

UNIwersytet Jagielloński w Krakowie
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej
Instytut Fizyki Teoretycznej

Algebraiczne podejście do efektu
Casmira w układzie z dwoma
potencjałami typu quasi-delta

Praca doktorska

Autor

Kamil Ziemian

Opiekun naukowy

prof. dr hab. Andrzej Herdegen

Kraków, 2024

Oświadczenie

Ja niżej podpisany Kamil Ziemian (nr indeksu: 1014497) doktorant Wydziału Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej Uniwersytetu Jagiellońskiego oświadczam, że przedłożona przeze mnie rozprawa doktorska pt. „*Algebraiczne podejście do efektu Casimira w układzie z dwoma potencjałami typu quasi-delta*” jest oryginalna i przedstawia wyniki badań wykonanych przeze mnie osobiście, pod kierunkiem prof. Andrzeja Herdegena. Pracę napisałem samodzielnie.

Oświadczam, że moja rozprawa doktorska została opracowana zgodnie z Ustawą o prawie autorskim i prawach pokrewnych z dnia 4 lutego 1994 r. (Dziennik Ustaw 1994 nr 24 poz. 83 wraz z późniejszymi zmianami).

Jestem świadom, że niezgodność niniejszego oświadczenia z prawdą ujawniona w dowolnym czasie, niezależnie od skutków prawnych wynikających z ww. ustawy, może spowodować unieważnienie stopnia nabytego na podstawie tej rozprawy.

Kraków, dnia

.....
podpis doktoranta

1 Wstęp

Kwantowa teoria pola jest jedną z podstawowych teorii znanych współczesnej nauce. Obecnie nie jest znana teoria, która w opinii środowiska naukowego tłumaczyłaby opisywane przez kwantową teorię pola zjawiska, na głębszym niż ona poziomie. Choć wiara, że taka głębsza teoria musi istnieć, jest bardzo powszechna w środowisku fizyków, to obecnie żadne z proponowanych podejść nie może rościć sobie prawa do bycia jej godnym następcą.

Kwantowa teoria pola może poszczycić się zdolnością do prawidłowego przewidywania takich fizycznych wielkości jak moment żyromagnetyczny elektronu z dokładnością do kilkunastu miejsc po przecinku, zaś oparty o nią Model Standardowy, jest najlepszym znanym nam opisem cząstek elementarnych, który przez kilka dekad święcił nieustające triumfy, gdy chodzi o jego zgodność z eksperymentami. Jeśli spojrzymy na jej odbiór społeczny, to można zaryzykować twierdzenie, że obecnie w naszej części świata wiedza o istnieniu bozonu Higgsa jest tak samo powszechna jak ta o wojnach napoleońskich i ich konsekwencjach.

Mimo tych wszystkich osiągnięć, kwantowa teoria pola wciąż skrywa przed nami wiele zagadek oraz stawia wielkie wyzwania. Od problemu liczby swobodnych parametrów w Modelu Standardowym, która powszechnie uchodzi za zbyt dużą, po zagadnienie jej ścisłego matematycznego opisu i konstrukcji konkretnych modeli, skala wyzwań jakie przed nami stawia jest ogromna. Przy czym większość uwagi i prac jest skupiona na tej części kwantowej teorii pola która ma zastosowanie w fizyce cząstek, co częściowo jest uzasadnione wielkimi osiągnięciami tej dziedziny w okresie od 1945 roku do 2012, gdy został odkryty bozon Higgsa.

Jednocześnie nie należy ulegać złudzeniu, że kwantowa teoria pola ogranicza się tylko do fizyki cząstek. Choć można byłoby wymienić co najmniej kilka innych gałęzi fizyki, gdzie kwantowa teoria pola i jej metody znalazły swoje zastosowanie, na przykład teoria fazy skondensowanej, to my skupimy się na problematyce efektu Casimira, którego dotyczy niniejsza praca. Efekt ten jest wynikiem oddziaływania między polem kwantowym a ciałami makroskopowymi, gdy pole znajduje się w swoim stanie podstawowym. Mamy nadzieję pokazać w niniejszej pracy, że jego badanie stanowi gałąź fizyki o własnej specyfice, która potrafi być niemniej intrygująca, niż wspomniany już Model Standardowy.

Wynika to z kilku czynników. Po pierwsze, zjawisko to dotyczy oddziaływania pola kwantowego w stanie podstawowym z obiektami które mogą mieć nawet 10 cm średnicy. Pozwala to mieć nadzieję, że jego badanie pozwoli nam lepiej zrozumieć zachowanie pól kwantowych w skali długości rzędu centymetrów, a na dzień dzisiejszy nie dysponujemy wielką wiedzą doświadczalną na temat ich zachowań w tej konkretnej skali. Po drugie, również formalizm teoretyczny używany do jego analizy, ma swój specyficzny charakter, wynikający z charakteru opisywanego zjawiska.

Po trzecie, teoria opisująca realne układy eksperymentalne stanowi swego rodzaju wypadkową między kwantową teorią pola a teorią materii fazy skondensowanej, ze względu na to, że badamy oddziaływanie stosunkowo prostego w budowie obiektu, jakim jest pole kwantowe z ciałami makroskopowymi. Choć w wyniku oddziaływania między tymi dwoma działami fizyki dostajemy formalizm, który wymaga pewnej biegłości w nich obu, a modele są często niezwykle skomplikowane i w wielu miejscach niesatysfakcjonujące, to problematyka powstająca na zetknięciu tych dwóch gałęzi fizyki rodzi wiele naprawdę intrygujących pytań i stawia ciekawe problemy.

Ostatni powód dotyczy badań doświadczalnych nad tym zjawiskiem. Choć niniejsza praca dotyczy osiągniętych przez autora wyników teoretycznych, to nie możemy

zapomnieć, że każda dobra teoria fizyczna musi prowadzić do wyników, które można przetestować w eksperymencie. Z tego punktu widzenia fizyków doświadczalnych może zainteresować z jak poważnymi wyzwaniami zmagali się badacze próbujący zmierzyć efekt Casimira i to jak w pomysłowy sposób starali się je pokonać, a może również zachęci do własnych prac w tym kierunku. Z drugiej strony, gdy zadajemy sobie pytanie o zgodność między teorią a eksperymentem, to tutaj wciąż wiele pracy wymagane jest również po stronie teoretycznej. Choć bowiem istnienie tego efektu nie budzi dziś w społeczności badaczy kontrowersji, to zawiła natura testowanych modeli teoretycznych sprawia, iż znaczenia dostępnych wyników doświadczeń dla naszego rozumienia kwantowego pola elektromagnetycznego, głównego obiektu badań eksperymentalnych, wciąż nie jest kwestią przebadaną w sposób satysfakcjonujący.

W niniejszej pracy prezentujemy wyniki dotyczące efektu Casimira, który pojawia się w układzie zawierającym skalarne pole kwantowe i dwa quasi-punktowe ciała, które określamy jako quasi-delta. Pierwotnie zostały one opublikowane w artykule [Zie21] i korekcie do niego [Zie23]. Publikacje te są kontynuacją prac Andrzeja Herdegena [Her01], [Her05], [Her06] oraz Andrzeja Herdegena i Mariusza Stopy [HS10], które dotyczyły efektu Casimira badanego w ramach podejścia algebraicznego rozwiniętego przez Herdegena. Zarówno samo ujęcie algebraiczne efektu Casimira, jak i prezentowane przez nas wyniki pragniemy umieścić w szerszym kontekście historycznym, teoretycznym oraz doświadczalnym, stąd stosunkowo dużo miejsca zostało poświęcone historii badań tego efektu i stosowanym do tego metodom.

Podejście algebraiczne Herdegena oparte jest na sformułowanych jawnie założeniach natury fizycznej oraz formalizmie teoretycznym zwanym algebraiczną kwantową teorią pola. Bazując na niej Herdegen sformułował warunki natury fizycznej i matematycznej które musi spełniać dany model, aby mógł być użyty do badania efektu Casimira. Ponadto metody algebraicznej kwantowej teoria pola pozwalają w sposób matematycznie ścisły i precyzyjny zbudować konkretne modele, które wykorzystywane są do opisu tego efektu. Gwarantuje to, że w rachunkach pojawią się tylko matematycznie sensowne wielkości i tym samym nigdy nie zajdzie potrzeba usuwania różnorakich nieskończoności. Jedynym wyjątkiem od tej reguły jest sytuacja, gdy rozważamy rodzinę modeli zależnych od parametru, stosujemy dla niego symbol λ , i badamy granicę typu $\lambda \searrow 0$. Wówczas w tej granicy pewne wielkości stają się nieskończone, lecz takie zachowanie nie stanowi realnego problemu.

Poprzednio jedynym w pełni zbadanym w ramach podejścia algebraicznego Herdegena układem był ten rozważany już w oryginalnej pracy H.G.B. Casimira [Cas48], czyli dwóch, efektywnie nieskończonych płyt wykonanych z metalu, ustawionych równolegle do siebie, wraz ze skalarным lub elektromagnetycznym polem kwantowym. Zostało to uczynione w pracach [Her06] i [HS10]. Pokazano tam, że człon otrzymany jeszcze przez Casimira jest jednym z wiodących wyrazów rozwinięcia asymptotycznego we wspomnianym już parametrze λ , lecz nie musi być ani jedyny, ani nawet dominujący. Przebadano też dokładnie problem gęstości energii w tym układzie, również te rezultaty pozostają w zasadniczej zgodności z tymi najczęściej przytaczanymi w literaturze.

W przypadku układu pola skalarного z dwoma quasi-deltami, sytuacja jest trudniejsza do zrozumienia. Jak pokazali w swojej pracy D. Fermi i L. Pizzocchero część prezentowanych tu wyników jest całkowicie zgodna z tymi otrzymanymi dla pojedynczej delty Diraca w ich podejściu [FP23]. Jednak do tej pory nie został znaleziony sposób pogodzenia uzyskanych przez autora wyników na temat zachowania globalnej energii w układzie dwóch delt z tymi podanymi przez A. Scardicchia [Sca05]. Ta rozbieżność na dzień dzisiejszy stanowi swego rodzaju zagadkę, trzeba

jednak zauważyć, że nie jest to jedyna, ani nawet największa kontrowersja obecna w literaturze dotyczącej efektu Casimira. O znacznie poważniejszym problemie zgodności przewidywań teoretycznych dla efektu Casimira wyliczonych w oparciu o teorię Lifszycy z wynikami doświadczeń piszemy w rozdziale (2.2).

Ponieważ formalizm algebraiczny i pewne techniczne rachunki pojawiające się przy badaniu konkretnych modeli mogą stanowić przeszkodę w studiowaniu rezultatów otrzymanych w ramach podejścia Herdegena, staraliśmy się wszystkie te zagadnienia omówić w możliwie jawny i prosty sposób. Dlatego też naszą uwagę zajmują głównie podstawowe idee na których podejście Herdegena bazuje, pomijamy zaś wiele kwestii czysto technicznych. Wierzmy, że pomimo trudności jakie zagadnienia te mogą nastroić nieobeznanemu z tym podejściem Czytelnikowi, jego zalety w pełni to rekompensują. W szczególności, w dziedzinie tak pełnej otwartych pytań i różnorodnych metod rachunkowych, których wzajemna relacja nie jest dostatecznie dobrze zrozumiana, możliwość przebadania konkretnych modeli efektu Casimira w sposób ścisły, precyzyjny i pozbawiony wieloznaczności, którą to możliwość daje nam podejście Herdegena, pozwala mieć nadzieję na osiągnięcie realnego postępu i głębszego zrozumienia tego efektu.

Plan niniejszej pracy jest następujący. W rozdziałach (2.1) i (2.2) prezentujemy historyczny zarys badań nad efektem Casimira, skupiając się głównie na wynikach eksperymentalnych. Ze względu na popularność podejścia do tego efektu bazującego na energii stanu zerowego, metodę tę poddajemy szczegółowej analizie w rozdziale (2.3). Rozdział (3) jest poświęcony przedstawieniu podejściu Herdegena oraz omówieniu uzyskanych na jego gruncie wyników. Model pola skalarnego z dwoma quasi-deltami wprowadzamy i analizujemy w rozdziale (4). W rozdziale (5) wyliczamy globalną energię, liczby cząstek oraz gęstość energii dla badanego modelu. Badamy też rodzinę modeli zależnych od parametru λ i analizujemy zachowanie globalnej energii oraz gęstości energii w granicy $\lambda \searrow 0$. Pewne bardziej techniczne kwestie omawianego problemu zostały przeniesione do odpowiednich dodatków.

2 Panorama badań nad efektem Casimira

2.1 Oryginalna praca Hendrika Casimira

Właściwa historia badań nad zjawiskiem nazwanym potem efektem Casimira zaczyna się od pracy Hendrika Casimira *On the attraction between two perfectly conducting plates* z 1948 roku [Cas48], która wyrosła z wcześniejszych badań prowadzonych przez Casimira wraz z D. Polderem nad rolą jaką elektrodynamika kwantowa odgrywa przy powstawaniu oddziaływań między elektrycznie obojętnymi ciałami [CP48]. Ten skromnej objętości artykuł odcisnął bardzo silne piętno na całym tym polu badań, które można wciąż dostrzec po ponad 70 latach, dlatego zatrzymamy się nad nim dłużej. Pozwolimy sobie omówić te jego elementy, które mają znaczenia dla podejścia do efektu Casimira prezentowanego w niniejszej pracy, odsyłając zainteresowanego szczegółami Czytelnika do pełnej lektury tego krótkiego, pionierskiego artykułu.

Punktem wyjścia tej pracy jest **energia stanu zerowego** (ang. *zero point energy*, termin używany przez Casimira) pola elektromagnetycznego w sześciennym wnętrzu. Zagadnieniu energii stanu zerowego poświęcimy więcej miejsca w rozdziale (2.3), tutaj wystarczy nam informacja, iż jest to energia jaką przypisujemy stanowi podstawowemu pola elektromagnetycznego Ω_{EM} , po przeprowadzeniu kanonicznego kwantowania odpowiedniego wyrażenia klasycznego opisującego to pole.

Wnęka rozważana w tej pracy ma krawędź o długość L i jest zbudowana z idealnie przewodzącego metalu, przy czym jedna z jej ścian jest równoległa do płaszczyzny xy . W następnym kroku zostaje w niej umieszczona płytką wykonana identycznego materiału, w taki sposób, że ona również jest równoległa do płaszczyzny xy . Casimir chce teraz porównać energię stanu zerowego w sytuacji, gdy płytką jest w małej odległości a od ścianki xy , z energią, którą posiada gdy jest ona w odległości uznawanej za dużą. Przyjmuje przy tym, że ten drugi warunek jest spełniony, gdy odległości ta jest bliska $L/2$. W artykule tym na oznaczenie energii stanu zerowego stosowany jest symboliczny zapis

$$\frac{1}{2} \sum \hbar \omega, \quad (2.1)$$

gdzie znak sumy należy rozumieć jako opisujący jednocześnie sumowanie i całkowanie po odpowiednich stopniach swobody.

W tym miejscu warto przytoczyć słowa samego Casimira (zob. str. 793 w [Cas48]). Dwie sytuacje fizyczne wspomniane w tekście poniżej to pusta sześcienna wnęka oraz wnęka w której umieszczona jest dodatkowa płyta.

In both cases the expressions $\frac{1}{2} \sum \hbar \omega$ where the summation extends over all possible resonance frequencies of the cavities are divergent and devoid of physical meaning but the *difference* between these sums in the two situations, $\frac{1}{2}(\sum \hbar \omega)_I - \frac{1}{2}(\sum \hbar \omega)_{II}$, will be shown to have a well defined value and this value will be interpreted as the interaction between the plate and the xy face.

Casimir uznawał więc nieskończoną energię stanu zerowego za nieposiadającą sensu fizycznego, przypisywał jednak taki sens różnicy dwóch nieskończonych wielkości tego typu. Ten problem również zostanie poruszony w rozdziale (2.3).

Ponieważ zarówno ścianki jak i metalowa płytką są idealnie przewodzące, więc pole elektromagnetyczne spełnia na nich warunek Dirichleta postaci

$$\vec{E}_{\parallel} = 0, \quad (2.2)$$

gdzie $\vec{E}_{\parallel}$ oznacza składową pola elektrycznego styczną do powierzchni płytek. Tym samym współrzędne wektora falowego pola $\vec{k} = k_x \vec{e}_x + k_y \vec{e}_y + k_z \vec{e}_z$ mogą przyjmować tylko dyskretny zbiór wartości:

$$k_x = \frac{\pi}{L} n_x, \quad k_y = \frac{\pi}{L} n_y, \quad k_z = \frac{\pi}{a} n_z, \quad (2.3)$$

gdzie n_x, n_y, n_z przebiegają zakres $0, 1, 2, \dots$. Casimir stwierdza jednak, że dla dużych wartości L wektory falowe k_x i k_y można traktować jako zmienne ciągłe i tak samo postępuje z wektorem falowym k_z dla stanu w którym płytka jest w dużej odległości od brzegu wnęki. W wyniku tego otrzymuje wzór równoważny następującemu wyrażeniu

$$\begin{aligned} \delta E &= \frac{1}{2} \left(\sum \hbar \omega \right)_{\text{I}} - \frac{1}{2} \left(\sum \hbar \omega \right)_{\text{II}} = \\ &= \frac{\hbar c L^2}{2\pi} \left(\sum_{n=(0),1}^{\infty} \int_0^{\infty} \kappa \sqrt{\left(n^2 \frac{\pi^2}{a^2} \right) + \kappa^2} d\kappa - \frac{a}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \kappa \sqrt{k_z^2 + \kappa^2} d\kappa dk_z \right). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Symbol „(0), 1” użyty w wyrażeniu na sumę, został wprowadzony wzorem Casimira i oznacza, że wyraz odpowiadający wskaźnikowi sumowania równemu 0, należy pomnożyć przez $\frac{1}{2}$, by uwzględnić, iż w tym stanie pole posiada tylko jedną polaryzację. Warto ponownie przywołać słowa samego Casimira, którymi skomentował ten wzór (zob. str. 794 w [Cas48]).

In order to obtain a finite result it is necessary to multiply the integrands by a function $f(k/k_m)$ which is unity for $k \ll k_m$, but tends to zero sufficiently rapidly for $(k/k_m) \rightarrow \infty$, where k_m may be defined by $f(1) = \frac{1}{2}$. The physical meaning is obvious: for very short waves (X-rays e.g.) our plate is hardly an obstacle at all and therefore the zero point energy of these waves will not be influenced by the position of this plate.

Po wprowadzeniu funkcji $f(k/k_m)$, zamianie zmiennych na $u = a^2 \kappa^2 / \pi^2$ oraz zmienienu nazw współrzędnej k_z na n , dostajemy wzór

$$\delta E = \frac{\hbar c L^2 \pi^2}{4a^3} \left(\sum_{(0),1}^{\infty} \int_0^{\infty} d\kappa \sqrt{n^2 + u} f\left(\frac{\pi \sqrt{n^2 + u}}{a k_m}\right) - \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} du dn \sqrt{n^2 + u} f\left(\frac{\pi \sqrt{n^2 + u}}{a k_m}\right) \right). \quad (2.5)$$

Casimir rozwija powyższe wyrażenie w szereg, którego konkretna postać nie jest w obecnym kontekście ważna, ale którego wszystkie niezerowe wyrazy poza pierwszym zawierają potęgi bezwymiarowej wielkości $\pi/(a k_m)$. Następnie stwierdza on, że wystarczy ograniczyć się do owego pierwszego wyrazu rozwinięcia, otrzymując tym samym zależność:

$$\frac{\delta E}{L^2} = -\hbar c \frac{\pi^2}{720} \frac{1}{a^3}, \quad (2.6)$$

która wedle jego słów „holds as long as $a k_m \gg 1$ ”. Prowadzi ona do doskonale znanego wzoru na siłę przypadającą na jednostkę powierzchni:

$$F_a = -\frac{d}{da} \frac{\delta E}{L^2} = -\frac{\pi \hbar c}{480} \frac{1}{a^4}. \quad (2.7)$$

Wynik ten skomentował następującymi słowami (zob. str. 795 w [Cas48]).

There exists an attractive force between two metal plates which is independent of the material of the plates as long as the distance is so large

that for wave lengths comparable with that distance the penetration depth is small compared with the distance. This force may be interpreted as a zero point pressure of electromagnetic waves.

Widzimy więc, że już na początku badania efektu Casimira istnienie uniwersalnego, niezależnego od materiału z którego zostały wykonane płytki, wyrażenia na siłę, zostało opatrzone zastrzeżeniami natury fizycznej. Ze względu na wagę tych fizycznych zastrzeżeń dla zrozumienia prac o tym zjawisku, zatrzymamy się nad nimi na chwilę.

Jak jest napisane w poprzednio cytowanym fragmencie artykułu, Casimir wyróżnia dwie skale długości obecne w problemie. Pierwsza z nich jest wyznaczona przez warunek, że $ak_m \gg 1$ lub równoważnie $a \gg 1/k_m$. Fizyczne znaczenie tego warunku jest proste do zrozumienia. Długość fali $\lambda_m = 1/k_m$ wyznacza jedną skalę długości w badanym problemie, taką że fala o długość $\lambda \gg \lambda_m$ zostanie odbita przez płytkę, zaś fala o długości $\lambda \ll \lambda_m$ swobodnie przez nią przeniknie. Tym samym $a \gg \lambda_m$ oznacza, że płytki muszą być oddalone od siebie na odległość a taką, że fale o długości dużo mniejszej niż a będą swobodnie opuszczały układ. Wobec tego jedynie fale o długości większej bądź porównywalnej z λ_m będą wносиły wkład do badanego zjawiska.

Druga skala długości to głębokość penetracji L_{pen} tych fal elektromagnetycznych, których długości jest większa lub porównywalna z λ_m . Wyznaczona jest ona przez głębokość na jaką fale te wnikają do wnętrza płytek. Casimir stwierdza, że wzór (2.7) może obowiązywać jedynie, jeśli spełniony jest warunek

$$\frac{L_{\text{pen}}}{\lambda_m} \ll 1. \quad (2.8)$$

Fizyczna interpretacja tego warunku nie nastęrcza większych trudności.

Artykuł kończą słowa Casimira, że choć przewidywana siła jest mała, to eksperymentalne potwierdzenie jej istnienia nie jest rzeczą nieosiągalną i może mieć pewną wartość poznawczą. Można stwierdzić, że historia badań doświadczalnych tego efektu potwierdziła w dużej mierze jego słowa. Po ponad 70 lat od ich publikacji, zarówno nadzieje poznawcze związane z pomiarem siły Casimira, jak i rozliczne trudności eksperymentalne przed którymi takie próby stają to kwestie, które są mocno dyskutowane w środowisku osób zajmujących się tym efektem. Historii tych badań i problemom z jakimi musiały się one mierzyć poświęciliśmy rozdział (2.2).

Jak widzieliśmy, energia stanu zerowego odgrywała kluczową rolę w oryginalnej pracy Casimira, następnie zaś zagościła w wielu artykułach, podręcznikach i monografiach dotyczących tego zagadnienia. Niemniej uważamy, że podejście to jest z wielu względów niesatysfakcjonujące i w obecnej pracy nie będziemy z niego nigdy korzystać. Dyskusję argumentów na których opieramy nasze stanowisko również odkładamy do rozdziału (2.3).

Na koniec poczynimy uwagę natury terminologicznej. Choć Casimir rozważał układ skończonych płytek we wnęce, które są na tyle duże, że można je efektywnie traktować jako nieskończone, później w pracach teoretycznych przez układ „dwóch płytek” rozumiano prawie wyłącznie układ, w którym obie płytki są w ścisłym sensie nieskończone. Z tego powodu, gdy w dalszej części niniejszej pracy będziemy pisali o teoretycznych modelach, przez układ dwóch płytek Czytelnik powinien zawsze rozumieć układ zawierający nieskończone płytki, chyba że powiedziano inaczej.

2.2 Zarys badań nad efektem Casimira

Historyczna perspektywa często pozwala lepiej zrozumieć obecny stan danej gałęzi wiedzy oraz wyzwania które przed nami stawia. Mamy nadzieję, że ten szkicowy przegląd teoretycznych oraz doświadczalnych badań nad efektem Casimira posłuży właśnie temu celowi i pozwoli lepiej umiejscowić wyniki przedstawione w tej pracy w szerszej perspektywie badawczej. Ponieważ większa część niniejszej pracy jest poświęcona badaniom teoretycznym, by zbalansować to w jakiś sposób, ten rozdział skupi się głównie na badaniach doświadczalnych.

Pytanie, które ogniskuje treść tej części pracy jest następujące. Czy przewidywania modeli teoretycznych efektu Casimira zgadzają się z wynikami otrzymywanymi w eksperymentach w ramach ich niepewności pomiarowej? Odpowiedź na to pytanie okazuje się nadspodziewanie skomplikowana, a wynika to z faktu, że w przeciwieństwie do swych teoretycznych modeli, które mogą być niezwykle proste, ciała makroskopowe są zawsze obiektami ogromnie złożonymi. Efekt Casimira jest zaś tak subtelny, że trzeba z uwagą uwzględnić wpływ całej gamy własności realnych ciał, które mogą wpłynąć na wynik eksperymentu.

Mimo tego spróbujemy teraz podać zwięzłą i uproszczoną odpowiedź na powyższe pytanie. Jeśli ustawimy równolegle do siebie dwie metalowe płytki o powierzchni rzędu 1 cm^2 i w odległości około $1\text{ }\mu\text{m}$, to siła Casimira obliczona na podstawie wzoru (2.7) będzie rzędu

$$F_a \sim 10^{-7}\text{ N.} \quad (2.9)$$

Biorąc pod uwagę, że mamy do czynienia z ciałem o makroskopowych rozmiarach, siła ta jest niezwykle mała w stosunku do sił które normalnie działają na taki obiekt. Prowadzący odpowiednie eksperymenty muszą się zmagać z tym, że w praktyce usunięcie tych wszystkich sił jest bardzo trudne, jeśli nie niemożliwe, więc konieczna jest pewna procedura „filtrowania”, która wydobędzie przewidywany efekt z realnie obserwowanej siły. Pomimo tych trudności, opublikowane rezultaty badań podają, że w układzie dwóch płytek przewidywania wyprowadzone w oparciu o wzór (2.7) zgadzają się z wynikami uzyskanymi dzięki analizie danych eksperymentalnych w granicy niepewności tych ostatnich, która wynosi około 10%–20%. W szczególności należy tutaj przytoczyć wyniki uzyskane przez G. Bressi’ego et al., które zostały opublikowane w pracy *Measurement of the Casimir Force between Parallel Metallic Surfaces* [Bre+02].

Plan dalszej części rozdziału jest następujący. Najpierw omówimy wybrane zagadnienia teoretyczne, które są niezbędne dla zrozumienia rezultatów większości badań doświadczalnych, następnie przedstawimy w ujęciu chronologicznym wybrane eksperymenty. Później omówimy krótko pewne kontrowersje dotyczące zgodności wyników doświadczeń z teoretycznymi modelami siły Casimira, nad którymi intensywnie debatowano w okresie po roku 2000. Zakończymy zaś krótką dyskusją na temat przybliżonych metod rachunkowych używanych do obliczania efektu Casimira. Rozdział ten nie pretenduje do podania wyczerpującego opisu żadnego z tych zagadnień, zainteresowany Czytelnik może znaleźć dokładniejsze ich omówienie w monografii [Dal+11], szóstym rozdziale pracy [MUV01] oraz artykułach [KM06] i [KM22].

Nim przystąpimy do właściwej treści rozdziału musimy poczynić kilka uwag natury ogólnej. Po pierwsze, należy zauważyć, iż historycznie badanie efektu Casimira było mocno powiązane z zagadnieniem sił van der Waalsa, o ich relacji wspomina sam Casimir na początku artykułu rozpoczynającego tę dziedzinę badań [Cas48]. G.L. Klimchitskaja i V.M. Mostepanenko ujmują związek między nimi w następujący sposób [KM06]. Zarówno siły van der Waalsa jak i siłę Casimira można opisać

wspólną teorią, gdzie pierwsza z nich objawia się w reżimie nierelatywistycznym, druga w przypadku relatywistycznym, w którym należy uwzględnić efekty retardacji dla pola elektromagnetycznego. Obowiązująca w literaturze wspólna nazwa dla obu tych zjawisko to **siły dyspersyjne**.

W niniejszej pracy nie będziemy omawiać związku między siłą Casimira a siłami van der Waalsa. Należy jednak wspomnieć, że historycznie miał on duże znaczenie dla doświadczalnego zrozumienia tego efektu, ponieważ eksperymentalne wyniki badań nad siłami van der Waalsa były obecne w literaturze już w chwili publikacji pracy H.B.G. Casimira w 1948 roku. Dlatego też badacze dokonali ponownego przeglądu dostępnych wtedy wyników, pod kątem ich nowej interpretacji. Choć owa analiza nie dostarczyła konkluzyjnych dowodów na istnienie siły Casimira, te dawniejsze eksperymenty wywarły zauważalny wpływ na prowadzone później badania.

Drugie zastrzeżenie które musimy uczynić, dotyczy dynamicznego efektu Casimira. Zjawiska tego nie będziemy w ogóle omawiać, odsyłając zainteresowanego Czytelnika do pracy przeglądowej [Dod20]. Jest to umotywowane tym, że pomimo wielu badań prowadzonych nad dynamicznym efektem Casimira, w chwili obecnej niewiele można powiedzieć w sposób matematycznie ścisły na temat jego związku z statycznym efektem Casimira, którego badaniu poświęcona jest niniejsza praca.

Przejdźmy teraz do krótkiego przedstawienia pewnych rezultatów teoretycznych uzyskanych po 1948 roku. Z punktu widzenia badań eksperymentalnych dwa problemy wysuwają się na pierwszy plan. Po pierwsze w swej oryginalnej pracy Casimir użył wysoce wyidealizowanego modelu metalu, który idealnie blokuje pole elektromagnetyczne, niezależnie od jego częstotliwości. Na poziomie teoretycznym odpowiada to narzuceniu na pole warunków brzegowych Dirichleta. Choć Casimira wprowadza w pewnym momencie odpowiednią funkcję regularyzującą by uczynić rozważane płytki bardziej „przeźroczystymi”, to na poziomie rozwinięcia uzyskanego wzoru w szereg potęgowy którego dokonuje, fakt ten jest ponownie usuwany z formalizmu.

Jak dobrze wiadomo rzeczywiste ciała materialne stają się coraz bardziej „przeźroczyste” dla fal elektromagnetycznych, gdy ich częstotliwość rośnie, więc formalizm teoretyczny powinien dostarczyć nam metod obliczenia siły Casimira, które uwzględniają takie właśnie zjawiska.

Po drugie, wracając znów do oryginalnej pracy Casimira, użyty tam model można rozumieć jako opisujący sytuację, gdy cały układ znajduje w równowadze termodynamicznej ze zbiornikiem ciepła o temperaturze $T = 0$ K. Wszystkie znane nam eksperymenty mające na celu zbadanie tego zjawiska odbywały się w temperaturze $T \sim 300$ K, dlatego też zrozumienie termicznego efektu Casimira jest zagadnieniem wielkiej wagi.

Teoria uwzględniająca oba te czynniki została pierwszy raz przedstawiona światu w opublikowanej w 1955 roku pracy Jewgienija Lifszycy. Ze względu na ówczesne warunki, publikacja ta ukazała się najpierw w języku rosyjskim, zaś rok później opublikowany został jej przekład na angielski *The theory of molecular attractive forces between solids* [Lif56]. Ukazała się więc jeszcze przed rozpoczęciem właściwych badań doświadczalnych nad efektem Casimira, który to fakt możemy datować na rok 1958. W następnych latach dalsze badania teoretyczne nad wpływem temperatury na efekt Casimira prowadzili między innymi M. Fierz [Fie60], J. Mehra [Meh67] oraz L.S. Brown i G.J. Maclay [BM69].

Ponieważ większość eksperymentów porównuje uzyskane wyniki empiryczne z przewidywanymi teoretycznymi wyliczonymi w oparciu o podejście Lifszycy, konieczne jest dokładniejsze omówienie go. Podejście to pozwala na opis zarówno efektu Casimira jak i sił van der Waalsa, wskazując jeszcze raz na związek obu tych zjawisk.

W swej oryginalnej publikacji Lifszyc rozważał nie dwie płytki o skończonej grubości, lecz dwie półprzestrzenie wypełnione odpowiednią substancją materialną¹. W naszej skrótowej prezentacji tego formalizmu będziemy podążać za opisanym w jego ramach układem dwóch płytek, który to opis pochodzi z pracy G.L. Klimchitskaj i V.M. Mostepanenko, odsyłając zainteresowanego szczegółami Czytelnika do tej publikacji i cytowanej w niej literatury [KM22].

Będziemy przyjmować, że własności materiału z którego wykonane są płytki są opisywane przez przenikalność elektryczną $\varepsilon(\omega)$ i przenikalność magnetyczną $\mu(\omega)$, które są funkcjami częstotliwości fal elektromagnetycznych. Tym samym teoria ta obejmuje oddziaływanie zarówno między ciałami wykonanymi z metalu jak i z materiału dielektrycznego. Założymy dodatkowo, że płytki są ustawione w płaszczyźnie xy i rozciągają się w niej do nieskończoności, zaś odległość między nimi mierzona jest w kierunku z .

Wprowadźmy pewne oznaczenia i obiekty pomocnicze. Długość składowej wektora falowego pola elektromagnetycznego prostopadłej do osi z będziemy oznaczać przez

$$k_{\perp} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}. \quad (2.10)$$

Wprowadzamy dwie pomocnicze funkcje

$$k(\omega, k_{\perp}) = \sqrt{(k_{\perp})^2 - \varepsilon(\omega)\mu(\omega)\frac{\omega^2}{c^2}}, \quad (2.11a)$$

$$q(\omega, k_{\perp}) = \sqrt{(k_{\perp})^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}. \quad (2.11b)$$

Poprzeczny elektryczny (TE, ang. *transverse electric*) i poprzeczny magnetyczny (TM, ang. *transverse magnetic*) współczynnik odbicia dane są jako:

$$r_{\text{TE}}(\omega, k_{\perp}) = \frac{\mu(\omega)q - k(\omega, k_{\perp})}{\mu(\omega)q + k(\omega, k_{\perp})}, \quad (2.12a)$$

$$r_{\text{TM}}(\omega, k_{\perp}) = \frac{\varepsilon(\omega)q - k(\omega, k_{\perp})}{\varepsilon(\omega)q + k(\omega, k_{\perp})}. \quad (2.12b)$$

Korzystając z wprowadzonych oznaczeń możemy zapisać wzór, opisujący siłę przypadającą na jednostkę powierzchni w temperaturze T jako

$$F_a(T) = -\frac{\hbar}{2\pi^2} \int_0^{\infty} dk_{\perp} k_{\perp} \int_0^{\infty} d\omega \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_{\text{B}}T}\right) \times \\ \times \Im \left\{ \frac{q(\omega, k_{\perp})}{r_{\text{TM}}(\omega, k_{\perp})^{-2}e^{2aq} - 1} + \frac{q(\omega, k_{\perp})}{r_{\text{TE}}(\omega, k_{\perp})^{-2}e^{2aq} - 1} \right\}. \quad (2.13)$$

Wzór ten nie tylko jest bardzo złożony, ale wymaga też od nas znajomości tego jak materiał z którego wykonane są płytki, oddziałuje z polem elektromagnetycznym w szerokim paśmie częstotliwości. Nawet dla materiałów takich jak złoto, dla których dysponujemy bardzo dobrymi danymi eksperymentalnymi, konieczne jest uzupełnienie ich pewnymi modelami teoretycznymi, do którego to zagadnienia wrócimy w dalszej części tego rozdziału.

¹Przykładowo, po wprowadzeniu standardowego układu współrzędnych xyz , podprzestrzenie te można opisać nierównościami $x \leq 0$ i $a \leq x$, gdzie $a > 0$.

Przejdźmy teraz do historii doświadczalnych badań nad efektem Casimira, które zaczynają się w sposób właściwy od eksperymentu M.J. Sparnaay’a, którego wyniki zostały opublikowane w pracy *Measurements of attractive forces between flat plates* z 1958 roku [Spa58]. W tym przypadku ważniejsze niż same dane doświadczalne, które były niesatysfakcjonujące i nie były w stanie rozstrzygnąć faktu istnienia lub nieistnienia tego efektu, okazało się zidentyfikowanie i jasne przedstawienie przez Sparnaay’a problemów, których rozwiązanie pozwoli w sposób możliwie precyzyjny i konkluzywny zmierzyć siłę Casimira.

Eksperyment Sparnaay’a był przeprowadzony dla oryginalnej konfiguracji, czyli dwóch płaskich metalowych płyt, których odległość od siebie była rzędu μm , zaś otrzymane wyniki były porównywane z wzorem wyprowadzonym przez Casimira dla pola elektromagnetycznego (2.7). Pomiaru dokonano dla trzech zestawów płytek: chrom-chrom, chrom-stal i aluminium-aluminium; dla pierwszego i drugiego zestawu płytek zaobserwowano siłę przyciągającą, dla ostatniego odpychającą. Wyniki te od razu rodzą pytanie o źródło możliwych błędów i niepewności eksperymentalnych, które to kwestie Sparnaay uważnie przeanalizował.

Za największą słabość stosowanej metody uznał on to, że ostre krawędzie płytek wraz z doczeponą do nich wagą sprężynową służącą do pomiaru siły, prowadziły do powstania dużej histerezy w układzie, co czyniło dokładny pomiar odległości między płytkami bardzo trudnym. Z problemem dokładnego pomiaru odległości między ciałami wykorzystywanymi w pomiarze siły Casimira fizycy doświadczalni będą się wielokrotnie mierzyć w następnych dekadach.

Kolejnym wyzwaniem było usunięcie różnicy potencjałów elektrycznych między płytkami. Sparnaay zwrócił uwagę, że nawet różnica w potencjale wynosząca 17 mV jest na tyle duża, by całkowicie przysłonić siłę Casimira. Choć użyty przez niego układ został odizolowany elektrycznie i wielokrotnie ulepszany, na powierzchni płytek wciąż można było zaobserwować cząstki kurzu o średnicy przekraczającej $2\mu\text{m}$, czyli w skali problemu były one niezwykle duże. Ich obecność mogła generować poważne różnice w potencjale elektrostatycznym, a także sprawiała, że w chwili zetknięcia obu płytek, odległość między nimi nie była równa zeru, lecz wynosiła około $0.2\mu\text{m}$. Sparnaay nie wyjaśnił jednak jak zmierzył tą ostatnią wielkość.

Utrzymanie dwóch płytek o powierzchni około 1cm^2 równolegle do siebie, gdy odległość między nimi jest rzędu $1\mu\text{m}$ również okazało się wielkim problemem, który chyba dopiero eksperyment Bressi’ego et al. z 2002 roku, był w stanie satysfakcjonująco rozwiązać [Bre+02]. Sparnaay podaje, że wskutek nachylenia płytek względem siebie, odległość między nimi zmieniała się nawet o 10% w zależności od tego dla których ich fragmentów była mierzona.

Poza krytycznymi uwagami pod adresem własnego eksperymentu Sparnaay omówił również pewne wcześniejsze badania, których wyniki poddane nowej analizie, mogły potencjalnie wykazać istnienie siły Casimira oraz omówił pewne ich słabe strony. Opracowanie metod pomiarowych odpornych na przeprowadzoną przez niego krytykę, wyznaczało na kilkadziesiąt lat rozwój doświadczalnych badań nad efektem Casimira. Kończąc już omawianie wyników Sparnaay’a należy wspomnieć, że gdy w następnych latach Fierz, Mehra oraz Brown i Maclay opublikowali wspomniane już prace o wpływie temperatury na efekt Casimira, to stwierdzono, iż przewidywane poprawki były poniżej czułości tego eksperymentu.

W następnych 20 latach prowadzono dalsze badania doświadczalne, nad którymi nie będziemy się zatrzymywać. Trzeba jednak wspomnieć o tych ich elementach które mocno wpłynęły na dalsze próby zmierzenia efektu Casimira. Przede wszystkim, zapewne ze względu na trudność utrzymania płaskich płytek równolegle względem

siebie, zaczęto wówczas używać innych konfiguracji geometrycznych, takich jak te wykorzystujące powierzchnie w kształcie walca. Jednocześnie, ze względu na problem różnicy potencjałów, zaczęto używać ciał wykonanych z materiałów nieprzewodzących. Pewne dodatkowe informacje na temat badań z tego okresu znajdują się w szóstym rozdziale pracy [MUV01].

Następnym ważnym eksperymentem o którym chcemy powiedzieć, jest ten przeprowadzony przez P. van Bloklanda i J. Overbeeka, a którego wyniki zostały opublikowane w roku 1978 w pracy *van der Waals forces between objects covered with a chromium layer* [BG78]. Mierzyli oni siłę między płaską płytką, a sferą², w zakresie odległości między 132 a 670 nm. Oba obiekty zostały pokryte warstwą chromu, przy czym autorzy uznali, że na powierzchni ciał zawsze będzie obecna cienka warstwa tlenków chromu, co należy uwzględnić podczas analizy danych. Dodatkowo, by skompensować utrzymującą się między płytką a sferą różnicę potencjałów, rzędu 20 mV, przez cały czas trwania eksperymentu do układu badawczego było przyłożone odpowiednie napięcie kompensujące.

Użycie układu płytka-sfera ma oczywistą zaletę, że ze względu na symetrię sfery, nie jest konieczne bardzo dokładne ustawienie ciał względem siebie. Choć prawdziwe obiekty nie są idealnie sferyczne, to zapewne właśnie ten fakt sprawił, że do dnia dzisiejszego konfiguracja ta, wraz z jej różnorodnymi wariacjami, jest najczęściej wykorzystywaną w badaniach doświadczalnych. Niemniej jak zobaczymy dalej, nawet w bardzo dobrych eksperymentach zdarzało się użycie zamiast sfery, lub fragmentu sfery, ciała którego odchylenie od sferycznego kształtu powinno być widoczne gołym okiem. Takie przeoczenia są zapewne wynikiem potrzeby dokładnego odizolowania układu eksperymentalnego od otoczenia, w tym od dostępu światła.

Negatywną stroną układu sfera-płytką jest to, że wedle przewidywań teoretycznych charakter siły Casimira bardzo zależy od geometrii układu. Dwie płytki są przez nią przyciągane do siebie, dla pojedynczej sfery może prowadzić zarówno do jej kurczenia, jak i rozciągania (zob. roz. 4.2 [MUV01]). Nie wnikając w detale tego skomplikowanego problemu, można stwierdzić, iż bez odpowiedniego modelu teoretycznego nie jesteśmy w stanie podać nawet jakościowych przewidywań dotyczących tej siły.

Opracowanie takiego modelu dla tego konkretnego eksperymentu dodatkowo utrudniał fakt, że chrom posiada dwa mocne pasma absorpcyjne dla długości fali 600 nm, które trzeba było uwzględnić w obliczeniach. By poradzić sobie z nimi w obliczeniach teoretycznych zastąpiono je pojedynczym pasmem absorpcyjnym, którego wkład do mierzonej siły został oszacowany na 40% całkowitego efektu. Ostatecznie nie udało się w sposób w pełni satysfakcjonujący sformułować odpowiedniego modelu opartego o teorię Lifszycy i musiano wspomagać się danymi empirycznymi. Pomimo przyjęcia tych wszystkich uproszczeń nie udało się znaleźć ścisłych rozwiązań dla tego modelu, konieczne było więc sięgnięcie po metod przybliżone.

Biorąc te i inne trudności pod uwagę, nie należy się dziwić, że niepewność w tym eksperymencie oszacowano na 50% mierzonego wyniku. W zakresie tych niepewności wyniki eksperymentalne były zgodne z przewidywaniami teoretycznymi otrzymanymi w ramach opisanego wcześniej podejścia. Biorąc to wszystko pod uwagę można uznać, iż był to pierwszy eksperyment, który jednoznacznie wskazywał na istnienie efektu Casimira dla metalowych powierzchni. Nie można jednak zapominać, że model teoretyczny z którym porównywano wyniki eksperymentu był bardzo odległy od tego jaki rozważał Casimir, więc zrozumienie znaczenia uzyskanych wtedy rezultatów dla kwantowej teorii pola elektromagnetycznego nie jest ani sprawą

²W literaturze często zamiast słowa „sfera” używa się terminu „soczewka” (ang. *lens*).

prostą ani oczywistą. Jak zobaczymy, to samo można powiedzieć o wielu kolejnych eksperymentach badających to zjawisko.

W tym miejscu przejdziemy do omawiania wyników S.K. Lamoreaux'a które zostały opublikowane w 1997 roku w pracy *Demonstration of the Casimir Force in the 0.6 to 6 μm Range* [Lam97]. Z dostępnych słów Lamoreaux'a można wyciągnąć wniosek, że traktował on swój eksperyment bardziej jako demonstrację możliwości dostępnych w owym czasie technik eksperymentalnych, niż jako szczegółowe badanie efektu Casimira i pod tym względem odniósł niewątpliwy sukces. Jego projekt badawczy niezwykle ożywił dziedzinę doświadczalnych badań nad efektem Casimira na ponad dwadzieścia lat i można mieć nadzieję, że zainteresowanie nimi nie zmaleje w trzeciej dekadzie XXI wieku.

Zajmijmy się teraz dokładniejszym opisem samego eksperymentu. Badany był układ sfera-płytką, oba ciała zostały pokryte mającą $0.5\text{ }\mu\text{m}$ grubości warstwą miedzi, następnie warstwą złota o tej samej grubości. Sferę umieszczono na stosie piezoelektrycznym, zaś płytkę na jednym ramieniu wahadła torsyjnego. Drugie ramie tego wahadła pełniło rolę elektrody w układzie dwóch kondensatorów C_1 i C_2 . Siła działająca na płytkę skutkowałą powstaniem momentu siły zmieniającego kąt wychYLENIA wahadła, co zaś prowadziło do zmiany pojemności kondensatorów. Wówczas obwód sprzężenia zwrotnego doprowadzał do układu kondensatorów odpowiednie napięcie kompensujące, tak by została przywrócona pierwotna pojemność i to właśnie napięcie służyło do wyznaczenia wielkości mierzonej siły.

Jak podaje Lamoreaux nawet po uziemieniu układu zaobserwowano różnicę potencjału między sferą a płytką rzędu 430 mV, którą to wielkość określił jako „shockingly large”. Zniwelowanie jej wpływu wymagało przyłożenia odpowiedniego napięcia do sfery, choć wydaje się, że nawet wtedy w układzie były obecne resztkowe siły elektrostatyczne.

Rok po publikacji oryginalnego artykułu Lamoreaux opublikował erratę, w której wskazał na nieuwzględnione wcześniej błędy i problemy obecne w eksperymencie [Lam98]. Jednym z nich było to, że obiekt użyty jako sfera był zniekształcony, skutkiem czego, choć poprzednio twierdzono, iż jego promień wynosi $(11.3 \pm 0.1)\text{ cm}$, to w erracie podano, że dla tego jego fragmentu dla którego wykonywano pomiar wynosił on $(12.5 \pm 0.3)\text{ cm}$. To że nie zostało to zauważone wcześniej, wynika zapewne z tego, że eksperymenty tego typu wymagają użycia komór próżniowych, do których nie mają dostępu zewnętrzne fale elektromagnetyczne, w tym światło. Jak wspomniano wyżej, należy oczekiwać, że poszukiwana siła jest rzędu 10^{-7} N , nietrudno więc zrozumieć, dlaczego zarówno obecność gazów lub światła w układzie może całkowicie uniemożliwić jej zarejestrowanie. W takiej sytuacji dopiero demontaż całej aparatury eksperymentalnej umożliwia dokładne sprawdzenie jej stanu.

Pomimo tych i innych trudności, eksperyment ten pokazał zgodność danych empirycznych i teorii opartej na podejściu Lifszycy na poziomie (5–10)%, przynajmniej dla małych odległości między badanymi ciałami. Niepewność ta była wciąż zbyt duża, by można było zaobserwować wpływ efektów termicznych na badane zjawisko.

Ostatnim eksperymentem który omówimy dokładniej jest ten przeprowadzony przez G. Bressi'ego, G. Carugno, R. Onfrio i G. Ruoso, którego wyniki opublikowano w 2002 roku w pracy *Measurement of the Casimir Force between Parallel Metallic Surfaces* [Bre+02]. Jest on pierwszą od czasów Spanyaara'a znaną nam próbą zmierzenia siły w układzie dwóch płaskich metalowych płytek, w celu porównania jej z oryginalnym wynikiem Casimira. Aby tego dokonać, oryginalny wzór (2.7) został

przepisany jako

$$F_a = -\frac{K_C}{a^4}, \quad (2.14)$$

następnie doświadczalnie wyznaczono wartości współczynnika $K_{C, \text{exp}}$ i porównano z wielkością przewidywaną przez teorię

$$K_C = \frac{\pi \hbar c}{480} \approx 1.3 \cdot 10^{-27} \text{ N m}^2. \quad (2.15)$$

Aby nie prowadzić do nieporozumień, referując dalej wynik pracy Brassiego et al., będziemy tak jak oni oznaczali odległość między płytkami symbolem d .

