

Metoda zaproponowana przez Cieřlika, jego promotora Patryka Macha oraz Andrzeja Odrzywołk (z okazjonalną współpracą Ewy Hackmann z Uniwersytetu w Bremie) korzysta z metody Monte Carlo zastosowanej do przestrzeni wszystkich geodezyjnych w metrykach Kerra i Schwarzschilda. Nieoddziałująca materia spadająca na czarną dziurę opisywana jest przez funkcję rozkładu w przestrzeni fazowej. Funkcja ta spełnia mikroskopowe, relatywistyczne równanie Boltzmanna bez członów kolizji, czyli równanie Własowa. Cieřlik zaproponował metodę obliczania współrzędnych cztero-wektora strumienia cząstek, czyli najważniejszej wielkości opisującej przepływ materii, w całej czasoprzestrzeni poprzez sampłowanie geodezyjnych w metryce Schwarzschilda lub Kerra i zliczanie ich przecięć z odpowiednio zdefiniowanymi trójwymiarowymi skończonymi elementami

powierzchni. Sampłowanie odbywa się standardową metodą losowania z odrzuceniem dla zadanej funkcji rozkładu zdefiniowanej daleko od czarnej dziury.

Istotnym elementem tej metody są wyprowadzone przez Cieřlika i Macha (oraz Eve Hackmann w przypadku metryki Kerra) ścisłe wzory na tor ruchu dowolnej nieradialnej geodezyjnej w metryce Schwarzschilda i ich analog dla metryki Kerra. Wzory działają dla dowolnego typu geodezyjnej i, w przeciwieństwie do standardowych wyrażeń poprzez całki eliptyczne, nie wymagają rozważania oddzielnie rozwiązania przed i za każdym punktem zwrotu. Innymi słowy: jest to wyrażenie względnie proste do obliczenia dla dowolnie dużych czasów. Jego zastosowanie upraszcza numeryczną stronę metody i prawdopodobnie przyspiesza obliczenia.

2. Opis dysertacji

Praca napisana jest w języku angielskim i ma formę kolekcji 5 publikacji oraz jednego pre-printu, poprzedzonej wstępem. Składa się ze streszczenia, wstępu, opisu notacji, oraz rozwiniętego wprowadzenia do sześciu publikacji wraz opisem aparatu matematycznego i podsumowaniem. Wprowadzenie zawiera też zestawienie najważniejszych wyników całego projektu doktorskiego Adama Cieřlika. Całość kończy bibliografia i przedruk sześciu prac. Bibliografia dotyczy samego wprowadzenia i jest raczej krótka (43 pozycje), ale każda praca zawiera swoją własną, oddzielną bibliografię.

Spośród 6 prac przedstawionych w dysertacji Adam Cieřlik jest pierwszym autorem 5 z nich. Trzy opublikowane zostały w Physical Review D, jedna w Classical and Quantum Gravity (wysoko oceniane czasopisma z dziedziny teorii grawitacji), jedna w Acta Physica Polonica B (czasopismo znane, ale oceniane nieco niżej od dwóch poprzednich), jedna oczekuje na publikację. Jedna z prac opublikowanych w Phys. Rev. D (praca nr 3) została wyróżniona przez redakcję jako Editor's Suggestion. W pracy doktorskiej nie wskazano które rezultaty zostały otrzymane osobiście przez Adama Cieřlika i jak wyglądał podział pracy autora ze współpracownikami.

Pierwsza praca [1] dotyczy geodezyjnych w czasoprzestrzeni Schwarzschilda. Autorzy pokazują, że do problemu początkowego równania geodezyjnej można zastosować stary, dziewiętnastowieczny wynik Weierstrassa i Biermanna dotyczący ogólnego rozwiązania równania różniczkowego zwyczajnego z prawą stroną w postaci wielomianu stopnia 3. Okazuje się, że równanie toru, wyrażające współrzędną radialną w funkcji kąta azymutalnego daje się sprowadzić do tej postaci. Dzięki temu uzyskujemy bezpośredni wzór na tor ruchu. Autorzy pokazują też, że wzór działa bez względu na obecność punktów zwrotu wzdłuż geodezyjnej, a więc działa w tej samej postaci podczas całego ruchu niewielkiej masy. Autorzy pokazują też jak wyznaczyć zakres dopuszczalnych kątów azymutalnych dla ruchu. Jest to istotny szczegół z punktu widzenia późniejszych zastosowań. Na koniec wyprowadzają pozostałe wzory na parametr afiniczny i czas

współrzędnościowy dla geodezyjnej. Wzory te mają formę zależności całkowych i dlatego nie są aż tak wygodne jak jawne równanie toru wyprowadzone dla współrzędnej radialnej.

