-513), eds. J. Bičák, T. Ledvinka; Springer - Cham, 2014

- [I23] A. Görlich, *Introduction to Causal Dynamical Triangulations* in *Quantum Gravity and Quantum Cosmology* (pp. 93-117), Lect. Notes Phys. **863**, eds. G. Calcagni, L. Papantonopoulos, G. Siopsis, N. Tsamis; Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013
- [I24] J. Ambjørn, A. Görlich, J. Jurkiewicz, R. Loll, *The emergence of Euclidean de Sitter space-time* in *Path Integrals - New Trends and Perspectives* (pp. 191-198), eds. W. Janke, A. Pelster; World Scientific, 2008

Materiały konferencyjne:

- [I25] A. Görlich,
The Transfer Matrix in Four-Dimensional Causal Dynamical Triangulations,
The Thirteenth Marcel Grossmann Meeting (2015) 2156
- [I26] J. Ambjørn, A. Görlich, J. Jurkiewicz, R. Loll,
Causal Dynamical Triangulations and the Search for a Theory of Quantum Gravity,
The Thirteenth Marcel Grossmann Meeting (2015) 120
- [I27] J. Ambjørn, J. Gizbert-Studnicki, A. Görlich, J. Jurkiewicz, R. Loll,
The transfer matrix in four dimensional causal dynamical triangulations,
AIP Conf. Proc. **1514** (2013) 67
- [I28] Andrzej Görlich,
Euclidean 4D quantum gravity with a non-trivial measure term,
Proceedings of Science **LATTICE 2013** (2013) 094
- [I29] A. Görlich,
Quantum de Sitter Universe in 4D Causal Dynamical Triangulations,
The Twelfth Marcel Grossmann Meeting (2012) 2285
- [I30] J. Ambjørn, A. Görlich, J. Jurkiewicz, R. Loll,
CDT - an Entropic Theory of Quantum Gravity,
Workshop on Continuum and Lattice Approaches to Quantum Gravity,
[arXiv:1007.2560]

Artykuły popularnonaukowe:

- [I31] J. Ambjørn, A. Görlich, J. Jurkiewicz, R. Loll,
Quantum gravity, from the entropy of geometries,
Europhysics News **42/2** (2011) 25

Pozostałe artykuły:

- [I32] J. Ambjørn, Z. Drogosz, J. Gizbert-Studnicki, A. Görlich, J. Jurkiewicz,
Pseudo-Cartesian coordinates in a model of Causal Dynamical Triangulations,
[arXiv:1812.10671]
- [I33] A. Görlich,
Causal Dynamical Triangulations in Four Dimensions, [arXiv:1111.6938]
- [I34] A. Görlich, A. Jarosz,
Addition of Free Unitary Random Matrices, [arXiv:math-ph/0408019]

5.2 Omówienie pozostałych osiągnięć

Oprócz czterowymiarowego modelu Kauzalnych Dynamicznych Triangulacji, który jest moim głównym obszarem zainteresowań naukowych, uczestniczyłem również w szeregu projektów dotyczących różnorodnych zagadnień.

5.2.1 Generator liczb pseudolosowych oparty na C-K-systemach

Od 2015 roku uczestniczę w projekcie dotyczącym generatora liczb pseudolosowych *MIXMAX*, który jest prowadzony w ramach grantu Marie Skłodowska-Curie RISE „*Development and Implementation of new generation of Pseudo Random Number Generators based on Kolmogorov-Anosov K-systems*” (Horizon 2020) we współpracy z twórcą generatora prof. Georgem Savvidym (Demokritos National Research Center, Ateny) oraz prof. Lorenzo Moneto (CERN, Szwajcaria). Generatory liczb pseudolosowych znajdują zastosowanie w bardzo wielu dziedzinach od kasyn internetowych, przez symulacje komputerowe, po kryptografię. We wszystkich tych obszarach jakość generowanych liczb losowych jest kluczowa, jednak często ich rola jest niedoceniana, co czasem prowadziło do błędnych wyników naukowych [1]. Przez długi czas brakowało praktycznej definicji *losowości* i jej weryfikacja opierała się na zbiorach testów statystycznych. Dopiero teoria systemów Kołmogorowa i Anosowa dała wskazówki jak tworzyć generatory liczb pseudolosowych o poszukiwanych właściwościach.