W pomiarze użyto dwóch płytek, pierwsza z nich, która została nazwana rezonatorem (ang. *resonator*), miała wymiary $1.9 \text{ cm} \times 1.2 \text{ mm} \times 47 \mu\text{m}$, druga zwana źródłem (ang. *source*) miała wymiary $1.9 \text{ cm} \times 1.2 \text{ mm} \times 0.5 \text{ mm}$. Obie były wykonane z krzemu i pokryte warstwą chromu o grubości około 50 nm . Rezonator został przytwierdzony na trwale jednym końcem do mogącego wykonywać odpowiedni ruch obrotowy fragmentu układu, tworząc kształt określony przez autorów jako belka wspornikowa (ang. *cantilever beam*). Drugi koniec rezonatora mógł wykonywać swobodne drgania. Źródło zostało na trwale przymocowane do innego ruchomego fragmentu aparatury. Według autorów tak skonstruowany układ pozwalał na ustawienie płytek równolegle z dokładnością rzędu $3 \cdot 10^{-5}$ radiana.

Ze względu na obecność różnych typów metali w układzie pomiarowym, między płytkami zawsze była obecna różnica potencjałów V_0 , którą kompensowano przez przyłożenie napięcia V_c . Napięcia resztkowego

$$V_r = V_c - V_0, \quad (2.16)$$

nigdy nie udało się całkowicie wyeliminować i musiało być ono uwzględnione w analizie danych doświadczalnych.

Podstawową wielkością rejestrowaną w eksperymencie była częstość rezonansowa najniższego modu skręceń (ang. *torsional mode*) rezonatora jako funkcji odległości między płytkami. Odległość ta była mierzona za pomocą przyłożonego do rezonatora interferometru światłowodowego. Aby móc wyjaśnić jak na podstawie mierzonych częstości można wyznaczyć $K_{C, \text{exp}}$, musimy wprowadzić dodatkowe wielkości i oznaczenia. Masę efektywną najniższego modu skręceń rezonatora będziemy oznaczać przez m_{eff} , efektywną powierzchnię płytek przez S . Częstotliwość oscylacji swobodnych rezonatora według artykułu wynosiła $\nu_0 = 138.275 \text{ Hz}$. Wprowadzamy współczynniki

$$C_{\text{el}} = \frac{\epsilon_0 S}{4\pi^2 m_{\text{eff}}}, \quad C_{\text{Cas}} = \frac{K_{C, \text{exp}} S}{\pi^2 m_{\text{eff}}}. \quad (2.17)$$

Jak łatwo spostrzec, znając obie powyższe wielkości można wyznaczyć $K_{C, \text{exp}}$ za pomocą zależności

$$K_{C, \text{exp}} = \frac{\epsilon_0}{4} \frac{C_{\text{Cas}}}{C_{\text{el}}}. \quad (2.18)$$

Związek wiążący stałe C_{Cas} i C_{el} z częstością oscylacji rezonatora, został wprowadzony wcześniej w pracy, którą autorzy referowanego artykułu napisali wraz z A. Galvanim i F. Veronesem [Bre+01]. Jest on postaci

$$\Delta\nu(d)^2 = \nu^2 - \nu_0^2 = -C_{\text{el}} \frac{V_r^2}{d^3} - \frac{C_{\text{Cas}}}{d^5}. \quad (2.19)$$

Człon proporcjonalny do C_{el} nosi nazwę członu elektrostatycznego. Na podstawie serii trzech pomiarów, zostały wyznaczone wszystkie parametry występujące w tym wyrażeniu poza C_{Cas} . Należy zaznaczyć, że analiza danych z tych trzech serii okazała się być sama w sobie kwestią dość skomplikowaną

Następnie przeprowadzono czwartą serię pomiarów. Od otrzymanych w trakcie niej wyników odjęto następnie wkład członu elektrostatycznego i do tak otrzymanych wartość $\Delta\nu_f(d)^2$ dopasowano krzywą daną równaniem

$$\Delta\nu_f(d)^2 = -\frac{C_{\text{Cas}}}{d^5}. \quad (2.20)$$

Otrzymana w ten sposób krzywa pokrywało się w granicy niepewności z danymi doświadczalnymi dla d w zakresie od 0.5 do 1 μm i od 2 do 3 μm . Dla odległości 1 do 2 μm , po uwzględnieniu niepewności pomiarowych, niektóre wartości doświadczalne leżały odrobinę poniżej tej krzywej.

Dzięki tym procedurom udało się wyznaczyć wartości dwóch poszukiwanych parametrów, które wyniosły

$$C_{\text{el}} = (4.24 \pm 0.11) \cdot 10^{-13} \text{ Hz}^2 \text{ m}^3, \quad (2.21a)$$

$$C_{\text{Cas}} = (2.34 \pm 0.34) \cdot 10^{-28} \text{ Hz}^2 \text{ m}^5. \quad (2.21b)$$

W rezultacie czego otrzymujemy

$$K_{\text{C, exp}} = (1.22 \pm 0.18) \cdot 10^{-27} \text{ N m}^2, \quad (2.22)$$

co w granicy niepewności pomiarowych jest zgodne z wielkością przewidzianą przez Casimira (2.15). Wynik ten oznacza, że eksperyment potwierdził przewidywanie teoretyczne w ramach niepewności rzędu 15% całkowitego rezultatu. Można podejrzewać, że ten relatywnie duży błąd sprawił, iż autorzy nie odczuwali potrzeby stosowania bardziej subtelnych modeli siły Casimira, takich jak te oparte na teorii Lifszycza.

Spróbujemy teraz pokrótce naszkicować stan badań doświadczalnych efektu Casimira po 2000 roku. Bogactwo badanych w tym okresie problemów nie pozwala nam nawet wspomnieć o wszystkich, stąd konieczność ograniczenia się do tych prac, które uważamy za szczególnie warte uwagi. Konfiguracja sfera-płytką wciąż pozostawał najczęściej wykorzystywaną i w eksperymentach takich jak ten H.B. Chana, et al., uzyskiwano przy jej użyciu wyniki, których niepewność pomiarowa była rzędu 1% [Cha+01]. W ramach tej niepewności wyniki doświadczalne i przewidywania wykorzystywanych modeli pozostawały ze sobą w zgodzie.

Wraz z osiągnięciem tego poziomu dokładności, już nie dane doświadczalne, ale obliczenia teoretyczne zaczęły stanowić główne ograniczenie dla lepszego poznania efektu Casimira. Na pierwszy plan zaczęły się więc wysuwać zagadnienia takie, jak potrzeba lepszego zrozumienia możliwości i ograniczeń powszechnie używanego w rachunkach przybliżenia bliskiej siły (PFA, ang. *proximity force approximation*), które to zagadnienie omówimy potem, pod koniec tego rozdziału.

Tak duża dokładność wyników uzyskanych w eksperymentach korzystających z układu sfera-płytką sprawiła, że można było ich użyć do podania ograniczeń na teorie wychodzące poza Model Standardowy oraz korzystające z wyżej wymiarowych czasoprzestrzeni, czego przykładem są prace R.S. Decci et al. [Dec+03] oraz A.O. Suskova et al. [Sus+11]. Jednocześnie zaczęto testować efekt Casimira we wcześniej nie badanych konfiguracjach eksperymentalnych. Przykładowo D. Garcia-Sanchez et al. prowadzili badania dla układu sfera-nanomebrana [Gar+12a], [Gar+12b], G. Biomonte'a et al. wykorzystywali układ ze sferą oraz obracającą się płytką, która została w sposób periodyczny pokryta dwoma różnymi rodzajami metali [BLD16], zaś ten używany przez L. Tanga et al. składał się z dwóch płytek których powierzchnie były pokryte rzędami wypustek w kształcie litery „T” o wysokość około 1 μm [Tan+07].

Na osobne wspomnienie zasługuje projekt CANNEX (*Casimir And Non-Newtonian force EXperiment*) w którym jako aparatura pomiarowa ma zostać wykorzystana

konfiguracja płytka-płytki [SP21]. Stawia on sobie ambitny cel zebrania danych doświadczalnych na temat efektu Casimira opisywanego w ramach podejścia Lifszycza zarówno w przypadku układu znajdującego się w stanie równowagi termodynamicznej jak i dla reżimu pozarównowagowego, a także na temat pewnych teorii mających wyjaśnić naturę ciemnej materii i ciemnej energii. Autorzy eksperymentu liczą bowiem na to, że wkład hipotetycznych cząstek takich jak axiony, jednego z kandydatów na ciemną materię, do siły Casimira będzie mógł zostać zaobserwowany lub też wykluczony dla danego przedziału parametrów w modelu tych cząstek. Uzyskanie takich danych byłoby niewątpliwie ogromnym osiągnięciem, jednak biorąc pod uwagę wyzwania przed jakimi ten eksperyment staje, nie można dziś stwierdzić jednoznacznie, czy zakończy się on sukcesem.

Pozwólmy sobie tutaj na małą dygresję. W literaturze można znaleźć również próby teoretycznego wytłumaczenia pewnych zagadnień astrofizycznych za pomocą efektu Casimira, czego przykładem jest stosunkowo nowa praca U. Leonhardta [Leo19]. Korzysta on z idei obecnej już wcześniej w literaturze, dotyczącej tego jak można zbudować model wyjaśniający kształt trajektorii po których porusza się światło. Mianowicie, z punktu widzenia ruchu światła, niektóre rodzaje czasoprzestrzeni z dynamicznie zmieniającą się geometrią są nieodróżnialne od czasoprzestrzeni z ustaloną geometrią, lecz wypełnionych ośrodkiem materialnym, którego własności optyczne zmieniają się w czasie i przestrzeni. Można więc próbować obliczyć siłę Casimira dla takiego problemu, którą to siłę Leonhardt utożsamia ze stałą kosmologiczną. Obecnie nie można rozstrzygnąć, czy to podejście okaże się poznawczo płodne.

Kończąc już temat doświadczalnych badań nad efektem Casimira, musimy krótko wspomnieć o toczącej się od kilkunastu lat debacie na temat zgodności danych eksperymentalnych i modeli teoretycznych. W okresie po 2000 roku dokładność pomiarów stała się tak duża, że możliwe stało się ich porównywanie z różnymi kalsami modeli formułowanych w ramach podejścia Lifszycza. Ograniczymy się tylko do uproszczonego opisu tego problemu, zaś Czytelnika który chce lepiej poznać ten temat, odsyłamy do pracy przeglądowej Klimchitskaji i Mostepanenko [KM22], jak również pracy tych samych autorów z 2023 roku, w której rozpatrują pewne niestandardowe metody rozwiązania trapiących tą dziedzinę fizyki problemów [KM23].

Jak już o tym pisaliśmy wcześniej, do obliczenia siły Casimira w podejściu Lifszycza potrzebna jest nie tylko znajomość empirycznych wartości jakie przyjmuje przenikalności elektryczna $\varepsilon(\omega)$ danego materiału, ale także wybranie odpowiedniego modelu teoretycznego tej funkcji. W literaturze problemu dominujące są dwa podejścia. Pierwsze z nich nosi nazwę **modelu plazmowego** i polega ona na przyjęciu funkcji $\varepsilon(\omega)$ w następującej postaci:

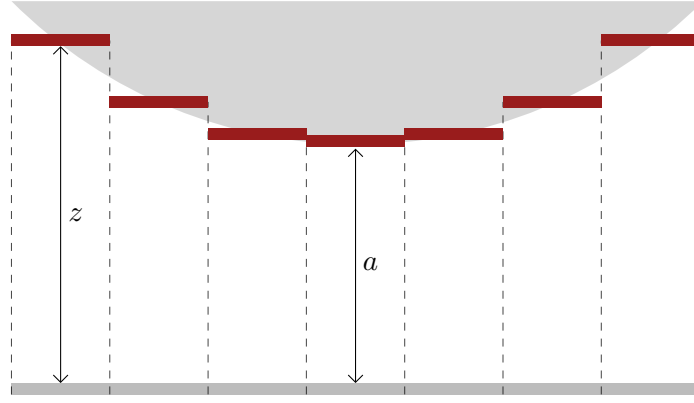
$$\varepsilon_p(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad (2.23)$$

gdzie ω_p nosi nazwę **częstotliwość plazmowej**. Drugie podejście znane jest pod nazwą **modelu Drudego**, jego funkcja $\varepsilon(\omega)$ jest postaci:

$$\varepsilon_D(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega[\omega + i\gamma(T)]}, \quad (2.24)$$

gdzie $\gamma(T)$ to współczynnik relaksacji. Łatwo zauważyć, że po przyjęciu $\gamma(T) = 0$ model Drudego przechodzi w model plazmowy.

Istnieje bogata literatura wskazująca na to, że model Drudego jest nie tylko ogólniejszy, ale znacznie bardziej realistyczny, gdy chodzi o opis zachowania ciał stałych. Jednak szereg eksperymentalnych pomiarów efektu Casimira, głównie dla układu



Rysunek 1: Ilustracja metody PFA dla układu sfera-płytki.

sfera-płytki, wskazuje że mierzone wartości siły Casimira potwierdzają przewidywania modelu plazmowego, odrzucają zaś te bazujące na modelu Drudego. Sytuacja, gdy przewidywania oparte o pomiar efektu Casimira stoją w sprzeczności do tego, co mówi ogromna ilość badań prowadzonych na gruncie fizyki fazy skondensowanej, nie może uchodzić za satysfakcjonującą. Ta rozbieżność zaowocowała trwającym już dwie dekady ciągiem debat w środowisku badaczy efektu Casimira, jednak w tym momencie nie jesteśmy w stanie stwierdzić, jak blisko czy jak daleko jesteśmy od rozwiązania tego problemu.

W rozdziale tym nie możemy pominąć kwestii przybliżeń jakich używa się przy teoretycznych obliczeniach siły Casimira dla konfiguracji, dla których rozwiązanie analityczne nie jest znane. Szczególnie ważne jest znalezienie odpowiednich wartości liczbowych dla układu sfera-płytki, który jest najczęściej wykorzystywany w eksperymentach. Jedną z najważniejszych metod przybliżonych, wykorzystywaną by to osiągnąć jest **przybliżenie bliskiej siły** (PFA, ang. *Proximity Force Approximation*), któremu przyjrzymy się teraz odrobinę dokładniej.

Podejście to zostało zaproponowane jako heurystyczna metoda przez J. Blockiego et al. w 1977 roku w pracy *Proximity forces* [Blo+77]. Metodę tą można stosować do rozwiązywania wielu różnych problemów, w oryginalnej pracy jest ona użyta w kontekście modeli jąder atomowych, my jednak ograniczymy się do wyjaśnienia jej działania w kontekście efektu Casimira dla układu sfera-płytki.

Problem przed którym stajemy to wyznaczenie energii Casimira dla układu sfery S i płytki P w funkcji ich odległości a . Jak pokazano na rysunku (1) w przybliżeniu bliskiej siły, sferę zastępujemy układem płytek ustawionych równolegle do siebie i do płytki P . Każdą płytkę z układu zastępującego sferę łączymy w parę z odpowiednim fragmentem płytki P o tej samej powierzchni. Następnie tak utworzonej parze płytek przypisujemy energię na jednostkę powierzchni $E_{pp}(z)$ daną wzorem (2.6), gdzie z oznacza dzielącą je odległość. Według metody przybliżenia bliskiej siły, energia Casimira rozważanego układu wynosi

$$\mathcal{E}_a^{\text{PFA}} = \iint_P d\sigma E_{pp}(z). \quad (2.25)$$

Choć idea stojąca za przybliżeniem bliskiej siły jest łatwa do zrozumienia, to nie jest od razu jasne, jaka jest dokładność otrzymanych za jej pomocą wyników. W metodzie tej pomija się bowiem to, że fragmenty dwóch wyjściowych powierzchni nie są równoległe do siebie, do tego płytkom, których powierzchnia może być bardzo mała, przypisuje się energię obliczoną dla przypadku, gdy możemy je uważać,

przynajmniej efektywnie, za nieskończone. Mimo tych oczywistych zastrzeżeń i tego jak szeroko metoda ta była stosowana, wydaje się, że przed ukazaniem się pracy C.D. Fosco, F.C. Lombardo i F.C. Mazzitelliego z 2011 roku, nie były podejmowane poważniejsze próby głębszego zbadania tej metody obliczeniowej w kontekście efektu Casimira [FLM11]. Inną wartą wymienienia pracą, poświęconą temu zagadnieniu, jest publikacja B. Sprenga, et al. z 2018 roku [Spr+18]. W obecnej chwili wydaje się, że prawidłowe uwzględnienie niepewności wprowadzonych przez przybliżone bliskiej siły i podobne metody obliczeniowe, wciąż wymaga dalszych prac w tym zakresie.

W tym krótkim szkicu badań nad efektem Casimira, staraliśmy się przybliżyć Czytelnikowi drogę rozwoju, głównie od strony badań doświadczalnych, jaką przeszła ta dziedzina w swej już ponad siedemdziesięcioletniej historii. Jak mogliśmy zobaczyć, mimo czasu jaki upłynął od pracy Casimira która zapoczątkowała całe to pole badań, zarówno pod względem doświadczalnym jak i teoretycznym, wiele ważkich problemów wciąż oczekuje na pełne rozwiązanie. Miejmy nadzieję, że nadchodzące lata będą dla tej dziedziny równie owocne co dwie pierwsze dekady XXI wieku i przyniosą one rozwiązania przynajmniej niektórych z wymienionych wcześniej problemów.

2.3 Analiza „energii stanu zerowego”

Jak widzieliśmy w rozdziale (2.1) Casimir wyprowadził efekt noszący jego imię analizując „energię stanu zerowego” pola elektromagnetycznego. Ponieważ podejście to wywarło bardzo mocny wpływ na literaturę przedmiotu, w tym rozdziale chcielibyśmy w sposób możliwie prosty przedstawić nasz punkt widzenia na to zagadnienie i dlatego uważamy podejście do efektu Casimira oparte o tę koncepcję za wysoce niesatysfakcjonujące.

By zilustrować wpływ jaki „energii stanu zerowego” wywarła na rozumienie tego efektu, zaczniemy od przytoczenia słów, którymi po ponad 50 latach Klimchitskaja i Mostepanenko komentowali oryginalną pracę Casimira [KM06].

Physical explanation given by Casimira to his effect is connected with the concept of quantum vacuum. According to quantum field theory, “empty” space is in fact filled with zero-point (or vacuum) oscillations of all frequencies. [...] The total energy of the vacuum oscillations is equal to infinity. This however, does not create a problem. The point is that in all fields of physics (with exception of gravitation) the energies are defined up to an additive constant. It is generally believed that all physics energies are measured from the top of the infinite vacuum energy in empty space. Because of this, when calculating of the physical energy of some quantum process, one arrives first at an infinite result and then makes it finite by subtracting the infinite vacuum energy in empty space.

Ze słów tych wynika, że nieskończoną energię próżni należy uważać za wielkość fizyczną, będącą jednym z przewidywań kwantowej teorii pola, jednak przytoczone w rozdziale (2.1) fragmenty pracy Casimira wyrażają odmienny pogląd. Obie rozważane energie stanu zerowego określane są tam jako „devoid of physical meaning”, sens fizyczny przypisuje się tylko ich różnicy. Jednak stwierdzenie, że różnica dwóch niefizycznych wartości daje fizyczny rezultat również nie może uchodzić za w pełni zadowalające rozwiązanie problemu. Ta rozbieżność opinii dotyczących fizycznego statusu energii stanu zerowego stanowi dodatkowy powód, by dokładniej przyjrzeć się temu zagadnieniu.

Stwierdzenie, że energia stanu zerowego jest w jakiś sposób przewidywana przez kwantową teorię pola, wywodzi się zapewne z następującego faktu. Popularne w literaturze procedury kwantowania pola klasycznego prowadzą zwykle do wyrażenia na energię pola kwantowego, które zawiera „nieskończoną stałą addytywną”. Za przykład takiego stanu rzeczy niech posłuży choćby książka Peskina i Schroedera [PS95]. Następnie ową nieskończoną stałą usuwa się poprzez powołanie się na pewien wariant poniższej zasady.

Zasada 1. *Liczbowa wartość energii E przypisana konkretnemu stanowi układu fizycznego nie ma fizycznego znaczenia. Fizyczny sens ma jedynie różnica energii między dwoma możliwymi stanami danego układu fizycznego.*

Zasada ta brzmi jak coś oczywistego, jednak jak będziemy chcieli pokazać, poprawne korzystanie z niej nie musi być wcale sprawą prostą.

Zanim do tej dyskusji przejdziemy, musimy zauważyć, że Andrzej Herdegen w końcowej części rozdziału drugiego i w rozdziale siódmym swojej pracy *Quantum backreaction (Casimir) effect I. What are admissible idealizations?* [Her05], przedyskutował już problem modeli efektu Casimira opartych na energii stanu zerowego oraz ich związek z podanym przez niego podejściem. Nasza analiza przedstawiona tutaj wiele zawdzięcza tej pracy, pomimo faktu, że Herdegen nie odwoływał się zbyt często do jawnie sformułowanej zasady (1). Czytelnik powinien potraktować lekturę wskazanych części jego publikacji jako niezbędnego uzupełnienie prezentowanych tu rozważań. Do tych fragmentów artykułu Herdegena powrócimy jeszcze w rozdziale (3.6).

W naszej ocenie właśnie przemawiająca do wyobraźni prostota sformułowania zasady (1) powoduje, że zbyt często przechodzi się do porządku dziennego nad pewnymi subtelnościami w niej ukrytymi, co skutkuje zamieszaniem pojęciowym i stawianiem nieuprawomocnionych tez. Ten stan rzeczy sprawia, że chcemy nasze rozumienie tego problemu przedstawić w sposób maksymalnie jasny i prosty, nawet jeśli będzie to skutkowało relatywnie dużą długością tej części pracy, która jest temu zagadnieniu poświęcona. Mamy nadzieję, że nawet jeśli Czytelnik nie będzie podzielał naszych wniosków, to nasze stanowisko zostanie wyłożone na tyle jasno, iż dyskusja będzie się mogła toczyć wokół dobrze sprecyzowanych tez, bez wielkiego miejsca na dwuznaczności. Oprócz tego, pragniemy by nasze rozważania naświetliły sens pewnych stwierdzeń poczynionych przez Herdegena w wspomnianej już pracy [Her05], które mogą być łatwo przegapione przy pierwszej lekturze tego tekstu.

Ponieważ często przyjmuje się, że energia stanu zerowego jest efektem kwantowej natury danej teorii, przyjrzymy się najpierw temu jak swobodne, by nie rzecz lekko-myślne, korzystanie z zasady (1) pozwala otrzymać taką „nieskończoną stałą” dla klasycznego układu o nieskończonej liczbie stopni swobody. Rozważmy więc nieskończony (przeliczalny) układ klasycznych, swobodnych, jednowymiarowych oscylatorów harmoniczych. Energia i -tego oscylatora wynosi

$$E_i = \frac{p_i(t)^2}{2m_i} + \frac{1}{2}m_i\omega_i^2 x_i(t)^2. \quad (2.26)$$

Jego energia w stanie spoczynku wynosi zero. Energia pełnego układu (ang. *total energy*) jest sumą energii wszystkich oscylatorów:

$$E_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{p_i(t)^2}{2m_i} + \frac{1}{2}m_i\omega_i^2 x_i(t)^2 \right). \quad (2.27)$$

Jeśli więc wszystkie oscylatory spoczywają to $E_{\text{tot}} = 0$.

Zajmijmy się przez chwilę energią pojedynczego oscylatora. Zgodnie z zasadą (1) możemy dodać do niej dowolną stałą, którą oznaczmy E_{shi} (od ang. *energy shift*), nie zmieniając fizycznej treści teorii:

$$E_i = \frac{p_i(t)^2}{2m_i} + \frac{1}{2}m_i\omega_i^2 x_i(t)^2 + E_{\text{shi}}, \quad E_{\text{shi}} \neq 0. \quad (2.28)$$

Energia pełnego układu wynosi teraz

$$E_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{p_i(t)^2}{2m_i} + \frac{1}{2}m_i\omega_i^2 x_i(t)^2 \right) + \sum_{i=1}^{\infty} E_{\text{shi}}. \quad (2.29)$$

Jeśli teraz wszystkie oscylatory spoczywają, to energia pełnego układu równa jest „nieskończonej stałej” $\sum_{i=1}^{\infty} E_{\text{shi}}$.

Zastanówmy się teraz, jak doszliśmy do tego wyniku, który wygląda na zwyczajnie absurdalny? Przede wszystkim należy zauważyć, że gdybyśmy rozważali tylko układ N oscylatorów to obecność *skończonej* stałej $\sum_{i=1}^N E_{\text{shi}}$ nie sprawiałaby żadnej trudności. Tym samym nasuwa się wniosek, że problem wynika z tego, że rozważany układ posiada nieskończoną liczbę stopni swobody. Opierając się na tym, proponujemy następujące rozwiązanie tego problemu.

Uważamy, że zasada (1) nie stosuje się tak samo do układów o skończonej i nieskończonej liczbie stopni swobody. W przypadku tych ostatnich, jeśli każdemu stopniowi swobody przypisujemy konkretną energię, zaś całkowita energia jest sumą takich energii „na stopień swobody”, to za fizycznie sensowne należy uznać tylko szczególne wyrażenia na energię. Mianowicie takie, dla których energia stanu podstawowego danego układu jest skończona. Postulujemy przy tym, że tą regułę należy stosować zarówno do układów klasycznych, jak i kwantowych.

Jeśli zastosujemy takie podejście dla nieskończonego układu klasycznych oscylatorów, to tracimy możliwość zmiany energii E_i , jednak wciąż możemy dodać do E_{tot} skończoną stałą i w tym sensie zasada (1) pozostaje w mocy. Obierając inny punkt widzenia to, że układy o nieskończonej liczbie stopni swobody rządzą się własnymi prawami, nie powinno nas dziwić. Historia nauki wielokrotnie udowadniała, że operowanie nieskończeniem wielkimi lub nieskończeniem małymi obiektami, oparte na intuicji wyprowadzonej ze znajomości przypadków skończonych, prowadziło do wielorakich problemów i niekonsystencji w danej teorii, które to braki musiały być później pracowicie usuwane. Jak świadczą dzieła takie jak książka R. Goldblatta o analizie niestandardowej, [Gol98] z jednej strony, a z drugiej prace takie jak monografia S. Albeverio et al. o zastosowaniu tejże teorii matematycznej w fizyce [Alb+86], matematyczna teoria wielkości nieskończenie dużych i małych i jej znaczenie dla fizyki, to tematy wciąż dalekie od bycia całkowicie zamkniętymi.

W praktyce wyłożona powyżej procedura definiowania badanego układu w taki sposób by jego energia podstawowa była równa zero, jest często używana, choć może nie jest jasno wysławiana i w pełni konsekwentnie stosowana. Przykładowo, w literaturze często spotykamy się ze stwierdzeniem, że skwantowane pole trzeba „uporządkować normalnie”, następnie odrzucić „nieskończoną stałą”, w rezultacie czego stan podstawowy pola będzie posiadał energię równą zero. By uczynić ten problem oraz zagadnienie energii stanu zerowego prostszymi w zrozumieniu przedyskutujemy teraz dwa powiązane ze sobą modele pochodzące z odpowiednich teorii kwantowych. Będziemy jednak unikać wchodzenia w ich bardziej subtelne własności.

Nasz pierwszy model to kwantowy oscylator harmoniczny, który będziemy analizować w standardowy sposób, jaki można znaleźć w powszechnie używanych podręcznikach, takich jak ten autorstwa R. Shankara [Sha06]. Nasza decyzja by przedstawić

tutaj dobrze znane własności tego układu jest motywowana tym, że dzięki temu analiza typowych obliczeń przeprowadzanych dla pola kwantowego staje się znacznie prostsza do zrozumienia.

Nasze rozważania zaczniemy od podania hamiltonianu klasycznego jednowymiarowego oscylatora harmonicznego, w jego najbardziej typowej formie:

$$H(x, p) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x^2. \quad (2.30)$$

Skwantowanie tego oscylatora polega na dokonaniu podstawienia $p \rightarrow P$, $x \rightarrow X$:

$$H = \frac{1}{2m}P^2 + \frac{1}{2}m\omega^2X^2, \quad (2.31)$$

gdzie X i P to operator działający na pewnej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$, które spełniają następującą relację

$$[X, P] = i\hbar \text{id}. \quad (2.32)$$

Otrzymany hamiltonian możemy wyrazić za pomocą pary operatorów

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}X + i\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}}P, \quad (2.33a)$$

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}X - i\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}}P. \quad (2.33b)$$

Wstawiając powyższe wzory do (2.31) otrzymujemy

$$H = \frac{\hbar\omega}{2} (a^\dagger a + aa^\dagger). \quad (2.34)$$

Ponieważ ta forma hamiltonianu jest mało wygodna, korzystając z relacji komutacji $[a, a^\dagger] = \text{id}$, sprowadzamy go do postaci

$$H = \hbar\omega a^\dagger a + \hbar\omega \frac{1}{2} \text{id}. \quad (2.35)$$

Widmo operatora $a^\dagger a$ składa się z liczb $0, 1, 2, \dots$, co pozwala nam obliczyć dopuszczalne wartości energii jakie może posiadać ten oscylator:

$$E_n = \hbar\omega n + \frac{1}{2}\hbar\omega, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.36)$$

Wobec tego minimalna energia jaką może posiadać kwantowy oscylatora wynosi $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$, stan jej odpowiadający będziemy oznaczać przez ψ_0 . Często można spotykać się z następującym wyjaśnieniem dlaczego $E_0 > 0$. Mianowicie, na mocy zasady nieoznaczoności nie jest możliwe by położenie tego oscylatora i jego pęd były równocześnie równe zero. Dlatego nawet w stanie podstawowym oscylator kwantowy wykonuje „drgania” wokół położenia równowagi, które są źródłem tej dodatkowej energii. Na rzecz tej interpretacji przemawiają następujące związki.

$$\langle X \rangle_{\psi_0} = 0, \quad \langle X^2 \rangle_{\psi_0} = \frac{\hbar}{2m\omega} \quad (2.37a)$$

$$\langle P \rangle_{\psi_0} = 0, \quad \langle P^2 \rangle_{\psi_0} = \frac{m\hbar\omega}{2}. \quad (2.37b)$$

Samo stwierdzenie, że nie można przypisać kwantowemu oscylatorowi w stanie podstawowym położenia i pędu równych zero nie budzi żadnych kontrowersji. Jednak

uznanie, że owe „drgania” są odpowiedzialne za niezerową energię oscylator w stanie podstawowym, to zupełnie inny problem.

Zapytajmy się po pierwsze czy niezerowa energia w stanie ψ_0 w ogóle wymaga wyjaśnienia? Zgodnie z zasadą (1) wartość liczbową tej energii jest zupełnie bez znaczenia, więc możemy ją położyć równą zero. Dlaczego więc wiele osób widziało potrzebę wyjaśniania jej wartości? Wydaje nam się, że wynika to z rzadko wypowiedzanego jawnie przekonania, iż skoro oscylator klasyczny ma w stanie podstawowym energię zerową, to należy wyjaśnić dlaczego oscylator kwantowy ma w swoim stanie podstawowym energię równą $\hbar\omega/2$.

Wedle naszej opinii, za tak postawionym pytaniem stoi pewne pomieszanie pojęć. Mianowicie, przedstawione rozumowanie opiera się na porównaniu wyników dwóch układów, klasycznego i kwantowego, które nie oddziałują ze sobą. Jednak porównanie wartości liczbowych energii nieoddziałujących układów nie ma sensu fizycznego, gdyż z definicji nie istnieje proces, który mógłby przekazać energię jednego z nich drugiemu. Z tego powodu uważamy, że argument ten nie powinien być brany pod uwagę.

Inny argument na rzecz fizycznego znaczenia energii $\hbar\omega/2$ który wymaga naszego komentarza, jest następujący. Hamiltonian w postaci (2.30) z punktu widzenia fizyki klasycznej posiada najbardziej naturalną postać ze wszystkich równoważnych hamiltonianów tego układu, więc otrzymany przez skwantowanie go hamiltonian (2.35) musi posiadać najbardziej naturalną formę z punktu widzenia mechaniki kwantowej. W takim razie również skala energetyczna wyznaczona przez ten konkretny hamiltonian, musi posiadać szczególny sens fizyczny. Jednak i to rozumowanie można poddać krytyce.

Powszechnie podzielany dziś pogląd mówi, że to fizykę klasyczną należy wyprowadzić z fizyki kwantowej nie zaś na odwrót. Stąd szukanie uzasadnienia dla wzorów kwantowych w ich odpowiednikach klasycznych, jest odwracaniem właściwej hierarchii teorii. Gdy zaś patrzymy na to w ten sposób, to jako najbardziej naturalny hamiltonian kwantowego oscylatora wybralibyśmy zapewne

$$H = \hbar\omega a^\dagger a. \quad (2.38)$$

Dodatkowo, rozumowanie wedle którego naturalne wyrażenie klasyczne prowadzi do naturalnego wyrażenia kwantowego, wydaje się nieświadomie zakładać bardzo prostą relację między teorią kwantową i jej klasycznym odpowiednikiem. W rzeczywistości jednak relacja między tymi teoriami jest wysoce nietrywialna. Interesującą analizę tego problemu można znaleźć w pracy doktorskiej doktorskiej Petera Taylora *The Relation Between Classical and Quantum Mechanics* [Tay84]. Szczególnie polecamy uwagę Czytelnika podrozdział 4.1, który w krótkich słowach podsumowuje interesujące nas w rozważanym kontekście wątki pracy Taylora.

Drugim kwantowym modelem który chcemy omówić jest pole skalarne. Przy referowaniu tego zagadnienia podążamy za rozdziałem 2.1 pracy [MUV01]. Dla uproszczenia rachunków, które mają służyć tylko jako ilustracja konkretnego problemu, będziemy rozważali pole skalarne w jednym wymiarze przestrzennym. Zgodnie z metodologią H.G.B. Casimira najpierw rozważymy swobodne pole na prostej, później pole które oddziałuje z dwoma idealnymi przewodnikami umieszczony w punktach $x = 0$ i $x = a$.

Punktem wyjścia naszych rozważań jest równanie falowe jakie ma spełniać *kla-*

syczne pole³ $\phi(t, x)$:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi(t, x)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi(t, x)}{\partial x^2} = 0. \quad (2.39)$$

Dla przypadku pola swobodnego na nieograniczonej osi x bazowy zbiór rozwiązań jest postaci

$$\phi_k^{(\pm)}(t, x) = \sqrt{\frac{c}{4\pi\omega(k)}} e^{\pm i(\omega t - kx)}, \quad -\infty < k < +\infty \quad (2.40)$$

gdzie $\omega(k) = c|k|$. Ogólne rozwiązanie tego równania można zapisać jako

$$\phi(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk \left(\phi_k^{(-)}(t, x) u_k + \phi_k^{(+)}(t, x) u_k^* \right). \quad (2.41)$$

Wyrażenie u_k oznacza pewną funkcję od argumentu k , która przyjmuje wartości zespolone, zaś u_k^* funkcję sprzężoną do niej w sensie zespolonym.

Przejście od pola klasycznego do kwantowego polega na zastąpieniu funkcji u_k przez rodzinę operatorów a_k zależnych od parametru k , przy czym u_k^* zastępujemy przez operatory $a_k^\dagger$. Operatory te interpretujemy jako operatory kreacji i anihilacji cząstek o pędzie równym $\hbar k$. Żądamy by spełnione były następujące relacje komutacji:

$$[a_k, a_{k'}^\dagger] = \delta(k - k'), \quad [a_k, a_{k'}] = 0, \quad [a_k^\dagger, a_{k'}^\dagger] = 0. \quad (2.42)$$

Pole kwantowe zdefiniowane tą procedurą będziemy oznaczać przez $\hat{\phi}(t, x)$.

Stan podstawowy rozważanej teorii zdefiniowany jest przez warunek, że jest on anihilowany przez wszystkie operatory a_k . Tak określony **stan podstawowym Minkowskiego** będziemy oznaczać symbolem Ω_{Min} . Z definicji zachodzi

$$a_k \Omega_{\text{Min}} = 0, \quad -\infty < k < \infty. \quad (2.43)$$

Zadajmy sobie teraz pytanie, ile wynosi energia układu która jest zgromadzona na odcinku $[0, a]$? Gęstość energii jest dana przez wartość oczekiwaną elementu 0, 0 tensora energii-pędu $T_{\mu, \nu}(t, x)$ w stanie Ω_{Min} . Interesująca nas składowa *klasycznego* tensora energii-pędu ma postać

$$T_{0,0}(t, x) = \frac{\hbar c}{2} \left(\frac{1}{c^2} (\partial_t \phi(t, x))^2 + (\partial_x \phi(t, x))^2 \right) \quad (2.44)$$

Do obliczeń potrzebna jest nam wartość oczekiwana elementu 0, 0 *kwantowego* tensora $T_{0,0}(t, x)$, którą otrzymujemy przez podstawieni w ostatnim wzorze $\phi(t, x) \rightarrow \hat{\phi}(t, x)$:

$$\begin{aligned} (\Omega_{\text{Min}}, \hat{T}_{0,0}(t, x) \Omega_{\text{Min}}) &= \frac{\hbar c}{2} \left(\frac{1}{c^2} \left(\Omega_{\text{Min}}, (\partial_t \hat{\phi}(t, x))^2 \Omega_{\text{Min}} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\Omega_{\text{Min}}, (\partial_x \hat{\phi}(t, x))^2 \Omega_{\text{Min}} \right) \right). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Zajmijmy się najpierw członem zawierającym pochodną po czasie. Mamy

$$\begin{aligned} (\partial_t \hat{\phi}(t, x))^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} dk \int_{-\infty}^{+\infty} dk' \omega(k) \omega(k') \left[\phi_k^{(-)}(t, x) \phi_{k'}^{(+)}(t, x) a_k a_{k'}^\dagger + \right. \\ &\quad + \phi_k^{(+)}(t, x) \phi_{k'}^{(-)}(t, x) a_k^\dagger a_{k'} - \phi_k^{(-)}(t, x) \phi_{k'}^{(-)}(t, x) a_k a_{k'} - \\ &\quad \left. - \phi_k^{(+)}(t, x) \phi_{k'}^{(+)}(t, x) a_k^\dagger a_{k'}^\dagger \right]. \end{aligned} \quad (2.46)$$

³Użyta w tym rozdziale notacja wyraźnie rozróżnia klasyczne pole $\phi(t, x)$ i odpowiadające mu pole kwantowe $\hat{\phi}(t, x)$. W dalszych częściach niniejszej pracy pole kwantowe będziemy dla prostoty oznaczać jako $\phi(t, x)$.

Korzystając z relacji (2.43) dostajemy

$$(\Omega_{\text{Min}}, (\partial_t \hat{\phi}(t, x))^2 \Omega_{\text{Min}}) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk \int_{-\infty}^{+\infty} dk' \omega(k) \omega(k') \times \\ \times \phi_k^{(-)}(t, x) \phi_{k'}^{(+)}(t, x) (\Omega_{\text{Min}}, a_k a_{k'}^\dagger \Omega_{\text{Min}}). \quad (2.47)$$

Tak jak dla oscylatora harmonicznego by sprowadzić to wyrażenie do prostszej formy, musimy skorzystać z relacji komutacji dla operatorów a_k i $a_{k'}^\dagger$:

$$a_k a_{k'}^\dagger = a_{k'}^\dagger a_k + [a_k, a_{k'}^\dagger] = a_{k'}^\dagger a_k + \delta(k - k'). \quad (2.48)$$

Wstawiając tą zależność do (2.47) i ponownie korzystając z definicji stanu podstawowego (2.43) otrzymujemy

$$\frac{1}{c^2} (\Omega_{\text{Min}}, (\partial_t \hat{\phi}(t, x))^2 \Omega_{\text{Min}}) = \frac{1}{2\pi c} \int_0^{+\infty} dk \omega(k). \quad (2.49)$$

Analogicznie rachunek prowadzi nas do

$$(\Omega_{\text{Min}}, (\partial_x \hat{\phi}(t, x))^2 \Omega_{\text{Min}}) = \frac{1}{2\pi c} \int_0^{+\infty} dk \omega(k). \quad (2.50)$$

Ostatecznie dostajemy wzór na energię zgromadzoną na odcinku $[0, a]$ w postaci

$$E_{\text{Min}}(a) = \int_0^a dx (\Omega_{\text{Min}}, \hat{T}_{0,0}(t, x) \Omega_{\text{Min}}) = \frac{\hbar a}{2\pi} \int_0^\infty dk \omega(k). \quad (2.51)$$

Wyrażenie powyżej jest w jawny sposób rozbieżne.

Przejdźmy teraz do przypadku, gdy klasyczne pole oddziałuje z dwoma idealnymi przewodnikami umieszczonymi w $x = 0$ i $x = a$. W konsekwencji tego pole to spełnia teraz warunki brzegowe Dirichleta na odcinku $[0, a]$:

$$\phi(t, 0) = \phi(t, a) = 0. \quad (2.52)$$

Bazowe rozwiązania równania (2.39) spełniające te warunki brzegowe są postaci:

$$\phi_n^{(\pm)}(t, x) = \sqrt{\frac{c}{a\omega_n}} e^{\pm i\omega_n t} \sin(k_n x), \quad (2.53)$$

gdzie $k_n = \pi n/a$, $\omega_n = c|k_n|$, $n = 1, 2, \dots$. Ogólne rozwiązanie równania falowego z warunkami Dirichleta możemy teraz zapisać jako

$$\phi(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} [\phi_n^{(-)}(t, x) u_n + \phi_n^{(+)}(t, x) u_n^*]. \quad (2.54)$$

Symbole u_n i u_n^* oznaczają liczbę zespoloną i sprzężoną do niej. Kwantowanie, podobnie jak poprzednio, polega na zastąpieniu u_n przez operator a_n a u_n^* przez operator $a_n^\dagger$. Operatory te mają spełniając relacje komutacji

$$[a_n, a_m^\dagger] = \delta_{n,m}, \quad [a_n, a_m] = 0, \quad [a_n^\dagger, a_m^\dagger] = 0. \quad (2.55)$$

Stan anihilowany przez wszystkie operatory a_n będziemy nazywać **stanem podstawowym dla warunków brzegowych Dirichleta**:

$$a_n \Omega_{\text{Dir}} = 0. \quad (2.56)$$

Procedura wyliczenia odpowiednich wartości średnich w stanie podstawowym Dirichleta przebiega analogicznie jak dla stanu podstawowego Minkowskiego, dlatego ograniczymy się do podania końcowego wyniku. Jest on postaci

$$E_{\text{Dir}}(a) = \int_0^a dx (\Omega_{\text{Dir}}, \hat{T}_{0,0}(t, x) \Omega_{\text{Dir}}) = \frac{\hbar}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n. \quad (2.57)$$

Również tutaj otrzymana energia jest w jawny sposób rozbieżna.

Przedstawiony wyżej rachunek ilustruje jak standardowa procedura rachunkowa prowadzi do pojawienia się energia stanu zerowego. We rozdziale 2.1 pracy [MUV01] zainteresowany Czytelnik może znaleźć opis tego, jak poprzez odpowiednią regularyzację matematycznie nonsensownej wielkości $E_{\text{Dir}}(a) - E_{\text{Min}}(a)$, można wydobyć z niej skończoną energię potencjalną, która sprawia iż ciała odpowiedzialne za powstanie warunków brzegowych Dirichleta będą się przyciągać. Ponieważ te rachunki nie wniosą wiele do tematyki tej pracy, nie będziemy ich tu przytaczać, zamiast tego skupimy się na tym w jaki sposób energia stanu zerowego pojawia się w rachunkach.

Jak widzieliśmy, jeśli wedle podanego wyżej przepisu skwantujemy klasyczny tensor energii-pędu $T_{\mu,\nu}$, to element $\hat{T}_{0,0}$ tak powstałego kwantowego tensora energii-pędu zawiera człon proporcjonalny do iloczynu $a_k a_k^\dagger$. Tak jak w przypadku oscylatora harmonicznego korzystając z relacji komutacji dla operatorów a_k i $a_k^\dagger$, przekształcamy ten wyraz, otrzymując w rezultacie człon proporcjonalny do iloczynu $a_k^\dagger a_k$ oraz człon zawierający operator identyczności id . Ten ostatni wyraz, prowadzący do rozbieżnego wyrażenia na energię, reprezentuje energię stanu zerowego.

Choć rachunki te są bardziej złożone niż dla oscylatora kwantowego, to ta sama krytyka odnośnie traktowania wyrazu stałego, tutaj „nieskończonej addytywnej stałej”, jako czegoś więcej niż skutku ubocznego procedury kwantowania, którą przedstawiliśmy wtedy, stosuje się w analogiczny sposób również dla tego przypadku, dlatego nie będziemy jej powtarzać.

Jedynym wyjątkiem może być problem relacji między teorią klasyczną i kwantową, który w przypadku pól jest dużo trudniejszy do zrozumienia, niż dla układów o skończonej liczbie stopni swobody i więcej problemów jej dotyczących pozostaje nierozwiązanych. Mimo tego uważamy, że rozsądne jest przyjęcie, iż również tutaj nie należy przykładać zbyt wielkiej wagi do argumentów opartych na idei prostego związku między klasycznymi a kwantowymi polami.

Nasze podejście do „energii stanu zerowego” możemy teraz przedstawić w następujący sposób. Procedura kwantowania teorii klasycznej powinna być rozumiana jako pewna metoda heurystyczna, która może nas naprowadzić na właściwą teorię kwantową, jednak nic nie gwarantuje, iż zaprowadzi nas bezpośrednio do prawidłowego modelu pola kwantowego. Za punkt startowy należy zawsze przyjąć model, który jest dobrze określony fizycznie i matematycznie. Takim modelem może być na przykład ten uzyskany poprzez uporządkowanie normalne wyrażeń uzyskanych dzięki procedurze kwantyzacji. W tym kontekście zasadne jest przytoczenie słów Andrzeja Herdegena z pierwszego rozdziału artykułu [Her05], które przyświecają badaniom podjętym w niniejszej pracy.

Let us stress this: once a model has correctly been chosen, there is no space (nor need) for further *ad hoc* regularizations, and the formalism should yield well defined answers to legitimate questions.

Z tego powodu uważamy, że energia stanu zerowego nie jest bytem fizycznym, lecz artefaktem procedury kwantyzacji pola klasycznego. To jednak stawia przed nami pewien problem. Dlaczego rachunki oparte na tej niefizycznej wielkości doprowadziły do przewidywań, które posiadają solidne poparcie w danych eksperymentalnych? Niezależnie od skomplikowanej relacji między teorią a eksperymentem o której pisaliśmy wcześniej, jest to pytania którego nie można zlekceważyć.

W naszej opinii już w oryginalnej pracy Casimira można znaleźć słowa, które kierują nas w stronę rozwiązania tego problemu. W jednym z cytowanych w rozdziale (2.1) fragmentów swojej pracy, Casimir uzasadniał wprowadzenie odpowiedniej funkcji obciążenia $f(k/k_m)$ faktem, że fale elektromagnetyczne o wysokiej częstotliwości łatwo przenikają ciała materialne. W tym sensie model zregularizowany jest bardziej fizyczny od modelu z ostrymi warunkami brzegowymi, z którego korzystał on w większości rachunków. To wraz z wyczuciem fizycznym badaczy pozwoliło otrzymać wartościowe wyniki i uniknąć wielu potencjalnych pułapek. Jednak pełne zrozumienie roli regularyzacji i renormalizacji w standardowym obliczeniach dotyczących efektu Casimira wciąż wymaga dodatkowej pracy.

3 Podejście Herdegena do efektu Casimira

Część pracy którą właśnie rozpoczynamy, poświęcona jest przedstawieniu podejścia Herdegena dla efektu Casimira. Formalizm ten stanowi podstawę dla badania zjawiska tego w układzie pola skalarnego i dwóch quasi-punktowych ciał, któremu poświęcona jest główna część niniejszej pracy. Ponieważ pragniemy, by jego wykład był możliwie przystępny również dla osób nie obeznanych z metodami algebraicznej kwantowej teorii pola, skupiliśmy się bardziej na wyjaśnieniu ogólnych idei, niż na szczegółowym omawianiu wszystkich aspektów tej teorii. Dokładniejsze omówienie tych zagadnień zainteresowany Czytelnik znajdzie w przywoływanej literaturze.

Jak to było dyskutowane w rozdziałach (2.1) i (2.3) już H.G.B. Casimir przyznał, choć może nie uczynił tego całkiem jawnie, że warunki Dirichleta dla pola elektromagnetycznego są niefizyczne i procedura regularyzacji rozbieżnych wyrażeń matematycznych jakiej użył, jest związana z nadaniem modelowi bardziej realistycznych cech. Można powiedzieć, że na bardzo ogólnym poziomie, podejście Herdegena bierze tę obserwację za swój punkt wyjścia.

By uczynić dalszą dyskusję prostszą w zrozumieniu przyjmujemy, że układ jaki rozważamy składa się z pola elektromagnetycznego i dwóch nieskończonych metalowych płytek. W podejściu Herdegena statyczny efekt Casimira jest rozumiany jako reakcja zwrotna układu kwantowego (pola elektromagnetycznego) na adiabaticzną zmianę położenia ciał makroskopowych (dwóch płytek), zaś odpowiedni aparat matematyczny do opisu takiej sytuacji jest zbudowany w oparciu o algebraiczną kwantową teorię pola. Herdegen podał przy tym precyzyjny zestaw warunków, które musi spełniać badany układ by można go było opisać za pomocą podanego przez niego formalizmu. Jak się okazuje układ zawierający pole elektromagnetyczne spełniające warunki brzegowe Dirichleta na płytkach nie spełnia wspomnianych warunków. To wraz z różnymi matematycznie nonsensownymi wyrażeniami, które napotykamy próbując badać wspomniany układ, stanowi argument za tym by uznać go za model matematyczny, który nie posiada fizycznego sensu, przynajmniej wtedy gdy chcemy go użyć do opisu efektu Casimira. Należy go więc zastąpić mniej ostrym, „rozmytym” modelem płytek.

