

*Prof. dr hab. Jacek Jezierski
Katedra Metod Matematycznych Fizyki
Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski*

Recenzja pracy doktorskiej magistra Adama Cieřlika

pt.

„Monte Carlo methods for stationary solutions of general-relativistic Vlasov systems”

Treść rozprawy doktorskiej mgr. Adama Cieřlika jest zgodna z tytułem.

Rozprawa składa się z pięciu publikacji, jednego artykułu opublikowanego w formie preprintu oraz dodatkowego wprowadzenia. Zwracam uwagę, że większość publikacji jest zamieszczona w bardzo dobrych czasopismach, więc wyniki tam przedstawione były niezależnie zrecenzowane.

W pracy przedstawiono nową metodę symulacji Monte Carlo, pozwalającą na analizę rozwiązań równania Własowa, opisującego gaz niezderzających się cząstek w dowolnej czasoprzestrzeni. W tym celu wprowadzono podstawy formalizmu relatywistycznej przestrzeni fazowej, metody klasyfikacji trajektorii oraz ogólną konstrukcję metody Monte Carlo. Na podstawie samodzielnie opracowanych technik stworzono symulację numeryczną akrecji gazu Własowa na statyczną czarną dziurę Schwarzschilda oraz na czarną dziurę poruszającą się przez dwuwymiarowy rozkład gazu w płaszczyźnie równikowej. W obu przypadkach gaz rozciąga się do nieskończoności, gdzie spełnia rozkład Maxwella-Jüttnera.

W szczególności metoda zawierała trzy istotne kroki:

- 1) odpowiedni wybór trajektorii poszczególnych cząstek,
- 2) rozwiązanie dla nich równania geodezyjnych,
- 3) obliczenie makroskopowych średnich dla gęstości prądu cząstek oraz składowych

tensora energii-pędu.

W ten sposób udało się zasymulować numerycznie stacjonarne rozwiązania opisujące sferycznie symetryczną akrecję w czasoprzestrzeni Schwarzschilda jak również płaskoizbową akrecję dla poruszającej się czarnej dziury. Uzyskane wyniki pokazują, że stworzona metoda może być stosowana z powodzeniem do analizy przypadków wykraczających poza sferyczną symetrię lub osiową symetrię w przypadku płaskoizbowym. Porównanie wyników symulacji z dokładnymi wyrażeniami na gęstość prądu cząstek wykazuje doskonałą zgodność.

Drugim ważnym wynikiem pracy jest przedstawienie nowej metody rozwiązywania równań geodezyjnych w czasoprzestrzeniach Schwarzschilda i Kerra. Bazując na mało znanych wynikach Biermanna i Weierstrassa, dla każdej z czasoprzestrzeni otrzymano pojedynczy układ wzorów opisujących wszystkie nieradialne, czasopodobne i zerowe geodezyjne, wyrażone za pomocą funkcji Weierstrassa. Rozwiązania są parametryzowane przez stałe ruchu oraz współrzędne początkowe. Dodatkowo w przypadku metryki Kerra, po raz pierwszy przedstawiono jawnie rzeczywiste wyrażenia opisujące geodezyjne bez radialnych punktów zwrotnych. W szczególności podano nowoczesne wyprowadzenie formuły Biermanna (Appendix A w pracy [1]).

Uważam, że doktorantowi udało się przedstawić nietrywialne wyniki naukowe. W szczególności wkład Adama Cieślaka w prace wchodzące w skład jego rozprawy doktorskiej to:

- Pomysł wykorzystania wzorów Biermanna-Weierstrassa, najpierw do opisu geodezyjnych w czasoprzestrzeni Schwarzschilda, później Kerra. Główna część rachunków w obu pracach:

[1] Adam Cieślak, Patryk Mach, *Revisiting timelike and null geodesics in the Schwarzschild spacetime: general expressions in terms of Weierstrass elliptic functions*, *Class. Quantum Grav.* 39, 225003 (2022) oraz

[2] Adam Cieślak, Patryk Mach, Eva Hackmann, *Kerr Geodesics in Terms of Weierstrass Elliptic Functions*, *Phys. Rev. D* 108, 024056 (2023)

została również wykonana przez niego. Jest on także autorem numerycznej implementacji z obu prac, w tym publicznie dostępnych „notebooków” opartych o Wolfram Mathematica. Wkład promotora w pracę [1] dotyczy fragmentu, w którym argumentują, że ich weierstrassowskie wzory działają również w przypadku przejścia przez punkty zwrotu, a także przerezegowania dowodu tw. Biermanna-Weierstrassa (tj. dostosowania do zastosowań dla funkcji rzeczywistych i kontroli pojawiających się znaków).

W pracy [2] większość rachunków pochodzi od doktoranta, w szczególności techniki całkowania wyrażeń zawierających funkcje Weierstrassa. Główny wkład promotora dotyczy wypracowania sposobu wyboru gałęzi logarytmu zawierającego funkcje sigma Weierstrassa (rozdział IV), a także podstawień potrzebnych w rozwiązaniach równań części kątowej (polarnej). W obu tych elementach jed-

nak Adam Cieřlik miał również swój wkład: dopracował sposób wyboru gałęzi logarytmu, a dla równań dotyczących ruchu polarnego wpadł na kluczowy pomysł podstawienia umożliwiającego ich rozwiązanie w postaci opartej o funkcje Weierstrassa.

- Mgr Adam Cieřlik wykonał symulacje numeryczne w pracy
[3] *Adam Cieřlik, Patryk Mach, Andrzej Odrzywolek, Monte Carlo methods for stationary solutions of general-relativistic Vlasov systems: Planar accretion onto a moving Schwarzschild black hole, Phys. Rev. D 110, 084014 (2024)*
a także rachunki zamieszczone w dodatkach tej pracy. Publicznie dostępne kody numeryczne do tej pracy są autorstwa doktoranta.
- W pracach
[4] *Adam Cieřlik, Patryk Mach, Andrzej Odrzywolek, Accretion of the relativistic Vlasov gas in the equatorial plane of the Kerr black hole, Phys. Rev. D 106, 104056 (2022)* oraz
[5] *Patryk Mach, Adam Cieřlik, Andrzej Odrzywolek, Monte Carlo methods for stationary solutions of general-relativistic Vlasov systems: Collisionless accretion onto black holes, Phys. Rev. D 108, 124057 (2023)*
wkład doktoranta był mniejszy. Powstały one z ogromnym wsparciem numerycznym Andrzeja Odrzywołka. Oczywiście mgr Adam Cieřlik uczestniczył również w tych badaniach, przeliczał, poprawiał rachunki, etc.
- Praca:
[6] *Adam Cieřlik, Patryk Mach, Timelike and null geodesics in the Schwarzschild space-time: Analytical solutions, Acta Phys. Pol. B Proc. Suppl. 16, 6-A10 (2023)*
streszcza referat konferencyjny doktoranta, bazujący na wcześniejszych wynikach. Jest w całości wykonana przez Adama Cieřlika. Rola promotora to tylko redakcja tekstu i przeliczenie rachunków.

Stwierdzam, że doktorant spełnił wymagania nałożone przez odpowiednie przepisy o stopniach naukowych i wnoszę o dopuszczenie mgr. Adama Cieřlika do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Warszawa, 28 października 2024 roku

Jacek Teresiński