Przykładem takiego generatora jest MIXMAX, który oparty jest właśnie na trajektoriach niestabilnych systemów dynamicznych (w tym przypadku C-K-systemach Kołmogorowa-Anosowa [2]). Generator MIXMAX charakteryzuje się prostotą, szerokim zakresem rozmiaru wektora stanu, dużą wydajnością i bardzo wysoką jakością generowanych liczb pseudolosowych. Dzięki tym własnościom został wdrożony w ważnych pakietach i oprogramowaniu naukowym takim jak *ROOT*, *GEANT4* (domyślny generator), *CLHEP*, *Gnu Scientific Library* (GSL). Z punktu widzenia fizyka wykorzystującego generatory liczb pseudolosowych w symulacjach Monte Carlo istotna jest szybkość produkcji liczb losowych oraz ich jakość, z mniejszym uwzględnieniem bezpieczeństwa kryptograficznego.

W ramach projektu badałem właściwości statystyczne generatora liczb pseudolosowych MIXMAX oraz jego zachowanie w rzeczywistych symulacjach Monte Carlo dotyczących czterowymiarowej symplecticalnej grawitacji kwantowej. Zajmowałem się również rozwojem samego generatora. Stworzyłem wysokopoziomowy interfejs w standardzie *C++14* dla generatora MIXMAX, bardzo efektywną implementację generatora w assemblerze na 64-bitowe procesory w architekturze x86 oraz w dynamicznie rozwijającym się języku Julia, który przeznaczony jest do wysokowydajnych obliczeń komputerowych.

Poza rozwijaniem samego generatora, w artykule [11] badałem także teoretyczne własności hiperbolicznych układów C-K Anosowa-Kołmogorowa zdefiniowanych na wielowymiarowym torusie. Takie systemy posiadają przeliczalny zbiór wszędzie gęstych periodycznych trajektorii, które są wykładniczo niestabilne i z tego powodu nadają się do generowania liczb pseudolosowych. Korzystając z obliczeń analitycznych i komputerowych, w pracy zbadano rozkład okresowych trajektorii oraz ich odchylenie od zachowania asymptotycznego. W ramach tego projektu odbyłem cztery miesięczne wizyty w CERNie oraz prezentowałem wyniki na konferencjach w Atenach (w latach 2016 i 2018).

5.2.2 Dwuwymiarowy model Kauzalnych Dynamicznych Triangulacji

Badałem również różne aspekty modelu Kauzalnych Dynamicznych Triangulacji w dwóch wymiarach zawierającego sprzężenie z materią. Dwuwymiarowa wersja modelu umożliwia osiągnięcie wielu wyników przy użyciu rachunków analitycznych.

W pracy [I7] wprowadziliśmy dwuwymiarowy model Kauzalnych Dynamicznych Triangulacji sprzężony z twardymi dimerami⁸. Wykorzystując wzajemną jednoznaczność pomiędzy kauzalnymi triangulacjami oraz rozgałęzionymi polimerami (drzewami) [3], pokazaliśmy, że zaproponowany model jest opisany uogólnionym multikrytycznym modelem macierzowym z nową, tzw. *klasyczną*, granicą skalowania. Wykorzystując teorię macierzy przypadkowych analitycznie wyjaśniliśmy problem sprzężenia dimerów z geometriami przypadkowymi oraz wyznaczyliśmy krytyczne zachowanie funkcji rozdziału.

Ciągła dwuwymiarowa konforemna teoria pola Liouville’a i teoria przypadkowych triangulacji (a tym samym teoria macierzy przypadkowych) opisują najprawdopodobniej tę samą teorię, mianowicie dwuwymiarową kwantową grawitację sprzężoną z konforemnymi teoriami pola z ładunkiem centralnym. Osobliwością krawędzi Lee-Yanga nazywamy przejście w modelu Isinga występujące dla czysto urojonej wartości krytycznej zewnętrznego pola magnetycznego [4, 5]. W publikacji [I5] wyznaczyliśmy wykładniki krytyczne dla magnetyzacji w modelu Lee-Yanga sprzężonego z dwuwymiarową grawitacją kwantową. Wykorzystując założenia dotyczące mieszania operatorów [6], wyjaśniliśmy pozorną sprzeczność i uzyskaliśmy zgodność wartości wykładników krytycznych obliczonych w ramach kwantowej teorii grawitacji Liouville’a sprzężonej z minimalną konforemną teorią pola (2, 5) oraz przy użyciu modeli macierzowych (modelu dynamicznych triangulacji z twardymi dimerami).