Z drugiej strony, problem spełniający warunki brzegowe Dirichleta można, w dobrze sprecyzowanym matematycznie sensie, dowolnie dobrze przybliżać modelami „rozmytymi” spełniającymi wszystkie warunki wymagane przez podejście Herdegena. Okazuje się, że jeśli dokonamy odpowiedniego rozwinięcia asymptotycznego energii wokół modelu z ostrymi warunkami brzegowymi Dirichleta, to w tak otrzymanym wzorze pojawi się wyraz podany w oryginalnej pracy Casimira. Jednocześnie ta szczegółowa analiza pokazuje, że nie musi być to jedyny wyraz wiodący w rozwinięciu, ani nawet dominujący. Dlatego można stwierdzić, że podejście Herdegena z jednej strony potwierdza kanoniczny rezultat, z drugiej, pozwala zbadać bardziej subtelne własności rozważanego problemu, które są niewidoczne w standardowym podejściu.

Podejście to oczywiście nie ogranicza się tylko do opisu układu pola oddziałującego z dwoma płytkami, o czym świadczy przedstawiona w rozdziale (4) analiza przypadku pola skalarnego oddziałującego z dwoma quasi-punktowymi ciałami. Zastosowanie go do innych konfiguracji geometrycznych, jak choćby do pojedynczej sfery jest również możliwe, jedynie wymaga dalszej pracy.

Struktura dalszej części rozdziału jest następująca. Najpierw omawiamy krótko algebraiczną kwantową teorię pola, na której bazuje używany przez nas formalizm. Następnie przechodzimy do podania aksjomatów teorii algebraicznej, która jest dopasowana do analizy efektu Casimira w przybliżeniu adiabaticznym. Następnie dyskutujemy to jak wychodząc od konkretnej rzeczywistej przestrzeni Hilberta, można

skonstruować model teorii quasi-swobodnej oraz jak w tym formalizmie uwzględnić oddziaływania z ciałami makroskopowymi. Następnie opisujemy, jak wyrazić gęstość energii dla tak utworzonego modelu, gdy jego częścią kwantową jest pole skalarne. Kończymy zaś omówieniem rozwoju i obecnego stanu badań nad efektem Casimira w podejściu Herdegena.

3.1 Krótki wstęp do algebraicznej kwantowej teorii pola

Algebraiczna kwantowa teoria pola⁴ (AQFT, ang. *Algebraic Quantum Field Theory*) to podejście do kwantowej teorii pola, szerzej: fizyki kwantowej, które można scharakteryzować jako próbę sformalizowania dwóch następujących idei, odnoszących się do natury zjawisk fizycznych.

1. Relacje między wielkościami fizycznymi na poziomie kwantowym mają charakter algebraiczny.
2. Obserwacje (doświadczenia) fizycznej są zlokalizowane w pewnym ograniczonym obszarze czasoprzestrzeni.

Przykładowo, jeśli dokonany został pomiaru położenia i pędu elektronu w detektorze to obserwacja ta zaszła w przestrzeni zajmowanej przez ten detektor i w czasie jego działania. Położenie zaś i pęd elektronu są opisywane przez operatory, które spełniają odpowiednie relacje komutacji.

Wychodząc od tych dwóch idei zbudowany został odpowiedni system pojęć fizycznych oraz aparat matematyczny. Tak otrzymany formalizm pozwala na w pełni matematycznie ścisły opis rozważanych zjawisk fizycznych, przy czym ma on szerokie pole zastosowań i łatwo poddaje się różnym modyfikacjom. Nie można jednak ukrywać, że w wielu miejscach, również tych kluczowych dla standardowej kwantowej teorii pola, teoria ta jest daleka od zupełności, dlatego wciąż zachodzi potrzeba dalszych prac nad nią.

Algebraiczna kwantowa teorii pola obfituje w wiele subtelności, które siłą rzeczy musimy pominąć w tym jej szkicowym zarysie, a ze względu na obfitość diskutowanych w tym podejściu problemów, wybranie miarodajnej literatury dla zainteresowanego Czytelnika, również nie jest sprawą prostą. Kanoniczny wykład tej teorii zawiera książka Rudolfa Haaga *Local Quantum Physics. Fields, Particles, Algebras* [Haa96], która niestety została opublikowana już ponad 25 lat temu, a w mijającym czasie ukazało się wiele ważnych i oryginalnych prac, otwierających nowe drogi rozwoju. Warta uwagi jest też praca wprowadzająca autorstwa Ch. Fewstera i K. Rejzner [FR19], która jednak również nie dyskutuje nowszych osiągnięć. W tym względzie warto polecić stosunkowo niedawną pracę przeglądową D. Bucholza i K. Fredenhagena [BF23].

Problem pomiaru (równoważnie: obserwacji) zjawisk fizycznych był szeroko dyskutowany w ramach tego podejścia i za błąd uznalibyśmy nie zwrócenie uwagi Czytelnika na przynajmniej niektóre publikacje temu poświęcone. Oprócz wspomnianej już książki Haaga, wart uwagi jest również jego artykuł [Haa13] oraz stosunkowo nowa publikacja Ch. Fewstera [Few20]. W niniejszej pracy problem ten nie będzie więcej poruszany.

Zajmiemy się teraz pierwszą z wymienionych wcześniej podstawowych idei algebraicznej kwantowej teorii pola, czyli traktowaniu relacji algebraicznych jako fundamentalnych własności teorii kwantowej. Pragnąc by nasz wykład był maksymalnie prosty,

⁴Inna nazwa tego podejścia to „lokalna fizyka kwantowa” (LQP, ang. *Local Quantum Physics*).

zilustrujemy to przykładem z nierelatywistycznej mechaniki kwantowej. Najbardziej dziś rozpowszechnione podejście do tej teorii mówi, że podstawowymi jej obiektami są ośrodkowa przestrzeń Hilberta $\mathcal{H}$ oraz działające w tej przestrzeni operatory. Elementy przestrzeni Hilberta $\psi \in \mathcal{H}$ opisują stany zadanego układu fizycznego, zaś operatory odpowiadają wielkościom jakie można dla niego zmierzyć. Jeśli więc rozpatrujemy ruch elektronu, to stan tej cząstki opisuje pewien wektor $\psi \in \mathcal{H}$, zaś wiedzę o jego położeniu i pędzie możemy uzyskać korzystając z operatorów X i P . Operatory te spełniają dobrze znaną relację

$$[X, P] = i\hbar \text{id}. \quad (3.1)$$

Jak wiadomo ze standardowych kursów mechaniki kwantowej (zob. przykładowo podręcznik [Sha06]), istnieje wiele możliwych konkretnych reprezentacji ośrodkowej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ i operatorów X oraz P .

Podejście algebraiczne proponuje następujące spojrzenie na ten problem. Wielkości reprezentowane przez X i P są, przynajmniej potencjalnie, obserwowalne w eksperymentach, więc należy je traktować jako podstawowe obiekty teorii, zwane **obserwabłami**. Relacje takie jak (5.46) są *algebraicznymi* relacjami między obserwabłami, które definiują ich matematyczną naturę. Za punkt wyjścia przyjmuje się więc pewną algebrę $\mathcal{A}$ zawierającą elementy X i P , nie rozumiane jako operatory działające na przestrzeni Hilberta, lecz jako abstrakcyjne obiekty algebraiczne spełniające zadane relacje algebraiczne.

Przestrzeń Hilberta $\mathcal{H}$ i postać elementów X i P jako pewnych operatorów pojawia się w tym podejściu jako obiekt pochodny, wyprowadzony ze struktury algebraicznej. Dokładniej, standardowe sformułowanie mechaniki kwantowej otrzymujemy poprzez zbudowanie odpowiedniej reprezentacji $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ algebry $\mathcal{A}$, gdzie $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ oznacza pewną algebrę operatorów ograniczonych działających na przestrzeni $\mathcal{H}$.

W tym miejscu należy się słowo komentarza. Ponieważ X i P rozumiane jako operatory w przestrzeni Hilberta są nieograniczone, nie jest możliwe reprezentowanie ich jako operatorów z $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, co prowadzi do wielu komplikacji technicznych. Problem też można obejść korzystając z odpowiednich eksponent tych operatorów:

$$X \leftrightarrow e^{iXt}, \quad P \leftrightarrow e^{iPs}, \quad (3.2)$$

gdzie s i t to pewne parametry rzeczywiste. Operator $\exp(iXt)$ nazywamy **postacią Weyla operatora X** . Ponieważ X i P są operatorami samosprzężonymi, eksponenty w ostatnim wzorze są operatorami ograniczonymi, zaś ich relacje komutacji są postaci

$$e^{iPs} e^{iXt} = e^{iXt} e^{iPs} e^{ist}. \quad (3.3)$$

By uniknąć wspomnianych problemów technicznych, od tego momentu gdy będziemy mówili o relacjach komutacji między operatorami zawsze będziemy mówili o zależności zachodzącej dla odpowiednich operatorów w postaci Weyla, chyba że jawnie powiedziano inaczej.

Omówimy teraz drugą z wymienionych wcześniej idei, czyli lokalizację wielkości obserwowanych. By to zrobić potrzebujemy rozważyć teorię rozgrywającą się w czterowymiarowej czasoprzestrzeni Minkowskiego, którą będziemy oznaczać przez Mink_4 , co jednak nie powinno prowadzić do trudności koncepcyjnych. Analogiczna dyskusja jest również możliwa dla czasoprzestrzeni zakrzywionej, lecz przypadek czasoprzestrzeni Minkowskiego jest najważniejszy dla niniejszej pracy i jednocześnie najprostszy, stąd ograniczymy się do niego.

Dla ustalenia uwagi, przyjmijmy że rozpatrywany układ fizyczny składa się z pojedynczego elektronu poruszającego się w czterowymiarowej czasoprzestrzeni Minkowskiego. Za wielkość pierwotną danej teorii przyjmujemy **lokalną algebrę**, czyli algebrę wielkości obserwowalnych przypisaną ograniczonemu podzbirowi otwartemu⁵ $\mathcal{O} \subset \text{Mink}_4$, którą będziemy oznaczać $\mathcal{A}(\mathcal{O})$. Jej interpretacja jest bardzo prosta: $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ reprezentuje wszystkie wielkości które można zmierzyć w obszarze czasoprzestrzeni $\mathcal{O}$. Przykładowo, dla elektronu oznacza to stwierdzenie, że został on zaobserwowany w obszarze czasoprzestrzeni $\mathcal{O}$, a jeśli tak to w której jego części (w jakim miejscu i czasie)?

W następnym kroku musimy określić jakie związki mają zachodzić między lokalnymi algebrami $\mathcal{A}(\mathcal{O}_1)$ i $\mathcal{A}(\mathcal{O}_2)$ które są przypisane dwóm różnym obszarom $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$. Ponieważ jeśli dana wielkość fizyczna może być zmierzona w obszarze $\mathcal{O}_1$ to musi być też mierzalna w obszarze go zawierającym, żądamy by lokalne algebry spełniały zależność

$$\mathcal{A}(\mathcal{O}_1) \subset \mathcal{A}(\mathcal{O}_2), \quad \mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2. \quad (3.4)$$

Relacja ta nosi nazwę **warunku izotonii**. Innym ważnym warunkiem motywowanym fizycznie jest **warunek einsteinowskiej przyczynowości**, który mówi, że

$$[\mathcal{A}(\mathcal{O}_1), \mathcal{A}(\mathcal{O}_2)] = \{0\}, \quad (3.5)$$

jeśli zbiory $\mathcal{O}_1$ i $\mathcal{O}_2$ są oddzielone od siebie w sposób przestrzenny. Relacja ta wyraża fakt, że pomiary prowadzone w obszarach $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$, takich, że żaden sygnał fizyczny startując z jednego z nich nie może osiągnąć drugiego, są od siebie niezależne.

Jeśli mamy daną rodzinę ograniczonych zbiorów otwartych w przestrzeni Minkowskiego, którą będziemy oznaczać F i każdemu zbiorowi $\mathcal{O} \in F$ przyporządkowana jest lokalna algebra $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ w taki sposób, że spełnione są warunki izotonii i einsteinowskiej przyczynowości⁶, to mówimy że zdefiniowana została **sieć lokalnych algebr** (ang. *nets of local algebras*). Przez konstrukcje modelu, powiedzmy swobodnego pola skalarnego, w ramach algebraicznej kwantowej teorii pola, rozumiemy podanie odpowiedniej sieci lokalnych algebr, dla zadanej rodziny obszarów F . Najczęściej za F bierzemy rodzinę wszystkich ograniczonych podzbiorów otwartych Mink_4 .

Przejdźmy teraz do problemu, w jaki sposób przypisać elementom algebry $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ konkretną wartość liczbową, którą możemy zmierzyć w eksperymencie. Do tego celu potrzebujemy wprowadzić przestrzeń dualną do algebry $\mathcal{A}(\mathcal{O})$, czyli przestrzeń funkcjonałów liniowych określonych na $\mathcal{A}(\mathcal{O})$, którą będziemy oznaczać przez $\mathcal{A}(\mathcal{O})^d$ (od ang. *dual*). Element $\omega \in \mathcal{A}(\mathcal{O})^d$ nazywamy **dodatnim** jeśli $\omega(A^*A) \geq 0$ dla każdego $A \in \mathcal{A}(\mathcal{O})$.

Do wprowadzenia następnej definicji będziemy potrzebowali założyć, że lokalna algebra $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ zawiera element neutralny $\mathbf{1}$: $A\mathbf{1} = \mathbf{1}A$, $A \in \mathcal{A}(\mathcal{O})$. Nie będziemy dyskutować tego, kiedy algebra C^* posiada element neutralny, zainteresowany Czytelnik może znaleźć omówienie tego problemu w klasycznej książce O. Brattellego i D.W. Robinsona *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics* [BR]. Zamiast tego przyjmijmy, że każda algebra lokalna ten element neutralny posiada. Funkcjonał $\omega \in \mathcal{A}(\mathcal{O})^d$ nazywamy **unormowanym** jeśli $\omega(\mathbf{1}) = 1$.

Element $\omega \in \mathcal{A}(\mathcal{O})^d$ będziemy nazywać **stanem** jeśli jest on dodatni i unormowany. Funkcjonał będący stanem będziemy interpretować jako reprezentację stanu

⁵Dokładniej, $\mathcal{O}$ jest otwarty i ma zwarte domknięcie.

⁶W rzeczywistości musi być spełniona większa liczba warunków, jednak nie jest to specjalnie istotne dla naszych rozważań.

fizycznego w którym znajduje się rozważany układ. Dla dowolnego elementu lokalnej algebry $A \in \mathcal{A}(\mathcal{O})$ wzór

$$\omega(A) = \langle A \rangle_\omega, \quad (3.6)$$

reprezentuje wartość oczekiwaną wielkości fizycznej A w stanie ω . Przykładowo, jeśli A oznacza mierzone w obszarze $\mathcal{O}$ położenie elektronu wzdłuż osi x , to $\omega(A)$ jest wartością oczekiwaną tego położenia, gdy elektron znajduje się w stanie ω .

Opisany tutaj schemat, choć może wydawać się daleki od standardowego podejścia do teorii pola, w którym pierwszoplanową rolę odgrywają lagrangiany budowane z pól klasycznych oraz procedury ich kwantowania, pozwala jednak na ścisłą formalizację tego typu teorii, czego najprostszym przykładem jest algebraiczna teoria kwantowych pól swobodnych. Z drugiej strony, podejście to jest tak szerokie, że miejsce w nim znajdują również układy o skończonej liczbie stopni swobody takie jak pojedynczy oscylator harmoniczny. Patrząc pod tym kątem nazwa „algebraiczna kwantowa teoria pola” jest w pewnym sensie zbyt wąska, lecz jako, że jest szeroko stosowana w literaturze, również my będziemy jej używać.

W poprzednim paragrafie pisaliśmy o tym, że można podać algebraiczny formalizm opisujący swobodne pola kwantowe, co jednak z polami oddziałującymi? To niezwykle ważne pytanie jest powiązane z innym, które musimy teraz poruszyć. Jeśli mamy dany pewien model fizyczny, przykładowo pole skalarne, w jaki sposób znaleźć odpowiadającą mu sieć lokalnych algebr? Jak bowiem Czytelnik zapewne zauważył, powyższy schemat mówi jakie warunki mają spełniać takie algebry, ale nie mówi nic o tym jak je zbudować. W tym sensie formalizm ten jest podobny do innych teorii, które znane są pod wspólną nazwą *aksjomatycznych kwantowych teorii pola*. W tym podejściu do kwantowej teorii pola formułuje się zestaw aksjomatów, które dany byt ma spełniać, by być uznany za takie pole. Obecnie badanych jest co najmniej kilka tego typu zestawów aksjomatów, jednak nie będziemy ich szerzej dyskutowali.

Sformułowanie modelu spełniającego wszystkie wymagane aksjomaty jest zadaniem niezwykle trudnym we wszystkich podejściach aksjomatycznych, które pragną być matematycznie ścisłe. Mimo czynionych na tym polu postępów, problem podania odpowiedniej liczby interesujących modeli spełniających zadane aksjomaty, nie wydaje się być obecnie bliski rozwiązania. Czytelnik zainteresowany historią konstruowania takich modeli i problemami na jakie te próby napotykały może znaleźć wiele wartościowych informacji w pracy S.J. Summersa [Sum12]. Jeśli chodzi o problem formułowania takich modeli wewnątrz podejścia algebraicznego, tu ponownie odsyłamy Czytelnika do publikacji D. Bucholza i K. Fredenhagena [BF23].

Pomimo tych wszystkich problemów, znane metody konstruowania modeli pól kwantowych, pozwalają zbudować teorie quasi-swobodne, które okazują się wystarczające do zbadania efektu Casimira, zagadnienie to jest przedyskutowane w rozdziałach (3.3) i (3.4). Przy czym przez układ quasi-swobodny będziemy rozumieć układ oparty na przestrzeni symplektycznej, na której zadana jest ewolucja czasowa za pomocą jednoparametrowej grupy transformacji symplektycznych oraz skwantowany w taki sposób, że zmienne kanoniczne są liniowymi kombinacjami operatorów anihilacji a i kreacji $a^\dagger$ działających na pewnej przestrzeni Focka $\mathcal{H}_{\text{Fock}}$. Ponadto zakładamy, że hamiltonian kwantowej części układu jest formą hermitowską w operatorach anihilacji i kreacji.

3.2 Formalizm algebraiczny dla efektu Casimira

Zajmiemy się teraz sformułowaniem schematu algebraicznej kwantowej teorii pola, który pozwala nam przebadать efekt Casimira w przybliżeniu adiabatycznym. Bę-

dziemy się starali wydobyć na pierwszy plan wszystkie założenia natury fizycznej na których to podejście bazuje, pomijając do pewnego stopnia bardziej techniczne elementy. Pełny wykład tego systemu może Czytelnik znaleźć w rozdziale drugim oryginalnej pracy Andrzeja Herdegena *Quantum backreaction (Casimir) effect I. What are admissible idealizations?* [Her05]. Tak jak poprzednio, dla ustalenia uwagi, układem do którego będziemy się odwoływać, jest ten składający się z pola elektromagnetycznego i dwóch metalowych płytek.

Zacznijmy od przedstawienia fizycznego obrazu problemu, który stoi u podstaw stosowanego podejścia. Efekt Casimira zachodzi w układzie, który można podzielić na część kwantową Q oraz część makroskopową M , którą można dobrze opisać w ramach fizyki klasycznej. Jak się powszechnie uważa każdy układ makroskopowy, jak dwie metalowe płytki, ostatecznie też ma naturę kwantową, zaś jego cechy klasyczne są wynikiem pewnego „procesu uśredniania”. Niemniej na dziś dzień nie jest nam znany wystarczająco dobry opis ciał makroskopowych na poziomie kwantowym, który pozwalałby przeanalizować cały efekt Casimira korzystając tylko z podejścia kwantowego. Wobec tego musimy poprzestać na opisie M za pomocą formalizmu fizyki klasycznej, przypisując mu zestaw makroskopowych parametrów, które to parametry będziemy oznaczać zbiorowo jako a . Dla pary płytek, a oznacza jedną liczbę, jaką jest ich wzajemna odległość.

Izolowany układ Q będziemy nazywać układem swobodnym. Będziemy również przyjmować, że po wprowadzeniu obiektów M jego wewnętrzna struktura nie ulegnie zmianie. Przykładowo, w układzie nie może pojawić się żadna niezerowa masa efektywna fotonów. Następne założenie opiera się na tym właśnie uczynionym. Mianowicie, przyjmujemy, iż efekt Casimira można zrozumieć jako przekaz energii z układu Q do M , gdy M zmienia swoje położenie. Następnie zaś układ M przekształca całą otrzymaną energię na swoją energię kinetyczną, co skutkuje pojawieniem się odpowiedniej siły.

Ostatnie założenie dotyczy natury powstałej w wyniku efektu Casimira dynamiki ruchu. Będziemy przyjmować, że położenie układu M zmienia się adiabatycznie, skutkiem czego Q będzie się zmieniał w taki sam sposób. Opis doświadczalnych badań efektu Casimira zawarty w rozdziale (2.2), pokazuje, że takie założenie jest w dobrej zgodzie z tym jak wyglądają rzeczywiste pomiary tego zjawiska, gdzie w sposób wymagający wielkiej dokładności zmienia się wzajemne położenie ciał makroskopowych biorących udział w eksperymencie.

Po jawnym sformułowaniu wszystkich tych założeń, spróbujemy jeszcze raz spojrzeć na fizyczną stronę całego problemu. Pojawienie się siły Casimira rozumiemy w ten sam sposób w jaki uczynił to Herdegen w swojej pracy *Quantum backreaction (Casimir) effect I. What are admissible idealizations?* [Her05]. Mianowicie, układ makroskopowy M pod wpływem czynników zewnętrznych porusza się w sposób adiabatyczny, co wywołuje reakcję zwrotną ze strony układu kwantowego Q , której skutkiem jest pojawienie się siły Casimira.

Przejdziemy teraz do przedstawienia formalizmu algebraicznego bazującego na tych założeniach, podzielimy go na cztery części, numerowane jak w pracy Herdegena [Her05], choć mogą się one różnić sposobem sformułowania. Początkowo będziemy opisywać ewolucję czasową w obrazie Heisenberga, by w odpowiednim momencie przejść na obraz Schrödingera. Pierwsza zestaw aksjomatów opisuje izolowany układ Q , drugi dotyczy obserwabli układu Q w obecności nieruchomych ciał M , trzeci opisuje dynamikę układu Q , gdy układ M jest nieruchomy, w końcu część czwarty zajmuje się jednoczesną ewolucję połączonego układu Q - M .

- (i)₁ Kwantowe zmienne układu dla ustalonej chwili t tworzą algebrę C^* , którą będziemy oznaczać przez $\mathcal{A}$.
- (i)₂ Algebra $\mathcal{A}$ posiada reprezentację π w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$:

$$\pi : \mathcal{A} \rightarrow \pi(\mathcal{A}), \quad \mathcal{A} \ni A \mapsto \pi(A) \in \pi(\mathcal{A}), \quad (3.7)$$

gdzie $\pi(\mathcal{A})$ jest pojedynczą, ustaloną algebrą operatorów ograniczonych na $\mathcal{H}$. Reprezentacja algebry spełnia następujące warunki:

$$\pi(A^*) = \pi(A)^*, \quad (3.8a)$$

$$\pi(\alpha A + \beta B) = \alpha \pi(A) + \beta \pi(B), \quad (3.8b)$$

$$\pi(AB) = \pi(A)\pi(B), \quad (3.8c)$$

gdzie α i β należą do $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$. Wektory i macierze gęstości nad $\mathcal{H}$ odpowiadają stanom systemu Q . Będziemy zawsze przyjmować, że reprezentacja π jest nieredukowalna, wówczas wektory odpowiadają stanom czystym.

- (i)₃ Dynamika izolowanego układu Q jest zadana przez rodzinę automorfizmów algebry $\mathcal{A}$:

$$\alpha_t : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}, \quad A \mapsto \alpha_t A. \quad (3.9)$$

Ewolucja czasowa jest implementowana na przestrzeni $\mathcal{H}$ za pomocą transformacji unitarnych:

$$\pi(\alpha_t A) = U(t)\pi(A)U(t)^*, \quad U(t) = \exp(itH). \quad (3.10)$$

Operator H ma przy tym interpretację operatora energii układu Q . Od operatora tego żądamy by miał widmo ograniczone od dołu, zwykle też chcemy by miał on stan podstawowy, który będziemy oznaczać symbolem Ω , odpowiadający najmniejszej wartości należącej do jego widma. Dzięki swobodzie dodania do tego operatora wielokrotności operatora id możemy przyjąć, że ta najmniejsza wartość jest równa zeru. Na mocy nieredukowalności reprezentacji π , operator energii jest wyznaczony jednoznacznie.

W poprzednim rozdziale algebry były przypisywane ograniczonym podzbiорom otwartym Mink_4 , jednak w powyższej liście aksjomatów algebra została przypisana hiperpłaszczyźnie $t = \text{const}$, która nie jest ani otwarta ani ograniczona. Ta modyfikacja jest motywowana tym, że naszym celem jest zrozumienie ewolucji czasowej układu w przybliżeniu adiabatycznym. Przybliżenie to uzasadnia idealizację problemu, w której cała fizyka badanego problemu jest określona przez to co dzieje się na samej hiperpłaszczyźnie $t = \text{const}$, nie zaś w pewnym jej otwartym otoczeniu.

Zasada einsteinowskiej przyczynowości wciąż jest spełniona, w następującym sensie. Niech D_1 i D_2 będą dwoma otwartymi i ograniczonymi podzbiорami hiperpłaszczyzny $t = \text{const}$, ich lokalne algebry oznaczamy przez $\mathcal{A}(D_1)$ i $\mathcal{A}(D_2)$. Separacja przestrzenna w tym przypadku, redukuje się do tego, by D_1 i D_2 miały puste przecięcie: $D_1 \cap D_2 = \emptyset$. Wówczas zgodnie z oczekiwaniem zachodzi

$$[\mathcal{A}(D_1), \mathcal{A}(D_2)] = \{0\}. \quad (3.11)$$

Niemniej, ponieważ pracujemy w przybliżeniu adiabatycznym, rzadko kiedy powstaje potrzeba rozważania lokalnej algebry przypisanej zbiorowi mniejszemu, niż hiperpłaszczyzna $t = \text{const}$.

Przyjmijmy teraz, że ciała makroskopowe tworzące podsystem M zostały wprowadzone do rozważanego układu, ale nie mogą się poruszać. Wedle poczynionych wcześniej założeń, układ Q nie może w wyniku tej operacji zmienić swej wewnętrznej natury, co w formalizmie algebraicznym oznacza, iż jego algebra jest taka sama jak dla układu izolowanego. Natomiast reprezentacja w przestrzeni Hilberta może się zmienić, ale musi być równoważna reprezentacji izolowanego układu Q .

- (ii)₁ Algebra $\mathcal{A}$ układu Q w chwili $t = \text{const}$ jest identyczna z tą dla układu izolowanego.
- (ii)₂ Niech π_a oznacza reprezentację algebry $\mathcal{A}$, dla sytuacji, gdy układ M jest w ustalonym stanie opisanym przez zestaw parametrów a . Przyjmujemy, że istnieje rodzina unitarnych operatorów U_a , taka że

$$\pi(A) = U_a \pi_a(A) U_a^*, \quad A \in \mathcal{A}. \quad (3.12)$$

Oznacza to, że reprezentacja π_a jest równoważna reprezentacji π skonstruowanej dla układu izolowanego.

Powyżej opisaliśmy czego wymagamy od obserwabli systemu Q , gdy układ M jest nieruchomy, teraz przejdziemy do zagadnienia jak wówczas wygląda ewolucja czasowa tych obserwabli.

- (iii) Ewolucja czasowa w algebrze $\mathcal{A}$ układu Q , gdy system M jest nieruchomy, jest dana przez rodzinę automorfizmów

$$\alpha_{a,t} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}, \quad A \mapsto \alpha_{a,t} A. \quad (3.13)$$

Ewolucja ta jest implementowana w przestrzeni $\mathcal{H}$ za pomocą rodziny operatorów unitarnych

$$\pi(\alpha_{a,t} A) = U_a(t) \pi(A) U_a(t)^*, \quad U_a(t) = \exp(itH_a). \quad (3.14)$$

Musimy tutaj wskazać na niezwykle ważny fakt. Jak to dokładniej omówimy dalej, interesować nas będzie dynamika układu Q - M w przybliżeniu adiabatycznym. Konsekwencją korzystania z tego przybliżenia jest to, że dynamika dla różnych wartości parametrów a jest do pewnego stopnia niezależna. Przejawem tego jest to, że mamy swobodę dodania do H_a , przy ustalonym a , dowolnej stałej. Tym samym możemy dokonać transformacji

$$H_a \mapsto H'_a = H_a + \lambda_a \text{id}, \quad (3.15)$$

gdzie λ_a jest zupełnie dowolną funkcją a przyjmującą wartości rzeczywiste. Uważamy za rozsądne przyjęcie, że w modelu dla którego dysponowalibyśmy pełną dynamiką połączonego układu Q - M , wybranie parametru λ_a dla jednej określonej wartości a , pozwalałoby wyliczyć λ_{a_1} dla wszystkich wartości jakie ten zestaw parametrów może przyjmować. Najprawdopodobniej zachodziłoby wtedy

$$\lambda_a = \lambda_{a_1}. \quad (3.16)$$

Jednak w przybliżeniu adiabatycznym tracimy możliwość powiązania wartości jakie λ_a przyjmuje dla różnych wartości parametrów a .

Następny krok polega na określeniu dynamiki oddziałującego układu Q - M . Jest to zapewne najbardziej kontrowersyjna kwestia, z którą musi się zmierzyć formalizm

pragnący opisać efekt Casimira. Mamy nadzieję, że uda nam się wyjaśnić dlaczego w prezentowanym podejściu została wybrany właśnie taki sposób rozumienia dynamiki pełnego układu. W kontekście tego problemu korzystanie z obrazu Schrödingera jest znacznie wygodniejsze, dlatego teraz na niego przejdziemy.

Ponieważ mamy do czynienia z układem, który jest częściowo kwantowy, a częściowo klasyczny, przyjęcie, że ewolucja na poziomie algebry $\mathcal{A}$ jest rządzone rodziną automorfizmów może okazać się zbyt restrykcyjnym ograniczeniem. Będziemy jednak zakładać, że w przestrzeni Hilberta ewolucja czasowa jest wciąż dana przez rodzinę operatorów unitarnych, co zapewni zachowanie prawdopodobieństwa w układzie Q . Może się jednak zdarzyć, iż rodzina tych operatorów nie będzie już tworzyła jednoparametrowej grupy.

(iv)₁ Niech ewolucja parametrów M będzie dana przez ustaloną funkcję $a(t)$, która zmienia się w sposób adiabatyczny. Niech rodzina operatorów H_a będzie określona przez zależność (3.14). Przypomnijmy, że w tym wzorze wartość parametrów a jest ustalona. Przyjmujemy, że operator ewolucji w chwili t jest równy $H_{a(t)}$. Dodatkowo, niech dla każdego a istnieje niezdegenerowany wektor własny $\psi_a \in \mathcal{H}$ operatora H_a :

$$H_a \psi_a = E_a \psi_a. \quad (3.17)$$

O rodzinie stanów ψ_a będziemy zakładać, zależy od a w sposób ciągły. Jeśli w chwili $t = 0$ stan układu Q będzie opisywany przez $\psi_{a(0)}$ to na mocy przybliżenia adiabatycznego w chwili t jest on dany przez:

$$\psi(t) = e^{i\varphi(t)} \psi_{a(t)}. \quad (3.18)$$

Funkcja $\varphi(t)$ przyjmuje tylko wartości rzeczywiste i może zależeć funkcyjnie od E_a i ψ_a . Niech teraz operator B reprezentuje obserwabla. Wartość oczekiwana tej obserwabli w chwili t wynosi

$$\langle B \rangle_t = (\psi_{a(t)}, B \psi_{a(t)}). \quad (3.19)$$

(iv)₂ Wewnętrzna energia systemu Q jest określona przez operator H zdefiniowany w równaniu (3.10). Jeśli układ M jest w konfiguracji danej przez parametry a , to na podstawie punktu (iv)₁ wartość oczekiwana energii systemu Q wynosi

$$\mathcal{E}_a := (\psi_a, H \psi_a). \quad (3.20)$$

Przyjmujemy, że cała energia przekazana z Q do M przechodzi w energię kinetyczną tego ostatniego układu. Tym samym mamy do czynienia z systemem z energią potencjalną $\mathcal{E}_a$, w którym działa siła uogólniona

$$\mathcal{F}_a := -\frac{\partial \mathcal{E}_a}{\partial a}. \quad (3.21)$$

Zwróćmy uwagę na to, że wartość oczekiwana w równaniu (3.19) nie zależy od tego jak w równaniu (3.15) wybraliśmy funkcję λ_a , ani od funkcji $\varphi(t)$.

Pozostaje odpowiedzieć na pytanie, jaki stan ψ_a należy wybrać, by obliczyć energię Casimira $\mathcal{E}_a$ danego układu? Tutaj podążymy za ustaloną praktyką, interpretując efekt Casimira jako wynik wpływu ciał makroskopowych na stan podstawowy pewnego układu kwantowego (zob. roz. 1 i 2 w [MUV01]). Będziemy więc przyjmować, że dla każdej wartości a widmo operatora H_a ma widmo ograniczone od dołu i posiada

stan podstawowy Ω_a , który odpowiada najmniejszej wartości jego widma. Na mocy założenia o równoważności reprezentacji π i π_a stan ten jest jedyny. Energia Casimira jest teraz dana jako

$$\mathcal{E}_a = (\Omega_a, H\Omega_a). \quad (3.22)$$

Tym samym w podejściu Herdegena stan pełnego układu Q - M jest wyznaczony przez wzajemne oddziaływanie jego podukładów Q , M , ale energia odpowiedzialna za pojawienie się siły Casimira jest wyznaczona przez wewnętrzną energię układu Q , obliczaną za pomocą tego samego operatora co dla przypadku swobodnego.

3.3 Konstrukcja teorii quasi-swobodnej

W poprzednim rozdziale przedstawiliśmy zestaw aksjomatów dla algebraicznej kwantowej teorii pola, który jest dopasowany do potrzeb efektu Casimira. Teraz omówimy w sposób szkicowy, w jaki sposób można zbudować konkretną sieć lokalnych algebr oraz jej reprezentacje w przestrzeni Hilberta, które będą czynić tym aksjomatom. Również ta procedura została szczegółowo omówiona w artykule [Her05], do którego odsyłamy Czytelnika chcącego zaznajomić się z nią dokładniej. Ponieważ wyniki niniejszej pracy dotyczą układu, w którym bezmasowe pole skalarne oddziałuje z dwoma quasi-punktowymi ciałami, w odpowiednich miejscach staraliśmy się wyjaśnić, czym konkretnie są rozważane obiekty matematyczne w tym właśnie przypadku.

Część bardziej technicznych elementów tej konstrukcji, których jednak nie można było zupełnie pominąć, została przeniesiona do dodatków zgrupowanych w części (A) tej pracy. Ponieważ naszym celem jest przedstawienie najważniejszych elementów podejścia Herdegena, nie zaś jego dokładne referowanie, nawet po uwzględnieniu materiału z dodatków, zamieszczony tu opis jest wciąż niepełny. By zrozumieć go dogłębnie, Czytelnik powinien sięgnąć do wspomnianej już pracy. Ponadto dla zachowania spójności wszędzie w tekście używamy tej samej notacji, nawet jeśli skutkuje to tym, że bez zapoznania się z treścią dodatków, pewne oznaczenia mogą wyglądać na dość sztuczne.

Na początku przypomnijmy definicje teorii quasi-swobodnej. Mianem tym określamy teorię bazującą na przestrzeni symplektycznej, na której to przestrzeni zadana jest ewolucja czasowa za pomocą jednoparametrowej grupy transformacji symplektycznych, wraz z odpowiednią wersją kwantową tego problemu. W przypadku kwantowym zmienne kanoniczne mają być liniowymi kombinacjami operatorów anihilacji a i kreacji $a^\dagger$, które to operatory działają na pewnej przestrzeni Focka $\mathcal{H}_{\text{Fock}}$. Ponadto żądamy, by hamiltonian kwantowej wersji teorii był formą hermitowską w operatorach anihilacji i kreacji.

Pierwsza część konstrukcji dotyczy tylko izolowanego układu Q . Punktem wyjścia jest para $(\mathcal{R}, h)$, gdzie $\mathcal{R}$ to rzeczywista przestrzeń Hilberta, a h to samosprężony, ściśle dodatni operator: $h > 0$; którego dziedzinę będziemy oznaczać jako $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}(h)$. Dla bezmasowego pola skalarowego mamy $\mathcal{R} = L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3, d\mu)$, czyli jest to przestrzeń całkowalnych w kwadracie funkcji o wartościach rzeczywistych, natomiast $h = \sqrt{-\Delta}$. Przez $-\Delta$ rozumiemy standardowe, samosprężone rozszerzenie operatora Laplace'a.

Następnie w oparciu o przestrzeń $\mathcal{R}$ budujemy przestrzeń symplektyczną $(\mathcal{L}, \sigma)$, $(\widetilde{\mathcal{L}}, \sigma)$ i maksymalną przestrzeń symplektyczną $(\widehat{\mathcal{L}}, \widehat{\sigma})$. Jak to zostało szerzej omówione w dodatku (A.1), jeśli V jest elementem jednej z tych przestrzeni, to możemy go zapisać w postaci $V = v \oplus u$. W szczególności jeśli $V_1, V_2 \in \widehat{\mathcal{L}}$ to ich iloczyn symplektyczny dany jest jako

$$\widehat{\sigma}(V_1, V_2) = \langle v_2, u_1 \rangle - \langle v_1, u_2 \rangle, \quad (3.23)$$

gdzie $V_i = v_i \oplus u_i$, a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ jest odpowiednim iloczynem skalarnym.

Zauważmy, że ponieważ $h > 0$, więc korzystając z rachunku operatorowego możemy określić operatory $h^{1/2}$, $h^{-1/2}$ działające na $\mathcal{R}$. Następnie dokonujemy ich przedłużenia do operatorów $\widehat{h^{1/2}}$ i $\widehat{h^{-1/2}}$. Korzystając ponownie z rzeczywistej przestrzeni $\mathcal{R}$ budujemy zespoloną przestrzeń Hilberta $\mathcal{H}$. Dla przypadku pola skalarnego mamy $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3, d\mu)$, czyli $\mathcal{H}$ jest przestrzenią funkcji całkowalnych w kwadracie o wartościach zespolonych. Definiujemy odwzorowanie

$$\widehat{j}: \widehat{\mathcal{L}} \rightarrow \mathcal{H}, \quad \widehat{j}(V) = \widehat{h^{1/2}}v - i\widehat{h^{-1/2}}u. \quad (3.24)$$

Funkcja $\widehat{j}$ jest przy tym bijekcją.

Algebrę C^* dla naszego modelu konstruujemy korzystając z dobrze znanej w procedury, która jest opisana choćby w klasycznej książce O. Bratteli i D.W. Robinsona [BR]. Zachodzi bowiem następujące twierdzenie. Dla przestrzeni symplektycznej $\widehat{\mathcal{L}}$ istnieje i jest tylko jedna algebra C^* , generowana przez elementy $\Phi(V)$, $V \in \widehat{\mathcal{L}}$ i element neutralny $\mathbf{1}$, dla której prawdziwe są relacje

$$W(V_1)W(V_2) = e^{-\frac{i}{2}\widehat{\sigma}(V_1, V_2)}W(V_1 + V_2), \quad (3.25a)$$

$$W(V)^* = W(-V), \quad (3.25b)$$

$$W(0) = \mathbf{1}. \quad (3.25c)$$

Algebra ta nosi nazwę algebry Weyla i będziemy ją oznaczać $W(\widehat{\mathcal{L}})$. To kończy budowę algebraicznej strony formalizmu, teraz przejdziemy do problemu znalezienia odpowiedniej reprezentacji tak otrzymanej algebry Weyla.

Będziemy rozważać tylko reprezentacje w przestrzenie Focka. Przestrzeń Focka zbudowaną w oparciu o „przestrzeni stanów jednocząstkowych” $\mathcal{H}$, będziemy oznaczać $\mathcal{H}_{\text{Fock}}(\mathcal{H})$, podstawowe informacje na jej temat można znaleźć w dodatku (A.2), z którego przytoczymy teraz kilka wzorów. Po pierwsze będą nam potrzebne zależności

$$\Phi_0(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(a(f) + a(f)^*), \quad (3.26a)$$

$$W_0(f) = e^{i\Phi_0(f)}, \quad (3.26b)$$

gdzie $f \in \mathcal{H}$. Reprezentację $\pi_{\widehat{j}}$ algebry $\mathcal{A}$, zależną od wcześniej zdefiniowanej funkcji $\widehat{j}$, definiujemy jako (por. diagram (6)):

$$\pi_{\widehat{j}}(W(V)) = W_0(\widehat{j}(V)), \quad V \in \widehat{\mathcal{L}}. \quad (3.27)$$

Powyższy wzór definiuje szukaną reprezentację algebry $W(\widehat{\mathcal{L}})$ na odpowiedniej przestrzeni Fock’a. W tym miejscu zakończymy omawianie schematu konstrukcji przestrzeni występujących w teorii quasi-swobodnej, przejdziemy zaś do problemu określenia ewolucji czasowej.

Ewolucję czasową określimy najpierw na przestrzeni symplektycznej $(\mathcal{L}, \sigma)$. Hamiltonian tej części teorii definiujemy przez jego działanie na element wspomnianej przestrzeni, które są postaci $v \oplus u \in \mathcal{L} = \mathcal{D}_{\mathcal{R}}(h) \oplus \mathcal{R}$, mianowicie jako

$$\mathcal{H}(v, u) = \frac{1}{2}[(u, u) + (hv, hv)]. \quad (3.28)$$

Przyjmujemy przy tym, że wszystkie parametry masowe zostały włączone do operatorów pędu h . Tak postawiony zagadnienie ewolucji czasowej posiada jawne rozwiązanie, które jest dane wzorem

$$T_t(v \oplus u) = (\cos(ht)v + \sin(ht)h^{-1}u) \oplus (-\sin(ht)hv + \cos(ht)u). \quad (3.29)$$

Rozważany model jest symetryczny względem odwrócenia czasu. Ewolucję w przestrzeni $\widehat{\mathcal{L}}$, definiujemy za pomocą wzoru (por. dodatek (A.4)):

$$\widehat{T}_t V = \widehat{j}^{-1}(e^{iht} \widehat{j}(V)), \quad V \in \widehat{\mathcal{L}}. \quad (3.30)$$

Przestrzeń symplektyczna $(\widehat{\mathcal{L}}, \widehat{\sigma})$ jest maksymalną przestrzenią jaką możemy zbudować dla teorii quasi-swobodnej. Można ją uważać, za przestrzeń fazową odpowiedniego problemu klasycznego. Poprzez wybranie pewnej jej właściwej podprzestrzeni $\mathcal{L}_1 \subsetneq \widehat{\mathcal{L}}$, która również jest zamknięta ze względu na ewolucję czasową, możemy określić inne modele rozważanego problemu. W dalszych rozważaniach będzie się ograniczać tylko do tych podprzestrzeni $\mathcal{L}_1$, które obok niezmienniczości ze względu na ewolucję czasową $\widehat{T}_t$, są również niezmiennicze względem operacji odwrócenia czasu. Ten ostatni warunek okazuje się być równoważny możliwości przedstawienia podprzestrzeni $\mathcal{L}_1$ w następujący sposób

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_+ \oplus \mathcal{L}_-, \quad \mathcal{L}_{\pm} \subset \mathcal{R}_{\pm}. \quad (3.31)$$

Ewolucję czasową na algebrze $W(\widehat{\mathcal{L}})$ określamy poprzez przeniesienie na nią tej, która została wcześniej określona na przestrzeni $\widehat{\mathcal{L}}$:

$$\alpha_t(W(V)) = W(\widehat{T}_t V). \quad (3.32)$$

W następnym kroku dokonujemy podobnej procedury, przenosząc ewolucję czasową z $W(\widehat{\mathcal{L}})$ na przestrzeń Focka $\mathcal{H}_{\text{Fock}}(\mathcal{K})$. Wprowadzając oznaczenie $\widehat{j}(V) = f \in \mathcal{K}$ i korzystając ze wzorów (3.27) oraz (3.30) możemy zapisać ewolucję na $\mathcal{H}_{\text{Fock}}(\mathcal{K})$ w następującej formie:

$$\pi_{\widehat{j}}(W(\widehat{T}_t V)) = W_0(e^{iht} f). \quad (3.33)$$

Zachodzi również związek

$$W_0(e^{iht} f) = e^{itH_{\text{Fock}}} W_0(f) e^{-itH_{\text{Fock}}}. \quad (3.34)$$

Operator H_{Fock} odpowiadający za ewolucję czasową na $\mathcal{H}_{\text{Fock}}(\mathcal{K})$ jest generatorem jednoparametrowej grupy przekształceń określonej przez ostatnie równanie, więc na mocy tego co powiedziano w dodatku (A.4) jest on postaci:

$$H_{\text{Fock}} = d\Gamma(h). \quad (3.35)$$

W tym miejscu musimy odpowiedzieć na pytanie, jak wybór jednej podprzestrzeni typu $\mathcal{L}_1 \subsetneq \widehat{\mathcal{L}}$ wpływa na reprezentację algebry $W(\mathcal{L}_1)$? By to zrobić będziemy przyjmować, że zawsze spełniony jest następujący warunek. Będziemy żądać by zbiór operatorów $\text{Op} = \{W_0(f) \mid f \in \widehat{j}(\mathcal{L}_1)\}$ działa w sposób nieredukowalny w przestrzeni $\mathcal{K}$. Ponieważ wedle wcześniejszych założeń $\mathcal{L}_1$ jest podprzestrzenią niezmienniczą ze względu na odwrócenie czasu, warunek nieredukowalności okazuje się być równoważny temu, że podprzestrzenie $\mathcal{L}_{\pm}$ są gęste w $\mathcal{R}_{\pm}$. Tym stwierdzeniem kończymy konstrukcję teorii quasi-swobodnej.

Wprowadzona wyżej przestrzeń $(\widehat{\mathcal{L}}, \widehat{\sigma})$ odgrywa rolę przestrzeni fazowej klasycznej wersji teorii i jak dane nam było zobaczyć jest ona kluczowa w konstrukcji algebry Weyla $W(\widehat{\mathcal{L}})$, która definiuje kwantową wersję problemu. Sytuacja w której konstrukcja kwantowej wersji teorii wymaga najpierw określenia teorii klasycznej, jest dość typowa w konstrukcyjnej kwantowej teorii pola. Choć pytanie, dlaczego tak jest, jest niezwykle interesujące, to nie będziemy się nad nim dłużej zatrzymywać.

Ostatnią rzeczą która wymaga komentarza, jest kwestia dziedziny operator h w przestrzeni $\mathcal{R}$. Jak można zobaczyć w dodatku (A.1), wiele komplikacji natury technicznej bierze się stąd, iż musimy brać pod uwagę, iż może zajść $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}(h) \neq \mathcal{R}$. Nasuwa się więc pytanie, czy nie jest możliwe rozpatrywanie tylko sytuacji gdy $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}(h) = \mathcal{R}$? Odpowiedź na to pytanie jest przecząca, gdyż przyjęcie tego założenia wykluczałoby z rozważań układy zawierające pola kwantowe. O zagadnieniu tym wspomnimy jeszcze w (3.6).

3.4 Układ quasi-swobodny w obecności ciał makroskopowych

Przejdziemy teraz do zagadnienia skonstruowania teorii quasi-swobodnej w obecności ciał makroskopowych, bazując na aksjomatach podanych w rozdziale (3.2). Przedmiotem naszego zainteresowania w tym rozdziale będzie więc układ Q - M , niezależnie od tego, czy część M jest nieruchoma, czy też porusza się w sposób adiabatyczny. Ponieważ interesuje nas problem skalarnego, bezmasowego pola kwantowego, w całym rozdziale będziemy przyjmować, że $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}(h) \neq \mathcal{R}$.

Wprowadzenie ciał makroskopowych, których konfiguracja geometryczna jest opisana zestawem parametrów a , będziemy modelować poprzez zastąpienie w procedurze zarysowanej w rozdziale (3.3) operatora $h : \mathcal{D}_{\mathcal{R}}(h) \rightarrow \mathcal{R}$ odpowiednią rodziną operatorów $h_a : \mathcal{D}_{\mathcal{R}}(h_a) \rightarrow \mathcal{R}$, zależną od tychże parametrów. Dla niniejszej pracy najważniejszy jest przypadek, gdy rodzina h_a jest zdefiniowana wzorem

$$h_a^2 = h^2 + V_a, \quad (3.36)$$

gdzie V_a jest rodziną operatorów skończonego rzędu. Dzięki warunkom narzuconym na ruch układu M , możliwe jest zawarcia całej fizycznej informacji o wpływie tego układu na system Q w tak określonej rodzinie operatorów.