Praca [2] zawiera podobny wynik do [1], ale wyprowadzony dla innej definicji czasu współrzędnościowego, tzw. czasu Mino. Zależności współrzędnej radialnej oraz kąta azymutalnego od czasu wyrażają się względnie prostymi wyrażeniami dzięki zastosowaniu metody Weierstrassa-Biermanna.

Trzecia praca [3] przedstawia metodę Monte Carlo konstruowania stacjonarnego rozwiązania równania Własowa na tle metryki Schwarzschilda. Autorzy rozważają dwa problemy: akrecję materii skupionej w jednej płaszczyźnie oraz akrecję sferycznie symetryczną dla gazu cząsteczek masywnych rozciągającego się do nieskończoności. Za rozkład prędkości cząsteczek biorą cząsteczki o jednakowej energii oraz rozkład Maxwella-Jüttnera. Wyniki obliczone są na 3 sposoby: poprzez ścisłe wyrażenia w postaci całek, te same całki obliczone metodą Monte Carlo i właściwą symulację poprzez sampłowanie przestrzeni geodezyjnych metodą Monte Carlo. Wektor strumienia cząstek obliczany jest przez gruboziarniste uśrednianie po elementach powierzchni. W pracy autorzy omawiają szczegółowo tę ostatnią metodę wraz z wyprowadzeniami oraz porównuje wyniki tych trzech metod, uzyskując dobrą zgodność.

Czwarta praca [4] uogólnia wyniki [3]. Poświęcona jest ona problemowi akrecji plazmy skupionej w jednej płaszczyźnie na poruszającą się czarną dziurę Schwarzschilda. Praca zawiera wstęp opisujący matematyczny formalizm (geometrię wiązki ko-stycznej jako przestrzeni fazowej cząstek i równania toru geodezyjnych). Autorzy rozważają pchnięty (*boosted*) rozkład Maxwella-Jüttnera gazu w asymptotycznej nieskończoności i przeprowadzają symulację stacjonarnej akrecji. Wyniki symulacji Monte Carlo zostały porównane zostały się do ścisłych rozwiązań, znanych wcześniej z prac Promotora, i pokazały dobrą zgodność.

Praca [5] to uogólnienie wyników pracy [1] i przede wszystkim [2] na metrykę Kerra: korzystając z twierdzenia Weierstrassa-Biermanna autorzy wyprowadzają ścisłe wzory na geodezyjną w metryce Kerra przy użyciu funkcji $\wp(x)$ Weierstrassa, sparametryzowaną czasem Mino. Wzory są w postaci jawnej dla współrzędnej radialnej i polarnej, a w postaci całkowitej dla współrzędnej azymutalnej i dla czasu Boyera-Lindquista oraz parametru afinicznego. Dzięki odpowiedniemu wyborowi gałęzi całkowania wzory działają globalnie dla wszystkich typów geodezyjnych poza specjalnymi przypadkami o mierze 0. Autorzy pokazują też implementację tych wzorów w programie Mathematica i pokazują wizualizacje geodezyjnych rozmaitych typów.

Wreszcie w pracy [6] autorzy badają akrecję gazu w płaszczyźnie równikowej na czarną dziurę Kerra dla rozkładu prędkości Maxwella-Jüttnera. Praca korzysta z wyników pracy [5]. Autorzy wyprowadzają ścisłe wzory na strumień cząstek oraz tempo akrecji w formie całek. Korzystając z tych wyników analizują potem tempo akrecji w zależności od temperatury gazu i momentu pędu czarnej dziury.