W cyklu prac [I2, I3, I4, I8] zbadaliśmy własności 1 + 1-wymiarowego modelu Kauzalnych Dynamicznych Triangulacji sprzężonego z masowymi i bezmasowymi polami skalarnymi. W pracy [I8] zaobserwowaliśmy złamanie symetrii translacyjnej układu dla dwóch lub więcej bezmasowych pól skalarnych. W tym przypadku rozkład objętości w funkcji czasu jest dzwonowaty i opisywany efektywnym działaniem minisuperspace podobnie jak ma to miejsce w fazie de Sittera w czterech wymiarach. Zmierzony wymiar Hausdorffa takich geometrii wynosi $d_H = 3$. Dla co najwyżej jednego pola skalarnego rozkład objętości jest jednorodny i zdominowany przez kwantowe fluktuacje. Pokazaliśmy, że istnieje *bariera* analogiczna do bariery $c = 1$ występującej w niekrytycznej teorii strun. W artykule [I4] rozwinęliśmy badania o pomiar wymiaru spektralnego oraz wyznaczyliśmy jego zależność od skali i liczby pól skalarnych. Praca [I3] dotyczyła wyznaczenia zależności profilu objętości od masy pola oraz krytycznej wartości masy, dla której występuje przejście pomiędzy rozkładem jednorodnym i dzwonowatym. W publikacji [I2] dla dwuwymiarowego modelu CDT sprzężonego z czterema masowymi polami skalarnymi wyznaczyliśmy warunki jakie muszą być spełnione, aby istniała efektywna macierz transferu. Własności tej macierzy tłumaczą dlaczego zachowanie modelu w obecności pól skalarnych jest jakościowo różne od modelu bez materii.

5.2.3 Czterowymiarowy model Euklidesowych Dynamicznych Triangulacji

Zaletą euklidesowej wersji modelu jest brak narzuconej globalnej foliacji czasoprzestrzeni. Niestety, zaobserwowano w nim jedynie przejście fazowe pierwszego rodzaju, co niweczy szanse na istnienie poprawnej granicy ciągłej [7]. W artykule [I6] zbadaliśmy rozszerzony czterowymiarowy model Euklidesowych Dynamicznych Triangulacji z dodatkową miarą uwzględniającą krotność trójkątów [8]. Dodatkowy człon może służyć jako uogólniony wyraz wyższego rzędu w krzywiznie i jest generowany m.in. poprzez dołączenie pól cechowania do triangulacji [9, 10]. Istniała nadzieja, że dodanie do działania takiego wyrazu, z którym wiąże się dodatkowa stała sprzężenia, może wprowadzić do modelu przejście fazowe wyż-

⁸Twarde dimery oznaczają podzbiór krawędzi grafu (dimery), w którym żadne dwie krawędzie się nie stykają.

szego rzędu. Chociaż zaobserwowaliśmy obszar, w którym triangulacje były istotnie różne, niestety, nie znaleźliśmy dowodów na istnienie takiego przejścia fazowego.