W rozdziale (4) dokładnie zbadamy konkretną rodzinę operatorów V_a i pokażemy jakie warunki muszą być spełnione, by h_a był rodziną silnie dodatnich operatorów, $h_a > 0$ dla każdego dopuszczalnej wartości a . Gdy ten warunek jest spełniony, cała przedstawiona w rozdziale (3.3) konstrukcja przebiega bez zmian. Okazuje się, że problem ten cechuje się pewną dozą subtelności, nawet w przypadku operatorów skończonego rzędu i sformułowanie odpowiednich warunków zapewniających dodatniość nie jest sprawą prostą. W szczególności może to wymagać ograniczenia zakresu wartości, jakie mogą przyjmować parametry a . Z tego też powodu, w tym rozdziale nie będziemy dyskutować opisywać założeń przy których zachodzi $h_a > 0$, lecz przyjmiemy, że warunek ten jest zawsze spełniony.

Oznaczmy przez $\widehat{\mathcal{L}}$ przestrzeń symplektyczną dla modelu bez ciał makroskopowych, natomiast przestrzeń dla modelu w którym te ciała są obecne, a ich konfiguracja wyznaczona jest przez wartość parametrów a , będziemy oznaczać $\widehat{\mathcal{L}}_a$. Zgodnie z założeniem (ii)₁ algebry Weyla w obu przypadkach muszą być sobie równe:

$$W(\widehat{\mathcal{L}}) = W(\widehat{\mathcal{L}}_a). \quad (3.37)$$

W dalszym ciągu tego rozdziału podamy kryterium które gwarantuje, że $\widehat{\mathcal{L}} = \widehat{\mathcal{L}}_a$,

co w oczywisty sposób implikuje równość odpowiednich algebr. Warunek ten jest w zupełności wystarczający na potrzeby niniejszej pracy.

Obie przestrzenie symplektyczne $\widehat{\mathcal{L}}$ i $\widehat{\mathcal{L}}_a$ konstruujemy z odpowiednich podprzestrzeni $\mathcal{R} \oplus \mathcal{R}$, jest więc sens zapytać się o ich część wspólną: $\widehat{\mathcal{L}} \cap \widehat{\mathcal{L}}_a$. Będziemy zakładać, że istnieje specjalna przestrzeń $\mathcal{L}^0$, dokładniej opisana w dodatku (A.5), posiadająca tę własność, że dla każdego a zachodzi

$$\mathcal{L}^0 \subset (\mathcal{D}_{\mathcal{R}}(h^{1/2}) \cap \mathcal{D}_{\mathcal{R}}(h_a^{1/2})) \oplus (\mathcal{D}_{\mathcal{R}}(h^{-1/2}) \cap \mathcal{D}_{\mathcal{R}}(h_a^{-1/2})). \quad (3.38)$$

W tym miejscu potrzebujemy skorzystać z funkcji j zdefiniowanej we wzorze (A.8) oraz z określonej w analogiczny sposób funkcji j_a :

$$j_a(v \oplus u) := h_a^{1/2}v - ih_a^{-1/2}u. \quad (3.39)$$

Zarówno j , jak i j_a przyjmują wartości w przestrzeni $\mathcal{K}$. Dzięki założeniu (3.38) podprzestrzeń $\mathcal{L}^0$ należy do dziedziny zarówno j jak i j_a , przy dowolnej wartości a . Możemy więc określić następującą funkcję

$$L_a := j j_a^{-1} : j_a(\mathcal{L}^0) \rightarrow j(\mathcal{L}^0). \quad (3.40)$$

Jak wyjaśniono w dodatku (A.3) przestrzeń $(\mathcal{K}, \mathfrak{Im}(\cdot, \cdot))$ jest przestrzenią symplektyczną. Co więcej, L_a jest transformacją symplektyczną.

Tak jak zostało to omówione w dodatku (A.3), dokonujemy rozkładu operatora L_a na część liniową i antyliniową nad ciałem $\mathbb{C}$:

$$L_a = T_a + S_a. \quad (3.41)$$

Operatory występujące w tym równaniu możemy zapisać jako

$$T_a = \frac{1}{2} (B_a^{-1} + B_a^*), \quad (3.42a)$$

$$S_a = \frac{1}{2} (B_a^{-1} - B_a^*) K, \quad (3.42b)$$

$$B_a = h_a^{1/2} h^{-1/2}. \quad (3.42c)$$

W tym miejscu przyjmiemy, że zachodzi równość odpowiednich przestrzeni symplektycznych $\widehat{\mathcal{L}} = \widehat{\mathcal{L}}_a$ i przeprowadzimy konstrukcję pozostałej części formalizmu. W dalszej części tego rozdziału przytoczymy odpowiednie kryterium, które pozwala zapewnić tę oraz inne pożądane własności konkretnego modelu.

Zajmiemy się najpierw kwestią przeniesienia ewolucji czasowej z przestrzeni symplektycznej $\widehat{\mathcal{L}}$ na algebrę $W(\widehat{\mathcal{L}})$, gdy ciała makroskopowe są w ustalony położeniu, opisanym przez parametry a . Ewolucja na $\widehat{\mathcal{L}}$ przyjmuje wówczas postać

$$T_{a,t}(V) = j_a^{-1}(e^{ih_a t} j_a(V)), \quad (3.43a)$$

gdzie $V = v \oplus u \in \widehat{\mathcal{L}}$. Na mocy założenia (iii) z rozdziału (3.2) ewolucja czasowa algebry $W(\widehat{\mathcal{L}})$ jest dana przez rodzinę jej automorfizmów, którą tak jak w równaniu (3.32) definiujemy jako

$$\alpha_{a,t}(W(V)) = W(T_{a,t}V) \quad (3.44)$$

Przystąpmy teraz do problemu analizy reprezentacji algebr występujących w naszej teorii. Na mocy konstrukcji przestrzeni $\mathcal{K}$ i przestrzeni $\mathcal{H}_{\text{Fock}}(\mathcal{K})$ zależą jedynie

od wyboru przestrzeni $\mathcal{R}$, tym samym są takie same dla wszystkich wartości parametrów a . Jednak reprezentacje algebry są określone jako

$$\pi_a(W(V)) = W_0(j_a(V)), \quad (3.45)$$

więc zależą od a poprzez funkcję j_a . Dla wygody reprezentację tą będziemy od teraz oznaczać symbolem π_a , nie zaś jak poprzednio π_{j_a} .

Jak już wiemy, hamiltonian układu Q - M jest równy $d\Gamma(h_a)$, przy czym procedura konstrukcji reprezentacji gwarantuje, że posiada on ten sam stan podstawowy Ω co teoria swobodna. Zgodnie z założeniem (ii)₂ z rozdziału (3.2) reprezentacja π_a musi być równoważna reprezentacji π . Inaczej mówiąc musi istnieć odpowiednia rodzina operatorów unitarnych U_a , takich że dla każdego $V \in \widehat{\mathcal{L}}$ zachodzi jeden z równoważnych warunków:

$$U_a \pi_a(W(V)) U_a^* = \pi(W(V)), \quad (3.46a)$$

$$U_a \Phi_{0,a}(j_a(V)) U_a^* = \Phi_0(j(V)). \quad (3.46b)$$

Relacje te można przekształcić do formy która jest wygodniejszej w operowaniu. Korzystając z oznaczenia $f \equiv j_a(V) \in \mathcal{K}$, warunek równoważności reprezentacji można teraz zapisać jako

$$U_a W_0(f) U_a^* = W_0(L_a f). \quad (3.47)$$

Oznacza to, że operator U_a implementują odpowiednią transformację Bogoliubowa. W tej sytuacji rodzinę operatorów U_a ustanawiającą równoważność reprezentacji można zdefiniować jako

$$U_a = U_{L_a}, \quad (3.48)$$

gdzie operatory U_{L_a} są zdefiniowane we wzorze (A.51).

Hamiltonian $d\Gamma(h_a)$ możemy teraz przenieść do reprezentacji swobodnej:

$$H_a = U_a d\Gamma(h_a) U_a^*. \quad (3.49)$$

Ponieważ operator we wzorze powyżej generuje ewolucję czasową układu Q przy ustalonych wartościach a , więc operator jest tym samym, który występuje we wzorze w (3.14). Stan podstawowy H_a jest określony przez zależność

$$\Omega_a = U_a \Omega. \quad (3.50)$$

Omówimy teraz kryterium udowodnione w pracy rozdziale piątym oraz dodatkach A.3 i A.4 pracy [Her05], które gwarantuje, że na odpowiednich poziomach układy w obecności i bez ciał makroskopowych są sobie równoważne. Zaczniemy od wprowadzenia operatora

$$C_a = B_a^* B_a = h^{-1/2} h_a h^{-1/2} \quad (3.51)$$

W dalszym ciągu kluczową rolę będzie odgrywał warunek, że C_a jest ograniczonym operatorem oraz

$$\text{Tr} [S_a S_a^*] = \text{Tr} \left[\frac{(C_a - \text{id})^2}{C_a} \right] < +\infty. \quad (3.52)$$

Jeśli jest on spełniony to operator $C_a^{-1/2}(C_a - \text{id})$ jest operatorem Hilberta-Schmidta, co implikuje, że C_a i C_a^{-1} jest operatorem ograniczonym. Na mocy wzoru (3.51) również B_a jest operatorem ograniczonym. Ponieważ zachodzi prosta zależność

$$h_a^{1/2} = B_a h^{1/2}, \quad (3.53)$$

więc $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}(h_a^{1/2}) = \mathcal{D}_{\mathcal{R}}(h^{1/2})$. W ten sam sposób dowodzimy $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}(h_a^{-1/2}) = \mathcal{D}_{\mathcal{R}}(h^{-1/2})$. Tym samym za przestrzeń $\mathcal{L}^0$ na której zdefiniowany jest operator L_a możemy przyjąć

$$\mathcal{L}^0 = \mathcal{D}_{\mathcal{R}}(h^{1/2}) \oplus \mathcal{D}_{\mathcal{R}}(h^{-1/2}), \quad (3.54)$$

Kolejnym wnioskiem z (3.52) jest to, że normy

$$\|v\|_{\pm} = \|h^{\pm 1/2}v\|, \quad \|v\|_{a,\pm} = \|h_a^{\pm 1/2}v\|, \quad v \in \mathcal{D}_{\mathcal{R}}(h^{\pm 1/2}), \quad (3.55)$$

są sobie równoważne. Tym samym uzupełnienie przestrzeni $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}(h^{\pm 1/2})$ względem odpowiadających sobie norm prowadzi do tych samych przestrzeni Hilberta. To zaś dowodzi równości $\widehat{\mathcal{L}} = \widehat{\mathcal{L}}_a$. Okazuje się również, czego dowód można znaleźć w dodatkach A.3 i A.4 cytowanej już pracy Herdegena, warunek (3.52) implikuje implementowalność transformacji Bogolibuowa danej przez L_a , a to jak wiemy oznacza, że reprezentacje π i π_a są unitarnie równoważne.

Podsumowując, jeśli wychodząc od operatorów h i h_a na przestrzeni Hilberta $\mathcal{R}$, pokażemy, że zdefiniowany za ich pomocą operator C_a ma gęstą dziedzinę oraz, że spełniona jest nierówność (3.52), to tym samym udowodnimy równość odpowiednich algebr Weyla oraz unitarną równoważność ich reprezentacji w przestrzeni Focka.

Przejdźmy teraz do następującego zagadnienia. Jeśli naszym układem Q jest pole kwantowe, to jaka liczba jego kwantów jest obecna w stanie Ω_a ? Inaczej mówiąc, przyjmijmy, że początkowo układ był w stanie podstawowym Ω , gdzie liczba cząstek wynosiła 0. Następnie umieszczono w układzie ciała makroskopowe M , co spowodowało wytworzenie pewnej liczby kwantów swobodnego pola, w skutek czego przechodzimy do stanu Ω_a . Jak znaleźć ich liczbę? Tak postawione pytanie ma sens, bo przyjęliśmy (por. (ii)₁ i (ii)₂ w (3.2)), że układ kwantowy Q nie zmienia swojej natury po wprowadzeniu ciał makroskopowych.

Liczbę cząstek w stanie Ω_a określa wartość oczekiwana jaką przyjmuje dla niego operator N :

$$(\Omega_a, N\Omega_a). \quad (3.56)$$

Wykażemy, że zachodzi następującą równość

$$\mathcal{N}_a = \text{Tr}[S_a S_a^*] = (\Omega_a, N\Omega_a). \quad (3.57)$$

By wykazać tę równość odwołamy się do pojęć i wzorów wprowadzonych w dodatku (A.3). Zaczniemy od wyrażenia wartości oczekiwanej operatora N za pomocą zdefiniowanej tam formy kwadratowej q_{id} :

$$(\Omega_a, N\Omega_a) = q_{\text{id}}(\Omega_a, \Omega_a) = \sum_{i=1}^{\infty} (\bar{a}(f_i)\Omega_a, \bar{a}(f_i)\Omega_a) = \sum_{i=1}^{\infty} \|\bar{a}(f_i)\Omega_a\|^2. \quad (3.58)$$

Z pomocą wzorów (A.45c) i (A.49) dostajemy

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|\bar{a}(f_i)\Omega_a\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|\bar{a}_{L_a}^*(S_a^* f_i)\Omega_a\|^2. \quad (3.59)$$

Na mocy (A.52) mamy teraz

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_a &= \sum_{i=1}^{\infty} (\bar{a}_{L_a}^*(S_a^* f_i)\Omega_a, \bar{a}_{L_a}^*(S_a^* f_i)\Omega_a) = \sum_{i=1}^{\infty} (S_a^* f_i, S_a^* f_i) = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} (f_i, S_a S_a^* f_i) = \text{Tr}[S_a S_a^*]. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Korzystając ze wzorów (3.42b) i (3.42c) przekształcamy ten wzór do postaci

$$\mathcal{N}_a = \frac{1}{4} \text{Tr} [h^{-1/2}(h_a - h)h_a^{-1}(h_a - h)h^{-1/2}]. \quad (3.61)$$

W dodatku A.3 do pracy [Her05] Herdegen wykazał, że przy uczynionych założeniach, unitarna równoważność opisanych wcześniej reprezentacji π i π_a algebry Weyla $W(\widehat{\mathcal{L}})$ jest równoważna warunkowi

$$\mathcal{N}_a = \frac{1}{4} \text{Tr} [h^{-1/2}(h_a - h)h_a^{-1}(h_a - h)h^{-1/2}] < +\infty. \quad (3.62)$$

Tym samym równoważność reprezentacji rozważanych algebr zyskuje naturalną interpretację fizyczną. Dwie reprezentacje algebry $W(\widehat{\mathcal{L}})$ są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy zawierają skończoną ilość kwantów pola swobodnego.

Naszkicujemy teraz wyprowadzenia wzoru opisującego energię Casimira badanego układu. Ponieważ procedura ta jest niezwykle podobna do tej która doprowadziła do wzoru (3.62), omówimy ją bardzo krótko. Jak to zostało powiedziane w rozdziale (3.2) energia Casimira jest określona przez wartość oczekiwaną hamiltonianu H układu izolowanego Q w stanie podstawowym układu Q - M :

$$\mathcal{E}_a = (\Omega_a, H \Omega_a). \quad (3.63)$$

Jak wiem hamiltonian H jest postaci $d\Gamma(h)$, gdzie h jest operatorem definiującym układ izolowany. Jego wartość oczekiwaną wyrażamy za pomocą formy q_h :

$$\mathcal{E}_a = q_h(\Omega_a, \Omega_a) = \sum_{i=0}^{\infty} \|\bar{a}(h^{1/2}f_i)\Omega_a\|^2. \quad (3.64)$$

Wzór ten można otrzymać poprzez podstawienie $f_i \mapsto h^{1/2}f_i$ w (3.59). Pozostała część rachunków przebiega tym samym tak jak poprzednio i jako końcowy rezultat otrzymujemy

$$\mathcal{E}_a = \frac{1}{4} \text{Tr} [(h_a - h)h_a^{-1}(h_a - h)]. \quad (3.65)$$

Warunek skończonej energii Casimira

$$\mathcal{E}_a = \frac{1}{4} \text{Tr} [(h_a - h)h_a^{-1}(h_a - h)] < +\infty, \quad (3.66)$$

jest fizycznym ograniczeniem jakie narzucamy na wszystkie badane modele. Podstać $\mathcal{N}_a$ i $\mathcal{E}_a$ dana przez równania (3.62) i (3.66) okazuje się być wyjątkowo dogodna w konkretnych rachunkach, dlatego właśnie z nich będziemy korzystać w dalszej części pracy.

Kończąc już, wprowadzimy odrobinę terminologii. Jeśli dla danego modelu zdefiniowanego przez h_a nie jest spełniony warunek równości algebr (3.37) lub jeden z warunków (3.62), (3.66) to mówimy, że model ten jest **osobliwy względem modelu wyjściowego** lub po prostu **osobliwy**. Równoważnie będziemy mówili, że dany typ oddziaływania jest osobliwy.

3.5 Lokalna gęstość energii dla pola skalarnego

Do tej pory omawialiśmy tylko wartości globalne, takie jak całkowita energia i liczba cząstek wytworzonych w układzie, teraz zaś przejdziemy do dyskusji lokalnej gęstości energii. Ograniczmy się przy tym do szczególnego przypadku bezmasowego pola skalarnego, gdyż jest on najważniejszy dla niniejszej pracy. Tak jak poprzednio

pominiemy wiele szczegółów, odsyłając czytelnika do rozdziału szóstego *Energy density of quantum field* pracy [Her05].

Rozważania tego problemu zaczniemy od sformułowania go w sposób naiwny. Naszym punktem wyjścia jest standardowe wyrażenie na tensor energii-pędu pola skalarowego $T_{\mu,\nu}(t, \vec{x})$. Gęstość energii jest dana jego składową dla $\mu = \nu = 0$:

$$T_{0,0}(t, \vec{x}) = \frac{1}{2} \left(P(t, \vec{x})^2 + (\vec{\nabla} X(t, \vec{x}))^2 \right). \quad (3.67)$$

Od tej pory będziemy przyjmować, że $t = 0$ i opuszczać symbol t w notacji. Wyrażenie (3.67) z punktu widzenia matematyki jest pozbawione sensu, gdyż występująca w nim wielkość $P(\vec{x})$, jak również $X(\vec{x})$, jest dystrybucją o wartościach operatorowych, więc w ogólności nie można podnieść go do kwadratu. W celu zaradzenia temu problemowi wprowadzamy operację rozdzielania punktów (ang. *point-splitting*), która polega na wprowadzeniu wielkości

$$H_2(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2} \left(P(\vec{x})P(\vec{y}) + (\nabla X(\vec{x})) \cdot (\nabla X(\vec{y})) \right), \quad (3.68)$$

następnie zmodyfikowania jej w sposób, który sprawi, że biorąc granicę $\vec{y} \rightarrow \vec{x}$ otrzymamy matematycznie poprawny rezultat. Modyfikacja o której mowa, polega na wprowadzeniu uporządkowania normalnego:

$$H(\vec{x}) = \lim_{\vec{y} \rightarrow \vec{x}} : H_2(\vec{x}, \vec{y}) : \equiv \lim_{\vec{y} \rightarrow \vec{x}} [H_2(\vec{x}, \vec{y}) - (\Omega, H_2(\vec{x}, \vec{y})\Omega)], \quad (3.69)$$

gdzie Ω oznacza stan podstawowy rozważanej teorii.

W formalizmie stosowanym w tej pracy dystrybucjom $X(\vec{x})$ i $P(\vec{x})$ odpowiadałyby wielkości $X(u) = \Phi(0, u) \in W(\widehat{\mathcal{L}})$ i $P(v) = \Phi(v, 0) \in W(\widehat{\mathcal{L}})$, gdzie funkcje u, v należą do zbioru funkcji klasy Schwartza o wartościach rzeczywistych, który będziemy oznaczać przez $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$. Wobec tego $X(u)$ jest operatorem który jest przyporządkowany stanowi opisanemu funkcją u . By otrzymać operator zlokalizowany w punkcie $X(\vec{x})$ trzeba byłoby mechanicznie podstawić $u(\vec{x}_1) = \delta(\vec{x}_1 - \vec{x})$. Jak jednak łatwo się domyślić, taka procedura nie jest matematycznie poprawna.

Naszukujemy teraz matematycznie ścisłą wersję powyższej procedury. Naszym celem jest znalezienie gęstości energii w stanie podstawowym Ω_a , zależnym od parametrów a opisujących położenie ciał makroskopowych. By to zrobić, najpierw potrzebujemy podać poprawny odpowiednik wyrażenia $H_2(\vec{x}, \vec{y})$, okazuje się nią być dystrybucja o wartościach operatorowych, który będziemy oznaczać $H_2(w_1, w_2)$. Dystrybucja ta jest określona na funkcjach klasy Schwartza $w_1, w_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$. Teraz $(\Omega_a, : H_2(w_1, w_2) : \Omega_a)$ definiuje dystrybucję regularną $T_a(\vec{x}, \vec{y})$ o wartościach zespolonych. W ostatnim kroku należy wziąć granicę $\vec{y} \rightarrow \vec{x}$, w rezultacie czego dostaniemy wyrażenie na gęstość energii.

Przejdźmy teraz do podania konkretnych wzór na gęstość energii. Jak już zostało powiedziane wcześniej konstrukcja teorii quasi-swobodnej dla bezmasowego pola skalarowego sprowadza się do zastosowania konstrukcji przedstawionej w rozdziale (3.3), dla $\mathcal{H} = L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3, d\mu)$ i $h = \sqrt{-\Delta}$. Formalizm z rozdziału (3.4) również pozostaje w mocy, choć może być konieczne zaostrenie warunków jakie ma spełniać operator h_a . Kwestii tej nie będziemy szerzej dyskutować, bowiem nie wnosi ona wiele do treści niniejszej pracy.

Zauważmy, że przestrzeń funkcji Schwartza o wartościach rzeczywistych $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ jest podzbiorem $\mathcal{D}_{\mathcal{H}}(h^{1/2}) \cap \mathcal{D}_{\mathcal{H}}(h^{-1/2})$, więc możemy je wykorzystać do określenia

ścisłych odpowiedników wyrażeń $X(\vec{x})$ i $P(\vec{x})$. Matematycznie poprawna wersja wzoru (3.68) to

$$H_2(w_1, w_2) = \frac{1}{2}(\Phi(w_1, 0)\Phi(w_2, 0) + \Phi(0, \nabla w_1) \cdot \Phi(0, \nabla w_2)), \quad (3.70)$$

gdzie $w_1, w_2 \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$. Przez symbol $\Phi(0, \nabla w_1)$ będziemy rozumieć wektor postaci $(\Phi(0, \partial_{x_1} w_1), \Phi(0, \partial_{x_2} w_1), \Phi(0, \partial_{x_3} w_1))$, zaś iloczyn skalarny jest zdefiniowany w naturalny sposób. W następnym kroku obliczamy dystrybucję o wartościach zespolonych $(\Omega_a, :H_2(w_1, w_2): \Omega_a)$. Do tego celu wystarczająca jest znajomość wyrazów $(\Omega_a, : \Phi(V_1)\Phi(V_2): \Omega_a)$, dzięki czemu po prostych rachunkach dostajemy

$$(\Omega_a, :H_2(w_1, w_2): \Omega_a) \equiv T_a(w_1, w_2) \quad (3.71)$$

gdzie

$$T_a(\varphi, \psi) = \frac{1}{4}(\varphi, (h_a - h)\psi) + \frac{1}{4}(\nabla \varphi, (h_a^{-1} - h^{-1})\nabla \psi), \quad (3.72)$$

Dla większej przejrzystości przyjęliśmy oznaczenia $\varphi = w_1$ i $\psi = w_2$. Ostatni człon w powyższym wyrażeniu rozumiemy jako iloczyn skalarny określony we wspomniany wcześniej sposób. Wyrażenie na gęstość energii zapisane w tej postaci pierwszy raz pojawił się w pracy [HS10] jako wzór (74).

W artykule [Her05] Herdegen wykazał następujące własności dystrybucji $T_a(\varphi, \psi)$.

1. $T_a(w_1, w_2)$ określa dystrybucję na przestrzeni funkcji Schwartza $\mathcal{S}(\mathbb{R}^6)$. Będziemy ją oznaczać $T_a(\vec{x}, \vec{y})$.
2. Dla każdego $\vec{\eta} \in \mathbb{R}^3$ wyrażenie $T_a(\vec{\kappa} + \vec{\eta}, \vec{\kappa} - \vec{\eta})$ zdaje dystrybucję na przestrzeni funkcji $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$. Dla każdej ustalonej funkcji próbnej f odwzorowanie określone za pomocą wyrażenia

$$\vec{\eta} \mapsto \mathcal{E}(a, \vec{\eta}, f) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\kappa T_a(\vec{\kappa} + \vec{\eta}, \vec{\kappa} - \vec{\eta})f(\vec{\kappa}), \quad (3.73)$$

jest ciągle i ograniczone. Gęstość energii zdefiniowana przez procedurę rozdzielania punktów jest zdefiniowana jako dystrybucja

$$\mathcal{E}_{\text{den}}(a, f) := \mathcal{E}(a, \vec{0}, f). \quad (3.74)$$

3. Dla funkcji $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, takiej że $f(\vec{0}) = 1$, definiujemy funkcję $f_\epsilon(\vec{\kappa}) = f(\epsilon\vec{\kappa})$, gdzie $\epsilon > 0$. Zachodzi następujący związek

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \mathcal{E}_{\text{den}}(a, \vec{0}, f_\epsilon) = \mathcal{E}_a, \quad (3.75)$$

gdzie $\mathcal{E}_a$ oznacza globalną energię Casimira.

Niech teraz $T_a(\vec{x}, \vec{y})$ będzie wprowadzoną wyżej dystrybucją regularną, której odpowiada lokalnie całkowalna funkcja oznaczana tym samym symbolem. Gęstość energii określona przez procedurę rozdzielania punktów jest dana jako

$$\mathcal{E}_{\text{den}}(a, \vec{x}) = T_a(\vec{x}, \vec{x}). \quad (3.76)$$

3.6 Historia badań efektu Casimira w ramach algebraicznego podejścia Herdegena

Na następnych kilku stronach przedstawimy pokrótce historie badań nad efektem Casimira prowadzonych w ramach podejścia algebraicznego Herdegena. Mamy nadzieję, że taka forma wykładu pozwoli lepiej zrozumieć jego osiągnięcia oraz zarysować perspektywy potencjalnych przyszłych badań. Siłą rzeczy, w tego typu szkicu musimy niektóre rzeczy pominąć, pozwoliliśmy sobie też na pewne zmiany notacji, by uczynić ją bardziej spójną z tą stosowaną w innych częściach niniejszej pracy. Czytelnika pragnącego głębiej zrozumieć ten temat, odsyłamy do omawianych dalej prac.

Andrzej Herdegen pierwszy raz zaprezentował rozwijane przez siebie podejście w pracy *No-nonsense Casimir force* z 2001 roku [Her01]. Choć w owej niewielkich rozmiarów publikacji wspomniana jest większość elementów pełnego podejścia algebraicznego dla efektu Casimira, to ze względu na pobieżny sposób w jaki zostało one zaprezentowane, należy ją traktować jako zapowiedź dalszych publikacji, co zostało w niej jawnie stwierdzone. Z ważniejszych osiągnięć przedstawionych w *No-nonsense Casimir force*, należy wymienić analizę warunków Dirichleta w ramach algebraicznej kwantowej teorii pola oraz podanie wzoru na energię Casimira dla przypadku pola skalarnego w obecności dwóch płytek. Przy czym sposób wyprowadzenia wspomnianego wzoru zostały tam jedynie zarysowane.

Przyjrzymy się teraz pierwszemu z tych wyników. Używając pojęć wprowadzonych w (3.3) można powiedzieć, iż w pracy tej zwrócono uwagę na niekompatybilność przestrzeni symplektycznej dla problemu swobodnego pola i dla problemu pola skalarnego z warunkami brzegowymi Dirichleta, co skutkuje niemożliwością zbudowania algebry C^* pozwalającej jednocześnie opisać obie te sytuacji. W pierwszym przypadku konstrukcja przestrzeni symplektycznej $(\mathcal{L}_{\text{Free}}, \sigma_{\text{Free}})$ jest oparta o operator ewolucji swobodnej $h_{\text{Free}} = \sqrt{-\Delta}$ i jego standardową dziedzinę $\mathcal{D}(h_{\text{Free}}) \subset L^2(\mathbb{R}, d\mu)$.

W drugiej z rozważanych sytuacji operator ewolucji jest dany jako $h_{\text{Dir}} = \sqrt{-\Delta_{\text{BC}}}$, gdzie Δ_{BC} to operator Laplace'a spełniający warunki brzegowe Dirichleta na płytkach. Wówczas przestrzeń symplektyczna problemu $(\mathcal{L}_{\text{Dir}}, \sigma_{\text{Dir}})$ jest skonstruowana z przestrzeni funkcji $\mathcal{D}(h_{\text{Dir}}) = H_0^1(D_1) \oplus H_0^1(D_2) \oplus H_0^1(D_3)$, gdzie D_i oznaczają trzy zbiory na które dwie płytki dzielą $\mathbb{R}^3$, a $H_0^1(D_i)$ to przestrzeń funkcji Sobolewa. Ze względu na różną naturę tych przestrzeni symplektycznych, nie można zbudować w oparciu o nie wspólnej dla algebry Weyla, czyli tak utworzone modele te są względem siebie osobliwe.

Herdegen zwraca też uwagę, że nie jest możliwe rozwiązanie tej sytuacji przez inny wybór przestrzeni $(\mathcal{L}_{\text{Free}}, \sigma_{\text{Free}})$. Rozpatrzmy bowiem sytuację w której jedna płytka jest nieruchoma, druga zaś może się poruszać, tak że odległość między nimi zmienia się od a_1 do a_2 . Przestrzeni symplektycznych takiego problemu musiałaby zostać zbudowane z funkcji spełniających warunek $f(x, y, z) = 0$, dla $a_1 \leq x \leq a_2$, przy naturalnie wybranym układzie współrzędnych xyz . To zaś sprawia, że cała teoria jest w interesującym zakresie parametrów trywialna, co w jawny sposób przeczy wynikom eksperymentalnym omówionym w (2.2).

Wobec tych faktów Herdegen konkluduje, iż w podejściu w którym płytki traktuje się jako klasyczne, „ciężkie” obiekty, warunki brzegowe Dirichleta należy odrzucić jako idealizację pozbawioną sensu fizycznego. Warunki ten należy zastąpić przez bardziej „rozmyty” model płytek. Stwierdza też, że wymienione różnice między polem swobodnym, a pola spełniającego warunki Dirichleta mają sens fizyczny i gdy próbuje się je ignorować, jak czyni większość standardowych podejść do efektu Casimira, wręcz nieuniknione jest napotkanie nieskończoności o *fizycznym*, a nie tylko

matematycznym, pochodzeniu. Jest oczywiste, że usuwanie tego typu nieskończoności poprzez różnorakie manipulacje matematyczne, nie jest w żaden sposób uzasadnione.

Inaczej mówiąc, jeśli zaczynamy rozważania od pola swobodnego w pustej przestrzeni, to by utworzyć płytkę, która jest w odpowiednim stopniu „przezroczysta” dla pola kwantowego, potrzebujemy dostarczyć do układu tylko skończoną ilość energii. Jeśli jednak chcemy zbudować płytkę na której pole kwantowe będzie spełniało warunki Dirichleta, to do układu będziemy musieli dostarczyć nieskończoną ilość energii, dlatego też ta nieskończona wielkość ma pochodzenie i sens fizyczny. Podobne rozumowania stosuje się do innych tego typu rozbieżnych wielkości jakie można napotkać w rachunkach.

Rozważania te rzucają światło na rezultaty, które przytoczyliśmy dyskutując oryginalną pracę Casimira w rozdziale (2.1) i energię stanu zerowego w (2.3). Energia stanu zerowego dla pola swobodnego wyrażała się jako całka z pewnego wyrażenia po półprostej $[0, +\infty)$, zob. (2.51), a dla przypadku z warunkami Dirichleta jako suma po dyskretnym zbiorze wartości, zob. (2.57). Nasuwa się pytanie, w jaki sposób jedno z tych wyrażeń przechodzi w drugie? Odkładając na bok przedstawioną już przez nas krytykę energii stanu zerowego, analiza Herdegena wskazuje, że mamy do czynienia z układami, które są względem siebie osobliwe, zaś procedura transformacji jednego z tych układów w drugi wymagałaby nieskończonej ilości energii. Tym samym problem przejścia jednego wzoru w drugi możemy zignorować, jako nieposiadający fizycznego sensu. Można zgadywać, że procedura Casimira wprowadzania do problemu funkcji obciążenia, jak i inne jej podobne, skutkuje uczynieniem obu układów odpowiednio kompatybilnymi ze sobą.

Wspomnijmy teraz krótko o wyrażeniu na energię Casimira pola skalarnego, które Herdegen przedstawił w [Her01]. Zarysowanie metody jej obliczania zajmuje stosunkowo dużą część tej krótkiej pracy, Czytelnik zainteresowany szczegółami powinien zwrócić uwagę na zamieszczone tam wzory (11), (12) oraz (13), jak i komentarze którymi są one opatrzone. Ostatecznie, we wzorze (14) podany jest następujące wyrażenia na energię przypadającą na jednostkę powierzchni

$$\mathcal{E}(a) = \mathcal{E}(\infty) - \frac{\pi^2}{1440} a^{-3} + o(a^{-3}), \quad (3.77)$$

przy czym pracujemy tu w systemie jednostek dla którego $c = 1$ i $\hbar = 1$. Wyraz $\mathcal{E}(\infty)$ ma interpretację podwojonej wartości energii samoodziaływania płytki przypadającej na jednostkę powierzchni, jego obecność jest więc całkowicie zrozumiała.

W 2005 ukazuje się w *Annales Henri Poincaré* pierwsza z dwóch podstawowych praca Andrzeja Herdegena prezentujących jego podejście do efektu Casimira, nosi ona tytuł *Quantum backreaction (Casimir) effect I. What are admissible idealizations?* [Her05]. Dużą jej część została już omówiona w rozdziałach (3.2)–(3.5), dlatego tutaj skupimy się na tych wybranych jej fragmentach, które były do tej pory pomijane.

W ostatniej części rozdziału trzeciego tej pracy, który nosi tytuł *A class of quasi-free systems*, Herdegen wymienia kilka układów które można analizować w przedstawionym podejściu. Pierwszym z nich, oznaczonym jako (i) jest n -wymiarowy oscylator harmoniczny, dla którego przestrzeń Hilberta $\mathcal{H}$ jest skończeniem wymiarową przestrzenią euklidesową, standardowo możemy ją utożsamić z $\mathbb{R}^n$. Operatorem h definiującym ewolucję „swobodną” jest symetryczna, dodatnio określona macierz $n \times n$, więc w sposób trywialny zachodzi $\mathcal{D}_{\mathcal{H}}(h) = \mathcal{H}$. Niech $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ będzie bazą utworzoną z wektorów własnych h , przy przyjętych założeniach taka baza zawsze istnieje. Wówczas zachodzi

$$he_i = \omega_i e_i, \quad (3.78)$$

gdzie ω_i to częstość drgań własnych oscylatora wzdłuż osi własnej wyznaczonej przez wektor e_i . Przypomnijmy, że w rozdziale (3.3) przyjęliśmy, iż wszystkie parametry masowe zostały zaabsorbowane przez $\hbar$. Procedura konstrukcji odpowiedniej algebry Weyla dla tego układu, prowadzi do otrzymania doskonale znanego kwantowego oscylatora harmonicznego.

Widzimy, że w tym wypadku nazwanie ewolucji izolowanego układu „ewolucją swobodną” jest mylące, gdyż mamy tutaj do czynienia, i to zarówno w przypadku klasycznej przestrzeni fazowej, jak i algebry układu kwantowego, z dobrze znanym zagadnieniem ruchu w potencjale harmonicznym. Terminologia ta jest jednak uzasadniona poprzez fakt, że dla najważniejszej z punktu widzenia efektu Casimira klasy modeli, w których układem Q jest swobodne pole kwantowe mamy rzeczywiście do czynienia z układem swobodnym. Model n -wymiarowego oscylatora harmonicznego jest wart uwagi choćby dlatego, że obrazuje potencjał podejścia algebraicznego do obejmowania wspólnym formalizmem bardzo różnych typów układów fizycznych.

Jako przykład (ii) Herdegen podaje swobodne pole skalarne. Przypomnijmy tylko, że dla niego mamy $\mathcal{R} = L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3, d\mu)$, $\mathcal{K} = L^2(\mathbb{R}^3, d\mu)$ i $\hbar = \sqrt{-\Delta}$. Punkt (iii) dotyczy układu zawierającego pole skalarne wraz z zewnętrznym, niezależnym od czasu oddziaływaniem. W podpunkcie (iii)₁ omawiany jest przypadek, gdy zewnętrzne oddziaływanie jest postaci $\sigma(\vec{x})$, a nowy operator ewolucji czasowej, będziemy go oznaczać symbolicznie przez h_a , zdefiniowany jest przez równanie

$$h_a^2 = -\Delta + \sigma. \quad (3.79)$$

Herdegen stwierdza, że do tej samej kategorii modeli należy zaliczyć dowolne zaburzenia operatora $-\Delta$, zdefiniowane czy to za pomocą operatorów czy odpowiednich form, jeśli tylko spełniają odpowiednie wymienione przez niego warunki. Jasno stwierdza, że tego typu modele mogą być nieosobliwe względem teorii swobodnej.

W podpunkcie (iii)₂ omawia pole kwantowe żyjące już nie na $\mathbb{R}^3$ lecz na właściwym podzbiorze tej przestrzeni: $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$. Ponadto pole to ma spełniać odpowiednie warunki brzegowe, skutkiem czego operator ewolucji przyjmuje postać $h_a^2 = -\Delta_{BC}$. Herdegen stwierdza, że ten model jest osobliwy względem przypadku swobodnego i jako taki nie nadaje się do analizy efektu Casimira.

Ostatni podpunkt (iii)₃ dotyczy najpopularniejszego typu układu w którym bada się efekt Casimira, czyli sytuacji w której przestrzeń $\mathbb{R}^3$ jest podzielona na rozłączne obszary przez dwuwymiarowe powierzchnie $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_s$. Położenie tych powierzchni opisuje zestaw parametrów a . Ewolucja czasowa określona jest przez operator

$$h_a^2 = -\Delta_a, \quad (3.80)$$

gdzie Δ_a oznacza operator Laplace’a, spełniając odpowiednie warunki brzegowe na powierzchniach Λ_i , $i = 1, 2, \dots, s$. Herdegen powtarza wobec tego układu zastrzeżenia, które przedstawił już w *No-nonsense Casimir force*, odrzucając również ten typ modeli, jako nieodpowiedni dla analizy interesującego nas efektu.

W rozdziale czwartym *Deformation of a finite-dimensional harmonic oscillator* autor przedstawia zastosowanie swojego formalizmu, do obliczenia reakcji zwrotnej n -wymiarowego kwantowego oscylatora harmonicznego, na adiabatyczną zmianę jego częstości i osi własnych. Zanim przejdziemy do jego omówienia tego problemu, zatrzymajmy się na chwilę nad jego relacją do tego rodzaju zjawisk, które zwykle obdarzamy nazwą „efektu Casimira”.

W tym modelu nie występuje żadne pole kwantowe, nie ma też mowy o ciałach makroskopowych M , które wymuszałyby zmianę w układzie kwantowym Q , czyli

n -wymiarowym oscylatorze. Można się więc sprzeczać czy pojawiająca się w tym układzie siła uogólniona może zostać nazwana „siłą Casimira”, należy jednak zwrócić uwagę, że układ ten znajduje swoje naturalne miejsce w podejściu Herdegena. Podstawowe założenie natury fizycznej jego podejścia jest bowiem takie, że efekt Casimira polega na reakcji zwrotnej układu kwantowego na adiabatyczną zmianę zewnętrznych warunków. Właśnie z taką sytuacją mamy do czynienia w omawianym problemie oscylatora harmonicznego, jeśli zmianę częstości i osi własnych, uznamy za wynik zmiany odpowiednich warunków zewnętrznych.

W naszej ocenie przyjęta w fizyce konwencja nazewnicza zabrania mówienia, że zachowanie takiego n -wymiarowego oscylatora jest wynikiem „efektu Casimira”. Mimo tej językowej niedogodności, która ostatecznie nie ma wielkiego znaczenia, uważamy, iż analiza tego układu w kontekście efektu Casimira ma wartość poznawczą. Mamy tu bowiem do czynienia z bardzo porostym modelem, gdzie, jak zaraz zobaczymy, w efekcie reakcji zwrotnej pojawia się odpowiednia siła. Z tego względu jego analiza może rzucić światło na bardziej skomplikowany przypadek układu o nieskończonej ilości stopni swobody.

Przejdźmy teraz do tego jak do układu z n -wymiarowym oscylatorem harmonicznym wprowadzana jest dynamika adiabatyczna. Przypomnijmy, że h jest symetryczną i dodatnią macierzą $n \times n$. Zgodnie z procedurą już wspomnianą w rozdziale w rozdziale (3.4), zastępujemy h rodziną h_a macierzy symetrycznych i dodatnio określonych, gdzie a jest zbiorczą nazwą potrzebnego zbioru parametrów. W tym konkretnym przypadku możemy przyjąć, iż zachodzi $h_0 = h$, gdzie przez 0 oznaczyliśmy symbolicznie sytuację, gdy wszystkie parametry a są równe 0.

Zmieniając trochę notację, częstości własne h będziemy od teraz oznaczać przez ϵ_i , analogiczną zmianę zastosujemy dla h_a . Częstości i wektory kierunkowe osi własnych macierzy h oraz h_a spełniają równania

$$he_i = \epsilon_i e_i, \quad (3.81)$$

$$h_a e_{a,i} = \epsilon_{a,i} e_{a,i}. \quad (3.82)$$

Ogólny wzór (3.22) na energię potencjalną w takim układzie, przybiera dla tego układu postać

$$\mathcal{E}_a = \sum_{i,k=1}^n \frac{(\epsilon_{a,k} - \epsilon_i)}{4\epsilon_{a,k}} |(e_{a,k}, e_i)|, \quad (3.83)$$

gdzie $(\cdot, \cdot)$ oznacza euklidesowy iloczyn skalarny.

By lepiej zilustrować otrzymany wynik, Herdegen rozpatruje przypadek dwuwymiarowego oscylatora, dla którego częstości nie ulegają zmianie, ale którego obie osie własne w pewnej chwili zaczynają się obracać adiabatycznie z tą samą prędkością. W takiej sytuacji zbiór a redukuje się do jednego parametru, kąta φ między wektorami $e_{\varphi,i}$ i e_i . Zachodzą oczywiste związki $e_{0,i} = e_i$, $(e_{\varphi,1}, e_2) = -(e_{\varphi,2}, e_1) = \sin(\varphi)$ i $\epsilon_{\varphi,k} = \epsilon_k$. Wzór (3.83) przyjmuje teraz postać

$$\mathcal{E}_\varphi = \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1)^2}{4} (\epsilon_1^{-1} - \epsilon_2^{-1}) \sin(\varphi)^2. \quad (3.84)$$

Natomiast na podstawie wzoru (3.21) otrzymujemy działający w tym układzie moment siły:

$$\mathcal{F}_\varphi = -\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{4} (\epsilon_1^{-1} - \epsilon_2^{-1}) \sin(2\varphi). \quad (3.85)$$

Autor zauważa, że gdy $\epsilon_1 \searrow 0$ przy $\epsilon_2 = \text{const}$, czyli gdy ruch po osi wyznaczonej przez wektor $e_{\varphi,1}$ dąży do ruchu swobodnego, wówczas moment siły dla $\varphi \neq 0$ dąży

do nieskończoności, co jest zgodne z oczekiwaniami. Jednocześnie zastosowane do tego układu podejście wzorowane na metodzie energii stanu zerowego przewidywałoby zerowy moment siły, co jest zupełnie niefizycznym rezultatem. Jest to kolejny ważki argument, przeciwko korzystaniu z energii stanu zerowego.

Rozdział siódmy *Remarks on relations with some other approaches* omawianej pracy poświęcony jest dyskusji relacji między zaprezentowanym we wcześniejszych częściach pracy podejściem algebraicznym, a innymi metodami spotykanymi w literaturze. Każdy Czytelnik zainteresowany miejscem jakie zajmuje podejście Herdegena w dziedzinie badań efektu Casimira koniecznie powinien zapoznać się z tym rozdziałem oraz krótką dyskusją podejścia opartego o energię stanu zerowego zamieszczoną pod koniec rozdziału drugiego tej pracy.

W omawianym rozdziale Herdegen komentuje podejście bazujące na „funkcjach Greena” oraz te w których efekt Casimira oblicza się korzystając z dwóch operatorów energii: operatora energii pola swobodnego i operator energii uwzględniający oddziaływanie. Wskazuje również, dlaczego nie należy uważać tych metod za specjalnie satysfakcjonujące. Jednak z naszego punktu widzenia dwa inne wątki tego rozdziału są bardziej interesujące.

Pierwszym z nich jest analiza podejścia opartego o energię stanu zerowego w ramach formalizmu algebraicznego Herdegena, które jest swego rodzaju kontynuacją dyskusji kończącej rozdział drugi *A quantum system under external conditions* tej pracy. Autor pokazał tam, że wyrażenia kluczowe dla obliczeń opartych o energię stanu zerowego można wyprowadzić z jego formalizmu, jeśli dokona się kilku nieuprawnionych przekształceń matematycznych, w czym dopatruje się źródeł nieskończoności obecnych w standardowej analizie. Waga poczynionych tu ustaleń, wciąż chyba nie znalazła właściwego oddźwięku w literaturze przedmiotu.

Drugim ważnym dla nas tematem omawianym w tym rozdziale, jest kwestia lokalnej quasi-równoważności reprezentacji w kontekście lokalnej gęstości energii. Znaczenie tego zagadnienia dla niniejszej pracy stanie się jasne w rozdziale (5.4). Przedyskutujemy najpierw samo pojęcie lokalnej quasi-równoważności reprezentacji, by móc bardziej rzeczowo wyjaśnić jak stosuje się ono do lokalnej gęstości energii.

Dopuszczając się pewnych uproszczeń, problem ten można rozumieć w następujący sposób. Rozpatrzmy znów system składający się z pola skalarnego i dwóch płytek, przy czym model płytek może być zarówno osobliwy, jak i nieosobliwy. Dla problemu pola swobodnego budujemy sieć lokalnych obserwabli, którą oznaczymy przez $\mathcal{A}_{\text{Free}}(\mathcal{O})$. Sieć ta posiada reprezentację π_{Free} w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}_{\text{Free}}$. Dla przypadku układu z dwoma płytkami konstruujemy sieć $\mathcal{A}_{\text{Plates}}(\mathcal{O})$ z reprezentacją π_{Plates} na przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}_{\text{Plates}}$.

Nie możemy zakładać, że sieci lokalnych algebr są identyczne, opisują wszak dwie różne sytuacje fizyczne. Ponieważ jednak opisują one obserwabli które można zmierzyć w zbiorze $\mathcal{O}$, mogą one być równe, jeśli obszar ten jest odpowiednio „daleko” od miejsca, gdzie znajdują się płytki. Dokładniej, przyjmijmy, że $\mathcal{O}$ jest ograniczonym zbiorem otwartym, którego domknięcie nie przecina się z obszarem czasoprzestrzeni zajmowanym przez płytki, ewentualnie jest od tego obszaru odpowiednio oddalony. Wówczas może zachodzić równość $\mathcal{A}_{\text{Free}}(\mathcal{O}) = \mathcal{A}_{\text{Plates}}(\mathcal{O})$, w takiej sytuacji tą lokalną algebrę będziemy oznaczać po prostu jako $\mathcal{A}(\mathcal{O})$. Żądanie by reprezentacje π_{Free} i π_{Plates} były *globalnie* równoważne jest w ogólności zbyt mocny warunkiem, niemniej jeśli ograniczymy się do wielkości *lokalnych*, które można zmierzyć w $\mathcal{O}$ sytuacja prezentuje się inaczej.

Rozpatrzmy element $A \in \mathcal{A}(\mathcal{O})$ i jego reprezentację $\pi_{\text{Free}}(A)$ jako operatora na przestrzeni $\mathcal{H}_{\text{Free}}$. Niech stan układu, przy czym stan rozumiemy tu w sensie

podanym w (3.1), będzie dany na przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}_{\text{Free}}$ jako macierze gęstości $\rho_{1,\mathcal{O}}$. Jeśli istnieje macierz gęstości $\rho_{2,\mathcal{O}}$ określona na przestrzeni $\mathcal{H}_{\text{Plates}}$, taka że dla każdego $A \in \mathcal{A}(\mathcal{O})$ zachodzi

$$\text{Tr}[\rho_{1,\mathcal{O}} \pi_{\text{Free}}(A)] = \text{Tr}[\rho_{2,\mathcal{O}} \pi_{\text{Plates}}(A)], \quad (3.86)$$

to mówimy, że reprezentacje są **lokalnie quasi-równoważne**.