3. Ocena jakości pracy doktorskiej

Uważam pracę Adama Cieřlika za bardzo dobrą. Moja ocena oparta jest przede wszystkim na jakości wyników naukowych. Nowa metoda badania przepływu stacjonarnego nieoddziałującej plazmy w pobliżu dużej masy jest poważnym osiągnięciem. Autor zastosował ją do szeregu uproszczonych modeli akrecji, ale ma ona szansę sprawdzić się w innych, bardziej skomplikowanych sytuacjach. **Praca może więc być początkiem nowej pod-dziedziny badań w szerszej dziedzinie akrecji na czarną dziurę.**

Na podobne uznanie zasługują wyniki prac [1, 2] oraz [4] dotyczące nowej postaci równania toru dla dowolnych nie-radialnych geodezyjnych w metryce Schwarzschilda oraz nowej postaci rozwiązania równania geodezyjnej w metryce Kerra. Jak wspomnieliśmy, wyrażenie działa dla dowolnych czasów i dowolnych typów geodezyjnych. Wynik na pierwszy rzut oka może wydać się mocno techniczny, ale prostota i ogólność równania na tor wyrażonego poprzez funkcję $\wp(x)$ Weierstrassa oraz, przede wszystkim, odporność wyrażenia na punkty zwrotu nadają mu sporej wagi. Ta postać równania toru może okazać się znakomitą narzędziem badania komputerowego i wizualizacji zachowania się materii i światła w pobliżu czarnej dziury. Równanie działa także dla geodezyjnych zerowych, można je więc stosować w teorii soczewkowania grawitacyjnego na czarnej dziurze. Czas pokaże czy faktycznie stanie się ono standardem w tych dziedzinach, zwłaszcza w badaniach numerycznych. **Sądzę jednak, że przy odrobinie szczęścia ten wynik może z czasem zadomowić się w bardziej rozbudowanych podręcznikach teorii względności i astrofizyki, obok "tradycyjnej" analizy równań ruchu w metrykach Schwarzschilda i Kerra przez badanie postaci potencjału efektywnego w zmiennej radialnej i całki eliptyczne.**

Zarówno artykuły, jak i dysertacja napisane są przejrzystie, dobrym, zrozumiałym angielskim. Rozbudowany wstęp zawiera spis wyników i ułatwia orientację przy czytaniu prac wchodzących w skład cyklu.

W dysertacji dostrzegłem jeden błąd redaktorski:

- strona 6, lista publikacji: błąd w nazwisku Hackmann.

Mam też drobne zastrzeżenie do prac [3] i [4]. Chodzi o sprawę techniczną, ale z punktu widzenia symulacji Monte Carlo dość istotną. Autorzy wyprowadzają ogólne wyrażenie na uśrednione składowe wektora strumienia cząstek: w pracy [3] równanie (73), w pracy [4] równanie (65). W praktyce używają jednak jego odpowiedników bez czasu współrzędnościowego w mianowniku, tzn. równania (98a)-(98b) w pracy [3] i (73a)-(73f) w pracy [4]. Przejście między tymi postaciami nie jest dla mnie jasne i nie wydaje mi się dokładnie wyjaśnione w tych pracach. Pozbycie się czasu współrzędnościowego jest o tyle ważne, że pozwala na całkowite uniknięcie całkowania dość skomplikowanego równania na



**Center for Theoretical Physics
Polish Academy of Sciences**

Aleja Lotników 32/46, 02-668 Warsaw

Tel. (+48 22) 847 09 20, Fax/Tel: (+48 22) 843 13 69

E-mail: cft@cft.edu.pl, NIP: 525-000-92-81, REGON: 000844815

czas współrzędnościowy dla geodezyjnej i sprowadzenia problemu do równania toru, którego rozwiązanie w postaci jawnej autorzy wyprowadzili w pracach [1, 2]. Ten techniczny szczegół jest więc istotny z punktu widzenia oszczędności czasu obliczeniowego w zaprezentowanej metodzie Monte Carlo.

4. Konkluzja

Stwierdzam, że praca mgr. Adama Cieślika spełnia formalne i zwyczajowe kryteria dla prac doktorskich i rekomenduję przyjęcie Kandydata do kolejnych etapów procedury, w tym publicznej obrony.

Ze względu na wysoką jakość prac i potencjalną wagę wyników wnioskuję o wyróżnienie rozprawy. Za szczególnie istotne uważam:

- nową metodę konstrukcji rozwiązań równań Własowa na tle rozwiązań Kerra i Schwarzschilda metodą symulacji Monte Carlo,
- nową postać równań na geodezyjne w metrykach Schwarzschilda i Kerra, wyrażonych poprzez funkcję Weierstrassa, w tym jawne równanie toru w metryce Schwarzschilda, poprawne globalnie pomimo punktów zwrotu.

Mikołaj Korzyński

M. Korzyński

Podpisany elektronicznie przez
Mikołaj Konrad Korzyński
27.08.2024
9:27:56 +02'00'