5.2.4 Teoria macierzy przypadkowych

W trakcie studiów w latach 2002-2006 uczestniczyłem w projekcie dotyczącym teorii macierzy przypadkowych prowadzonym we współpracy z prof. prof. Zdzisławem Burdą, Jerzym Jurkiewiczem i Maciejem Nowakiem z Zakładu Teorii Układów Złożonych UJ. Modele macierzowe mają szerokie spektrum zastosowań zarówno w teoretycznych dziedzinach nauki, m.in. teorii strun, fizyce jądrowej, chromodynamice kwantowej, dwuwymiarowej kwantowej grawitacji, jak i w dziedzinach stosowanych, np. w telekomunikacji, ekonomii, finansach, biologii. W ramach projektu rozwijałem metodę wyznaczania widma macierzy kowariancji, wykorzystując technikę funkcji Greena oraz grafów Feynmana, dzięki którym w granicy planarnej (termodynamicznej) możliwe było wyprowadzenie równań Dysona-Schwingera. W celu weryfikacji wyników przeprowadziłem również symulacje numeryczne. Efektem tych studiów były dwie publikacje [I15, I16]. W powyższych pracach wyprowadziliśmy dokładne relacje łączące widmo macierzy kowariancji i jej estymatora. Przy ich użyciu wykazaliśmy, że istnieje praktyczna metoda pozwalająca odzyskać wartości własne oryginalnej macierzy korelacji. Te innowacyjne wyniki mogą znaleźć zastosowanie w szeregu problemach, w których eksperymentalnie wyznacza się korelacje w systemie wielu stopni swobody, np. w fizyce statystycznej, sieciowej teorii pola, genetyce i matematyce finansowej. Kontynuacją tych badań była praca magisterska napisana pod kierunkiem prof. Zdzisława Burdy p.t. „*Niegaussowskie macierze przypadkowe*”, która dotyczyła zagadnienia wyznaczania widma empirycznej macierzy korelacji dla klasy niegaussowskich macierzy przypadkowych, dopuszczających zarówno korelacje przestrzenne jak i czasowe oraz *długie ogony* w rozkładzie prawdopodobieństwa macierzy. Praca została wyróżniona i opublikowana w recenzowanym czasopiśmie [I14].

5.2.5 Komputery kwantowe i kwantowe bramki logiczne

Projekt był prowadzony we współpracy z prof. prof. Leo Stodolskim (Instytut Maxa Plancka w Monachium), Jackiem Woskiem (UJ) oraz Paolo Silvestrinim (Seconda Universita di Napoli) w latach 2004 - 2006 w Instytucie Maxa Plancka w Monachium. Projekt obejmował stworzenie pakietu komputerowego umożliwiającego symulacje działania kwantowych bramek logicznych CNOT, w szczególności realizowanych na urządzeniach SQUID (Superconducting Quantum Interference Device). Zbadaliśmy między innymi wpływ otoczenia na zjawisko dekoherencji układu oraz ustaliliśmy optymalne parametry działania fizycznych urządzeń. Badania te mają znaczenie dla konstrukcji kwantowych bramek logicznych, które są podstawowym elementem komputerów kwantowych. W ramach tej współpracy odbyłem trzy miesięczne praktyki w Instytucie Maxa Plancka w Monachium. Otrzymane wyniki zostały opublikowane w artykule [I13].

Literatura

- [1] A. M. Ferrenberg, D. P. Landau, Y. Joanna Wong, *Monte Carlo simulations: Hidden errors from "good" random number generators*, Phys. Rev. Lett. 69 (1992) 3382
- [2] D. V. Anosov, *Geodesic flows on closed Riemannian manifolds of negative curvature*, Trudy Mat. Inst. Steklov. 90, 3 (1967)

- [3] B. Durhuus, T. Jonsson, J. F. Wheeler, *On the spectral dimension of causal triangulations*, arXiv:0908.3643 [math-ph]
- [4] C.N. Yang, T.D. Lee, *Statistical Theory of Equations of State and Phase Transitions*, Phys. Rev **87** (1952) 404, Phys. Rev. **87** (1952) 410
- [5] M. Staudacher, *The Yang-Lee edge singularity on a dynamical planar random surface*, Nucl. Phys. B **336** (1990) 349
- [6] C. Crnkovic, P.H. Ginsparg, G.W. Moore, *The Ising model, the Yang-Lee edge singularity, and 2D quantum gravity*, Phys. Lett. B, 237 (1990), p. 196
- [7] P. Białas, Z. Burda, A. Krzywicki and B. Petersson, *Focusing on the fixed point of 4D simplicial gravity*, Nucl. Phys. B**472** (1996) 293;
B. de Bakker, *Further evidence that the transition of 4D dynamical triangulation is 1st order*, Phys. Lett. B**389** (1996) 238
- [8] D. Coumbe, J. Laiho, Phys.Rev.Lett. **107** (2011) 161301
- [9] B. Brugmann, E. Marinari, *4D simplicial quantum gravity with a nontrivial measure*, Phys. Rev. Lett. **70** (1993) 1908
- [10] S. Bilke, Z. Burda, A. Krzywicki, B. Petersson, J. Tabaczek, G. Thorleifsson, *4d Simplicial quantum gravity: matter fields and the corresponding effective action*, Phys.Lett. B**432** (1998) 279

Andrzej Górlich