W rozdziale (3.5) omówiliśmy zagadnienie lokalnej gęstości energii zdefiniowanej za pomocą tensora energii-pędu *swobodnej* teorii pola skalarowego, ale w stanie podstawowym Ω_a modelu w którym obecne są ciała makroskopowe. Mamy więc tu do czynienia z reprezentacją analogiczną do π_{Plates} zbudowaną w przestrzeni Focka w oparciu o wektor Ω_a . W rozdziale siódmym pracy [Her05] Herdegen omówił kwestię lokalnej quasi-równoważności tej reprezentacji, z reprezentacją π_{Free} w przestrzeni Focka, która to przestrzeń tym razem jest zbudowana w oparciu o stan podstawowy Ω teorii swobodnej.

Wynik jego analizy można podsumować stwierdzając, że zgodnie z oczekiwaniami lokalna gęstość energii w obszarze $\mathcal{O}$ który jest „odpowiednio daleko” od ciał makroskopowych liczona w stanie Ω_a jest równoważna tej obliczonej w stanie Ω . To czy model płytek jest osobiwy czy nie w stosunku do teorii swobodnej, nie odgrywa tutaj roli, dzięki założeniu że obszar $\mathcal{O}$ jest „odpowiednio oddalony” od ciał makroskopowych, a mierzona wielkość jest zdefiniowana lokalnie. Jednocześnie Herdegen z naciskiem podkreśla, że jest to jedynie wynik *lokalny*, obowiązujący dla ściśle określonej klasy obszarów $\mathcal{O}$, na podstawie którego nie można wyciągać wniosków odnośnie *globalnej* (całkowitej) energii Casimira. W przypadku bowiem wielkości globalnych warunki kompatybilności modeli, lub ich brak, odgrywają kluczową rolę w badanym problemie i uniemożliwiają porównanie lokalnej gęstości energii w obu tych modelach, gdy obszar $\mathcal{O}$ w którym jest ona mierzona przecina się z obszarem zajmowanym przez ciała makroskopowe.

Przejdźmy teraz do wyników drugiej podstawowej pracy Andrzej Herdegena *Quantum backreaction (Casimir) effect II. Scalar and electromagnetic fields* [Her06]. Jak można wnioskować z jej tytułu, pokazano w niej jak korzystając z ogólnego formalizmu wyłożonego w omówionej właśnie pracy, można obliczyć efekt Casimira w układzie dwóch płytek oddziałujących z polem skalarnym lub elektromagnetycznym. Dokładniej rzecz biorąc wykazane zostało, że przypadek pola elektromagnetycznego z „rozmytymi” warunkami brzegowymi, może zostać zredukowany do uprzedniego rozwiązania problemu pola skalarowego dla podobnie „rozmytych” warunków brzegowych Dirichleta i Neumanna. Uzasadnia to porządek pracy i to, że najpierw przedyskutujemy fragment poświęcony właśnie polu skalarnemu.

W pierwszym kroku Herdegen analizuje układ złożony z swobodnego pola skalarowego, do którego później zostaną wprowadzone nieskończone płytki. Już na tym poziomie warto rozłożyć problem na część dotyczącą ruchu w płaszczyźnie xy , w której potem będą znajdować się owe płytki, i tą odnoszącą się do ruchu w kierunku z , prostopadłego do tej płaszczyzny. Wielkości opisujące ruch w płaszczyźnie xy będziemy opatrywali indeksem $\perp$.

Wykorzystywane do konstrukcji teorii quasi-swobodnej przestrzenie Hilberta $\mathcal{R}$ i $\mathcal{K}$ (zob. roz. (3.3)) rozkładane są w następujący sposób: $\mathcal{R} = \mathcal{R}_\perp \otimes \mathcal{R}_z$ i $\mathcal{K} = \mathcal{K}_\perp \otimes \mathcal{K}_z$. Operator h na $\mathcal{K}$ może zostać przedstawiony jako

$$h = \sqrt{(h_\perp \otimes \text{id}) + (\text{id} \otimes h_z)}. \quad (3.87)$$

Dla swobodnego pola skalarowego zachodzą następujące relacje: $\mathcal{K}_\perp = L^2(\mathbb{R}^2, dx dy)$, $\mathcal{K}_z = L^2(\mathbb{R}, dz)$, $h_\perp^2 = -\Delta_\perp$, $h_z^2 = -\partial_z^2$, gdzie $\Delta_\perp$ to dwuwymiarowy operator

Laplace’a. Wprowadzenie do układu płytek Herdegen modeluje poprzez zastąpienie operatora h_z przez rodzinę operatorów $h_{z,a}$, gdzie a to odległość między płytkami.

W następnym kroku autor zajmuje się wyprowadzeniem wersji warunków (3.62) i (3.66) w postaci odpowiedniej dla rozważanego problemu. Ponieważ rozważane płytki są nieskończone, nie możemy liczyć na to, że energia Casimira $\mathcal{E}_a$ i liczba utworzonych cząstek $\mathcal{N}_a$ obliczone dla całego układu będą skończone. Skończone za to powinny być wartości obu tych wielkości przypadające na „jednostkę powierzchni”. Kierując się tym Herdegen wyprowadza następującą, nietrywialną wersję wspomnianych warunków.

$$n_a := \lim_{L_x, L_y \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{N}_a}{L_x L_y} = \frac{1}{16\pi} \text{Tr}(h_{z,a} - h_a) < +\infty, \quad (3.88)$$

$$\epsilon_a := \lim_{L_x, L_y \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{E}_a}{L_x L_y} = \frac{1}{24\pi} \text{Tr}[(h_{z,a} - h_a)(2h_z + h_{z,a})(h_{z,a} - h_z)] < +\infty. \quad (3.89)$$

Jak łatwo się domyślić L_x, L_y oznaczają długość brzegów płytki. Należy jednak zwrócić uwagę, że określenie w poprawny sposób dwóch powyższych granicy, gdy $L_x, L_y \rightarrow \infty$, okazuje się być problemem uwikłanym w pewne nieoczywiste subtelności techniczne, których jednak nie będziemy tutaj omawiać. Kolejny raz widzimy, jak wiele uwagi wymaga poprawna analiza efektu Casimira.

W tym momencie pojawia się problem znalezienia rodziny operatorów $h_{z,a}$ dla której spełnione są zależności (3.88) i (3.89). Metoda użyta do tego celu została zaproponowana już w *No-nonsense Casimir force* [Her01], oraz pokrótce opisana jako przypadek (iii)₁ w rozdziale trzecim pracy [Her05]. Zasadniczo polega ono na takim zmodyfikowaniu własności spektralnych operatora h_z w reprezentacji pędowej, tak by nowo powstały operator czynił zadość wspomnianym warunkom.

Dokładniej, niech $(h_{z,a}^{\text{BC}})^2 = (\partial_z^2)_{\text{BC}}$ będzie operatorem spełniającym ostre, a więc osobliwe warunki brzegowe dla $z = 0$ i $z = a$. Niech ponadto F i G będą rzeczywistymi, nieujemnymi i mierzalnymi funkcjami określonymi na zbiorze $[0, +\infty)$. Rodzinę operatorów $h_{z,a}$ określamy jako

$$h_{z,a} = h_z + G(h_z) \left[F(h_{z,a}^{\text{BC}}) - F(h_z) \right] G(h_z). \quad (3.90)$$

Ta klasa okazuje się zbyt ogólna z punktu widzenia (3.88) i (3.89), co wymusza narzucenie dodatkowych ograniczeń na funkcje F i G . Nie wnikając w szczegóły techniczne, główna idea tych modyfikacji jest następująca. Jeśli przez $k \in [0, +\infty)$ oznaczmy elementy widma operatora $h_{z,a}$, to dla dużych wartości k jego własności spektralne mają dążyć do tych jakie posiada operator ewolucji swobodnej h_z . Jest to motywowane wielokrotnie już przytaczamy faktem fizycznym: należy oczekiwać, iż dla rosnących częstotliwości ciała makroskopowe stają się coraz bardziej przeźroczyste dla promieniowania. Ponieważ dużym częstotliwościom odpowiadają duże wartości k , więc zachowanie pola dla $k \rightarrow \infty$ powinno coraz bardziej przypominać ewolucję swobodną.

Wprowadzona jest również przeskalowana wersja problemu, w której wcześniej wybrane funkcje F i G zostają zastąpione przez

$$F_\mu(p) = \mu F\left(\frac{p}{\mu}\right), \quad G_\mu(p) = G\left(\frac{p}{\mu}\right), \quad \mu > 0. \quad (3.91)$$

Autor pracy wykazał, że przy odpowiednich warunkach, rozpatrywany model dąży przy $\mu \nearrow +\infty$, w dobrze określonym matematycznie sensie, do zagadnienia pola skalarnego ze ścisłymi warunkami Dirichleta lub Neumanna. Fakt ten ma duże znaczenie dla zrozumienia otrzymanych w tej pracy wyników.

Wyrażenie na rozwinięcie asymptotyczne energii Casimira przypadającej „na jednostkę powierzchni” dla pola skalarnego podany jest w rozdziale szóstym omawianej pracy jako wzór (6.2). Przyjmuje ono postać

$$\varepsilon_a^\delta = \varepsilon_\infty + \left(\frac{1+\delta}{2}\right) \frac{c}{a^2} - \frac{\pi^2}{1440a^3} + \varepsilon_{4,a}. \quad (3.92)$$

Musimy teraz wyjaśnić sens pewnych pojawiających się w tym wzorze symboli. Parametr δ może przyjmować wartość ± 1 , przy czym $\delta = -1$ daje nam wzór obowiązujący dla „rozmytych” warunków Dirichleta, natomiast $\delta = 1$ odpowiada „rozmytym” warunkom Neumanna. Wielkość ε_∞ nie zależy od a , lecz jest zależna od wyboru funkcji F oraz G i opisuje podwojoną energię samoodziaływania płytki przypadającą na jednostkę powierzchni. Wielkość c także nie jest zależna od a , lecz i ona zmienia się wraz ze zmianą funkcji F oraz G i to w sposób dość skomplikowany. Czytelnik zainteresowany jak dokładnie c zależy od funkcji F i G , powinien przyjrzeć się wzorom (6.32), (6.52) i (6.53) oraz towarzyszącej im dyskusji w [Her06]. W końcu $\varepsilon_{4,a}$ oznacza resztę w rozwinięciu asymptotycznym, spełnia ona następujące nierówności

$$|\varepsilon_{4,a}| \leq \text{const} \frac{1}{a^4}, \quad \left| \frac{d\varepsilon_{4,a}}{da} \right| \leq \text{const} \frac{1}{a^5}. \quad (3.93)$$

Niech teraz $\varepsilon_a^{\delta,\mu}$ oznacza energię dla modelu przeskalowanego, w który do zdefiniowania operatora $h_{z,a}$ użyto funkcji (3.91). Autor omawianej pracy wykazał, że zachodzi

$$\varepsilon_a^{\delta,\mu} = \mu^3 \varepsilon_a^\delta. \quad (3.94)$$

Korzystając z tej własności można łatwo wykazać następujący wzór

$$\lim_{\mu \nearrow \infty} \left(\varepsilon_a^{\delta,\mu} - \mu^3 \varepsilon_\infty - \left(\frac{1+\delta}{2}\right) \frac{c}{a^2} \mu \right) = -\frac{\pi^2}{1440a^3}. \quad (3.95)$$

Wynik powyższej granicy jest dobrze znane w literaturze dotyczącej efektu Casimira dla pola skalarnego w układzie dwóch płytek. Herdegen opatruje ten rezultat następującym komentarzem. Dla przypadku warunków Dirichleta, które w ostrej formie odtwarzane są w granicy $\mu \nearrow \infty$, można mówić o istnieniu uniwersalnej siły Casimira, choć sama energia Casimira jest wówczas nieskończona. Jednak dla warunków Neumanna zarówno siła jak i energia Casimira są w granicy rozbieżne.

Co więcej, kontynuuje Herdegen, rezultatu tego nie można wyjaśnić mówiąc, że po odrzuceniu „nieistotnej, choć nieskończonej stałej” w przypadku warunków Dirichleta energia w rozpatrywanym układzie dana jest uniwersalnym wzorem. Stały wyraz ε_∞ ma bowiem treść fizyczną, opisuje energię pola zgromadzonego wokół dwóch płyt i przez to nie może być traktowany jako nieistotny. Ponadto wyrażenie dane wzorem (3.95) jest ujemne, jednak pełne wyrażenie na energię (3.92) jest zawsze dodatnie, jako wartość oczekiwana dodatniego operatora. Choć więc wyraz ε_∞ nie daje wkładu do siły, to jego pominięcie uniemożliwia poprawne zrozumienie efektu Casimira.

Gdy chodzi o kwestię dodatniości wyrażenia (3.92), powinniśmy poczynić mały komentarz. Okazuje się, że istnieje minimalna odległość na jaką w badanym modelu można zbliżyć badane płytki, co stanie się bardziej zrozumiałe, gdy przejdziemy do omawiania modeli zdefiniowanych bezpośrednio w przestrzeni położeń. Fakt ten jest jednak intuicyjnie prosty do zrozumienia. Płytki w „rozmytym” modelu mają skończoną grubość i gdy zbliżymy je na odległość równą tej grubości dojdzie do ich zderzenia. Przestaną wtedy obowiązywać rozliczne założenia jakich wymagamy od badanego układu. Istnienia minimalnej odległości, jaką możemy rozpatrywać w tym modelu, wyjaśnia czemu wzór (3.92) może przedstawiać dodatnią wielkość.

Osobnej uwagi wymaga obecność członu c/a^2 we wzorze obowiązującym dla „rozmytych” warunków Neumanna. Patrząc z punktu widzenia standardowego podejścia do efektu Casimira, należałoby się zapytać, kiedy $c \neq 0$, lecz bazując na uzyskanych wynikach Herdegen odwraca to pytanie. Wskazuje on bowiem, że nie jest znany żaden ogólny powód by stała c zniknęła. Co więcej w chwili pisania tego artykułu, przypomnijmy, że opublikował go w 2005 r., nie był znany mu żaden konkretny przypadek modelu z $c = 0$. Znalazł za to szczególną klasę modeli, dla których musi zachodzić $c > 0$. Do kwestii tych powrócimy niedługo.

Rozdział siódmy artykułu Herdegena jest poświęcony wykazaniu tego, że oryginalny problem Casimira dla pola elektromagnetycznego i dwóch „rozmytych” płytek może zostać sprowadzony do „superpozycji” problemów pola skalarnego dla „rozmytych” warunków Dirichleta i Neumanna. Kolejny raz badany problem okazuje się obfitować w wiele nieoczekiwanych subtelności.

Jego omówienie rozpoczniemy od wypisania równań Clerka Maxwella, używając systemu jednostek CGS:

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{c} 4\pi \vec{j}, \quad (3.96a)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi \rho, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (3.96b)$$

Równania (3.96a) należy uważać, za równania ruchu *pierwszego* rzędu w czasie, zaś (3.96b) za równania więzów. Z tego względu nie mamy całkowitej swobody wyboru warunków początkowych, jaka obecna jest choćby w przypadku standardowego równania falowego. Wybierając te warunki musimy zagwarantować, że spełniają one równania więzów, więc w pierwszym kroku należy te równania rozwiązać i zidentyfikować te zmienne polowe, które są niezależne.

Tutaj jednak pojawia się nowy problem. Dynamika wybranych niezależnych zmiennych polowych musi zostać tak sformułowana, by można było odtworzyć „rozmyte” warunki brzegowe dla pola elektromagnetycznego. Skutkiem tego, geometria problemu, to czy pracujemy w układzie płytka-płytką, sfera-płytką, etc., wpływa na to jakie zmienne pola należy wybrać jako niezależne. Zły wybór niezależnych zmiennych polowych sprawia, że poprawne odtworzenie zachowania układu zawierającego pole elektromagnetyczne staje się trudniejsze, lub zgoła niemożliwe. Aby zidentyfikować zmienne właściwe dla układu płytka-płytką Herdegen przeprowadził bardzo subtelną analizę, której szczegółów nie będziemy przytaczać. W wyniku jej doszedł do następujących wniosków.

Na poziomie przestrzeni symplektycznej, problem pola elektromagnetycznego z odpowiednimi warunkami brzegowymi reprezentuje suma prosta przestrzeni symplektycznych odpowiadających problemowi pola skalarnego z „rozmytymi” warunkami brzegowymi Dirichleta i Neumanna. Analogicznie, algebra C^* odpowiadająca polu elektromagnetycznemu jest iloczynem tensorowym algebr C^* zbudowanych dla pola skalarnego spełniającego wspomniane już warunki brzegowe. Dzięki temu można pokazać, że wzór na energię Casimira przypadającą na jednostkę powierzchni, można otrzymać dodając do siebie dwa warianty wzoru (3.92). Energia ta dla modelu przeskalowanego przybiera więc postać:

$$\varepsilon_{\text{EM},a}^{\mu} = \varepsilon_a^{1,\mu} + \varepsilon_a^{-1,\mu} = \mu^3 2\varepsilon_{\infty} + \mu \frac{c}{a^2} - \frac{\pi^2}{720a^3} + \varepsilon_{4,a}^{\mu}. \quad (3.97)$$

Tym samym siła Casimira przypadająca na jednostkę powierzchni wynosi

$$\mathcal{F}_{\text{EM},a}^{\mu} = -\frac{d}{da} \varepsilon_{\text{EM},a}^{\mu} = \mu \frac{c}{a^2} - \frac{\pi^2}{240a^4} + f_{\text{EM},a}^{\mu}, \quad (3.98)$$

gdzie $f_{\text{EM},a}^\mu$ przedstawia resztę rozwinięcia asymptotycznego siły Casimira. Wyraz proporcjonalny do a^{-4} w ostatnim wzorze, po uwzględnieniu tego, że przyjęliśmy iż $c = 1$, $\hbar = 1$, pokrywa się z kanonicznym wynikiem Casimira, który jest dany przez równanie (2.7).

Koniec rozdziału siódmego jest zarazem końcem głównej części omawianej pracy, stąd nie dziwi to, iż autor przedstawił tu jej ogólne podsumowanie. Patrząc się wstecz na wyniki uzyskane obu częściach pracy *Quantum backreaction (Casimir) effect* ([Her05], [Her06]), Herdegen zwraca uwagę na to jak wiele subtelności, niemożliwych do zaobserwowania za pomocą standardowych metod rachunkowych, zostało wydobyte dzięki użyciu formalizmu algebraicznego. Jest to niewątpliwie duże osiągnięcie w teorii efektu Casimira, ale do tej pory literatury przedmiotu chyba wciąż nie przyswoiła ich w dostatecznym stopniu.

Herdegen dyskutuje również jak wyniki (3.97) i (3.98) mają się do dostępnych danych eksperymentalnych. Z oczywistych względów najbardziej kontrowersyjną kwestią jest obecność członu proporcjonalnego do a^{-2} w rozwinięciu asymptotycznym energii Casimira. Ponieważ badania eksperymentalne efektu Casimira omówiliśmy już stosunkowo dokładnie w rozdziale (2.2), nie będziemy ich tutaj przytaczać. W naszej ocenie przedstawione tam informacje pokazują, że również dziś, choć od publikacji prac Herdegena minęły już prawie dwadzieścia lat, dostępne dane nie pozwalają wykluczyć siły Casimira między dwoma płytkami, która zawiera człon a^{-3} .

Prace nad problemem efektu Casimira dla konfiguracji dwóch płytek były kontynuowane w artykule Andrzeja Herdegena i Mariusza Stopy *Global vs local Casimir effect* z 2010 roku [HS10]. Ponieważ stanowił on ogromną inspirację dla wyników omawianych w głównej części niniejszej pracy, by uniknąć niepotrzebnych powtórzeń, jego wyniki omówimy w sposób mocno wybiórczy.

Główna różnica między podejściem Herdegena i Stopy w stosunku do tego używanego w omówionej właśnie pracy Herdegena [Her06], polega na sposobie modyfikowania operatora h_z . Gdy tam zmieniano jego własności w przestrzeni pędów, tutaj odpowiednie zmiany są dokonywane w reprezentacji położenia. Tym sposobem Herdegen i Stopa definiują pole skalarne z „rozmytymi” warunkami Dirichleta i Neumanna, następnie biorąc superpozycję tych układów dostają model opisujący pole elektromagnetyczne oddziałujące z dwoma płytkami. Z jednym zastrzeżeniem, które omówimy później, otrzymują dla tej klasy modeli wzór (3.97) na energię Casimira pola elektromagnetycznego. Zaznaczyć należy, że niektóre oznaczenia użyte w pracy Herdegena i Stopy mają odrobinę inny sens, niż gdy występowały we wcześniej omówionych publikacjach pierwszego z tych autorów. Dodatkowo, używany przez nich parametr skalowania to $\lambda = 1/\mu$.

Przejdźmy teraz do tego, jak Herdegen i Stopa analizują problem pola skalarnego. Jego dynamika w kierunku z jest dana przez równania

$$(\partial_t^2 + h_a^2)\phi(t, \vec{x}) = 0, \quad h_a^2 = -\partial_z^2 + V_a. \quad (3.99)$$

Występujący w tym wzorze operator V_a jest operatorem skończonego rzędu, który w reprezentacji położenia jest operatorem całkowym o następującym jądrze:

$$V(z, z') = \sigma \left(g(z-b)\overline{g(z'-b)} + g(z+b)\overline{g(z'+b)} \right), \quad (3.100)$$

gdzie g jest pewną funkcją klasy $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, czyli funkcją nieskończenie różniczkowalną o zwartym nośniku. Jej nośnik spełnia ponadto warunek: $\text{supp } g \subset [-L/2, L/2]$, gdzie L jest pewną ustaloną liczbą dodatnią. Funkcję tą można zinterpretować jako opisującą kształt przestrzenny płytek w kierunku z . Natomiast σ to stała,

która w zależności od rozważanych warunków brzegowych przyjmuje jedną z dwóch wartości: $\sigma = \pm 1$. Model taki jest w oczywisty sposób nielokalny, ale, jak komentują to autorzy, nielokalność ta pozostaje pod naszą całkowitą kontrolą.

W podejściu tym staje się oczywiste dlaczego na odległość a dzielącą dwie płytki, należy narzucić warunek

$$a > L. \quad (3.101)$$

W przeciwny bowiem razie dojdzie zderzenia płytek i wiele spośród założeń, których wymagamy od badanego układu traci rację bytu. Tego typu warunek pozwala zagwarantować, że wzór (3.97), wyliczony w reprezentacji pędowej, w poprawny sposób przedstawia *dodatnią* energię Casimira.

Tak zdefiniowaną klasę modeli autorzy poddają bardzo szczegółowej analizie. W rozdziale siódmym ich pracy, pod tytułem *The energy*, zaprezentowany jest następujące rozwinięcia asymptotyczne energii, która w układzie zawierającym pole skalarnie przypada na jednostkę powierzchni.

$$\varepsilon_{\text{Dir}, a} = \varepsilon_{\infty} - \frac{\pi^2}{1440a^3} + o(a^{-3}), \quad (3.102a)$$

$$\varepsilon_{\text{Neu}, a} = \varepsilon_{\infty} - \frac{c}{a^2} + \frac{c_1 I_0}{1440a^3} - \frac{\pi^2}{1440a^3} + o(a^{-3}). \quad (3.102b)$$

Stała c jest tą samą która występuje we wzorze (3.97), symbol c_1 dla drugiej tego typu stałej wprowadziliśmy dla uproszczenia oznaczeń. Zarówno c jak i c_1 zależą od wyboru konkretnego modelu, czyli wybranej funkcji g . Konkretna postać tych zależności nie będzie dla nas istotna, znacznie ważniejsze jest to, że dla wszystkich badanych modeli zachodzi $c > 0$ i $c_1 > 0$. W konsekwencji wyraz zachowujący się jak a^{-2} jest zawsze obecny. We wzorze (3.102b) występuje także zdefiniowana przez autorów funkcja I_k , która również wyraża się przez funkcję g . Można pokazać, że wartość tej funkcji w zerze spełnia zależność $I_0 \geq 0$.

Z wzorów (3.102a) i (3.102b) wynika, że w badanej klasy modeli kanoniczny wyraz Casimira, odpowiedzialny za siłę, która zachowuje się jak a^{-4} , może zostać zaburzony. Jego ogólna postać dla modeli zawartych w tej klasie to

$$-\frac{\pi^2}{720a^3} + \frac{c_1 I_0 \pi^2}{1440a^3}. \quad (3.103)$$

Autorzy opatrują ten wynik komentarzem, że ponieważ wśród badanych modeli istnieją takie, dla których $I_0 = 0$, więc przynajmniej dla części z nich kanoniczny wynik zostaje odtworzony w sposób dokładny.

Autorzy analizują również przeskalowaną wersję badanych modeli, użyty przez nich parametr skalowania λ spełnia warunek $\lambda \in (0, 1]$. W prezentowanym podejściu procedura skalowania ma prostą interpretację fizyczną. Gdy λ zmierza do zera, nośnik funkcji g dąży do punktu, tym samym grubość płyt w kierunku z dąży do zera, podczas gdy siła oddziaływania z polem dąży do nieskończoności. Tak jak poprzednio, w granicy tej odtwarzane są ściśle warunki brzegowe Dirichleta i Neumanna.

W rozdziale ósmym ich pracy Herdegen i Stopa dokładnie analizują lokalne własności rozważanych modeli. Z wielu interesujących wyników tam przedstawionych, jako choćby analizy zachowania stanów⁷ w granicy $\lambda \searrow 0$, musimy poprzestać na omówieniu rezultatów dotyczących lokalnej gęstości energii, zdefiniowanej tak jak zostało to omówione w rozdziale (3.5).

⁷Stany rozumiemy tutaj w sensie podanym w rozdziale (3.1).

Niech $\mathcal{E}_{\text{HS},\text{den}}(a, x, \lambda)$ oznacza gęstość energii dla modelu przeskalowanego przy $\lambda > 0$. Przypomnijmy, że jest ona zdefiniowana jako dystrybucja i w obecnej sytuacji jest ona dystrybucją regularną na $\mathbb{R}$. Autorów interesuje jej granicy punktowa, gdy $\lambda \searrow 0$, natomiast wartości a i x są ustalone. Pokazali oni, że w sensie dystrybucyjnym zachodzi

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{HS},\text{den}}^{\text{B}}(a, x) &:= \lim_{\lambda \searrow 0} \mathcal{E}_{\text{HS},\text{den}}(a, x, \lambda) = \\ &= \begin{cases} -\frac{\sigma}{16\pi^2(|a| - b)^4}, & |x| > b, \\ -\frac{\pi^2}{1440a^4} - \sum_{n \in (2\mathbb{Z}+1)} \frac{\sigma}{16\pi^2(nb - x)^4}, & |x| < b, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.104)$$

gdzie $b = a/2$. Herdegen i Stopa mocno podkreślają, że tylko i wyłącznie dla funkcji próbnej $\varphi(x) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, której nośnik nie przecina się z punktami $x = \pm b$ zachodzi następujący wzór, wyrażający w sposób ścisły to jak należy rozumieć granicę lokalnej gęstości energii przy $\lambda \searrow 0$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \mathcal{E}_{\text{HS},\text{den}}(a, x, \lambda) \varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \mathcal{E}_{\text{HS},\text{den}}^{\text{B}}(a, x) \varphi(x). \quad (3.105)$$

Do tego zagadnienia powrócimy podczas dyskusji zachowania gęstości energii w układzie z dwoma quasi-deltami, której poświęcony jest rozdział (5.4).

Mimo tych zastrzeżeń, by móc porównać lokalną gęstość energii z energią globalną, autorzy decydują się wykonać kilka matematycznie niedozwolonych operacji. Na początku poprzez analizę zachowania wzoru (3.104), gdy $a \nearrow +\infty$, identyfikują oni wyrazy odpowiedzialne za gęstość energii samoodziaływania płytek, jej wartość dla jednej płytki będziemy oznaczać przez

$$\mathcal{E}_{\text{HS},\text{self}}^{\text{B}}(x) = -\frac{\sigma}{16\pi^2 x^4}. \quad (3.106)$$

Wzór (3.104) można teraz przepisać jako:

$$\mathcal{E}_{\text{HS},\text{den}}^{\text{B}}(a, x) = \mathcal{E}_{\text{HS},\text{self}}^{\text{B}}(x + b) + \mathcal{E}_{\text{HS},\text{self}}^{\text{B}}(x - b) + \mathcal{E}_{\text{HS},\text{int}}^{\text{B}}(x), \quad (3.107)$$

gdzie funkcja

$$\mathcal{E}_{\text{HS},\text{int}}^{\text{B}}(x) := \begin{cases} +\frac{\sigma}{16\pi^2(|a| + b)^4}, & |x| > b, \\ -\frac{\pi^2}{1440a^4} - \sum_{n \in (2\mathbb{Z}+1) \setminus \{-1,1\}} \frac{\sigma}{16\pi^2(nb - x)^4}, & |x| < b, \end{cases} \quad (3.108)$$

zostaje w naturalny sposób zinterpretowana jako wyrażenie opisujące gęstość energii oddziaływania między płytkami.

Herdegen i Stopa podejmują się teraz wyliczenia całki po $\mathbb{R}$ z $\mathcal{E}_{\text{HS},\text{int}}^{\text{B}}(x)$, będąc całkowicie świadomi tego, że jest to matematycznie niedozwolone i w ten sposób przekraczają ramy stosowanego formalizmu. Całka ta okazuje się być zbieżna i dla *ściśłych* warunków Dirichleta oraz Neumanna prowadzi do tego samego wyniku:

$$\mathcal{E}_{\text{HS},\text{int}}^{\text{B}} = -\frac{\pi^2}{1440a^3}. \quad (3.109)$$

Tym samym, by odtworzyć wyraz uzyskany przez Casimira w jego oryginalnej pracy wystarczy wykonać, co jest matematycznie zabronione, całkę z gęstości energii $\mathcal{E}_{\text{HS,int}}^{\text{B}}(x)$ po $\mathbb{R}$.

Niemniej należy zwrócić uwagę, że ta procedura odtwarza tylko jeden wyraz z rozwinięcia (3.97), więc osiągnęła jedynie częściowy sukces. Ponadto rachunek ten został wykonany dla ścisłych warunków brzegowych, które w tym podejściu otrzymujemy tylko w granicy skalowania $\lambda \searrow 0$, a jak wykazali Herdegen i Stopa globalna energia Casimira jest wówczas rozbieżna jak λ^{-3} . Te obliczenia są mylący również dlatego, że otrzymana energia jest ujemna, podczas gdy dla $\lambda \neq 0$ energia ta jest zawsze dodatnia oraz skończona.

Wszystkie te fakty ilustrują, jak subtelna jest zależność między energią globalną i lokalną gęstością energii oraz jak ważne jest pozostawanie w ramach zakreślonych przez formalizm algebraiczny. Choć wyniki otrzymane przez przekroczenie tej granicy mogą mieć pewną wartość poznawczą, to jak wskazuje powyższy przykład, w ten sposób potencjalnie tracimy ważne informacje o naturze fizycznej danego układu. Jest wysoce wątpliwe, czy jest to cena warta zapłacenia.

Dalsze badania nad efektem Casimira w ramach tego podejścia prowadził autor niniejszej pracy, który w artykule *Algebraic Approach to Casimir Force Between Two δ -like Potentials* [Zie21] przedstawił wyniki osiągnięte dla układu pola skalarnego z dwoma quasi-punktowymi ciałami. Artykuł ten zawierał błąd rachunkowy, w konsekwencji czego postawiono w nim pewne nieprawdziwe tezy. Błąd ten został zauważonym przez Davide Fermiego oraz Livio Piazzocchera, którzy w związku z tym opublikowali pracę *A note on "Algebraic approach to Casimir force between two δ -like potentials" (K. Ziemian, Ann. Henri Poincaré, Online First, 2021)* [FP23]. Uwzględniając uwagi Fermiego i Piazzocchera autor niniejszej pracy opublikował krótką notę z erratą [Zie23].

Dokładnemu omówieniu wyników dla układu pola skalarnego z dwoma quasi-punktowymi ciałami poświęcona jest większość niniejszej pracy, dlatego tutaj przytoczymy tylko pewne ważniejsze wnioski z nich płynące. Po pierwsze, w przypadku tego układu zachodzi silna rozbieżność pomiędzy rezultatami uzyskanymi w podejściu algebraicznych, a tymi znalezionymi przy użyciu bardziej standardowych metod. W przeciwieństwie do kanonicznego wyrazu Casimira pojawiającego się w problemie dwóch płytek, w przypadku dwóch quasi-punktowych ciał do tej pory nie udało się zidentyfikować analogicznego uniwersalnego wyrażenia, przewidywanego przez wszystkie podejścia. Niemniej nie można wykluczyć, że zostanie ono odkryte w przyszłości.

Po drugie, na poziomie jakościowym formalizm algebraiczny przewiduje iż siła między dwoma quasi-punktami będzie odpychająca, podczas, gdy standardowe metody prowadzą do siły przyciągającej. Należy jednak zauważyć, że obecność członu proporcjonalnego do a^{-2} w rozwinięciu (3.97) sprawia, że również dla układu dwóch płytek siła Casimira może stać odpychająca, podczas gdy kanoniczny wynik mówi o sile przyciągającej.

Po trzecie, rezultaty uzyskane dla gęstość energii w problemie z dwoma quasi-punktowymi ciałami, pokazują, że nie ma żadnego powodu uważać, iż matematycznie niedozwolone operacje będą w ogólnym przypadku rachunkowo wykonywalne. Dokładniej, tak jak Herdegen i Stopa obliczyli gęstość energii dla dwóch płytek ze ścisłymi warunkami brzegowymi, tak tutaj można ją obliczyć dla dwóch idealnie punktowych ciał, kiedy to mamy do czynienia z dwoma potencjałami typu delta Diraca. Wycalkowanie tej gęstości energii po $\mathbb{R}^3$ jest jak wtedy niedozwolone, jeśli jednak będziemy próbowali wykonać tę zabronioną operację, to tym razem wynik

okaże się rozbieżny. Co więcej, tak otrzymana gęstość energii dla problemu dwóch delt jest wielkością niezależną od użytego modelu, podczas gdy globalna energia, jest rozbieżna, ale w sposób bardzo silnie zależny od wyboru tegoż modelu.

Biorąc to pod uwagę, fakt, iż wykonanie nieuprawnionego całkowania gęstości energii dla układu dwóch płytek prowadziło do skończonego wyniku i to takiego, który odtwarzał wyraz Casimira, należy uznać za szczęśliwy zbieg okoliczności. Zwróćmy przy tym uwagę, że układ dwóch płytek posiada większą symetrię, niż układ dwóch delt Diraca, a jak wiadomo, tego typu zbiegi okoliczności częściej zdarzają się w układach o dużej symetrii.

W tym przeglądzie historycznym potrzebujemy jeszcze omówić pracę C. Dappiaggio, G. Nosario i N. Pinamontiego *The Casimir effect from the point of view of algebraic quantum field theory*, która ukazała się w roku 2016 w piśmie *Mathematical Physics, Analysis and Geometry* [DNP16], ponieważ jest ona stosunkowo nową próbą przebadania efektu Casimira dla masywnego pola skalarnego i dwóch płytek w ramach algebraicznej kwantowej teorii pola. Dokładniej, badane są w niej dwa układy. Pierwszy z nich, to nieskończona półprzestrzeń ograniczona nieskończoną płytką. Przypadek ten jest określany jako **system Casimira-Poldera**, co jest odniesieniem do cytowanej już pracy tych dwóch autorów, która poprzedziła pionierski artykuł samego Casimira [CP48]. Drugi badany przypadek to standardowy układ pola skalarnego i dwóch płytek, acz potraktowany w bardzo specyficzny sposób. Układowi temu nadają miano **systemu Casimira** i tylko wyniki które otrzymali dla niego będą nas tutaj interesować.

Nim przejdziemy do krótkiego omawiania tej pracy, potrzebujemy poczynić następującą uwagę techniczną. Mianowicie Dappiaggio, Nosari i Pinamonti zawsze utożsamiają czterowymiarową czasoprzestrzeń Minkowskiego Mink_4 z $\mathbb{R}^4$ z odpowiednim tensorem metrycznym. Również wszystkie rozważane podzbiory $\mathbb{R}^4$ dziedziczą po przestrzeni Minkowskiego odpowiedni tensor metryczny i Czytelnik powinien zawsze mieć to na uwadze.

Jak pokazuje cytowana przez Dappiaggio et al. literatura, autorzy znają prace Andrzeja Herdegena ([Her05], [Her06]) oraz pracę napisaną przez niego wraz z Mariuszem Stopą ([HS10]). Niemniej pewne kluczowe elementy zaproponowanego przez niego podejścia do efektu Casimira nie znalazły w ich pracy satysfakcjonującego oddźwięku. Przeprowadzona przez nich analiza systemu Casimira dotyczy bowiem, jeśli można to tak ująć, sztywnego układu dwóch płytek z warunkami brzegowymi Dirichleta. Jak można przeczytać na początku rozdziału trzeciego ich pracy pod tytułem *Algebraic Quantum Field Theory and the Casimir effect*, rozpatrują oni pole żyjące na zbiorze $Z := \mathbb{R}^3 \times [0, d] \subset \mathbb{R}^4$ i nigdzie nie dyskutują w sposób rzeczowy tego jak wielkość d , oznaczająca oczywiście odległość między płytkami, będzie się zmieniać w czasie [DNP16].

W pracy tej nie można też znaleźć analizy tak ważnego dla nas problemu, czy warunki brzegowe Dirichleta dopuszczają jakąkolwiek nietrywialną dynamikę w modelu, który jest zgodny z algebraiczną kwantową teorią pola? Wydaje się, że fakt iż rozważany przez nich układ jest sztywny, sprawił, iż tego typu problemy nie zyskały z ich strony właściwej uwagi. Wszystko to oczywiście utrudnia porównanie otrzymanych przez nich wyników, z tym uzyskanymi w podejściu Herdegena.

By umieścić uzyskane przez nich wyniki we właściwym kontekście, potrzebujemy najpierw pokrótce opisać schemat teoretyczny, którego używają. Jak zostało to już wspomniane w rozdziale (3.1), algebraiczna kwantowa teoria pola nie precyzuje sposobu, w jaki należy zbudować sieć lokalnych algebr konkretnego modelu, co pozostawia dużą swobodę odnośnie wyboru odpowiednich metod. Dappiaggio, et al.

wybierają do tego celu dobrze znane w literaturze podejście, funkcjonujące pod nazwą **formalizmu funkcjonałów**, którego omówienie Czytelnik może znaleźć choćby w pracy Brunettiego, Dütcha i Fredenhagena [BDF09].

Zacznijmy od zauważenia, że na czasoprzestrzeni Minkowskiego można określić różne rodziny funkcji, takie jak rodzina funkcji gładkich $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^4)$, funkcji gładkich o zwartym nośniku $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^4)$, etc. Ponieważ interesuje ich problem pola skalarnego, autorzy rozpatrują *klasyczne* pole skalarne spełniające równania (por. rów. (24) w pracy [DNP16]):

$$Pu(x) = (\square - \xi R(x) - m^2)u(x) = 0, \quad (3.110a)$$

$$u(\underline{x}, 0) = u(\underline{x}, d) = 0. \quad (3.110b)$$

W równaniach tych m oznacza parametr masowy, $R(x)$ to skalar krzywizny czasoprzestrzeni, ξ to parametr mierzący siłę sprzężenia pola z skalarą krzywizną, zaś $\underline{x} = (t, x, y)$. Ponieważ oddziaływanie z skalarą krzywizną nie jest dla nas ważne, od tego momentu we wszystkich formułach będziemy przyjmować $\xi = 0$. Sami autorzy zaznaczają, że uwzględnienie członu $\xi R(x)$ w płaskiej czasoprzestrzeni Minkowskiego jest motywowane głównie, jeśli nie wyłącznie, tym jak jego obecność wpływa na postać tensora energii-pędu.

Bez niepotrzebnego zagłębiania się w szczegóły, możemy stwierdzić, iż korzystając z wybranych rozwiązań układu równań (3.110a), (3.110b), konstruowana jest przestrzeń funkcji $\mathcal{C}^C(Z)$. W następnym kroku definiowana jest przestrzeń regularnych funkcjonałów $\mathcal{F}_0^C$ nad $\mathcal{C}^C(Z)$. Przez funkcjonał rozumiemy standardowo odwzorowanie, które jest liniowe nad $\mathbb{C}$:

$$\mathcal{F}_0^C \ni F : u(x) \mapsto F(u(x)) \in \mathbb{C}, \quad (3.111a)$$

$$F(\alpha u(x) + \beta v(x)) = \alpha F(u(x)) + \beta F(v(x)), \quad (3.111b)$$

gdzie $u(x), v(x) \in \mathcal{C}^C(Z)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Przymiotnik „regularny” odnosi się do pewnych dodatkowych warunków narzucanych na rozważane funkcjonały, których postać nie jest w tym miejscu ważna. Dobrze znana w literaturze procedura mówi jak, w sposób dość nietrywialny, utworzyć sieć lokalnych algebr wychodząc od przestrzeni funkcjonałów $\mathcal{F}_0^C$. Jak można się domyślić, algebra ta opisuje kwantową wersję badanego problemu. Następnie autorzy budują odpowiednie stany na tej algebrze, przy czym stan jest rozumiany w sensie podanym w rozdziale (3.4). Zbudowanie w ten matematycznie ścisły sposób sieci lokalnych algebr i odpowiednich stanów na niej wypełnia większą część omawianej pracy.

Czytelnik mógł zauważyć, że ponownie napotykamy sytuację, gdy konstrukcja kwantowej wersji problemu, czyli sieci lokalnych algebr, bazuje na znajomości rozwiązań odpowiedniego problemu klasycznego. Korzystając bowiem z rozwiązań równań (3.111a) i (3.111b) opisujących *klasyczną* wersję problemu, konstruowana jest przestrzeń $\mathcal{C}^C(Z)$, która z kolei pozwala określić przestrzeń funkcjonałów regularnych $\mathcal{F}_0^C$. Dopiero zaś ta przestrzeń funkcjonałów pozwala zbudować odpowiednie lokalne algebry. Klasyczna dynamika jest więc w pewnym sensie „ukryta” w kwantowej wersji rozważanego problemu.

Dysponując tym formalizmem Dappiaggio, et al. obliczają szereg wielkości, nas będzie interesować tylko ta którą nazywają „zregularyzowaną gęstością energii”. Jest to dystrybucja na pewnej klasie gładkich funkcji z nośnikiem zwartym, którą to przestrzeń oznaczają symbolem $C_0^\infty(Z)$. Do definicji tej dystrybucji potrzebny jest quasi-swobodny stan ω^0 , którego funkcja dwupunktowa została, wedle ich słów,

zbudowana z stanu podstawowego Minkowskiego⁸ za pomocą metody obrazów. W ich notacji zregularyzowana gęstość energii przyjmuje postać

$$\omega^0(:\hat{T}_{0,0}:_H(f)) = \frac{1}{1440d^4} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x f(x) \left[1 - \frac{5\pi^2}{2} \left(\psi^{(3)}(1 - \frac{x_3}{d}) - \psi^{(3)}(\frac{x_3}{d}) \right) \right]. \quad (3.112)$$

Potrzebujemy zatrzymać się tu na chwilę i omówić sens symboli użytych w ostatnim wzorze. Wybór funkcji $f \in C_0^\infty(Z)$ gwarantuje, że efektywnie całka wykonywana jest nie po całym $\mathbb{R}^4$, lecz tylko po wnętrzu zbioru Z . Symbol $:\hat{T}_{0,0}:_H$ oznacza, że wyrażenie otrzymane przez kwantowanie klasycznego tensora $T_{\mu,\nu}$ zostało „uporządkowane normalnie”, względem iloczynu definiującego rozważaną algebrę. Symbol H w indeksie odnosi się do funkcji Hadamarda, która jest potrzebna przy definicji tego iloczynu. Natomiast $\psi(x)$, $x \in \mathbb{R}$ oznacza pochodną logarytmiczną funkcji gamma Eulera.

Porównując wzór (3.112) z (3.108), zauważamy częściowe podobieństwo między gęstością energii otrzymanej przez Dappiaggiego et al. i tej obliczonej przez Herdegena i Stopę, dla przypadku gdy $|x| < b$. W obecnej chwili nie potrafimy odpowiedzieć na pytanie, czy gdyby rozwinąć wyrażenie w (3.112) w szereg potęgowy w x_3/d oraz wykonać całkowanie z funkcją próbną $f(x)$ o odpowiednio „dużym” nośniku, to w rezultacie zostałyby odtworzony wzór (3.108).

Niezależnie od wyniku tej procedury, uważamy, że podejścia Dappiaggiego et al. nie można uważać za w pełni satysfakcjonujące. Jak już wspominaliśmy, nie przeprowadzili oni analizy subtelnych fizycznych i matematycznych aspektów tego problemu, które Herdegen wskazał w omawianych już wcześniej pracach. Przede wszystkim, jak już wcześniej wspomnieliśmy, ponieważ nie został przeanalizowana kwestia dynamiki układu przy zmieniającej się wartości d , system rozważany przez Dappiaggiego et al. można określić jako niezwykle sztywny, co w naszej ocenie jest bardzo poważnym problemem, gdy chcemy mówić o ruchu tego układu.

Powstaje więc pytanie, czy pochodną po zmiennej d z wyrażenia (3.112) można w ogóle sensownie utożsamić z siłą działającą w rozpatrywanym układzie? Kilka argumentów sugeruje, że odpowiedź jest przecząca. Po pierwsze, jak staraliśmy się pokazać wyżej, model ten dotyczy ścisłych warunków brzegowych Dirichleta, a jak to było wcześniej dyskutowane, prowadzą one do niefizycznych modeli siły Casimira.

Po drugie, jak pokazali Herdegen i Stopa, w badanej przez nich rodzinie modeli matematycznie niepoprawne całkowanie gęstości energii, jest technicznie wykonywalne i prowadzi do skończonego wyniku. Rezultat ten jednak nie odtwarza w sposób w pełni poprawny energii, a więc i siły Casimira. Ponieważ przytoczony wynik Dappiaggia et al. dotyczy właśnie gęstości energii, nie jesteśmy w stanie wykluczyć, iż i tutaj po wykonaniu całki z niej otrzymamy część poprawnego wyniku. Pragniemy jednak zaznaczyć, że w świetle rezultatów omówionych w rozdziale (5.4), taką zgodność należy uważać za wynik szczęśliwego zbiegu okoliczności.

Pomimo tych zastrzeżeń na dzień dzisiejszy nie jesteśmy w stanie rozstrzygnąć, czy wynik uzyskane przez Dappiaggia et al. prowadzą do prawidłowego wzoru na siłę Casimira w badanym układzie. By to rozstrzygnąć potrzebna jest dokładniejsza analiza stosowanego przez nich formalizmu.

Na poprzednik kilku stronach mogliśmy zobaczyć, że formalizm algebraiczny pozwala na matematycznie ścisłą analizę efektu Casimira, odsłaniając wiele jego subtelnych niuansów, które są niedostępne standardowym metodom. Na dzień dzisiejszy

⁸Autorzy używają dla niego nazwy „próżnia Poincarégo”.

uzyskane w jego ramach przewidywania należy uznać za zgodne, a przynajmniej za niesprzeczne, z dostępnymi danymi doświadczalnymi. W naszej ocenie w chwili obecnej w środowisku badaczy efektu Casimira powinna zostać przeprowadzona szersza dyskusja, nad rolą metod algebraicznych dla zrozumienia tego fenomenu. Dopiero w jej rezultacie będzie możliwe właściwe ocenienie ich znaczenia dla tego działu nauki.

W tym momencie możemy zadać pytanie o przyszłość teoretycznych badań efektu Casimira w ramach podejścia Herdegena. Czytelnik nie powinien być zaskoczony tym, że liczba otwartych problemów przed jakim to podejście staje jest ogromna, tak że może wręcz przytłaczać swoim rozmiarem. Odkładając nawet na bok tak ważne dla porównania z eksperymentem zadanie, jak opracowanie algebraicznego wariantu teorii Lifszycza, liczba konfiguracji geometrycznych przebadanych w ramach formalizmu algebraicznego jest na chwilę zbyt mała, by mogła uchodzić za satysfakcjonującą.

W takiej sytuacji wybór problemów badawczych, którymi należy zająć się w pierwszym rzędzie, nie może chyba uniknąć wpływu subiektywnych przekonań piszącego. Biorąc to pod uwagę, chcieliśmy wysunąć na pierwszy plan dwa zagadnienia, jako w naszej ocenie szczególnie ważne w tym momencie. Po pierwsze, czy można przedstawione w niniejszej pracy wyniki uzyskane dla pola skalarnego i dwóch quasi-punktowych ciał uogólnić w ten sposób, by można było za ich pomocą obliczyć efekt Casimira dla układu z polem elektromagnetycznym? Po drugie, czy można w ramach prezentowanego podejścia przebadąć dokładnie problem efektu Casimira w układzie pola skalarnego i pojedynczej sfery?

Należ dodać, że autor niniejszej pracy przeprowadził już wstępną analizę układu pola skalarnego i pojedynczej sfery w obronionej w roku 2013 pracy magisterskiej *Efekt Casimira – algebraiczna analiza modelu sferycznego*. Głównym problemem który stanął na przeszkodzie ukończenia tych badań, dotyczył uzyskania rozwinięcia asymptotycznego energii Casimira, gdy parametr skalowania $\lambda \searrow 0$. W badanym modelu pokazania, że dla wszystkich $\lambda \in (0, \varepsilon)$, przy pewnym $\varepsilon > 0$, problem jest nieosobliwy, okazało się zadaniem nietrywialnym. Mamy jednak nadzieję, że zadanie to zostanie ponownie podjęte, a problem w satysfakcjonujący sposób rozwiązany.

4 Analiza modelu pola skalarnego z dwoma quasi-deltami

4.1 Model układu z dwoma quasi-deltami

Otwieramy obecnie główną część niniejszej pracy, która dotyczy następującego problemu fizycznego. W czterowymiarowej czasoprzestrzeni Minkowskiego obecne jest bezmasowe pole skalarne $\varphi(t, \vec{x})$ oraz dwa identyczne, sferycznie symetryczne ciała o skończonym rozmiarze, na tyle „masywne” by można było je uważać za obiekty makroskopowe. Zgodnie z tym co zostało napisane w rozdziale (3.2) w układzie takim powinna pojawić się odpowiednia siła Casimira, której charakter pragniemy zbadać. Naszej podejście do tego problemu bazuje na badaniach przedstawionych w pracy Andrzeja Herdegena i Mariusza Stopy *Global vs local Casimir effect* [HS10].

Choć formalizm algebraiczny nie narzuca nam ograniczeń odnośnie rozmiarów ciał makroskopowych, to będzie nas interesowało głównie zrozumienie efektu Casimira, dla sytuacji gdy ich rozmiary są bardzo małe. W dalszych częściach pracy zostanie pokazane, że gdy rozmiar tych ciał dąży do zera, badany model jest zbieżny do modelu dwóch delt Diraca. Stąd przyjęliśmy określać tego typu obiekty terminem **quasi-delty**. Okazuje się, że układ dwóch delt jest osobliwy w sensie zdefiniowanym w rozdziale (3.4), jednak w „dowolnie małym otoczeniu” tego układu zawsze istnieje układ nieosobliwy i dzięki temu można mówić o rozwinięciu asymptotycznym „wokół” modelu z dwoma ścisłymi deltami. Wszystkie te wyniki zostaną w sposób matematycznie ścisły sformułowane i udowodnione w dalszej części pracy.

Przystąpmy teraz do bardziej szczegółowego opisu badanego układu. Oznaczmy przez $\vec{a}$ wektor łączący środki obu ciał, zaś przez a długość tego wektora. W czasoprzestrzeni Minkowskiego wybieramy standardowy układ współrzędnych, którego część przestrzenna tworzy układ kartezjański. Choć nie ma to znaczenia dla postaci otrzymanych wyników, to można przyjąć, iż środki obu ciał leżą na osi x . W takiej sytuacji początek układu współrzędnych należy wybrać tak, by ciała były rozmieszczone symetrycznie względem punktu $x = 0$.

Oprócz tego, że oba ciała są sferycznie symetryczne to będziemy również przyjmować, że ich średnica jest zawsze ograniczona od góry przez ustaloną liczbę L . Będziemy też zakładać, że odległość między ich środkami geometrycznymi a spełnia nierówność

$$a > L. \quad (4.1)$$

W przeciwnym wypadku mogłoby dojść do zderzenia tych dwóch ciał i wiele założeń na których bazuje użyty formalizm zwyczajnie przestałoby obowiązywać. Ponieważ taka sytuacji wykraczałoby poza ramy efektu Casimira, ten przypadek należy wykluczyć z prowadzonych tu rozważań.

Przejdźmy teraz do problemu dynamiki pola skalarnego. W przypadku swobodnym jest ona opisywana równaniem

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + h^2 \right) \phi(t, \vec{x}) = 0, \quad h^2 = -\Delta. \quad (4.2)$$

Natomiast równanie ewolucji uwzględniające obecności ciał makroskopowych przybiera postać

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + h_{\vec{a}}^2 \right) \phi(t, \vec{x}) = 0, \quad h_{\vec{a}}^2 = h^2 + V_{\vec{a}}. \quad (4.3)$$

Operator $V_{\vec{a}}$ będziemy nazywać **quasi-potencjałem**, wybór takiej nazwy stanie się bardziej zrozumiały w dalszej części pracy.

By móc zdefiniować quasi-potencjał musimy najpierw wprowadzić pewną klasę funkcji, której elementy będziemy zwykle oznaczać symbolem g . O funkcjach tych zakładamy, że są sferycznie symetryczne, gładkie i posiadają zwarty nośnik:

$$g(\vec{x}) = g(|\vec{x}|) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3), \quad \text{supp } g \subset B\left(\vec{0}, \frac{L}{2}\right). \quad (4.4)$$

Tutaj symbol $\text{supp } g$ oznacza nośnik funkcji g , zaś $B(\vec{0}, L/2)$ kulę domkniętą o środku w punkcie $\vec{0}$ i promieniu $L/2$. Ze względów technicznych (zob. dod. (C.3)), przyjmujemy również, że g może przyjmować tylko nieujemne wartości rzeczywiste:

$$g(\vec{x}) \geq 0. \quad (4.5)$$

Będziemy również stosować następującą umowę. Jeśli $x \in \mathbb{R}$ to przez $g(x)$ będziemy rozumieć obcięcie funkcji $g(\vec{x})$ do osi x , Czytelnik nie powinien mieć problemów ze zrozumieniem z kontekstu o której funkcji mowa. Na mocy definicji funkcja $g(x)$ jest klasy $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$. Przez $U_{\vec{r}}$ będzie oznaczać operator translacji funkcji o wektor $\vec{r}$:

$$[U_{\vec{r}} g](\vec{x}) := g(\vec{x} - \vec{r}). \quad (4.6)$$

Ponieważ funkcje postaci $U_{\vec{r}} g$ są w oczywisty sposób elementami przestrzeni Hilberta $L^2(\mathbb{R}^3, d^3x)$, więc poniższa definicja quasi-potencjału za pomocą iloczynu skalarnego w tej przestrzeni jest matematycznie poprawna.

$$\begin{aligned} V_{\vec{a}} &= \sigma(g) \left(|U_{\vec{b}} g\rangle \langle U_{\vec{b}} g| + |U_{-\vec{b}} g\rangle \langle U_{-\vec{b}} g| \right) = \\ &= \sigma(g) \begin{pmatrix} |U_{\vec{b}} g\rangle & |U_{-\vec{b}} g\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle U_{\vec{b}} g| \\ \langle U_{-\vec{b}} g| \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \frac{1}{2}\vec{a}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

W tym wzorze $\sigma(g)$ jest rzeczywistym parametrem, zależnym od funkcji g , którego dokładna postać zostanie podana dalej, po wprowadzeniu odpowiednich oznaczeń i konwencji. Obecność wyrazu $\sigma(g)$ w quasi-potencjale jest podyktowana przez problem badania rodziny modeli zależnych od parametru λ , otrzymanych przez procedurę przeskalowania jednego, wybranego modelu, czemu poświęcony jest rozdział (4.3). Przy takim wyborze $V_{\vec{a}}$ jako prosty wniosek z twierdzenia Kato-Rellicha otrzymujemy, że operator $h_{\vec{a}}^2$ jest operatorem samoprężonym o tej samej dziedzinie co h^2 .

Nie jest zaskakujące, że operator $V_{\vec{a}}$ przyjmie szczególnie łatwą w interpretacji postać, jeśli zapiszemy go w reprezentacji położeń. W takiej sytuacji jest on operatorem całkowym z jądrem

$$V_{\vec{a}}(\vec{x}, \vec{y}) = \sigma(g) \left[g(\vec{x} - \vec{b}) \overline{g(\vec{y} - \vec{b})} + g(\vec{x} + \vec{b}) \overline{g(\vec{y} + \vec{b})} \right]. \quad (4.8)$$

Tak jak w przypadku pracy Herdegana i Stopy, choć operator ten jest nielokalny, to jego nielokalność jest bardzo prosta do zrozumienia i kontrolowania [HS10]. Ponieważ nazwę „potencjał” stosuje się zwykle do lokalnych oddziaływań, stąd zdecydowaliśmy się określać $V_{\vec{a}}$ jako „quasi-potencjał”. Jak łatwo zauważyć opisuje on sytuację, w której pole $\varphi(t, \vec{x})$ oddziałuje z dwoma identycznymi, sferycznie symetrycznymi ciałami, takich że środek jednego z nich znajduje się w punkcie $\vec{b}$, drugiego zaś w punkcie $-\vec{b}$. Od tego momentu, będziemy utożsamiać nośnik funkcji g z przestrzennym kształtem ciał makroskopowych.

W rozdziale (2.2) pisaliśmy o trwającej już dwadzieścia lat kontrowersji dotyczącej zgodności wyników eksperymentalnych dla efektu Casimira, z wynikami teoretycznymi obliczonymi na podstawie teorii Lifszycza przy zadanym modelu przenikalności

dielektrycznej $\varepsilon(\omega)$. Model plazmowy i model Drudego zakładają lokalny związek między polem elektrycznym a prądem, jednak jeśli w metalu występują takie zjawiska jak choćby anomalny efekt naskórkowy, to relacja między tymi wielkościami staje się nielokalna. Z tego powodu w cytowanym już artykule Klimichitskaj i Mostepanenko (por. roz. 4.3 i 5 w [KM22]) podjęto próbę wyjaśnienia tego problemu, poprzez rozważenie pewnych nielokalnych modeli oddziaływania fal elektromagnetycznych z materiałem. W naszej opinii stanowi to dodatkowy argument na rzecz badania efektu Casimira w modelach z nielokalnymi oddziaływaniami.

Ponieważ funkcja g jest sferycznie symetryczna, wzór (4.8) pokazuje, że quasi-potencjał jest symetryczny względem obrotów wokół osi x . Ponieważ jak łatwo zauważyć, model jest też niezmienniczy względem przesunięcia obu ciał o ustalony wektor $\vec{r}$, wielkości fizyczne mogą zależeć tylko od długości wektora $\vec{a}$ łączącego środki tych ciał. Z tego powodu często będziemy używać notacji, w której wyrażenia zależą nie od $\vec{a}$, ale bezpośrednio od a .

Aby podać jawną postać funkcjonału $\sigma(g)$ potrzebujemy najpierw wprowadzić do rozważań kilka obiektów, które odtąd będą się często pojawiały w niniejszej pracy. Naszym pierwszym krokiem jest obliczenie transformaty Fouriera funkcji $g(\vec{x})$:

$$\begin{aligned}\hat{g}(p) = \hat{g}(\vec{p}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} g(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{i}{p} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ipx} x g(x) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\sin(px)}{px} x^2 g(x),\end{aligned}\tag{4.9}$$

gdzie $p = |\vec{p}|$. Analogicznie jak dla $g(\vec{x})$ definiujemy funkcję jednej zmiennej $\hat{g}(p)$, $p \in \mathbb{R}$. Transformata Fouriera $\hat{g}(\vec{p})$ jest rzeczywistą, sferycznie symetryczną funkcją analityczną, zaś $\hat{g}(p)$ jest rzeczywistą, gładką funkcją parzystą, którą można przedłużyć do funkcji analitycznej na całej płaszczyźnie zespolonej $\mathbb{C}$, zob. dod. (C.1). Ponadto, $\hat{g}(\vec{p})$ jako transformata Fouriera gładkiej funkcji o nośniku zwartym $g(\vec{x})$ jest funkcją klasy Schwartza i w konsekwencji jest też nią $\hat{g}(p)$. Definiujemy

$$M_p = \hat{g}(p)^2.\tag{4.10}$$

Tak określona funkcja M_p jest nieujemna, parzysta i można ją rozszerzyć do funkcji analitycznej w całej płaszczyźnie zespolonej $\mathbb{C}$, ponownie zob. (C.1). Przez $\check{M}_x$ będziemy oznaczać jednowymiarową odwrotną transformatę Fouriera funkcji M_p :

$$\check{M}_x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dp e^{ipx} M_p.\tag{4.11}$$

W dalszym ciągu będziemy używali również następującej notacji:

$$\chi(g) = \frac{2\pi}{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} dp M_p = \sqrt{2\pi}^3 \frac{\check{M}_0}{\alpha},\tag{4.12}$$

gdzie $\alpha > 0$ jest swobodnym parametrem badanego modelu. Jego sens będzie szerzej dyskutowany w kolejnych rozdziałach.

Możemy teraz podać jawną postać funkcji $\sigma(g)$:

$$\sigma(g)^{-1} = -\alpha(M_0 + \chi(g)).\tag{4.13}$$

Powyższy wzór może się wydawać nienaturalnie skomplikowany, dlatego zasadne jest opatrzenie go pewnym komentarzem. Jak to już zostało wspomniane, w rozdziale (4.3) będziemy rozważać sytuację, gdy $V_{\vec{a}}$ zostanie zastąpiony przez rodzinę quasi-potencjałów $V_{\vec{a},\lambda}$, gdzie λ jest pewnym parametrem skalowania. Przyjęcie $\sigma(g)$ w postaci (4.13) gwarantuje, że granica przy $\lambda \searrow 0$ tak określonej rodziny modeli, jest matematycznie dobrze określona, nietrywialna oraz prowadzi do fizycznie interesującego problemu. Znalezienie rodziny quasi-potencjałów których granica skalowania posiada wszystkie te własności, nie jest problemem które posiada oczywiste rozwiązanie. Gdybyśmy w niniejszej pracy badali tylko konkretne, ustalone modele, wystarczające byłoby przyjęcie, przykładowo, $\sigma(g) = -1$. Ponieważ jednak problem zachowania przeskalowanych modeli jest dla nas niezwykle ważny, będziemy we wszystkich obliczeniach korzystać z podanej uprzednio formy $\sigma(g)$.

Przyjrzyjmy się teraz temu, co się stanie z rozważanym modelem, gdy dokonamy następującego podstawienia.

$$g(\vec{x}) \rightarrow Cg(\vec{x}), \quad (4.14)$$

gdzie $C > 0$. Proste obliczenia pozwalają stwierdzić, że wyrazy quasi-potencjału zmieniają się w następujący sposób.

$$|U_{\pm\vec{b}} g\rangle \langle U_{\pm\vec{b}} g| \rightarrow C^2 |U_{\pm\vec{b}} g\rangle \langle U_{\pm\vec{b}} g| \quad (4.15a)$$

$$\sigma(g) \rightarrow C^{-2}\sigma(g). \quad (4.15b)$$

Przyjęta przez nas forma $\sigma(g)$ gwarantuje więc, że sam quasi-potencjał nie ulega zmianie przy takiej transformacji funkcji g . Tym samym bez zmiany fizycznej treści modelu, możemy zażądać by g była odpowiednio znormalizowana. Ze względów rachunkowych wygodnie jest przyjąć, że

$$\hat{g}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x g(\vec{x}) = 1. \quad (4.16)$$

To zaś prowadzi do

$$M_0 = \hat{g}(0) = 1, \quad (4.17a)$$

$$\sigma(g)^{-1} = -\alpha(1 + \chi(g)). \quad (4.17b)$$

W obecnej chwili podstawowe elementy badanego modelu są już jawnie sformułowane. Zanim jednak przejdziemy do analizy efektu Casimira, poprzez obliczenie liczby wykreowanych kwantów pola oraz energii Casimira, musimy przyjrzeć się własnościom operatora $h_{\vec{a}}^2$. Ich badanie ujawni potrzebę dodatkowych warunków jakie będziemy musieli narzucić na nasz model. Analizę tę rozpoczniemy od przyjrzenia się resolwencie $h_{\vec{a}}^2$.

4.2 Analiza resolwenty operatora $h_{\vec{a}}^2$

Zarówno przy obliczaniu resolwenty operatora $h_{\vec{a}}^2$ jak i przy badaniu efektu Casimira, zob. roz. (5), będziemy korzystali z dobrze znanych metod z teorii rozpraszania. By jednak to móc to zrobić, musimy najpierw zagwarantować, iż teoria ta pozwala nam uzyskać pełną informację o badanym problemie. Problem ten dla badanego modelu rozstrzyga twierdzenie Kato-Rosenbluma.

Twierdzenie to mówi, że jeśli H i V są samosprężonymi operatorami na przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$, a V jest operatorem klasy śladowej, to część absolutnie ciągła widma

H jest unitarnie równa widmu absolutnie ciągłemu $H + V$. W tej pracy pojęcie absolutnej ciągłości zawsze będzie odnosiło się do absolutnej ciągłości względem miary Lebesgue'a na $\mathbb{R}$. Jak dobrze wiadomo operator $h^2 = -\Delta$ ma tylko widmo absolutnie ciągle równe $[0, \infty)$. Ponieważ interesuje nas przypadek rodziny $h_{\vec{a}}^2 = h^2 + V_{\vec{a}}$, gdzie $V_{\vec{a}}$ jest operatorem skończonego rzędu, więc tym bardziej operatorem klasy śladowej, widma absolutnie ciągle obu operatorów są unitarnie równe.

Pozostaje jeszcze pytanie o to, czy operator $h_{\vec{a}}^2$ posiada widmo punktowe lub osobliwe? W rozdziale (4.4) pokażemy przy jakich warunkach widmo tego operatora składa się tylko z widma absolutnie ciągłego. Jeśli Czytelnik jest zainteresowany lepszym zrozumieniem roli widma operatora w teorii rozpraszania, polecamy mu zapoznania się z twierdzeniem XI.8 oraz dyskusją na początku rozdziału XI.3 w książce Reeda i Simona [RS78a].

Badanie resolwenty zaczniemy od wprowadzenia następującej konwencji.

$$G_0(w^2) = (w^2 - h^2)^{-1}, \quad G(w^2) = (w^2 - h_{\vec{a}}^2)^{-1}, \quad (4.18)$$

gdzie $w^2 \in \mathbb{C}$. Ponieważ pierwiastek kwadratowy w dziedzinie zespolonej jest funkcją dwuwartościową, przyjmujemy konwencję wedle której dla danej liczby zespolonej $z = w^2$, przez $\sqrt{z} = w$ będziemy rozumieć ten pierwiastek dla którego $\Im w \geq 0$. Resolwenta $G(w^2)$ spełnia równanie Lippmanna-Schwingera

$$G(w^2) = G_0(w^2) + G_0(w^2)V_{\vec{a}}G(w^2). \quad (4.19)$$

W kontekście badanego problemu znany z teorii rozpraszania operator $T(w^2)$ jest określony jako

$$T(w^2) = V_{\vec{a}} + V_{\vec{a}}G(w^2)V_{\vec{a}}. \quad (4.20)$$

Z (4.19) i (4.20) wynikają dwie bardzo ważne zależności:

$$T(w^2) = V_{\vec{a}} + V_{\vec{a}}G_0(w^2)T(w^2), \quad (4.21a)$$

$$G(w^2) = G_0(w^2) + G_0(w^2)T(w^2)G_0(w^2). \quad (4.21b)$$

Wyrażenie (4.21a) nosi nazwę równania Lippmanna-Schwingera dla operator $T(w^2)$. Dokładniejsze omówienie tych równań można znaleźć w rozdziałach 8-a i 8-b książki Taylora [Tay72].

By rozwiązać równanie (4.21a) na operator $T(w^2)$ podążając śladem pracy [HS10], postulujemy, że ma on następującą postać

$$T(w^2) = (|U_{\vec{b}}g\rangle \quad |U_{-\vec{b}}g\rangle) \mathcal{T}(w) \begin{pmatrix} \langle U_{\vec{b}}g| \\ \langle U_{-\vec{b}}g| \end{pmatrix}, \quad (4.22)$$

gdzie $\mathcal{T}(w)$ jest macierzą wymiaru 2×2 o wyrazach zespolonych. Zwróćmy uwagę, że w przyjętej notacji ta macierz jest funkcją w nie zaś w^2 . Podstawiając tę postać operatora $T(w^2)$ do równania (4.21a) w prosty sposób dostajemy

$$\mathcal{T}(w) = \begin{pmatrix} -t(w) & u(w) \\ u(w) & -t(w) \end{pmatrix}^{-1}, \quad (4.23)$$

gdzie

$$t(w) = -\sigma(g)^{-1} + (g, G_0(w^2)g) = \alpha + 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} dp \frac{w^2}{w^2 - p^2} M_p, \quad (4.24a)$$

$$u(w) = -(U_{\vec{a}}g, G_0(w^2)g) = 2\pi^2 M_w \frac{e^{iwa}}{a}. \quad (4.24b)$$

We wzorach tych skorzystaliśmy z postaci $\sigma(g)$ oraz dla uproszczenia notacji pominieliśmy jawną zależność $t(w)$ i $u(w)$ od g . Równość (4.24b) została wyliczona w dodatku (C.2).

Zatrzymajmy się na chwilę, by przyjrzeć się własnościom funkcji $t(w)$ i $u(w)$, rozumianym jako funkcje argumentu zespolonego. Będą nam one potrzebne w dalszej części pracy. Obecnie są one zdefiniowane tylko dla $\Im w > 0$. Na tym zbiorze dla wyrażenia występującego we wzorze (4.24a) spełnione są założenia o różniczkowaniu pod znakiem całki, więc funkcja $t(w)$ jest tam analityczna. W przypadku funkcji $u(w)$, potrzebujemy skorzystać z wyniku przedstawionego w dodatku (C.1), który mówi, iż funkcję M_w można przedłużyć do funkcji analitycznej na całej płaszczyźnie zespolonej. Z tego prosto wynika, że to samo można powiedzieć o funkcji $u(w)$.

W tym miejscu potrzebujemy wprowadzić następne ograniczenie na badany model. Będziemy zakładali, że spełniona jest nierówność

$$a > \frac{2\pi^2}{\alpha} \iff \gamma := \frac{\alpha a}{2\pi^2} > 1, \quad (4.25)$$

gdzie α jest swobodnym parametrem obecnym w definicji $\sigma(g)$ (por. (4.13)). Ponieważ konkretny model jest zdefiniowany przez ustaloną wartość α , więc wzór powyżej należy rozumieć jako dolne ograniczenie na wartość jaką w tym konkretnym modelu może przyjmować odległość a . Fizyczny sens tej nierówności zostanie wyjaśniony w rozdziale (4.3).

Rozpatrzmy teraz normę macierzy $\mathcal{T}(w)$:

$$\|\mathcal{T}(w)\| = \max \left\{ \frac{1}{|t(w) + u(w)|}, \frac{1}{|t(w) - u(w)|} \right\}. \quad (4.26)$$

W dodatku C.4 można znaleźć dowód następującej nierówności

$$\Re \int_{-\infty}^{+\infty} du \frac{w^2}{w^2 - u^2} M_u \geq 0, \quad \Im w > 0, \quad (4.27)$$

której bezpośrednią konsekwencją jest to, że $|\Re t(w)| \geq \alpha$. Korzystając dodatkowo z oszacowania $|u(w)| \leq \alpha/\gamma$ (zob. (C.7)) dostajemy

$$\|\mathcal{T}(w)\| \leq \frac{1}{\alpha - 2\pi^2/a} = \frac{1}{\alpha} \frac{1}{1 - \gamma^{-1}}, \quad \Im w > 0. \quad (4.28)$$

Powyższa nierówność nie zależy od wyboru konkretnej funkcji $g(\vec{x})$ z rozważanej przez nas klasy. Warunek (4.25) sprawia, że prawa strona tej nierówności jest nieosobliwa i silnie większa od zera.

W dalszym ciągu pracy będziemy stosowali notację

$$\mathcal{F}_{\vec{p}} = \widehat{g}(p) \begin{pmatrix} e^{-i\vec{b} \cdot \vec{p}} & e^{i\vec{b} \cdot \vec{p}} \end{pmatrix}. \quad (4.29)$$

Korzystając z niej, na podstawie (4.21b) możemy napisać

$$\langle \vec{p} | G(w^2) - G_0(w^2) | \vec{q} \rangle = \frac{\mathcal{F}_{\vec{p}}}{w^2 - \vec{p}^2} \mathcal{T}(w) \frac{\mathcal{F}_{\vec{q}}^\dagger}{w^2 - \vec{q}^2}. \quad (4.30)$$

Ponieważ operator h_a^2 jest samosprężony, więc jego widmo zawiera się całkowicie w $\mathbb{R}$. Tym samym dodatniość tego operatora jest równoważna istnieniu ograniczonej resolwenty na ujemnej półprostej rzeczywistej, czyli dla $w = i\mu$, przy $\mu > 0$. Zauważmy, że zachodzi nierówność

$$\int \frac{\mathcal{F}_{\vec{p}}^\dagger \mathcal{F}_{\vec{p}}}{(\mu^2 + \vec{p}^2)^2} d^3p \leq \text{const} \frac{1}{\mu} \int \frac{1}{(1 + \vec{p}^2)^2} d^3p. \quad (4.31)$$

Wynika ona z tego, że $\mathcal{F}_{\vec{p}}$ jest funkcją ograniczoną przez stałą i prostej zmiany zmiennych $\vec{p} \rightarrow \mu\vec{p}$. Na mocy tego oraz nierówności (4.28), dostajemy, że różnica $G(-\mu^2) - G_0(-\mu^2)$ jest operatorem Hilberta-Schmidta, a ponadto zachodzą następujące nierówności:

$$\|G(-\mu^2) - G_0(-\mu^2)\| \leq \|G(-\mu^2) - G_0(-\mu^2)\|_{\text{HS}} \leq \text{const} \frac{1}{\mu}. \quad (4.32)$$

Ponieważ $\|G_0(-\mu^2)\| \leq \text{const}/\mu^2$, ostatecznie mamy

$$\|G(-\mu^2)\| \leq \text{const} \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu^2} \right). \quad (4.33)$$

Nierówność ta dowodzi istnienia resolwenty na przedziale $(-\infty, 0)$, a to implikuje dodatniość operatora $h_{\vec{a}}^2$. Zauważmy też, że nierówność (4.32) również nie zależy od wyboru konkretnej funkcji $g(\vec{x})$. Kolejnym wnioskiem jaki możemy z tego wyciągnąć jest to, że resolwenta $G(w^2)$ jest funkcją analityczną w^2 dla $w^2 \in \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$. Dodatkowo obszar jej analityczności jest pokryty przez w , które spełniają warunek $\Im w > 0$. Dowodu istnienia resolwenty na tym zbiorze, przedstawiony w trochę innym kontekście, można znaleźć w dodatku (B).

4.3 Model przeskalowany i granica resolwentowa

Model omówiony w poprzednich ustępach stosuje się do ciał o dowolnych rozmiarach, jeśli tylko są one od siebie odpowiednio daleko (zob. (4.1) i (4.25)). Zasadne jest jednak zbadanie sytuacji, w której każde z rozważanych ciał jest ściągane do punktu. Taka procedura prowadzi do znacznego uproszczenia badanego modelu i uzyskania konkretnych wyników. Nawet biorąc pod uwagę fakt, że poprawne przeprowadzenie operacji ściągania ciała makroskopowego do punktu wymaga od nas pewnej dozy uwagi i dyscypliny, uzyskane wyniki uzasadniają zbadanie tego problemu.

Procedura ściągania ciała do punktu, polega na zastąpieniu funkcji $g(\vec{x})$ opisującej jego kształt, przez funkcję $g_\lambda(\vec{x})$, $\lambda \in (0, 1]$, takiej że średnica jej nośnika jest mniejsza niż λL i wzięcie granicy $\lambda \searrow 0$. Oznacza to, że również quasi-potencjał $V_{\vec{a}}$ zostanie zastąpiony przez rodzinę quasi-potencjałów $V_{\vec{a}, \lambda}$.

Na początku naszych rozważań przypomnijmy, że postać $\sigma(g)$ dana równaniem (4.13) została podyktowana właśnie problemem badania przeskalowanego modelu w granicy $\lambda \searrow 0$. Funkcję $g_\lambda(\vec{x})$ wybieramy w postaci

$$g_\lambda(\vec{x}) = \lambda^{-3} g\left(\frac{\vec{x}}{\lambda}\right) \iff \hat{g}_\lambda(\vec{p}) = \hat{g}(\lambda\vec{p}). \quad (4.34)$$

To, że we wzorze powyżej występuje λ^{-3} , a nie przykładowo λ^{-5} nie ma żadnego wpływu na fizyczną treść rozważanego modelu. Jak bowiem zostało powiedziane w rozdziale (4.1), przy przyjętej przez nas postaci $\sigma(g)$, badany model jest niezmienniczy ze względu na podstawienie $g(\vec{x}) \rightarrow Cg(\vec{x})$, $C > 0$. Przyjęcie wykładnika równego -3 w powyższym wyrażeniu jest podyktowane tylko wygodą rachunkową, gdyż jest to jedyne skalowanie które zachowuje warunek normalizacji (4.16), to zaś pozwala znacznie uprościć obliczenia. Chcemy jednak podkreślić, że wybór $\sigma(g)$ w postaci (4.13) nie został podyktowany chęcią znalezienia modelu który jest niezmienniczy przy podstawieniu $g(\vec{x}) \rightarrow Cg(\vec{x})$, lecz analizą jego zachowania przy $\lambda \searrow 0$. Tym samym ta symetria modelu jest dla naszych rozważań kwestią drugorzędną.

Przyjrzyjmy się teraz prostym konsekwencjom wybranej przez nas postaci funkcji $g_\lambda(\vec{x})$. Spełnia ona wszystkie warunki jakie narzuciliśmy na funkcję $g(\vec{x})$ w rozdziale (4.1), łącznie z wspomnianym już warunkiem normalizacji. Jest więc ona po prostu

innym elementem rozważanej klasy funkcji i wszystkie przeprowadzone do tej pory rozważania pozostają w mocy jeśli dokonamy wszędzie podstawienia $g(\vec{x}) \rightarrow g_\lambda(\vec{x})$. Co więcej, z tego samego powodu zależności takie jak nierówność (4.28), które nie zależą od wyboru funkcji $g(\vec{x})$, są tym samym niezależne od wartości parametru λ .

Przyjrzyjmy się jeszcze funkcji $\hat{g}_\lambda(p)$ (jednej zmiennej). Ponieważ $\hat{g}(p)$ jest funkcją klasy Schwartza, od razu dostajemy

$$|\hat{g}_\lambda(p)| = |\hat{g}(\lambda p)| \leq C, \quad C > 0. \quad (4.35)$$

Stała C w powyższej nierówności również nie zależy od wartości parametru λ . Ponadto jeśli przez $M_{p,\lambda}$ oznaczymy odpowiednik funkcji M_p (zob. (4.10)) w modelu przeskalowanym, to zachodzi prosta zależność

$$M_{p,\lambda} = M_{\lambda p}. \quad (4.36)$$

W tym momencie możemy podać jawną postać operatora $h_{\vec{a},\lambda}^2$ definiującego przeskalowany model. Poprzez zastąpienie funkcji $g(\vec{x})$ funkcją $g_\lambda(\vec{x})$ we wzorze (4.7) dostajemy

$$h_{\vec{a},\lambda}^2 = h^2 + V_{\vec{a},\lambda}, \quad (4.37a)$$

$$V_{\vec{a},\lambda} = \sigma(g_\lambda) \begin{pmatrix} |U_{\vec{b}} g_\lambda\rangle & |U_{-\vec{b}} g_\lambda\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle U_{\vec{b}} g_\lambda| \\ \langle U_{-\vec{b}} g_\lambda| \end{pmatrix}, \quad (4.37b)$$

gdzie $\vec{b} = \vec{a}/2$. Resolwentę tego operator będziemy oznaczać symbolem $G_\lambda(w^2)$:

$$G_\lambda(w^2) = (w^2 - h_{\vec{a},\lambda}^2)^{-1}. \quad (4.38)$$

Na podstawie tego co zostało powiedziane wcześniej, wszystkie obliczenia z rozdziału (4.2) można krok w krok powtórzyć dla modelu przeskalowanego, jedynie dokonując w odpowiednich miejscach podstawień

$$g \rightarrow g_\lambda, \quad \hat{g}(p) \rightarrow \hat{g}_\lambda(p), \quad M_p \rightarrow M_{\lambda p}. \quad (4.39)$$

Ponieważ jawne przeprowadzenie tych rachunków nie wniesie wiele do pracy, ograniczymy się do podania końcowych wyników.

$$\langle \vec{p} | G_\lambda(w^2) - G_0(w^2) | \vec{q} \rangle = \frac{\mathcal{F}_{\vec{p},\lambda}}{w^2 - \vec{p}^2} \mathcal{T}_\lambda(w) \frac{\mathcal{F}_{\vec{q},\lambda}^\dagger}{w^2 - \vec{q}^2}, \quad (4.40)$$

$$\mathcal{F}_{\vec{p},\lambda} = \hat{g}(\lambda p) \begin{pmatrix} e^{-i\vec{b} \cdot \vec{p}} & e^{i\vec{b} \cdot \vec{p}} \end{pmatrix}, \quad (4.41)$$

$$\mathcal{T}_\lambda(w) = \begin{pmatrix} -t_\lambda(w) & u_\lambda(w) \\ u_\lambda(w) & -t_\lambda(w) \end{pmatrix}^{-1}, \quad (4.42)$$

$$t_\lambda(w) = -\sigma(g_\lambda) + (g_\lambda, G_0(w^2)g_\lambda) = \alpha + 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} dp \frac{w^2}{w^2 - p^2} M_{\lambda p}, \quad (4.43a)$$

$$u_\lambda(w) = -(U_{\vec{a}} \hat{g}_\lambda, G_0(w^2) \hat{g}_\lambda) = 2\pi^2 M_{\lambda w} \frac{e^{iwa}}{a}. \quad (4.43b)$$

Na podstawie tego co powiedziano wcześniej wyrazy macierzy $\mathcal{F}_{\vec{p},\lambda}$ są ograniczone przez stałą:

$$|(\mathcal{F}_{\vec{p},\lambda})_i| \leq C, \quad i = 1, 2, \quad (4.44)$$

jak również zachodzi nierówność

$$\|\mathcal{T}_\lambda(w)\| \leq \frac{1}{\alpha} \frac{1}{1 - \gamma^{-1}} \quad (4.45)$$

Oba te oszacowania są niezależne od λ .

Zatrzymajmy się na iloczynie skalarnym występującym w wyrażeniu (4.43a). Korzystając ze wzoru (4.11) można go przekształcić do postaci

$$(g_\lambda, G_0(w^2)g_\lambda) = -\lambda^{-1}\sqrt{2\pi}^3 \check{M}_0 + 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} dp \frac{w^2}{w^2 - p^2} M_{\lambda p}. \quad (4.46)$$

Człon proporcjonalny do λ^{-1} jest najbardziej osobliwy ze wszystkich występujących w rozważanych wyrażeniach i gdyby nie został skompensowany przez obecność wyrażenia proporcjonalnego do $\chi(g)$ w funkcji $\sigma(g)$ (zob. (4.13)), wówczas niektóre wyrazy macierzy $\mathcal{T}_\lambda(w)$ w granicy $\lambda \searrow 0$ byłyby rozbieżne. Zachowanie to jest z oczywistych względów niepożądane, co uzasadnia, przynajmniej częściowo, wybraną przez nas postać $\sigma(g)$.

Z omawianych wyżej oszacowań na $\mathcal{F}_{\vec{p},\lambda}$ i $\mathcal{T}_\lambda(w)$ wynika, iż dla ustalonej liczby w^2 , takiej że $\Im w > 0$, spełniona jest nierówność

$$|\langle \vec{p} | G_\lambda(w^2) - G_0(w^2) | \vec{q} \rangle| \leq \frac{C}{|(w^2 - \vec{p}^2)(w^2 - \vec{q}^2)|}. \quad (4.47)$$

Na mocy twierdzenia Lebesgue'a możemy obliczyć granicę tego wyrażenia w sensie przestrzeni $L^2(\mathbb{R}^6, d\mu)$, gdy $\lambda \searrow 0$, poprzez wzięcie granicy punktowej wyrażenia podcałkowego. Elementarny rachunek daje

$$\begin{aligned} L^2\text{-}\lim_{\lambda \searrow 0} \langle \vec{p} | G_\lambda(w^2) - G_0(w^2) | \vec{q} \rangle &= -\frac{1}{(\alpha - i2\pi^2 w)^2 - (2\pi^2 e^{iwa}/a)^2} \times \\ &\times \frac{1}{w^2 - \vec{p}^2} \begin{pmatrix} e^{-i\vec{b} \cdot \vec{p}} & e^{i\vec{b} \cdot \vec{p}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha - i2\pi^2 w & 2\pi^2 \frac{e^{iwa}}{a} \\ 2\pi^2 \frac{e^{iwa}}{a} & \alpha - i2\pi^2 w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\vec{b} \cdot \vec{q}} \\ e^{-i\vec{b} \cdot \vec{q}} \end{pmatrix} \frac{1}{w^2 - \vec{q}^2}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

W dodatku (B) pokazano, że istnienie powyższej granicy implikuje istnienie operatora samosprężony $\tilde{h}_a^2$ o następujących własnościach. Jego widmo jest równe $[0, +\infty)$. Jeśli przez $\tilde{G}(w^2)$ oznaczmy jego resolwentę, to jądro całkowe $\langle \vec{p} | \tilde{G}(w^2) - G_0(w^2) | \vec{q} \rangle$ jest równe wyrażeniu występującemu po prawej stronie wzoru (4.48). Na koniec, zachodzi równość

$$\text{SRL-}\lim_{\lambda \searrow 0} h_{a,\lambda}^2 = \tilde{h}_a^2, \quad (4.49)$$

gdzie symbol „SRL-lim” oznacza silną granicę resolwentową. Ponieważ zagadnienia te są mocno techniczne, zostały one przeniesione do dodatku (B), my zaś przystąpimy do dyskusji uzyskanych rezultatów.

Najważniejszym wynikiem tej części pracy, jest pokazanie, że rodzina przeskalowanych modeli zdefiniowanych relacjami (4.37a), (4.37b) i (4.34) jest w sensie silnej granicy resolwentowej zbieżna do operatora $\tilde{h}_a^2$. Operator ten jest jednoznacznie określony przez prawą stronę równania (4.48) i dobrze znany w literaturze dotyczącej hamiltonianów nierelatywistycznej mechaniki kwantowej, zawierających potencjały typu delta Diraca. Standardową pozycją w tej dziedzinie jest monografia Sergio Albeverio, Friedricha Gesztesy'ego, Raphael Høeghena-Krohna i Helge'a Holdena *Solvable Models in Quantum Mechanics* [Alb+88]. Szczególnej uwadze Czytelnika polecamy „Introduction” i rozdział II.1 owej książki. Musimy uczulić Czytelnika,

że autorzy tej monografii stosują inną notację i konwencje, niż te używane w niniejszej pracy.

Operator graniczny $\tilde{h}_a^2$ został szczegółowo omówiony w rozdziale II.1 *Solvable Models in Quantum Mechanics* i jak tam zostało wyjaśnione, przedstawia układ zawierający dwie delty Diraca znajdujące się w punktach $\pm \vec{b}$. Został tam również przedyskutowany problem, dlaczego „naiwna” definicja potencjału typu delta Diraca nie jest matematycznie sensowna oraz przeprowadzono jego ścisłą konstrukcję. Ta ostatnia procedura wymagała wprowadzenia odpowiednich „parametrów obcięcia” i przejść granicznych. Warto zauważyć, że autorzy tej pozycji nie poprzestali na jednej metodzie definicji potencjału typu delta Diraca, lecz zbadali kilka jej wariantów, zarówno w reprezentacji położenia jak i pędów. Ponieważ model przeskalowany, do którego omawiania wrócimy w dalszej części pracy, dostarcza konkretnej metod zdefiniowania tego typu potencjału, nie będziemy omawiać metod użytych w tej monografii.

Należy zaznaczyć, że Albeverio et al. są zainteresowani przede wszystkim badaniem własności modeli w których oddziaływanie jest zdefiniowane za pomocą ścisłej delty Diraca, a wspomniane metody konstrukcji tego typu potencjałów pełnią rolę pomocniczą w stosunku do tego głównego celu. Dlatego też nie poświęcają temu problemowi zbyt wiele miejsca. Jest to spojrzenie odwrotne do naszego, w którym to właśnie modelom z $\lambda \neq 0$ przypisywany jest sens fizyczny, podczas gdy ten z dwoma deltami jest tylko pomocniczym bytem matematyczny. Z tego też względu Czytelnik nie znajdzie w ich książce jawnej analizy tej konkretnej klasy modeli zbieżnych w granicy skalowania $\lambda \searrow 0$ do delty Diraca, która jest używana w niniejszej pracy.

Warto również zauważyć, że aby otrzymać dobrze określony wynik przejścia granicznego, Albeverio et al. również potrzebowali rozważać procedurę w której „stała sprzężenia” potencjału, analogiczna do rozważanej tutaj funkcji $\sigma(g)$, musi stać się funkcją parametrów modelu. W tym kontekście napotkali oni kontrczłonny, którym w niniejszym podejściu odpowiada już dyskutowany wyraz $\chi(g)$. Innym wartościowym ich osiągnięciem jest pokazanie, że wbrew oczekiwaniom, potencjał typu $\delta(\vec{x})$, który ma „stałą sprzężenia równą jeden”, nie jest określony w sposób jednoznaczny. Mówiąc dokładniej, na $\mathbb{R}^3$ potencjał tego typu zawiera parametr swobodny, odpowiadający używanemu w tej pracy parametrowi α , który jest obecny przykładowo we wzorze (4.48).

Najważniejszym jednak z naszego punktu widzenia ustaleniem podanym w monografii Albeverio et al., jest to, że jeśli zachodzi warunek $\gamma \leq 1$, gdzie γ została zdefiniowana w (4.25), to istnieje co najmniej jeden stan związany o ujemnej energii. Tym samym operator $\tilde{h}_a^2$ nie jest dodatnio określony i wobec tego nie można dla niego zbudować teorii quasi-swobodnej wedle procedury przedstawionej w (3.3). Interpretacja fizyczna tego faktu jest bardzo prosta. Jeśli dwie delty Diraca zbliżymy na odpowiednio małą odległość, to w ich układzie pojawi się odpowiedni stan związany.

Musimy jednak zwrócić uwagę na to, że jak zostanie to szerzej omówione w rozdziale (5.2), układ dwóch delt Diraca jest zawsze osobliwy, gdyż występuje w nim nieskończona ilość energii i cząstek swobodnych. Niemniej jeśli $\gamma > 1$, czyli model graniczny nie posiada stanów związanych, to modele przeskalowane są nieosobliwe dla wszystkich $\lambda > 0$. W przypadku $\gamma \leq 1$ istnieje możliwość, że dla pewnego $\lambda_1 > 0$ w modelu przeskalowany również pojawi się stan związany o ujemnej energii i tym samym model ten stanie się niefizyczny. Problem zbadania czy modele przeskalowane posiadają stany związane, cechuje się pewną dozą subtelności, ponieważ zaś prostszy przypadek $\gamma > 1$ jest już sam w sobie interesujący, postanowiliśmy ograniczyć naszą analizę do tego zagadnienia. W naszej ocenie uzyskane w tej pracy wyniki, stanowią

wystarczające uzasadnienie tej decyzji.

4.4 Analiza spektralna

Niniejszą część pracy poświęcimy badaniu własności spektralnych rozważanego modelu. Ponieważ, jak zostało to wyjaśnione w rozdziale (4.3), funkcje $g_\lambda(\vec{x})$ są po prostu innymi funkcjami z klasy wprowadzonej w rozdziale (4.1), analiza przedstawiona poniżej stosuje się w takim samym stopniu do modelu wyjściowego, jak i do modeli przeskalowanych. Po tych uwagach wstępnych, możemy przejść do właściwej tematu tego rozdziału.

Jak zostało pokazane w rozdziale (4.2) operator $h_{\vec{a}}^2$ jest dodatni, tym samym jego widmo zawiera się w zbiorze $[0, +\infty)$, zaś jego widmo absolutnie ciągle jest równe $[0, +\infty)$. By ustalić charakter tego widma, skorzystamy najpierw z twierdzenia Weyla, zob. twierdzenie XIII.14 i „Example 3” w rozdziale XIII.4 książki Reeda, Simona [RS78b]. Możemy je wysłowić w następujący sposób. Niech będą dane dwa samosprężone operatory H_0 i V oraz niech

$$H = H_0 + V. \quad (4.50)$$

Jeśli V jest operatorem zwartym, to widma istotne operatorów H i H_0 są identyczne. W naszym przypadku $H_0 = h^2 = -\Delta$, $V = V_{\vec{a}}$, więc na mocy tego twierdzenia widmo istotne $h_{\vec{a}}^2$ jest równe $[0, \infty)$.

Wobec tego trzeba odpowiedzieć na pytanie, czy liczba 0 jest wartością własną tego operatora. Dla dowodu nie wprost przyjmijmy, że ψ jest unormowanym stanem własnym $h_{\vec{a}}^2$ do wartości własnej 0. Rozpatrzmy teraz iloczyn skalarny

$$(\psi, [G(-\mu^2) - G_0(-\mu^2)]\psi) = -\frac{1}{\mu^2} + \int_{\mathbb{R}^3} d^3p \frac{|\psi(\vec{p})|^2}{\mu^2 + \vec{p}^2}. \quad (4.51)$$

By uzyskać tą równość skorzystaliśmy z definicji resolwent $G(-\mu^2)$ i $G_0(-\mu^2)$. Z drugiej strony na mocy oszacowania (4.28) i wzoru (4.30) dają nam nierówność

$$|(\psi, [G(-\mu^2) - G_0(-\mu^2)]\psi)| \leq \frac{1}{\alpha} \frac{1}{1 - \gamma^{-1}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} d^3p \frac{|\psi(\vec{p})|^2}{\mu^2 + \vec{p}^2} \right)^2. \quad (4.52)$$

Potrzebujemy teraz przeanalizować zachowanie całek występujących w tych wyrażeniach. Zaczniemy od prostego przekształcenia

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} d^3p \frac{|\psi(\vec{p})|^2}{\mu^2 + \vec{p}^2} &\leq \frac{1}{\mu^2} \int_{B(\vec{0}, 1)} d^3p |\psi(\vec{p})|^2 + \frac{(1 - \varepsilon)}{\mu^2} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B(\vec{0}, 1)} d^3p |\psi(\vec{p})|^2 \leq \\ &\leq \frac{(1 - \varepsilon)}{\mu^2}, \quad \varepsilon > 0. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Wobec tego prawa strona równania (4.51) musi zawierać człon który zachowuje się jak $-C\mu^{-2}$, dla pewnego $C > 0$. Przejdźmy teraz do analizy całki po prawej stronie nierówności (4.52):

$$\left(\int_{\mathbb{R}^3} d^3p \frac{|\psi(\vec{p})|^2}{\mu^2 + \vec{p}^2} \right)^2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} d^3p |\psi(\vec{p})|^2 \right) \left(\int_{\mathbb{R}^3} d^3q \frac{1}{(\mu^2 + \vec{q}^2)^2} \right) \leq C \frac{1}{\mu}, \quad (4.54)$$

gdzie $C > 0$. Powyższą nierówność otrzymaliśmy traktując wyjściowe wyrażenie jako kwadrat iloczynu skalarnego funkcji z $L^2(\mathbb{R}^3, d^3p)$ i korzystając z prostej zmiany zmiennych $\vec{q} \rightarrow \mu\vec{q}$. Ostatecznie dostajemy

$$|(\psi, [G(-\mu^2) - G_0(-\mu^2)]\psi)| \leq \frac{C}{\alpha} \frac{1}{1 - \gamma^{-1}} \frac{1}{\mu}, \quad C > 0. \quad (4.55)$$

Powyższa nierówność jest sprzeczna z tym, że jej lewa strona musi się zachowywać jak $-C\mu^{-2}$, dla pewnego $C > 0$. Tym samym ψ nie może być stanem własnym do wartości własnej 0.

Ostatnim pytaniem na które musimy odpowiedzieć, jest to, czy na przedziale $[0, \infty)$ istnieje widmo osobliwe. Standardowe kryterium rozstrzygające ten problem jest podane jako twierdzenia XIII.19 i XIII.20 w książce [RS78b]. W badanym przez nas przypadku kryterium to można wysłowić w następujący sposób. Niech $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ oznacza przestrzeń funkcji klasy Schwartza i wybierzmy dwie liczby $0 < a < b$. Jeśli dla każdego $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ funkcja zespolona

$$(a, b) \times i(0, 1] \ni w^2 \mapsto (f, G(w^2)f), \quad (4.56)$$

jest ograniczona, to operator h_a^2 nie posiada na odcinku (a, b) widma punktowego ani osobliwego.

Zacniemy od oczywiste przekształcenia:

$$(f, G(w^2)f) = (f, G_0(w^2)f) + (f, [G(w^2) - G_0(w^2)]f). \quad (4.57)$$

Wyraz $(f, G_0(w^2)f)$ jest ograniczony na interesującym nas zbiorze, co wynika ze znanych własności operatora $h^2 = -\Delta$. Drugi wyraz możemy zapisać jako

$$(f, [G(w^2) - G_0(w^2)]f) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3p \frac{\overline{\widehat{f}(\vec{p})}}{w^2 - \vec{p}^2} \mathcal{F}_{\vec{p}}^\dagger \mathcal{T}(w) \int_{\mathbb{R}^3} d^3q \mathcal{F}_{\vec{q}} \frac{\widehat{f}(\vec{q})}{w^2 - \vec{q}^2}. \quad (4.58)$$

Jak wiemy wyrazy macierzy $\mathcal{F}_{\vec{p}}$ są ograniczone przez stałą, a jeśli zachodzi $\Im w > 0$ i $\gamma > 1$ to ograniczone są również wyrazy macierzy $\mathcal{T}(w)$. Tym samym cały problem sprowadza się do zbadania czy dla każdej funkcji $L \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, funkcja zespolona

$$K(w^2) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3p \frac{L(\vec{p})}{w^2 - \vec{p}^2} = \int_0^{+\infty} dp \frac{l(p)}{w^2 - p^2}, \quad l(p) = p^2 \int_{S^2} d\Omega(\hat{n}) L(p\hat{n}), \quad (4.59)$$

jest ograniczona na rozważanym zbiorze. Funkcja $l(p)$ jest klasy Schwartza na $[0, +\infty)$. Przekształcimy teraz funkcję $K(w^2)$, korzystając przy tym z notacji $w^2 = k^2 + i\epsilon$.

$$K(k^2 + i\epsilon) = \int_0^{+\infty} dp \frac{l(p)}{k^2 + i\epsilon - p^2} = -\frac{i\pi}{2} \frac{l(k)}{\sqrt{k^2 + i\epsilon}} + \int_0^{+\infty} dp \frac{l(p) - l(k)}{k^2 - p^2} \frac{k^2 - p^2}{k^2 - p^2 + i\epsilon}. \quad (4.60)$$

Pierwsze wyrażenie w ostatniej równości dostaliśmy poprzez proste całkowanie z wykorzystaniem metody residuów.

Przyjmijmy teraz, że $k^2 \in (a, b)$, gdzie a i b zostały określone wcześniej, zaś $\epsilon \in (0, 1]$. Pierwszy człon w ostatniej równości w (4.60) jest w oczywisty sposób ograniczony na tym zbiorze. Ponieważ zachodzi elementarna nierówność

$$\left| \frac{k^2 - p^2}{k^2 - p^2 + i\epsilon} \right| \leq 1, \quad (4.61)$$

pozostaje nam tylko przeanalizować wyrażenie

$$\frac{l(p) - l(k)}{k^2 - p^2} = \frac{l(p) - l(k)}{k - p} \frac{1}{k + p}. \quad (4.62)$$

Jeśli $k \geq c > 0$, $c < a$ i $p \geq 0$, to powyższa funkcja jest gładka na tym zbiorze, na mocy standardowego twierdzenia analizy mówiącego, że iloraz różnicowy funkcji gładkiej też jest funkcją gładką. Ponadto dla $p > b$ ta funkcja jest ograniczona przez const/p^2 . Stąd dochodzimy do wniosku, że dla $k^2 \in (a, b)$ jest to funkcja ograniczona, co kończy dowód ograniczoności funkcji określonej w (4.56). Tym samym pokazaliśmy, że operator h_a^{-2} posiada tylko widmo absolutnie ciągłe równe $[0, +\infty)$.

5 Energia Casimira i liczba cząstek w modelach zawierających dwie quasi-delta

Przechodzimy teraz do najważniejszych części naszej pracy, w której zajmiemy się problemem obliczenia energii Casimira i liczby cząstek dla modeli wprowadzonych w rozdziale (4.1). W pierwszym rzędzie zbadamy jak te wielkości zachowują się dla ustalonego modelu, później dla rodziny modeli zależnych od parametru skalowania λ . Zbadamy też granicę $\lambda \searrow 0$. Na koniec przejdziemy do analizy gęstości energii zarówno dla pojedynczego modelu, jak i dla przeskalowanej rodziny modeli.

5.1 Energia Casimira i liczba cząstek dla modelu zawierającego dwie quasi-delta

Jak zostało to wyjaśnione w rozdziale (3), w podejściu Herdegena energię Casimira i liczbę wytworzonych cząstek można obliczyć korzystając z formuł

$$\mathcal{E}_a = \frac{1}{4} \text{Tr}[(h_{\vec{a}} - h)h_{\vec{a}}^{-1}(h_{\vec{a}} - h)], \quad (5.1a)$$

$$\mathcal{N}_a = \frac{1}{4} \text{Tr}[h^{-1/2}(h_{\vec{a}} - h)h_{\vec{a}}^{-1}(h_{\vec{a}} - h)h^{-1/2}]. \quad (5.1b)$$

Ze względu na symetrię badanego układu energia Casimira i liczba cząstek zależą tylko od długości wektora $\vec{a}$, dlatego w naszej notacji będziemy je zapisywać jako zależące od $a = |\vec{a}|$.

Korzystając z reprezentacji pędów oraz własności spektralnych operatora h , możemy zapisać prawe strony obu wymienionych wzorów za pomocą jednej formuły

$$\text{Tr } \mathcal{P}_\tau(a) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3p p^{-\tau} \langle \vec{p} | (h_{\vec{a}} - p) h_{\vec{a}}^{-1} (h_{\vec{a}} - p) | \vec{p} \rangle, \quad p = |\vec{p}|, \quad (5.2)$$

gdzie podstawienie $\tau = 0$ daje wyrażenie na energię, a $\tau = 1$ na liczbę cząstek. Wyniki rozdziału (4.4) pozwalają nam zastosować tę samą procedurę do operatora $h_{\vec{a}}$. Używając notacji $k = |\vec{k}|$ możemy zapisać wynik tej operacji jako

$$\text{Tr } \mathcal{P}_\tau(a) = \int_{\mathbb{R}^6} d^3p d^3k \frac{p^{-\tau}}{k} (k - p)^2 |\langle \vec{p} | \vec{k} + \rangle|^2, \quad (5.3)$$

gdzie $|\vec{k} + \rangle$ oznacza stan własny operatora $h_{\vec{a}}$, zob. rozdział 10-a w [Tay72]. Potrzebujemy teraz sięgnąć po jeszcze jedną zależność, dobrze znaną w teorii rozpraszania (zob. roz. 8-d op. cit.):

$$\langle \vec{p} | \vec{k} + \rangle = \delta(\vec{k} - \vec{p}) + \frac{\langle \vec{p} | T(k^2 + i0) | \vec{k} + \rangle}{k^2 - p^2 + i0}. \quad (5.4)$$

Ze względu na obecność delty Diraca w powyższym wzorze, wyrażenie $|\langle \vec{p} | \vec{k} + \rangle|^2$ samo w sobie jest pozbawione sensu. Zauważmy jednak, że tak naprawdę w (5.3) mamy do czynienia z kwadratem następującego wyrażenia.

$$(k - p) \langle \vec{p} | \vec{k} + \rangle = \frac{\langle \vec{p} | T(k^2 + i0) | \vec{k} \rangle}{p + k}. \quad (5.5)$$

Podniesienie powyższej wielkości do kwadratu nie nastęrcza już żadnego problemu. Używając wzoru (4.22) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \text{Tr } \mathcal{P}_\tau(a) &= \int_{\mathbb{R}^6} d^3k d^3p \frac{p^{-\tau}}{k(p+k)^2} M_p M_k \times \\ &\times \left| \begin{pmatrix} e^{-i\vec{b} \cdot \vec{p}} & e^{i\vec{b} \cdot \vec{p}} \end{pmatrix} \mathcal{T}(k+i0) \begin{pmatrix} e^{-i\vec{b} \cdot \vec{k}} & e^{i\vec{b} \cdot \vec{k}} \end{pmatrix}^\dagger \right|^2. \end{aligned} \quad (5.6)$$

By uprościć ostatni wzór, skorzystamy, tak jak zrobiono to w pracy [HS10], z tożsamości, która zachodzi dla dowolnych macierzy wierszowych A, C o n kolumnach i dowolnej macierzy kwadratowej B wymiaru $n \times n$:

$$|ABC^\dagger|^2 = \text{Tr} \left[A^\dagger ABC^\dagger CB^\dagger \right]. \quad (5.7)$$

Dzięki niej dostajemy

$$\begin{aligned} &\left| \begin{pmatrix} e^{-i\vec{b} \cdot \vec{p}} & e^{i\vec{b} \cdot \vec{p}} \end{pmatrix} \mathcal{T}(k+i0) \begin{pmatrix} e^{-i\vec{b} \cdot \vec{k}} & e^{i\vec{b} \cdot \vec{k}} \end{pmatrix}^\dagger \right|^2 = \\ &= \text{Tr} \left[\mathcal{M}(\vec{p}) \mathcal{T}(k+i0) \mathcal{M}(\vec{k}) \mathcal{T}^\dagger(k+i0) \right], \end{aligned} \quad (5.8a)$$

$$\mathcal{M}(\vec{k}) = \begin{pmatrix} e^{-i\vec{b} \cdot \vec{k}} & e^{i\vec{b} \cdot \vec{k}} \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} e^{-i\vec{b} \cdot \vec{k}} & e^{i\vec{b} \cdot \vec{k}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & e^{i\vec{k} \cdot \vec{a}} \\ e^{-i\vec{k} \cdot \vec{a}} & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.8b)$$

To zaś prowadzi nas do

$$\text{Tr } \mathcal{P}_\tau(a) = \int_{\mathbb{R}^6} d^3k d^3p \frac{p^{-\tau}}{k(p+k)^2} M_p M_k \text{Tr} \left[\mathcal{M}(\vec{p}) \mathcal{T}(k+i0) \mathcal{M}(\vec{k}) \mathcal{T}^\dagger(k+i0) \right], \quad (5.9)$$

W dalszych rozważaniach będziemy potrzebowali skorzystać z dwóch nowych funkcji $t(k)$ i $u(k)$, określonych dla rzeczywistego argumentu k . Definiujemy je jako wartości brzegowe funkcji wprowadzonych we wzorach (4.24a) i (4.24b)

$$t(k) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} t(k+i\varepsilon), \quad u(k) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} u(k+i\varepsilon). \quad (5.10)$$

Jak zostało to wspomniane wcześniej, wzór definiujący $u(w)$ pozwala w prosty sposób przedłużyć ją do funkcji analitycznej na całej płaszczyźnie zespolonej, więc jej wartość brzegową możemy dostać przez proste podstawienie $w = k$.

Obliczmy teraz funkcję $t(k)$. Zaczniemy od przekształcenia wzoru na funkcję $t(w)$, gdy $w = k + i\varepsilon$:

$$t(w) = \alpha + 2\pi M_k \int_{-\infty}^{+\infty} dp \frac{w^2}{w^2 - p^2} + 2\pi w^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dp \frac{k^2 - p^2}{w^2 - p^2} \frac{M_p - M_k}{k^2 - p^2}. \quad (5.11)$$

Pierwszą z całek powyżej oblicza się elementarnie za pomocą metody residuów, co prowadzi do wyrażenia

$$t(w) = \alpha - i2\pi^2 w M_k + 2\pi w^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dp \frac{k^2 - p^2}{w^2 - p^2} \frac{M_p - M_k}{k^2 - p^2}. \quad (5.12)$$

Powtarzając rozumowanie z rozdziału (4.4) pokazujemy, że dla wszystkich $k, p \in \mathbb{R}$ pierwszy ułamek w całce w powyższym wzorze jest na moduł ograniczony przez jeden oraz $(M_p - M_k)/(k^2 - p^2)$ jest funkcją gładką swoich argumentów. Zauważmy ponadto, że dla ustalonego k funkcja $(M_p - M_k)/(k^2 - p^2)$ jest majoryzowana przez $C/(1 + p^2)$ dla pewnej stałej $C > 0$. Na mocy twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności majoryzowanej otrzymujemy

$$t(k) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} t(k + i\varepsilon) = \alpha + 2\pi k I_k - i2\pi^2 k M_k. \quad (5.13)$$

Symbol

$$I_k = \int_{-\infty}^{+\infty} dq \frac{M_q - M_k}{k^2 - q^2}. \quad (5.14)$$

wprowadziliśmy za przykładem pracy [HS10]. Podsumowując, mamy

$$t(k) = \alpha + 2\pi k^2 I_k - i2\pi^2 k M_k, \quad (5.15a)$$

$$u(k) = 2\pi^2 M_k \frac{e^{ika}}{a}. \quad (5.15b)$$

Przejdźmy teraz do macierzy $\mathcal{T}(k + i0)$:

$$\mathcal{T}(k + i0) = \begin{pmatrix} -t(k) & u(k) \\ u(k) & -t(k) \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{t(k)^2 - u(k)^2} \begin{pmatrix} t(k) & u(k) \\ u(k) & t(k) \end{pmatrix}. \quad (5.16)$$

Macierz ta jest dobrze określona i ograniczona na półosi dodatniej, bo oszacowanie (4.28) pozostaje prawdziwe w granicy $\Im m w \searrow 0$. Przyjrzyjmy się jej części urojonej:

$$\Im m \mathcal{T}(k + i0)^{-1} = 2\pi^2 k M_k \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sin(ka)}{ka} \\ \frac{\sin(ka)}{ka} & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.17)$$

Ponownie naśladowując pracę [HS10], wprowadzamy wielkość

$$\mathcal{L}(k) = \int_{S^2} d\Omega(\hat{k}) \mathcal{M}(\vec{k}) = 4\pi \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sin(ka)}{ka} \\ \frac{\sin(ka)}{ka} & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{k} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}, \quad (5.18)$$

gdzie S^2 oznacza sferę o promieniu jeden. Jak łatwo sprawdzić norma tej macierzy jest ograniczona z góry:

$$\|\mathcal{L}(k)\| \leq 8\pi. \quad (5.19)$$

Zauważmy, że zachodzi interesująca relacja

$$\Im m \mathcal{T}(k + i0)^{-1} = \frac{\pi}{2} k M_k \mathcal{L}(k), \quad (5.20)$$

której analogiczna wersja została opisana w pracy [HS10]. Prowadzi ona do

$$\mathcal{L}(k) = \frac{i}{\pi k M_k} (\mathcal{T}^\dagger(k + i0)^{-1} - \mathcal{T}(k + i0)^{-1}). \quad (5.21)$$

Jeżeli teraz wykonamy całkowanie po kątach we wzorze (5.9) dostaniemy następującą zależność

$$\text{Tr } \mathcal{P}_\tau(a) = \int_{\mathbb{R}_+^2} dk dp \frac{p^{-\tau}}{k(p+k)^2} M_p M_k \text{Tr} \left[\mathcal{L}(p) \mathcal{T}(k + i0) \mathcal{L}(k) \mathcal{T}^\dagger(k + i0) \right], \quad (5.22)$$

co wraz z (5.21), daje nam

$$\mathrm{Tr} \mathcal{P}_\tau(a) = \frac{2}{\pi} \int_{\mathbb{R}_+^2} dp dk \frac{p^{2-\tau}}{(p+k)^2} M_p \Re \{i \mathrm{Tr} [\mathcal{L}(p) \mathcal{T}(k+i0)]\}. \quad (5.23)$$

Przyjrzyjmy się dokładniej wyrażeniu

$$\Re \{i \mathrm{Tr} [\mathcal{L}(p) \mathcal{T}(k+i0)]\} = 8\pi \Im \frac{t(k) + h(pa)u(k)}{t(k)^2 - u(k)^2}, \quad (5.24a)$$

$$h(z) = \frac{\sin(z)}{z}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (5.24b)$$

Funkcja występująca we wzorze (5.24a) jest ograniczony przez stałą na mocy oszacowań (4.28) i (5.19). Z wzoru (4.28) wynika ponadto, że stałą tą można wybrać w taki sposób by była ona niezależna od a . Wobec tego jeśli pokażemy zbieżność całki

$$\int_0^{+\infty} dp \int_0^{+\infty} dk \frac{p^{2-\tau}}{(p+k)^2} M_p, \quad (5.25)$$

to tym samym wykazemy zbieżność wyrażenia (5.23) dla obu wartości τ . Wykonując w nim całkowanie po k otrzymujemy

$$\int_0^{+\infty} dp p^{1-\tau} M_p. \quad (5.26)$$

Dla $\tau = 0, 1$ funkcja podcałkowa jest funkcją klasy Schwartza na $\mathbb{R}$, co kończy dowód zbieżności rozpatrywanych wyrażeń.

Zapiszmy teraz wyrażenia na energię i liczbę cząstek jako

$$\mathrm{Tr} \mathcal{P}_\tau(a) = \Im \int_{\mathbb{R}_+^2} dp dk f_\tau(p, k). \quad (5.27)$$

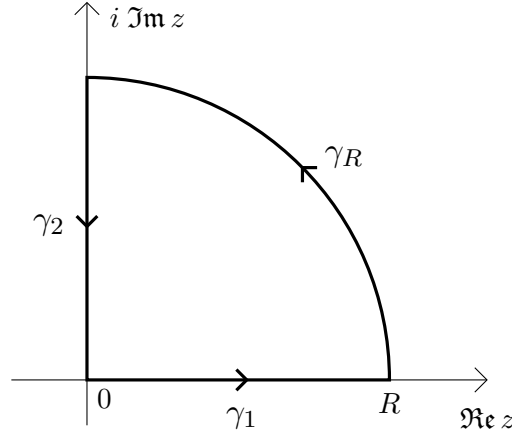
Funkcja $f_\tau(k, p)$ jest wartością brzegową następującej funkcji:

$$f_\tau(p, z) = 16 \frac{p^{2-\tau}}{(p+z)^2} M_p \frac{t(z) + h(pa)u(z)}{t(z)^2 - u(z)^2}, \quad (5.28)$$

Funkcja $f_\tau(p, z)$ jest analityczna dla $\Im z > 0$, ponadto dla $p > 0$ i dla $\Im z \geq 0$ jest to funkcja ciągła. By to wykazać, zwróćmy uwagę, że jak zostało powiedziane wcześniej, funkcja $t(z)$ jest analityczna przynajmniej dla $\Im z > 0$, zaś $u(z)$ można przedłużyć do funkcji analitycznej na całej płaszczyźnie zespolonej. Na mocy wzorów (4.26) i (4.28) mianownik $t(z)^2 - u(z)^2$ nigdy nie przybiera wartości 0 dla $\Im z > 0$. Ponieważ nierówność (4.28) pozostaje w mocy dla $\Im z \searrow 0$, dochodzimy do wniosku, że drugi mianownik we wzorze (5.28) jest niezerowy dla $\Im z \geq 0$. Z wzoru (5.15a) i konstrukcji funkcji $t(k)$ wynika, że funkcja $t(w)$ jest ciągła dla $\Im w \geq 0$.

Wszystko to pozwala stwierdzić, że $f_\tau(z, p)$ jest ciągła dla $\Im z \geq 0$ i analityczna dla $\Im z > 0$, spełnia więc wszystkie warunki uogólnionego twierdzenia Cauchy'ego, które gwarantuje, że całka po konturze Γ znika (zob. rys. (2)). Korzystając ponownie z tego, iż funkcja (5.24a) jest ograniczona, dostajemy nierówność

$$|f_\tau(z, p)| \leq \mathrm{const} \frac{1}{|z+p|^2}. \quad (5.29)$$



Rysunek 2: Kontur całkowania funkcji (5.28).

Widzimy więc, że całka po krzywej γ_R znika w granicy $R \rightarrow +\infty$. Oznacza to, iż możemy zamienić całkę po krzywej γ_1 na całkę po $-\gamma_2$. Procedura ta ma tę wielką zaletę, że w jej wyniku w wyrażeniu podcałkowym funkcje oscylujące e^{ika} , zostają zastąpione przez szybko gasnące funkcje e^{-ka} .

Wyrażenie na energię Casimira przybiera obecnie postać

$$\mathcal{E}(a) = \Re \int_{\mathbb{R}_+^2} dp dk f_0(p, ik). \quad (5.30)$$

Z wzorów (4.24a) i (4.24b) łatwo odczytujemy

$$t(ik) = \alpha + 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} dp \frac{k^2}{k^2 + p^2} M_p, \quad (5.31a)$$

$$u(ik) = 2\pi^2 M_{ik} \frac{e^{-ka}}{a}, \quad (5.31b)$$

co prowadzi nas do

$$\mathcal{E}(a) = 16 \Re \int_{\mathbb{R}_+^2} dk dp \frac{p^2}{(p + ik)^2} M_p \frac{t(ik) + h(pa)u(ik)}{t(ik)^2 - u(ik)^2}. \quad (5.32)$$

Rozpatrzmy teraz następujący problem. Energia Casimira $\mathcal{E}(a)$ składa się z dwóch części, energii pola skoncentrowanego wokół każdego z ciał makroskopowych i energii oddziaływania między tymi dwoma obiektami. Pierwszą z nich będziemy nazywać energią samoodziaływania (ang. *self-energy*), jej wartość dla pojedynczego ciała będziemy oznaczać symbolem $\mathcal{E}_{\text{self}}$. Jest dobrze znanym faktem, że energia samoodziaływania jest zwykle rozbieżna dla ciał punktowych i jak zostanie pokazane w rozdziale (5.2), w badanym modelu dokładnie taka sytuacja zachodzi.

Energię samoodziaływania obliczamy w następujący sposób. Jedno ciało przytwierdzamy na stałe do początku układu współrzędnych i przechodzimy w wyrażeniu na $\mathcal{E}(a)$ do granicy $a \rightarrow +\infty$. Gdy dwa ciała są „nieskończenie daleko od siebie”, energia układu będzie równa podwojonej energii samoodziaływania pojedynczego obiektu. Przystąpimy teraz do wyliczenia tej energii. Korzystając z wzorów (C.7) i (C.8) można w prosty sposób pokazać że funkcja $u(ik)$ spełnia nierówność

$$0 \leq u(ik) \leq C \frac{e^{-\eta k}}{a}, \quad C, \eta > 0. \quad (5.33)$$

Widać więc, że funkcja ta jest ograniczona i zbieżna jednostajnie do zera, gdy $a \rightarrow \infty$. Te same własności posiada oczywiście również funkcja $h(pa)$. Na mocy tego co zostało powiedziane przy analizie zbieżności wyrażenia na energię Casimira i liczbę cząstek, możemy teraz wejść z granicą pod całkę otrzymując

$$\mathcal{E}_{\text{self}} = \frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow +\infty} \mathcal{E}(a) = 8 \Re \int_{\mathbb{R}_+^2} dp dk \frac{p^2}{(p+ik)^2} \frac{M_p}{t(ik)}. \quad (5.34)$$

Odejmując od $\mathcal{E}(a)$ energię $2\mathcal{E}_{\text{self}}$ otrzymujemy energię oddziaływania

$$\mathcal{E}_{\text{int}}(a) = 16 \Re \int_{\mathbb{R}_+^2} dp dk \frac{p^2}{(p+ik)^2} M_p \frac{u(ik)^2 + h(pa)t(ik)u(ik)}{t(ik)[t(ik)^2 - u(ik)^2]}. \quad (5.35)$$

Energię samoodziaływania (5.34) wygodnie jest analizować, gdy zmienna całkowania k przebiega po dodatniej osi rzeczywistej, a nie po dodatniej osi urojonej jak obecnie. Możemy to uczynić, ponownie korzystając z konturu (2). Dla ustalonej wartości $p > 0$ tak jak poprzednio pokazujemy

$$\left| \frac{p^2}{(p+z)^2} \frac{M_p}{t(z)} \right| \leq \text{const} \frac{1}{|p+z|^2}, \quad (5.36)$$

więc również tutaj całka po γ_R znika w granicy $R \rightarrow +\infty$. W konsekwencji tego dostajemy

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{self}} &= 8 \Im \int_{\mathbb{R}_+^2} dp dk \frac{p^2}{(p+k)^2} \frac{M_p}{t(k)} = \\ &= 16\pi^2 \int_{\mathbb{R}_+^2} dp dk \frac{p^2 k}{(p+k)^2} \frac{M_p M_k}{(\alpha + 2\pi k^2 I_k)^2 + (2\pi^2 k M_k)^2}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Z przeprowadzonej wcześniej analizy wynika zbieżność ostatniej całki w tym wzorze.

5.2 Energia Casimira dla rodziny przeskalowanych modeli

Obecnie stajemy przed zadaniem zbadania zachowania energii Casimira i liczby cząstek dla modeli przeskalowanych. W poprzednim rozdziale wykazaliśmy, że zarówno energia jak i liczba cząstek są skończone dla każdego ustalonego modelu, określonego przez jedną z funkcji $g(\vec{x})$ spełniających warunki podane w rozdziale (4.1). Przypomnijmy, że funkcja $g_\lambda(\vec{x})$, dla ustalonego $\lambda \neq 0$ jest po prostu inną funkcją z tej samej klasy, tym samym dla wszystkich modeli przeskalowanych te dwie interesujące nas wielkości są skończone. Ponieważ dla zrozumienia efektu Casimira dla przeskalowanej rodziny modeli najważniejsze jest zrozumienie zachowania energii, gdy zaś chodzi o liczbę cząstek wystarczająca jest wiedza, że jest ona skończona dla $\lambda \neq 0$, dlatego tej ostatniej wielkości nie będziemy już szerzej dyskutować.

W rozdziale (4.1) narzuciliśmy ograniczenie na odległość między środkami ciał makroskopowych jakie są dopuszczone w badanym modelu, które przybiera postać $a > L$ (zob. rów. (4.1)). W modelu przeskalowanym zależność ta zostaje zastąpiona przez następujący związek:

$$a > \lambda L. \quad (5.38)$$

Wielkość λL jest górnym ograniczeniem na średnicę nośnika funkcji $g_\lambda(\vec{x})$ i tym samym górnym ograniczeniem na średnicę ciała makroskopowego. Ponieważ wielkość

ta znika gdy $\lambda \searrow 0$, więc dla zachowania modelu w tej granicy, początkowa wartość L nie ma znaczenia. Dlatego też, bez ograniczenia ogólności uzyskanych wyników, możemy znacznie uprościć nasze rozważania poprzez przyjęcie

$$L = \frac{2\pi^2}{\alpha}. \quad (5.39)$$

Tym samym w badanym modelu pozostaje tylko jeden parametr wymiarowy: stała α . Zauważmy, że w takiej sytuacji mamy

$$\gamma = \frac{a}{L} > 1. \quad (5.40)$$

Ten wybór nie wpływa na zakres parametru skalowania λ , który jak poprzednio może przyjmować dowolną wartość z przedziału $(0, 1]$. Okazuje się jednak, że problem ponownie bardzo się uprości, jeśli zawężymy wartości jakie może przyjmować λ do mniejszego przedziału $(0, 1/2)$. Ponieważ również to ograniczenie nie wpływa na zachowanie modelu w granicy $\lambda \searrow 0$, dlatego od tego momentu będziemy zakładać, że również ten warunek jest spełniony.

Zamiana funkcji $g(\vec{x})$ na $g_\lambda(\vec{x})$ we wzorach na $\mathcal{E}_{\text{self}}$ i $\mathcal{E}_{\text{int}}(a)$ sprowadza się do wykonania w nich następujących podstawień

$$M_p \rightarrow M_{\lambda p}, \quad t(ik) \rightarrow t_\lambda(ik), \quad u(ik) \rightarrow u_\lambda(ik). \quad (5.41)$$

Funkcje $t_\lambda(ik)$ i $u_\lambda(ik)$ zostały zdefiniowane we wzorach (4.43a) i (4.43b). Ponieważ procedura ta jest dość mechaniczna, ograniczymy się do podania jej rezultatów. Przyjrzyjmy się najpierw wyrażaniu na energię własną dla modelu przeskalowanego (por. (5.37)):

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{self}}(\lambda) &= 8 \Im \int_{\mathbb{R}_+^2} dp dk \frac{p^2}{(p+k)^2} \frac{M_{\lambda p}}{t_\lambda(k)} = \\ &= 16\pi^2 \int_{\mathbb{R}_+^2} dp dk \frac{p^2 k}{(p+k)^2} \frac{M_{\lambda p} M_{\lambda k}}{(\alpha + 2\pi k^2 I_{\lambda,k})^2 + (2\pi^2 k M_{\lambda k})^2}. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Symbol $I_{\lambda,k}$ przedstawia funkcję otrzymaną przez wykonania podstawień (5.41) we wzorze (5.14). Prosty rachunek pokazuje, że zachodzi

$$I_{\lambda,k/\lambda} = \lambda I_k. \quad (5.43)$$

W związku z tym okazuje się korzystne wykonanie we wzorze (5.42) podstawień $k \rightarrow k/\lambda$, $p \rightarrow p/\lambda$. W ich rezultacie otrzymujemy

$$\mathcal{E}_{\text{self}}(\lambda) = \lambda^{-1} 16\pi^2 \int_{\mathbb{R}_+^2} dp dk \frac{p^2 k}{(p+k)^2} \frac{M_p M_k}{(\lambda\alpha + 2\pi k^2 I_k)^2 + (2\pi^2 k M_k)^2}. \quad (5.44)$$

Zajmijmy się najpierw funkcją podcałkową występującą w tej równości, będziemy ją oznaczać symbolem $F_\lambda(p, k)$. Ponieważ przyjmuje ona tylko nieujemne wartości, na mocy lematu Fatou zachodzi

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} dp dk \lim_{\lambda \searrow 0} F_\lambda(p, k) \leq \lim_{\lambda \searrow 0} \int_{\mathbb{R}_+^2} dp dk F_\lambda(p, k) \quad (5.45)$$

Lewa strona tej równości wynosi

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} dp dk \lim_{\lambda \searrow 0} F_\lambda(p, k) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}_+^2} dp dk \frac{p^2}{k(p+k)^2} \frac{M_p M_k}{(kI_k)^2 + (\pi M_k)^2}. \quad (5.46)$$

Ponieważ $M_0 = 1$ (zob. (4.17a)), dla $p > 0$ całka po zmiennej k w powyższych wyrażeniu jest rozbieżna w sposób logarytmiczny w $k = 0$, więc na mocy twierdzenia Fubinię-Tonelliego, całka ta jest rozbieżna. Biorąc dodatkowo pod uwagę obecność czynnika λ^{-1} we wzorze (5.44) oraz nierówności (5.48) widzimy, że energia samoodziaływania $\mathcal{E}_{\text{self}}(\lambda)$ jest silnie rozbieżna w granicy $\lambda \searrow 0$.

Przejdźmy teraz do analizy energii oddziaływania. Wyrażenie je opisujące będzie wygodnie zapisać za pomocą nowego zestawu funkcji. Wprowadźmy najpierw zmienne bezwymiarowe $q = pa$, $l = ka$, następnie określmy

$$r_\lambda(l) := \frac{\gamma}{\alpha} t_\lambda\left(\frac{il}{a}\right) = \gamma + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} du \frac{l^2}{l^2 + u^2} M_{\lambda u/a}, \quad (5.47a)$$

$$n_\lambda(l) := \frac{\gamma}{\alpha} u_\lambda\left(\frac{il}{a}\right) = M_{i\lambda/a} e^{-l}, \quad (5.47b)$$

$$Q_\lambda^{(1)}(a, l) := \frac{n_\lambda(l)^2}{r_\lambda(l)[r_\lambda(l)^2 - n_\lambda(l)^2]}, \quad (5.47c)$$

$$Q_\lambda^{(2)}(a, l) := \frac{n_\lambda(l)}{r_\lambda(l)^2 - n_\lambda(l)^2}. \quad (5.47d)$$

Korzystając z nich możemy teraz zapisać energię oddziaływania jako

$$\mathcal{E}_{\text{int}}(a, \lambda) = \frac{4\alpha}{\pi^4 \gamma} \Re \int_{\mathbb{R}_+^2} dq dl \frac{q^2}{(q + il)^2} M_{\lambda q/a} \left(Q_\lambda^{(1)}(a, l) + h(q) Q_\lambda^{(2)}(a, l) \right). \quad (5.48)$$

Kluczowym rezultatem tego rozdziału jest rozwinięcie asymptotyczne tego wzoru dla $\lambda \searrow 0$. Jak dalej pokażemy, można je uzyskać za pomocą niezbyt skomplikowanych, acz długich i technicznych rachunków, dlatego zasadne jest rozpocząć jego dyskusję od przytoczenia końcowego wyniku.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{int}}(a, \lambda) &= \\ &= \frac{2\alpha}{\pi^3} \left[\frac{\chi}{\lambda} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2l} dl}{(\gamma + l)[(\gamma + l)^2 - e^{-2l}]} + \frac{b_1 \chi}{\gamma} \int_0^{+\infty} \frac{l^2 [3(\gamma + l)^2 e^{-2l} - e^{-4l}]}{(\gamma + l)^2 [(\gamma + l)^2 - e^{-2l}]^2} dl - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{\gamma} \int_0^{+\infty} \frac{le^{-2l} dl}{(\gamma + l)[(\gamma + l)^2 - e^{-2l}]} + \frac{1}{\gamma} \int_0^{+\infty} \frac{(1-l)e^{-2l}}{(\gamma + l)^2 - e^{-2l}} dl + R(a, \lambda) \right], \end{aligned} \quad (5.49)$$

gdzie $R(a, \lambda)$ oznacza resztę rozwinięcia asymptotycznego. Zależne od modelu stałe χ i b_1 zostały wprowadzone odpowiednio w (4.12) i (C.48a). Korzystając z elementarnych nierówności

$$\frac{1}{\gamma + l} \leq \frac{1}{\gamma}, \quad \frac{1}{(\gamma + l)^2 - e^{-2l}} \leq \frac{1}{\gamma^2 - 1}, \quad (5.50)$$

łatwo wykazuje się zbieżność czterech całek jawnie wymienionych w rozwinięciu asymptotycznym. Ponadto reszta rozwinięcia spełnia oszacowanie

$$|R(a, \lambda)| \leq \text{const}(a) \lambda. \quad (5.51)$$

Ze względu na długość i techniczną naturę obliczeń, dzięki którym uzyskujemy wzór (5.49), większość z nich umieściliśmy w dodatkach (D) i (E). Poniżej prezentujemy listę kroków, które wraz z informacjami zawartymi we wspomnianych dodatkach, prowadzą do szukanego rezultatu.

- (a) Wyliczenie wiodących członów rozwinięcia względem λ całki po zmiennej q w (5.48); znalezienie oszacowania dla reszty.
- (b) Znalezienie rozwinięcia Taylora względem parametru λ funkcji $Q_\lambda^{(i)}(a, l)$; znalezienie oszacowania dla reszty.
- (c) Połączenie punktów tych wyników by otrzymać (5.49) i (5.51).

W wyniku procedury z punktu (a) otrzymujemy

$$\mathcal{I}_1 = \Re \int_0^{+\infty} dq \frac{q^2}{(q + il)^2} M_{\lambda q/a} = \frac{1}{\lambda} \frac{\pi \gamma \chi}{2} - \pi l + \mathcal{R}_1(a, l, \lambda), \quad (5.52a)$$

$$|\mathcal{R}_1(a, l, \lambda)| \leq \lambda \frac{3\pi}{2\gamma} l^2, \quad (5.52b)$$

$$\mathcal{I}_2 = \Re \int_0^{+\infty} dq \frac{q \sin(q)}{(q + il)^2} M_{\lambda q/a} = \frac{\pi}{2} (1 - l) e^{-l} + \mathcal{R}_2(a, l, \lambda), \quad (5.53a)$$

$$|\mathcal{R}_2(a, l, \lambda)| \leq \lambda \frac{\pi}{2\gamma} l(2 + l) e^{-l/2}. \quad (5.53b)$$

Procedura z punktu (b) prowadzi do

$$Q_\lambda^{(1)}(a, l) = \frac{e^{-2l}}{(\gamma + l)[(\gamma + l)^2 - e^{-2l}]} + \mathcal{R}_3(a, l, \lambda), \quad (5.54a)$$

$$|\mathcal{R}_3(a, l, \lambda)| \leq \lambda \frac{l e^{-l} d}{\gamma^2} \left\{ 1 + \frac{l}{\gamma} + d \left[2l(\gamma + l) + e^{-l} \right] \right\}, \quad (5.54b)$$

$$Q_\lambda^{(1)}(a, l) = \frac{e^{-2l}}{(\gamma + l)[(\gamma + l)^2 - e^{-2l}]} + \lambda \frac{b_1}{\gamma} \frac{l^2 [3(\gamma + l)^2 e^{-2l} - e^{-4l}]}{(\gamma + l)^2 [(\gamma + l)^2 - e^{-2l}]^2} + \mathcal{R}_4(a, l, \lambda), \quad (5.55a)$$

$$\begin{aligned} |\mathcal{R}_4(a, l, \lambda)| &\leq \\ &\leq \lambda^2 \frac{l e^{-l} d}{\gamma^3} \left(l d \left\{ l(\gamma + l) + l^2 + \frac{13}{24} e^{-l} + 4d \left[l(\gamma + l) + \frac{1}{2} e^{-l} \right]^2 \right\} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\gamma + l)^2}{\gamma} \left\{ d \left[2l(\gamma + l) + e^{-l} \right] + \frac{l}{\gamma^2} \right\} + \frac{l}{24\gamma} (13\gamma + 25l) \right), \end{aligned} \quad (5.55b)$$

$$Q_\lambda^{(2)}(a, l) = \frac{e^{-l}}{(\gamma + l)^2 - e^{-2l}} + \mathcal{R}_5(a, l, \lambda), \quad (5.56a)$$

$$|\mathcal{R}_5(a, l, \lambda)| \leq \lambda \frac{l e^{-l/2} d}{\gamma} \left\{ \frac{1}{2} + d \left[2l(\gamma + l) + e^{-l} \right] \right\}. \quad (5.56b)$$

Pojawiający się w tych wzorach symbol d jest skrótowym zapisem funkcji $d(a, l, \lambda)$ zdefiniowanej w dodatku (E), wzór (E.3).

Dzięki opisanej wyżej procedurze otrzymujemy również następujące informacje na temat reszty występującej we wzorze (5.49).

$$R(a, \lambda) = R_1(a, \lambda) + R_2(a, \lambda) + R_3(a, \lambda) + R_4(a, \lambda) + R_5(a, \lambda), \quad (5.57)$$

$$R_1(a, \lambda) = \frac{4}{\pi^4 \gamma} \int_0^{+\infty} dl \mathcal{R}_1(a, l, \lambda) Q_\lambda^{(1)}(a, l), \quad (5.58a)$$

$$|R_1(a, \lambda)| \leq \lambda \frac{6}{\pi^3 \gamma^2} \int_0^{+\infty} dl l^2 e^{-l} d, \quad (5.58b)$$

$$R_2(a, \lambda) = \frac{1}{\lambda} \frac{2\chi}{\pi^3} \int_0^{+\infty} dl \mathcal{R}_4(a, l, \lambda), \quad (5.59a)$$

$$\begin{aligned} |R_2(a, \lambda)| &\leq \\ &\leq \lambda \frac{2\chi}{\pi^3 \gamma^3} \int_0^{+\infty} dl l e^{-l} d \left(ld \left\{ l(\gamma + l) + l^2 + \frac{13}{24} e^{-l} + 4d \left[l(\gamma + l) + \frac{1}{2} e^{-l} \right]^2 \right\} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\gamma + l)^2}{\gamma} \left\{ d \left[2l(\gamma + l) + e^{-l} \right] + \frac{l}{\gamma^2} \right\} + \frac{1}{24} \frac{l}{\gamma} (13\gamma + 25l) \right), \end{aligned} \quad (5.59b)$$

$$R_3(a, \lambda) = -\frac{4}{\pi^3 \gamma} \int_0^{+\infty} dl l \mathcal{R}_3(a, l, \lambda), \quad (5.60a)$$

$$|R_3(a, \lambda)| \leq \lambda \frac{4}{\pi^3 \gamma^3} \int_0^{+\infty} dl l^2 e^{-l} d \left\{ 1 + \frac{l}{\gamma} + d \left[2l(\gamma + l) + e^{-l} \right] \right\}, \quad (5.60b)$$

$$R_4(a, \lambda) = \frac{4}{\pi^3 \gamma} \int_0^{+\infty} dl \mathcal{R}_2(a, l, \lambda) Q_\lambda^{(2)}(a, l), \quad (5.61a)$$

$$|R_4(a, \lambda)| \leq \lambda \frac{2}{\pi^3 \gamma^2} \int_0^{+\infty} dl l(2 + l) e^{-l} d, \quad (5.61b)$$

$$R_5(a, \lambda) = \frac{2}{\pi^3 \gamma} \int_0^{+\infty} dl \mathcal{R}_5(a, l, \lambda) (1 - l) e^{-l}, \quad (5.62a)$$

$$|R_5(a, l, \lambda)| \leq \lambda \frac{2}{\pi^3 \gamma^2} \int_0^{+\infty} dl e^{-3l/2} l(1 + l) d \left\{ \frac{1}{2} + d \left[2l(\gamma + l) + e^{-l} \right] \right\}. \quad (5.62b)$$

Dzięki zastosowaniu nierówności (E.5b) łatwo pokazać, że wszystkie całki występujące we wzorach (5.58a)–(5.62b) są zbieżne.

Wzór (5.49) na rozwinięcie asymptotyczne energii Casimira jest dość skomplikowany, dlatego przy jego badaniu byliśmy zmuszeni użyć kombinacji metod analitycznych i numerycznych. W rezultacie tego znaleziony został jakościowy obraz tego jak zachowują się jego człony wiodące. Pomimo braku ścisłego dowodu, uważamy, że otrzymany

obraz jakościowy jest wiarygodny. Niemniej wyniki obliczeń numerycznych pozostawiają pewien margines błędu, którego dokładne zbadanie wymagałoby dodatkowej pracy, prowadząc przy tym tylko do niewielkiego zysku poznawczego, dlatego uznaliśmy, że nie jest zasadne podjęcie tego problemu.

Obliczenia numeryczne o których mowa zostały wykonane w języku Python, wersja 3.10.12 z pomocą paczek `numpy 1.26.0` i `scipy 1.11.2`, przy czym ostania z nich korzysta z biblioteki Fortrana QUADPACK. Odpowiedni skrypt Pythona z kodem źródłowym tych obliczeń jest dostępny w repozytorium⁹ `Code-for-scientific-papers` na GitHubie, w katalogu `Algebraic-Approach...`. Skrypt ten można również uzyskać pisząc bezpośrednio do autora, pod adres `kziemianfvt@gmail.com`.

Analizę wiodącej części rozwinięcia asymptotycznego (5.49) podzielimy na dwa etapy. W pierwszym z nich będziemy prezentować tylko wyniki które można uzyskać czysto analitycznie, w drugim te dla których niezbędne był pewien wkład obliczeń numerycznych. By ułatwić Czytelnikowi śledzenie tych rozważań, przepiszemy najpierw wzór (5.49) jako

$$\mathcal{E}_{\text{int}}(a, \lambda) = \frac{2\alpha}{\pi^3} \left[\frac{\chi}{\lambda} I_1(\gamma) + b_1 \chi I_2(\gamma) - I_3(\gamma) + I_4(\gamma) + R(a, \lambda) \right], \quad (5.63)$$

gdzie

$$I_1(\gamma) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2l} dl}{(\gamma + l)[(\gamma + l)^2 - e^{-2l}]}, \quad (5.64a)$$

$$I_2(\gamma) = \frac{1}{\gamma} \int_0^{+\infty} \frac{l^2 [3(\gamma + l)^2 e^{-2l} - e^{-4l}]}{(\gamma + l)^2 [(\gamma + l)^2 - e^{-2l}]^2} dl, \quad (5.64b)$$

$$I_3(\gamma) = \frac{2}{\gamma} \int_0^{+\infty} \frac{l e^{-2l} dl}{(\gamma + l)[(\gamma + l)^2 - e^{-2l}]}, \quad (5.64c)$$

$$I_4(\gamma) = \frac{1}{\gamma} \int_0^{+\infty} \frac{(1-l)e^{-2l}}{(\gamma + l)^2 - e^{-2l}} dl. \quad (5.64d)$$

Wyraz $2\alpha/\pi^3$ jest dodatni, więc nie wpływa on na jakościowy charakter przewidywanej siły i dlatego będziemy go zwykle ignorować w rozważaniach. W tym miejscu warto przypomnieć, że dopuszczamy tylko $\gamma > 1$.

W pierwszym kroku naszej analizy wykażemy, że funkcje (5.64a)-(5.64d) przybierają jedynie wartości dodatnie. Dla funkcji $I_i(\gamma)$, $i = 1, 2, 3$ wynika to bezpośrednio z tego, iż ich funkcje podcałkowe są dodatnie, z wyjątkiem może $l = 0$, gdzie dwie z nich przyjmują wartość 0. Wykazanie tego samego faktu dla funkcji $I_4(\gamma)$ wymaga kilku dodatkowych prostych operacji.

By to pokazać, w pierwszym kroku zapiszemy $I_4(\gamma)$ jako różnicę dwóch jawnie nieujemnych całek:

$$I_4(\gamma) = \frac{1}{\gamma} \int_0^1 \frac{(1-l)e^{-2l}}{(\gamma + l)^2 - e^{-2l}} dl - \frac{1}{\gamma} \int_1^{+\infty} \frac{(l-1)e^{-2l}}{(\gamma + l)^2 - e^{-2l}} dl. \quad (5.65)$$

Ponieważ $(\gamma + l)^2 - e^{-2l}$ jest funkcją monotonicznie rosnącą w l , to pierwszą całkę w powyższym wzorze możemy w posty sposób ograniczyć od dołu, a drugą od góry,

⁹Pełen adres: <https://github.com/KZiemian/Code-for-scientific-papers>.

w rezultacie czego dostajemy

$$I_4(\gamma) \geq \frac{1}{\gamma[(\gamma+1) - e^{-2}]} \left[\int_0^1 (1-l)e^{-2l} dl - \int_1^{+\infty} (l-1)e^{-2l} dl \right]. \quad (5.66)$$

Po przeprowadzeniu elementarnego całkowania otrzymujemy

$$I_4(\gamma) \geq \frac{1}{4\gamma[(\gamma+1) - e^{-2}]} > 0. \quad (5.67)$$

Udowodnimy teraz, że funkcje $I_1(\gamma)$ i $I_3(\gamma)$ są silnie malejące w γ . Jeśli ustalimy wartość l to ich funkcje podcałkowe są silnie malejącymi funkcjami γ . Ponieważ te funkcje podcałkowe są ponadto ciągłe, więc możemy zapisać

$$I_1(\gamma_1) - I_1(\gamma_2) = \int_0^{+\infty} dl U(\gamma_1, \gamma_2, l), \quad \gamma_1 < \gamma_2, \quad (5.68)$$

gdzie $U(\gamma, l)$ jest funkcją nieujemną, ciągłą, silnie większą od zera dla przynajmniej jednej wartości l . Stąd $I_1(\gamma_1) - I_1(\gamma_2) > 0$, co dowodzi żądanej własności. Dokładnie to samo rozumowanie stosujemy do $I_3(\gamma)$.

Zajmijmy się teraz problemem podania górnych oszacowań na funkcje $I_i(\gamma)$, gdzie $i = 1, 2, 3, 4$. Jak wspomnieliśmy wcześniej, nierówności (5.50) pozwalają wykazać, że całki reprezentujące te funkcje są zbieżne. Dokładniej, oszacowania te pozwalają stwierdzić, że odpowiednie funkcje podcałkowe są majoryzowane przez bardzo proste funkcje całkowalne i całki z tych funkcji majoryzujących można policzyć w sposób elementarny. Przykładowo dla $I_1(\gamma)$ zachodzi

$$|I_1(\gamma)| \leq \frac{1}{\gamma(\gamma^2 - 1)} \int_0^{+\infty} dl e^{-2l} = \frac{1}{2\gamma(\gamma^2 - 1)}. \quad (5.69)$$

Nierówności tego typu są użyteczne przy sprawdzaniu wyników numerycznych.

Dokładne obliczenie wszystkich tego typu oszacowań występujących w rozważanym problemie nie wniosłoby wiele do naszej wiedzy, niemniej warto zwrócić uwagę na ogólną strukturę nierówności, którą możemy dzięki nim uzyskać. By uczynić otrzymane wzory prostsze w czytaniu, wprowadzamy funkcje

$$F(\gamma, \lambda) = \frac{\chi}{\lambda} I_1(\gamma) + b_1 \chi I_2(\gamma) - I_3(\gamma) + I_4(\gamma). \quad (5.70)$$

Korzystając z tych samych metod, których użyliśmy przy analizie funkcji $I_1(\gamma)$, dostajemy następującą nierówność

$$|F(\gamma, \lambda)| \leq C_1 \frac{1}{\gamma(\gamma^2 - 1)} \lambda^{-1} + \sum_{i=2}^4 C_i \frac{1}{\gamma^{n_i} (\gamma^2 - 1)^{m_i}}, \quad (5.71)$$

gdzie $n_i \in \{1, 2, 3\}$, $m_i \in \{1, 2\}$, a C_1 i C_i to pewne stałe dodatnie. Ponieważ dla $\gamma = 1$ w układzie dwóch delt pojawia się stan związany, a obecne w $I_i(\gamma)$ funkcje podcałkowe stają się osobliwe dla $l = 0$, należy spodziewać się, iż energia jest rozbieżna w granicy $\gamma \searrow 1$. Z podanego oszacowania i elementarnej tożsamości $\gamma^2 - 1 = (\gamma + 1)(\gamma - 1)$ wynika, że rozbieżność ta nie może być mocniejsza niż ta, która pochodzi od wyrazów postaci $(\gamma - 1)^{m_i}$.

Ustalmy teraz $\gamma_0 > 1$. Postępując zgodnie z stosowaną wcześniej procedurą, dla wszystkich $\gamma > \gamma_0$ funkcje podcałkową występującą w $I_1(\gamma)$ możemy zmajoryzować w następujący sposób:

$$\frac{e^{-2l}}{(\gamma + l)[(\gamma + l)^2 - e^{-2l}]} \leq \frac{1}{\gamma_0(\gamma_0^2 - 1)} e^{-2l}. \quad (5.72)$$

Analogicznie postępujemy dla funkcji I_2 , I_3 i I_4 . Proste zastosowanie twierdzenia o zbieżności majoryzowanej daje nam

$$\lim_{\gamma \nearrow +\infty} I_i(\gamma) = 0. \quad (5.73)$$

Ostatnim krokiem czysto analitycznej analizy części wiodącej rozwinięcia (5.49), będzie dyskusja pewnych własności obecnych w nim współczynników χ i b_1 , które zostały zdefiniowane we wzorach (4.12) i (C.48a). Nie jest szczególnie trudne do zauważania, że ich wartość zależy od wyboru konkretnej funkcji $g(\vec{x})$. Korzystając dodatkowo z nierówności (C.32), dostajemy następujące ograniczenia na wartości jakie te współczynniki mogą przyjmować.

$$0 < \chi \leq \frac{8\pi^8 \sqrt{\pi}}{\alpha^4} \approx \frac{134\,544}{\alpha^4}, \quad (5.74a)$$

$$0 < b_1 \leq \frac{1}{\alpha}. \quad (5.74b)$$

Pierwsza z tych nierówności pozwala nam spojrzeć na badane modele z nowego punktu widzenia.

Przypomnijmy, że wedle używanej przez nas konwencji, każdy model posiada ustaloną raz na zawsze wartość parametru α , więc zmiana jego wartości oznacza zmianę rozważanego modelu. Ponadto, przy analizie rozwinięcia asymptotycznego ograniczyliśmy naszą uwagę do klasy modeli w których obowiązuje relacja $L = 2\pi^2/\alpha$. Wprowadzamy teraz **graniczną wartość parametru** α wzorem

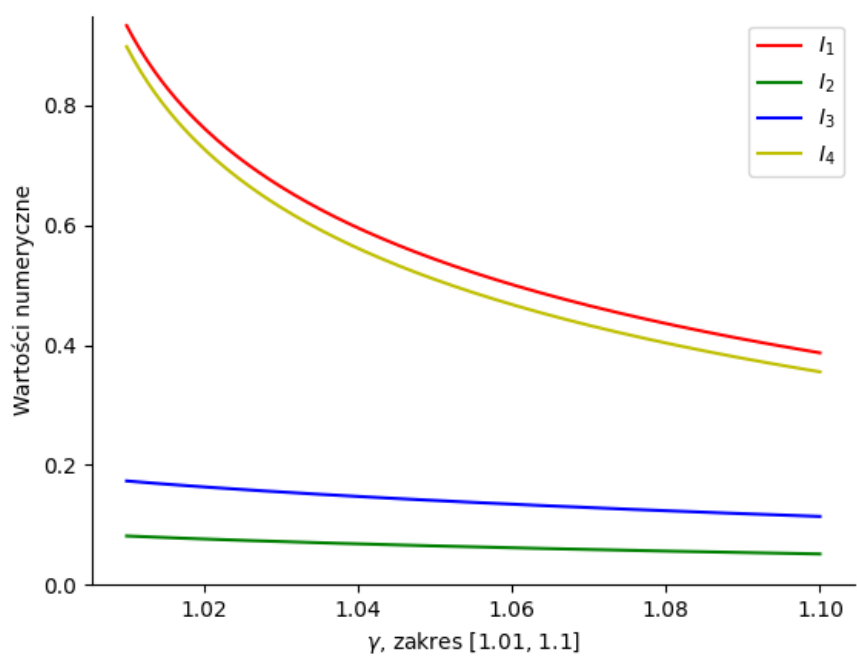
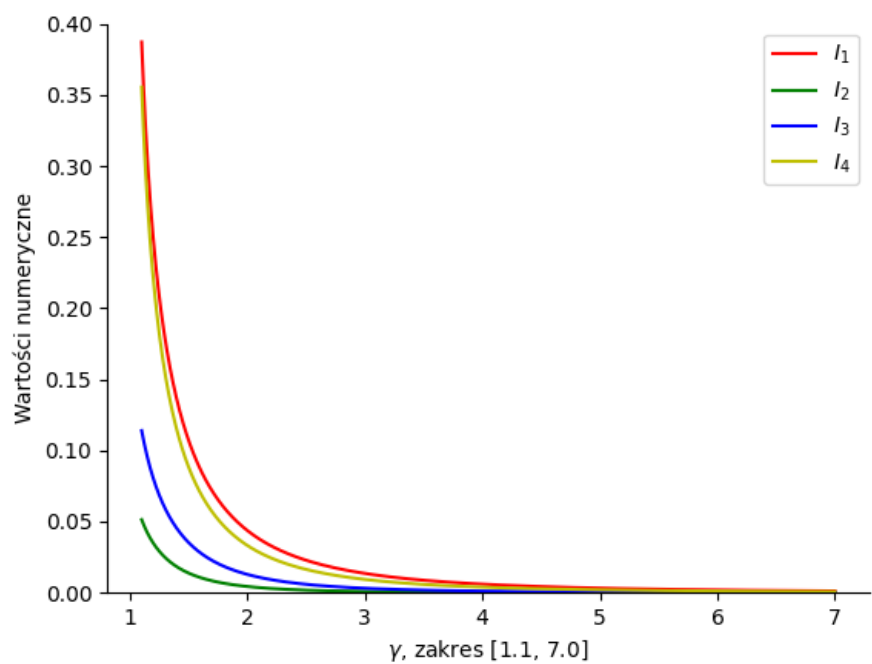
$$\alpha_b = \sqrt[4]{8} \sqrt[8]{\pi} \pi^2 \approx 19.1. \quad (5.75)$$

W obecnej chwili podzielić badaną przez nas klasę modeli na dwie podklasy. Pierwsza z nich zawiera te modele dla których $\alpha \leq \alpha_b$, więc dla nich jest dopuszczalna możliwość $\chi \geq 1$. Modele w drugiej klasie spełniają $\alpha > \alpha_b$, więc dla nich zawsze jest prawdą, że $\chi < 1$. Ponadto jeśli będziemy zmieniali modele tak, że $\alpha \nearrow +\infty$, przy $\lambda = \text{const}$, wówczas wkład członów zależny od parametrów modelu χ i b_1 we wzorze (5.63) dąży do zera, podczas gdy wkład dwóch pozostałych rośnie jak α .

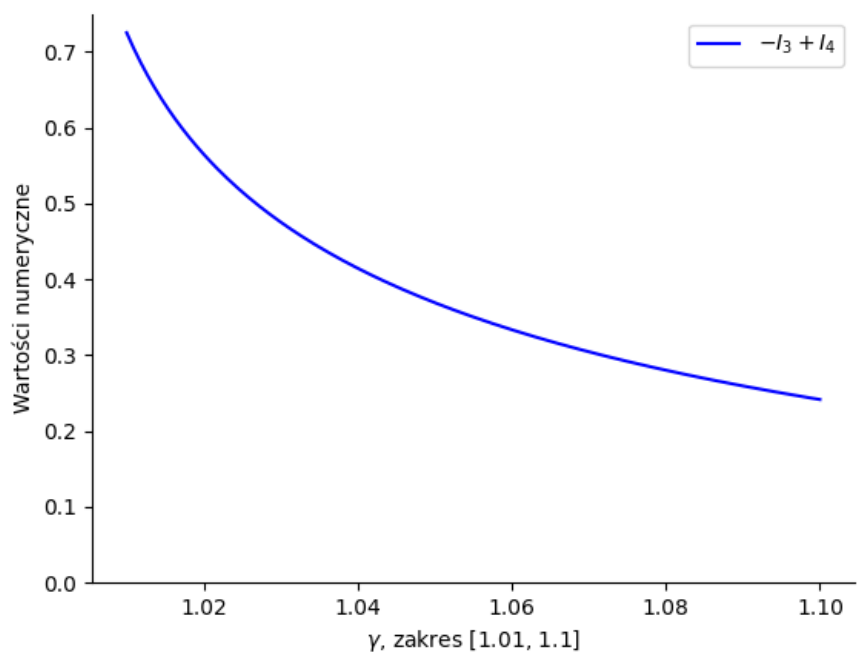
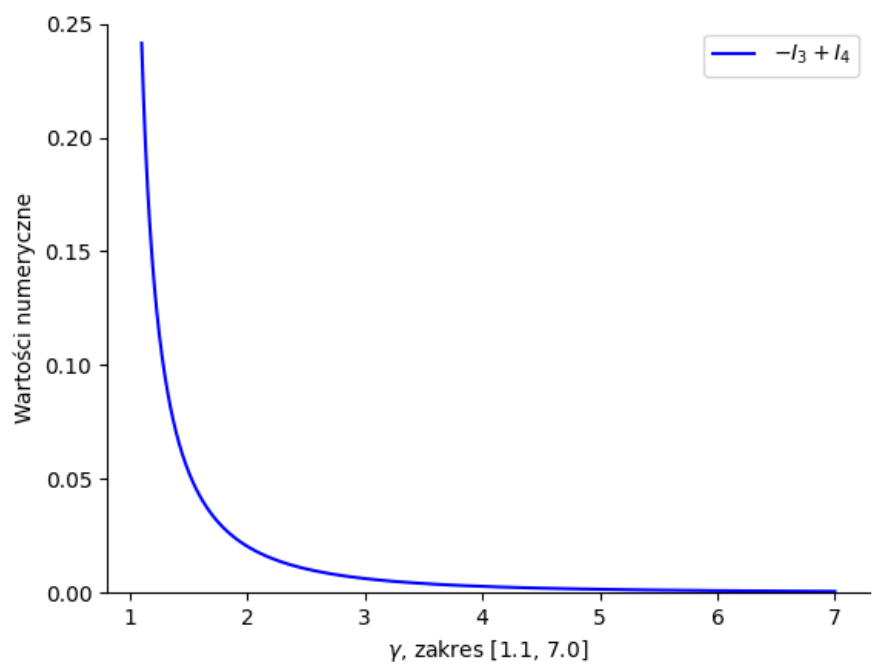
Ze względu na obecność czynnika λ^{-1} w wzorze na rozwinięcie asymptotyczne sama wartość współczynnika χ nie rozstrzyga o wielkości wkładu członu zawierającego $I_1(\gamma)$ do energii Casimira. Jednak rozgraniczenie tych dwóch typów modeli wciąż ma pewną wartość poznawczą, rzuca bowiem nowe światło na to jak w danym przypadku zachowuje się rozwinięcie asymptotyczne.

Potrzebujemy uczulić Czytelnika na to, że związek $L = 2\pi^2/\alpha$ jest kluczowy dla przedstawionej właśnie analizy. Gdyby nie zachodziła ta, lub podobna relacja wiążąca parametr α z L , to prawe strony nierówności (5.74a) i (5.74b) zawierałby odpowiednie potęgi parametru L . Tym samym bez dodatkowej wiedzy o wielkości parametru L w danym modelu, nie moglibyśmy powiedzieć prawie nic o tym jakie wielkości mogą dla niego przyjąć parametry χ i b_1 .

Przejdziemy teraz do tych wyników, do otrzymania których potrzebna była analiza numeryczna. Na dwóch rysunkach w (3) przedstawione są wykresy wartości



Rysunek 3: Wykres wartości numerycznych funkcji $I_i(\gamma)$, $i = 1, 2, 3, 4$, dla wartości parametru γ z zakresu odpowiednio $[1.1, 7]$ i $[1.01, 1.1]$.



Rysunek 4: Wykres wartości numerycznych wyrażenia $-I_3(\gamma) + I_4(\gamma)$, dla wartości parametru γ z zakresu odpowiednio $[1.1, 7]$ i $[1.01, 1.1]$.

numerycznych funkcji $I_i(\gamma)$, $i = 1, 2, 3, 4$ w funkcji γ , błąd obliczeń numerycznych był zawsze rzędu 10^{-8} w przyjętej skali, czyli z naszego punktu widzenia jest zanedbywalnie mały. Wyniki te są w zgodzie z udowodnionym już faktem, że wszystkie badane funkcje dążą do zera, gdy $\gamma \nearrow +\infty$. W naszej opinii pokazują również przekonująco, że nie tylko funkcje $I_1(\gamma)$ i $I_3(\gamma)$ dążą do zera monotonicznie malejąc, co zostało wcześniej udowodnione, lecz to samo jest prawdą również dla $I_2(\gamma)$ i $I_4(\gamma)$.

Jeśli chodzi o zachowanie wyliczonych funkcji w okolicy zera, tutaj również rezultaty numeryczne pozostają w zgodzie z naszym oczekiwaniem, iż funkcje te będą eksplodować gdy $\gamma \searrow 0$. Jednocześnie dla przetestowanych przypadków, stopień rozbieżności wyników numerycznych pozostaje w zgodzie z oszacowaniami analitycznymi. Przykładowo dla $\gamma = 1.01$ wzór (5.69) daje nam ograniczenie $|I_1(\gamma)| \leq 24.63$, zaś metody numeryczne pokazują, że $I_1(\gamma) \approx 0.93$. Fakt, iż wartość ta jest mała w stosunku do maksymalnej, jaką dopuszcza nierówność (5.69) wynika najpewniej z tego, że dla $l > 0$ funkcja podcałkowe wszystkich funkcji $I_i(\gamma)$ są bardzo silnie tłumione, więc wkład do wartości danej całki daje głównie małe otoczenie punktu $l = 0$. Takie spojrzenie wyjaśnia również dlaczego wartości przyjmowane przez $I_2(\gamma)$ i $I_3(\gamma)$ są wyraźnie mniejsze niż dwóch pozostałych funkcji, bowiem ich funkcje podcałkowe znikają w $l = 0$.

Kolejnym ważnym wnioskiem z tych obliczeń jest to, że kombinacja liniowa dwóch niezależnych od modelu wiodących członów rozwinięcia asymptotycznego $-I_3(\gamma) + I_4(\gamma)$, jest monotonicznie malejącą funkcją γ , zob. rys. (4). Dzięki temu możemy stwierdzić, iż rozważana klasa modeli przewiduje istnienie siły odpychającej między ciałami makroskopowymi, przynajmniej w tym zakresie parametrów w którym rozwinięcie asymptotyczne daje dobry obraz energii Casimira. Siła ta rośnie do nieskończoności, gdy γ dąży do wartości równej 1, co odpowiada odległości między ciałami a dążącej do $2\pi^2/\alpha$. Wnioski te prezentują najważniejsze rezultaty przeprowadzonej tu analizy jakościowej rozwinięcia asymptotycznego.

Ostatnim zagadnieniem związanym z analizą numeryczną jakim się zajmiemy, to próba oszacowania który z wiodących członów w rozwinięciu asymptotycznym (5.63) jest dominujący. Z danych przedstawionych na rysunku (3) wynika, że $I_1(\gamma)$ ma największą wartość spośród rozważanych funkcji dla wszystkich wartości argumentu. Analiza danych wskazuje na to, że zachodzi

$$\frac{I_1(\gamma)}{I_2(\gamma)} \geq 7, \quad (5.76)$$

co uznajemy za wiarygodny rezultat. Numeryczne badanie ilorazów małych liczb, z którymi mamy do czynienia dla $\gamma > 5$, nastręcza pewnych technicznych trudności, dobrze znanych w tej dziedzinie badań. W naszej ocenie ilość pracy jaką wymagałoby uzyskanie dokładniejszego dolnego oszacowania na wartości ilorazu $I_1(\gamma)/I_2(\gamma)$, nie jest uzasadniona wartością potencjalnie uzyskanych wyników, dlatego ograniczymy się do dość surowej analizy na jaką pozwala ostatnia nierówność. Ta analiza nie ma na celu dowodzenia czegokolwiek w sensie ścisłym, lecz pragnie wskazać na typ zachowania, który z dużym prawdopodobieństwem cechuje badane modele.

Prostym wnioskiem z postaci wzorów (5.63) i (5.76), jest to, że człon zawierający $I_1(\gamma)$ będzie dominował nad tym z $I_2(\gamma)$, jeśli spełniona jest zależność

$$\lambda < \frac{7}{b_1}. \quad (5.77)$$

Ponieważ zachodzi relacja (5.74b), a $\lambda \in (0, 1/2)$, warunek ten będzie automatycznie spełniony dla $\alpha > 1/14$. Płynie stąd wniosek, że pomiędzy wartościami parametru α

wynoszącymi $\alpha_0 = 1/14 \approx 0.07$, a $\alpha_b \approx 19.1$, rozciąga się rodzina modeli, dla których może być spełniona relacja $\chi \geq 1$, a jednocześnie dla wszystkich dopuszczalnych wartości λ wyraz z $I_1(\gamma)$ dominuje nad $I_2(\gamma)$. Uważam za rozsądne przyjąć, że rozwinięcie asymptotyczne będzie obowiązywać tylko dla $\lambda \leq 0.1$. Jeśli więc będziemy zachodzić $\chi \geq 1$, to energia Casimira będzie zdominowana przez pierwszy człon rozwinięcia asymptotycznego.

Dla $\alpha > \alpha_b$ zachodzi $\chi < 1$, aby więc wyraz χ/λ był rzędu jedności musi być spełniona nierówność

$$\lambda \leq \frac{8\pi^8 \sqrt{\pi}}{\alpha^4}. \quad (5.78)$$

Wyraz po prawej strony tej nierówności przyjmuje wartość w przybliżeniu 0.5 dla $\alpha \approx 22.78$ i wartość około 0.1 dla $\alpha \approx 34.06$. By uzyskać ograniczenie $\lambda \leq 10^{-4}$ musimy przyjąć $\alpha > 191.52$. Te ogólne obserwacje sugerują, że dla stosunkowo dużego zakresu wartości parametru $\alpha > 1/14$, wyraz zawierający $I_1(\gamma)$ będzie dominować nad wszystkimi pozostałymi. Dokładniejsze zrozumienie, kiedy może dojść do sytuacji, że w rozwinięciu asymptotycznym pierwsze dwa wyrazy będą dawać mniejszy wkład niż suma $-I_3(\gamma) + I_4(\gamma)$ wymagałoby uzyskanie dodatkowych informacji o rozwinięciu asymptotycznym. Zdecydowaliśmy się nie podążać tą drogą, lecz poprzestać na obecnych wynikach.

Pozostaje jeszcze omówić przypadek $\alpha \leq \alpha_0 = 1/14 \approx 0.07$. Wówczas pierwszy wyraz rozwinięcia asymptotycznego dominuje nad drugim, gdy $\lambda < 7\alpha$. Jeśli, jak przyjęliśmy poprzednio, oszacowanie asymptotyczne obowiązuje dla $\lambda \leq 0.1$, to oznaczałoby, że pierwszy wyraz dominuje nad drugim mniej więcej w przedziale $0.01 \leq \alpha \leq 0.07$, jednak dokładniejsze oszacowania wymagałyby lepszego poznania własności rozwinięcia asymptotycznego. Jak już wspominaliśmy, w naszej ocenie potencjalny zysk poznawczy, nie uzasadnia prowadzenia nad tym dalszych prac, przynajmniej w obecnej chwili. Na tym zakończymy analizę wzoru (5.63).

Stajemy teraz przed problemem, co można powiedzieć o zachowaniu się reszty rozwinięcia asymptotycznego? Podstawowy problem w uzyskaniu tego typu informacji, polega na wyliczeniu lub oszacowaniu od góry całek zawierających funkcję $d(a, l, \lambda)$, można to uczynić za pomocą nierówności podanych w dodatku w dodatku E takich jak (E.5a). Niemniej wobec faktu, że nie dysponujemy na razie innym niż jakościowym zrozumieniem wiodących wyrazów w rozwinięciu asymptotycznym, szukanie bardzo dokładnych oszacowań na resztę nie jest niczym uzasadnione.

Zamiast tego, zbadamy jej zachowanie dla dużych wartości parametru a , co odpowiada dużym wartościom γ . Wówczas wystarczające jest wykorzystanie z prostej nierówności (E.5b). Analogicznie jak dla funkcji (5.70), górne oszacowania otrzymane tym sposobem zawiera tylko całki które można policzyć analitycznie. Z tych samym powodów co wówczas, zamiast przeprowadzać dokładne rachunki, zadowolimy się podaniem ogólnej struktury otrzymanego oszacowania. Łatwo się przekonać, iż przybierze ono następującą postać.

$$|R(a, \lambda)| \leq \lambda \sum_{i=1}^N C_i \frac{1}{\gamma^{m_i}} \frac{1}{(\gamma^2 - 1)^{n_i}}, \quad (5.79)$$

gdzie $n_i, m_i, N \in \mathbb{N}$, a $C_i > 0$ to pewne stałe. Wartości jakie mogą przyjmować te współczynniki są ograniczone przez następującą nierówność

$$1 \leq N \leq 37, \quad 1 \leq n_i \leq 6, \quad 1 \leq m_i \leq 3. \quad (5.80)$$

Również tutaj przeprowadzona analiza jest dość surowa i subtelniejsze rozważania najprawdopodobniej doprowadziłyby do znalezienia bardziej optymalnych ograniczeń.

Podstawowy wniosek jaki płynie z nierówności (5.79) jest następujący. Dla $\gamma \gg 1$ (równoważnie $a \gg 1$) reszta $R(a, \lambda)$ znika zarówno w przypadku gdy γ jest stałe i $\lambda \searrow 0$, jak i gdy λ jest ustalona, a $\gamma \nearrow +\infty$ (czyli $a \nearrow +\infty$). Zasadnym jest więc wyciągnięcie wniosku, że pełne wyrażenie na energię Casimira maleje do zera bardzo szybko wraz rosnącą odległością.

Łatwo zauważyć duże podobieństwa między wzorami (5.71) i (5.79). Wynika to z tego, że naszym celem było ogólne scharakteryzowanie zachowania obu reszt, nie zaś przeprowadzenie bardzo precyzyjnej ich analizy. Dlatego do uzyskania obu oszacowań użyliśmy niezbyt wyrafinowanych nierówności (5.50), (E.5b), co jak łatwo zauważyć, prowadzi w obu przypadkach do pojawienia się górnych oszacowań tego samego typu.

Przejdziemy teraz do porównania otrzymanych w tej pracy wyników, z tymi rezultatami badań nad problemem dwóch delt Diraca opublikowanych przez A. Scardicchio w pracy *Casimir Dynamics: Interactions of Surfaces with Codimension > 1 Due to Quantum Fluctuations* [Sca05] oraz przez M. Spreafico i S. Zerbini w pracy *Finite temperature quantum field theory on noncompact domains and application to delta interactions* [SZ09]. W obu przypadkach postaramy się możliwie krótko zreferować stosowane przez tych autorów podejście do problemu, co powinno uczynić bardziej zrozumiałymi wszystkie różnice dzielące omawiane rezultaty.

A. Scardicchio w swojej pracy [Sca05], postawił sobie za cel obliczenia oddziaływania typu Casimira dla układu fizycznego, w którym obok pola skalarne znajdują się także defekty, zwane przez niego również branami, które mają kształt punktu, linii bądź płaszczyzny, przy czym przez defekt punktowy rozumie on obecność delty Diraca. By to osiągnąć rozważa on sytuacje, gdy badany model znajdują się w czasoprzestrzeni o wymiarze $d + 1$, gdzie $d = 1, 2, 3$. Z punktu widzenia niniejszej pracy, interesujący jest tylko przypadek dwóch punktów w trzech wymiarach przestrzennych, jednak by lepiej zrozumieć cele i osiągnięcia Scardicchia, przedyskutujemy również ten aspekt jego pracy.

Główna idea na której opiera się praca A. Scardicchia jest intuicyjnie łatwa do zrozumienia. Jeśli rozwiążemy problem dla dwóch delt Diraca w jednym wymiarze przestrzennym, a następnie dołożymy dwa wymiary przestrzenne „prostopadłe do pierwszego”, to dostaniemy układ dwóch nieskończonych płyt, który zwykle rozważa się dla efektu Casimira. Wydaje się, że Autor, bazując na często spotykanej w literaturze interpretacji delty Diraca, jako sposobu zdania warunków brzegowych na funkcję o wartościach zespolonych $\psi(x)$ w punkcie $x = 0$, uznał, że taka procedura „rozciągania” daje w rezultacie model, który spełnia odpowiednie warunki brzegowe na płaszczyźnie do której punkt x został rozciągnięty. Niemniej nie zostało to stwierdzone w sposób jawny. Należy dodać, iż interpretacja potencjału typu $\delta(\vec{x} - \vec{x}_0)$ za pomocą warunków brzegowych jakie ma spełniać funkcja $\psi(\vec{x})$ w pojedynczym punkcie $\vec{x}_0$ jest dyskutowana również w cytowanej przez Scardicchia monografii Albeverio et al. [Alb+88], więc Scardicchio jest świadomy niuansów, w które ten problem jest uwikłany.

Niemniej, z naszego punktu widzenia taka procedura jest mocno niezadowolająca. A. Scardicchio dodaje dodatkowe wymiary dopiero na poziomie wyrażenia na energię Casimira, patrz roz. V w [Sca05], nigdzie nie dyskutując jak zachowuje się kwantowe pole skalarne $\phi(\vec{x}, t)$ w trakcie „rozciągania przestrzeni”. Również w cytowanej przez niego literaturze nie znaleźliśmy odpowiedniej analizy tego problemu. Wobec tego nie możemy być pewni, że w trakcie rozciągania przestrzeni nie napotkamy poważnych problemów technicznych, które obecność została zignorowana w omawianym przez nas artykule. Wielorakie subtelności dotyczące efektu Casimira, które dyskutowaliśmy już w rozdziale (3.6), każą z wielką ostrożnością podchodzić do tego typu procedur.

Przejdźmy teraz do bardziej szczegółowego omówienia jego metody. W rozdziale II omawianej pracy wprowadzony zostaje hamiltonian (por. wzór (4) w [Sca05])

$$H = -\nabla^2 + m^2 + \sum_{i=1}^N \mu_i \delta(\vec{x} - \vec{a}_i) = H_0 + \sum_{i=1}^N \mu_i \delta(\vec{x} - \vec{a}_i). \quad (5.81)$$

opisujący masywne pole skalarne $\phi(\vec{x}, t)$ oddziałujące z N deltami Diraca. Wprowadza zostaje również spektralna gęstość hamiltonianu H wzorem

$$\rho(E) = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \searrow 0} \Im \text{Tr}(H - E)^{-1}. \quad (5.82)$$

Ponieważ autor zaczyna od modelu zawierającego ściśle delty Diraca, energia Casimira jest w pierwotnym sformułowaniu matematycznie nonsensowna, stąd natychmiast pojawia się potrzeba pewnych regularyzacji. Dlatego też wprowadza energię stanu zerowego (por. wzór (3) op. cit.) jako

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_0^\Lambda dE \rho(E) \sqrt{E}, \quad (5.83)$$

gdzie Λ to parametr obcięcia. Wzór ten jest kluczowy dla omawianej pracy, gdyż na nim opierają się wszystkie jej znaczące rezultaty.

Trzeba przy tym zauważyć, że autor dość często i płynnie przechodzi od rozważania układu delt Diraca, do modelu podobnego do tego użytego w niniejszej pracy, gdzie potencjał reprezentuje pewna gładka funkcja, której własności nigdy nie są szczegółowo sprecyzowane. Jeśli rozważany jest model z gładką funkcją, Scardicchio zamieszcza też komentarz jak przez odpowiednie przejście graniczne dostać otrzymać z niego model zawierający deltę Diraca oraz wnioski jakie, w jego opinii, płyną z tej procedura. Jednak styl jego pracy nie ułatwia prześledzenie tych wszystkich przejść.

W następnym kroku obliczona zostaje gęstość spektralna $\rho(E)$ pełnego hamiltonianu H , od której odjęta jest gęstość spektralna $\rho_0(E)$ operator H_0 i dopiero tak otrzymana wielkość jest użyta do obliczenia energii stanu zerowego. Uzasadnione to zostaje stwierdzeniem, że gęstość spektralna swobodnego hamiltonianu nie zależy od żadnych z parametrów delt Diraca, stąd nie gra żadnej roli w analizowanym efekcie. Należy podejrzewać, że uwzględnienie $\rho_0(E)$ doprowadziłoby do pojawiania się dodatkowych rozbieżnych wyrażeń we wzorze na energię Casimira.

Po pewnych dodatkowych przekształceniach wzór na energię stanu zerowego przybiera postać (por. wzór (20) op. cit.)

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{2\pi} \Im \int_0^\Lambda dE \sqrt{E} \frac{\partial}{\partial E} \ln \lim_{\epsilon \searrow 0} \det \Gamma(E + i\epsilon, \{\vec{a}_i\}). \quad (5.84)$$

We wzorze tym występuje macierz $\Gamma(E, \{\vec{a}_i\})$, która wprowadzona jest we wzorze przedstawiającym resolwentę operatora danego przez (5.81). Dokładny opis tej macierzy można znaleźć w cytowanej już monografii Albeverio et al. [Alb+88].

W następnym kroku od wyrażenia (5.83) zostają odjęte energie samoodziaływania delt Diraca, co prowadzi do wzoru

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{2\pi} \Im \int_0^\Lambda dE \sqrt{E} \frac{\partial}{\partial E} \ln \lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{\det \Gamma(E + i\epsilon, \{\vec{a}_i\})}{\det \Gamma(E + i\epsilon, \infty)}. \quad (5.85)$$

Wedle autora dysponując tą wersją wyrażenia na energię stanu zerowego można usunąć parametr obciążenia Λ . Mianowicie, należy najpierw wykonać całkowanie przez części, następnie należy skorzystać z konturu Γ_+ przedstawionego na rysunku (7), na którego półokręgu funkcja podcałkowa jest szacowana przez $C \exp(-2 \sin(\theta/2) \sqrt{|E|} a_{\min})$, gdzie $0 < \theta < \pi$, $a_{\min} = \min_{i \neq j} |\vec{a}_i - \vec{a}_j|$. Według jego słów, kontur ten pozwala zamienić całkę po zbiorze¹⁰ $[0, \Lambda]$ na tą po $[-\Lambda, 0]$ i w tej ostatniej całce możemy bez problemu wziąć $\Lambda \nearrow +\infty$.

Ponieważ autor do tej pory przyjmował skończoną wartość parametru obciążenia Λ , należy domniemywać, że dopiero w tym kroku mógł on zostać usunięty i z tego względu ten rachunek powinien być poddany szczegółowej analizie. Wydaje się bowiem wątpliwe, by zaprezentowana procedura mogła przeprowadzić całkę rozbieżną w zbieżną. Jednak w samym artykule nie znajdujemy szerzej dyskusji tej procedury, konieczne jest więc dokładne przeliczenie wszystkich użytych tam wyrażeń matematycznych, czego nie będziemy się tu podejmować.

Po wspomnianych przekształceniach wzór, który teraz utożsamiany jest z energią Casimira, przyjmuje ostateczną postać (por. wzór (22) w [Sca05]):

$$\mathcal{E} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{+\infty} dE \frac{1}{\sqrt{E}} \ln \left(\frac{\det \Gamma(-E, \{\vec{a}_i\})}{\det \Gamma(-E, \infty)} \right). \quad (5.86)$$

Z wzoru tego można otrzymać wyrażenie na siłę Casimira dla dwóch delt w trzech wymiarach, w cytowanej pracy jest ona podana we wzorze (27). Chcemy zwrócić Czytelnikowi uwagę, że parametr α używany przez Scardicchio nie jest tożsamy z tym stosowanym w niniejszej pracy, używa on za to tej samej konwencji jaką cytowana już wielokrotnie książka Albeverio et al. Jeśli więc oznaczmy stosowany przez nich parametr jako α_A to zachodzi relacja

$$\alpha_A = \frac{\alpha}{8\pi^3}. \quad (5.87)$$

Uwzględniając ten fakt, kładąc $m = 0$ i wprowadzając zmienną bezwymiarową $l = k/a$, gdzie a to odległość między punktami w których znajdują się delty Diraca, możemy podany w omawianej pracy wzór zapisać jako

$$\mathcal{E}_{\text{Casi}}(a) = \frac{\alpha}{4\pi^3} \frac{1}{\gamma} \int_0^{+\infty} dl \ln \left(1 - \frac{e^{-2l}}{(\gamma + l)^2} \right). \quad (5.88)$$

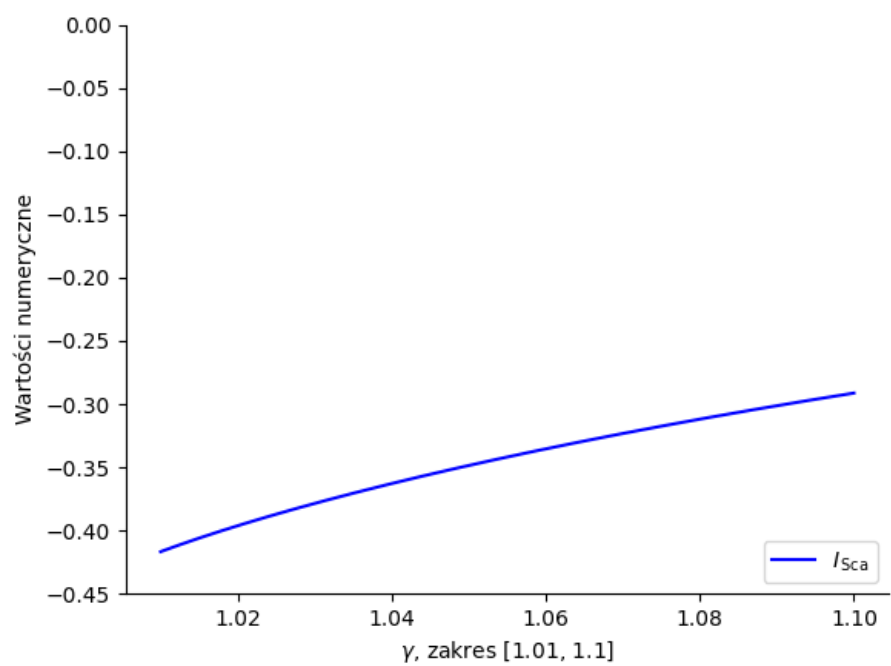
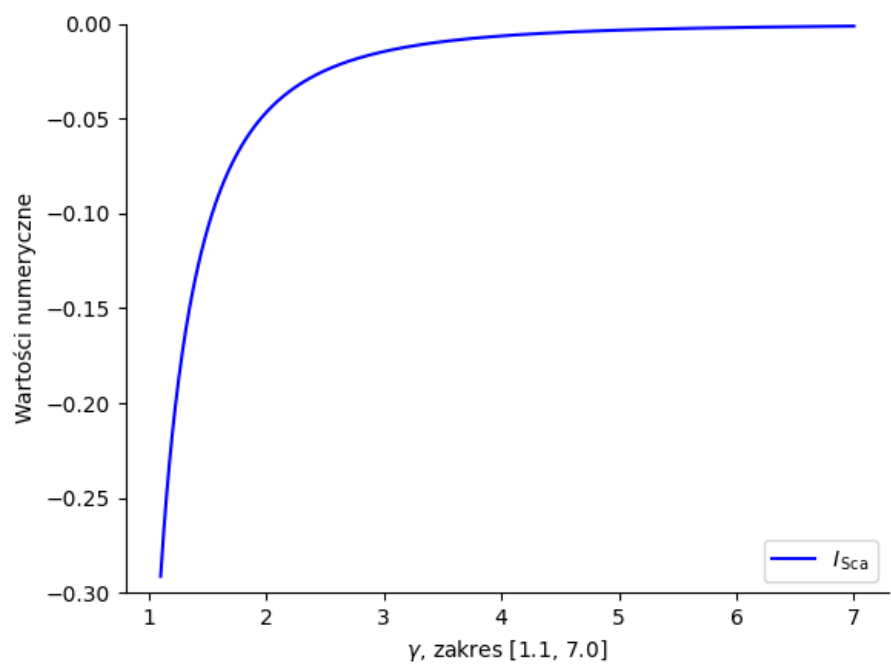
Dla uproszczenia analizy wprowadzamy oznaczenie

$$I_{\text{Sca}}(\gamma) = \frac{1}{\gamma} \int_0^{+\infty} dl \ln \left(1 - \frac{e^{-2l}}{(\gamma + l)^2} \right). \quad (5.89)$$

Według Scardicchia siła przewidywana przez ten wzór jest zawsze przyciągająca, co potwierdzają wyniki obliczeń numerycznych zaprezentowane na wykresach (5). Błąd obliczeń numerycznych również w tym przypadku był rzędu 10^{-8} , więc możemy go zaniedbać. Obliczenia numeryczne wykonano tutaj korzystając z tego samego zestawu oprogramowania co poprzedni, odpowiedni skrypt można tak jak poprzednio znaleźć w repozytorium `Code-for-scientific-papers`, lub pisząc do autora tej pracy pod adres kziemianfvt@gmail.com.

Możemy teraz przejść do omówienia wyników pracy M. Spreafico i S. Zerbiniego *Finite temperature quantum field theory on noncompact domains and application*

¹⁰Autor określa tę procedurę zastąpienia jednej całki drugą mianem „obrotu Wicka”.



Rysunek 5: Wykres wartości numerycznych funkcji $I_{Sca}(\gamma)$, dla wartości parametru γ z zakresu odpowiednio $[1.1, 7]$ i $[1.01, 1.1]$.

to *delta interactions* [SZ09]. Ich podejście wychodzi od problemu pojawienia się w termicznej kwantowej teorii pola, który wymaga pewnego komentarza. pominiemy przy tym większość kwestii czysto technicznych. Tak jak jest to przyjęte w tej gałęzi fizyki, będziemy pracować w układzie jednostek w którym stała Boltzmanna $k_B = 1$, a także korzystać z oznaczenia $\beta = 1/T$, gdzie T to temperatura w skali bezwzględnej.

Niech teraz M będzie rozmaitością Riemanna o wymiarze n , a S_r^1 okręgiem o promieniu $r = \beta/2\pi$, przy czym współrzędną na tym okręgu będziemy oznaczać przez u . Na $N = S_r^1 \times M$ określamy teraz hamiltonian pola skalarnego

$$H = -\frac{\partial^2}{\partial u^2} - \Delta_M, \quad (5.90)$$

gdzie Δ_M to operator Laplace'a na M . Używany przez Spreafico i Zerbiniego formalizm dopuszcza zastąpienie $-\Delta_M$, lecz w ich pracy takie przypadki nie są analizowane. Dla tak sformułowanego układu Autorzy postawili sobie zadanie obliczenia funkcji rozdziału Z .

Kluczowa dla omawianej pracy procedura zdefiniowania funkcji rozdziału rozpoczyna się od następującego spostrzeżenia. Przynajmniej dla przypadku zwartej rozmaitości M , w sposób czysto formalny zrenormalizowaną funkcję rozdziału można zapisać za pomocą wyznacznika funkcyjnego:

$$Z = \det(l_{\text{ren}}^2 H)^{-1/2}, \quad (5.91)$$

gdzie l_{ren} to stała renormalizacji. Jak jest wyjaśnione w pierwszym rozdziale referowanej pracy, metody nadawania sensu temu wyrażeniu dla zwartego M są dobrze znane, autorzy zaś pragną uogólnić te procedury na przypadek, gdy rozmaitość ta nie jest zwarta. Należy zwrócić uwagę Czytelnika na to, że w swojej pracy Spreafico i Zerbinini, w przeciwieństwie do Scardicchia, nigdy nie korzystają z modelu w którym delta Diraca jest zastąpiona gładką funkcją. Cała procedura usuwania źle określonych wyrażeń matematycznych zawierających niedozwolone operacje na dystrybucji $\delta(\vec{x})$ odbywa się na poziomie definiowania funkcji rozdziału Z .

W następnym kroku potrzebujemy rozpatrzyć dwa operatory A i A_0 określone na ośrodkowej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Operator ten ma być samosprężony i nieujemny, przy czym widmo A rozkłada się na widmo punktowe i ciągłe. Kwestia widma absolutnie ciągłego i osobliwego nie jest w tej pracy dyskutowana. W takiej sytuacji przestrzeń Hilberta można rozłożyć na podprzestrzeń $\mathcal{H}_p$ odpowiadającą widmu punktowemu A i analogiczną podprzestrzeń $\mathcal{H}_c$ dla widma ciągłego: $\mathcal{H} = \mathcal{H}_p \oplus \mathcal{H}_c$. Przez A_p będziemy oznaczać obcięcie operatora A do $\mathcal{H}_p$, tak samo określamy operator A_c .

Dla operatora typu A_p można zdefiniować dobrze znaną w literaturze przedmiotu funkcję dzeta operatora:

$$\zeta(s; A_p) = \sum_j^\infty \lambda_j^{-s}, \quad (5.92)$$

gdzie λ_j to wartości własne operatora A_p . Szereg ten jest zbieżny dla $\Re s > s_0$, gdzie liczba s_0 jest wyznaczona przez własności operatora A_p . Dla pozostałych argumentów zespolonych funkcję tą definiujemy poprzez odpowiednie przedłużenia analityczne. Autorzy stają teraz przed problemem określenia podobnej funkcji dla A_c . By to uczynić wprowadzają dla pary operatorów (A_c, A_0) **względną funkcję dzeta** poprzez zależność:

$$\zeta(s; A_c, A_0) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt t^{s-1} \text{Tr}(e^{-tA_c} - e^{-tA_0}). \quad (5.93)$$

Powyższe wyrażenie jest dobrze określone dla $d_1 < \Re s < d_2$, gdzie liczby d_1 i d_2 są wyznaczone przez rozważaną parę operatorów. Tak jak poprzednio funkcję tę przedłużamy analitycznie na całą płaszczyznę zespoloną.

Wzorując się na pewnych formalnych własnościach wyznaczników i wynikach otrzymanych dla zwartej rozmaitości M , autorzy definiują teraz zrenormalizowaną funkcję rozdziału jako

$$\begin{aligned} \ln Z = & \frac{1}{2}\zeta'(0; A_p) - \frac{1}{2}\zeta(0; A_p) \ln(l_{\text{ren}}^2) + \frac{1}{2}\zeta'(0; A_c, A_0) - \\ & - \frac{1}{2}\zeta(0; A_c, A_0) \log(l_{\text{ren}}^2), \end{aligned} \quad (5.94)$$

gdzie prim oznacza pochodną po zmiennej s . Według autorów między funkcją rozdziału a energią Casimira zachodzi następujący związek

$$\mathcal{E}_{\text{Casi}}(a) = - \lim_{\beta \rightarrow \infty} \partial_\beta \ln Z. \quad (5.95)$$

Za pomocą wprowadzonego wyżej formalizmu w rozdziale 4.1 swojej pracy Spreafico i Zerbini'ego analizują problem pojedynczej delty Diraca, zaś w rozdziale 4.2 dwóch delt, w obu przypadkach do zdefiniowania tych modeli wykorzystywane są metody przedstawione w książce Albeverio et al. [Alb+88]. Otrzymane przez nich wyniki dla układu z jedną deltą będą miały znaczenie dla rezultatów omawianych w rozdziale (5.4), teraz jednak skupimy się na przypadku dwóch delt Diraca. Aby otrzymać wyrażenie, które wedle Spreafico i Zerbini'ego opisuje energię Casimira dla dwóch identycznych delt, należy w podanym w rozdziale 4.2 pracy [SZ09] wyrażeniu na $\ln Z$ podstawić, zgodnie z (5.87), zależność

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \frac{\alpha}{8\pi^3}, \quad (5.96)$$

następnie zastosować wzór (5.94). Otrzymany tą drogą wyrażenie zapiszemy dla większej przejrzystości za pomocą zmiennej bezwymiarowej $l = av$. Wynosi ono

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{Casi}}(a) = & \\ = & \frac{2\alpha}{\pi^3} \left[\frac{1}{4\gamma} \int_a^\infty dl \left(l \Re \left(\frac{\gamma - il + e^{2il}}{(\gamma - il)^2 - e^{2il}} \right) + \frac{\cos(2l) - 2\gamma}{l} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{4} (\ln(2l_{\text{ren}}) - 1) + \frac{\text{ci}(2a)}{4\gamma} + \frac{1}{4\gamma} \int_0^a dl l \Re \left(\frac{\gamma - il + e^{2il}}{(\gamma - il)^2 - e^{2il}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.97)$$

Pojawiająca się w tym wzorze funkcja cosinus całkowity jest zdefiniowana jako

$$\text{ci}(x) = - \int_x^{+\infty} dt \frac{\cos(t)}{t}. \quad (5.98)$$

Wartość tak obliczonej energii Casimira zależy od stałej renormalizacji l_{ren} , jednak jak słusznie zauważają autorzy, siła przewidywane przez ten wzór, jest już niezależna od tego parametru.

Zauważmy, że gdybyśmy mogli podstawić $l = iq$ w (5.95) to dwie występujące tam funkcje podcałkowe przybrałyby postać zbliżoną do tych obecnych w (5.49), nasuwa się więc następujące pytanie. Czy można wzór (5.95) zapisać jako pojedynczą całkę po zbiorze $[0, +\infty)$, następnie, tak jak zostało to uczynione w przypadku wzoru (5.49), za pomocą odpowiedniego konturu w płaszczyźnie zespolonej, zamienić całkę

po osi rzeczywistej na całkę po osi urojonej $\Re z = 0$, $\Im z \geq 0$? Jak już widzieliśmy, taka procedura na poziomie rachunkowym skutkowałą, między innymi wykonaniem podstawienia $l = iq$.

Takie podejście wydaje się być najbardziej logicznym punktem wyjścia dla porównania wyników Spreafico i Zerbiniego z przedstawionymi w tej pracy. Niemniej jeśli nawet jest możliwa, to udowodnienie tego wymagałoby dokładnej analizy rozdziału 4.2 ich pracy [SZ09], czego jednak nie będziemy się tutaj podejmować.

W obecnym momencie możemy przystąpić do porównania wyników A. Scardicchia oraz M. Spreafico i S. Zerbiniego z tym przedstawionymi w tej pracy. Praca Scardicchia przewiduje, że po odpowiedniej procedurze „usuwania nieskończoności”, otrzymamy niezależne od tej procedury wyrażenie na energię, które przewiduje siłę przyciągającą między dwoma deltami Diraca w trzech wymiarach. Analiza przeprowadzona w oparciu o formalizm algebraiczny prowadzi do innego wniosku. W świetle tego podejścia model dwóch delt jest osobliwy, w sensie zdefiniowanym w rozdziale (3.2), jako taki więc nie może być traktowany jako model fizyczny. Z drugiej strony, model nieosobliwy może być „dowolnie blisko” modelu dwóch delt i wzór (5.49) pozwala zrozumieć ogólne zachowanie energii Casimira w takiej sytuacji. Przewiduje on siłę która jest zawsze przyciągającą, przynajmniej dopóki wpływ reszty rozwinięcia asymptotycznego można zaniedbać. Dodatkowo, wzór ten bardzo silnie zależy od parametrów modeli nieosobliwych, zależnych od wyboru funkcji $g(\vec{x})$, której używamy do modelowania quasi-potencjału. W tym momencie nie widzimy możliwości pogodzenia tych tak rozbieżnych wyników.

Przyjrzyjmy się teraz wynikowi Spreafico i Zerbiniego. Choć na ten moment nie możemy powiedzieć jakie jakościowe zachowanie przewiduje, to widzimy, iż otrzymany przez nich wzór na energię Casimira zawiera człon $\ln(2l_{\text{ren}})$, gdzie l_{ren} jest stałą renormalizacji. Choć człon ten nie wpływa na siłę Casimira, to wynik różni się bardzo od tego uzyskanego przez Scardicchia, którego wzory są wolne od wszelkich parametrów pochodzących od procedury regularyzacji i renormalizacji. Różni się również bardzo od wyników przedstawionych w tej pracy. W prezentowanym przez nas podejściu człony zależne od modelu nie tylko są obecne w wyrażeniu na energię Casimira, ale również dają wkład do siły, który w szerokim zakresie parametrów powinien być dominujący. Powszechnie powtarzana w społeczności fizyków stwierdzenie mówi, że wynik nie może zależeć od sposobu regularyzacji i renormalizacji modelu fizycznego. Czy więc należy stąd wyciągnąć wniosek, że któraś ze stron popełniła błąd przy przeprowadzaniu obliczeń?

W pierwszym rzędzie należy zwrócić uwagę na to, że nie jest absolutną prawdą, iż wszystkie metody regularyzacji i renormalizacji modeli prowadzą do tych samych rezultatów. Choć istotnie tak jest w większość przypadków obecnych w literaturze, to nawet w fizyce cząstek, gdzie metody usuwania nieskończoności są testowane wyjątkowo mocno, znane są przypadki, gdy różne metody „usuwania nieskończoności” dają różne wyniki. Przykładem tego jest toczona w okresie po 2010 roku dyskusja nad tym jaki jest poprawny sposób obliczania amplitudy rozpadu cząstki Higgsa na dwa fotony. Szersze omówienie tej debaty oraz propozycję rozwiązania problemu za pomocą procedury Bogoliubowa-Epsteina-Glasera, w której nie napotyka się nieskończonych wyrażeń można znaleźć w pracy [DDG21]. Nie trzeba dodawać, że zaprezentowane w tym artykule podejście do rozpadu cząstki Higgsa pozbawione wielkości nieskończonych, jest pod wieloma względami pokrewne spojrzeniu na efekt Casimira prezentowanemu w niniejszej pracy.

Jeśli chodzi o kwestię, czy któraś ze stron popełniła błąd obliczając efekt Casimira dla dwóch delt, musimy zwrócić uwagę na to, jak różne były metody użyte do

analizy tego zjawiska przez wspomnianych autorów. Wobec tego choć nie można wykluczyć nieodkrytych jeszcze błędów rachunkowych, to jest co najmniej równie prawdopodobne, że jest to jeden z tych przypadków, gdzie różne metody obliczeniowe prowadzą do rozbieżnych wyników. W niniejszej pracy chcieliśmy zaprezentować podejście z którego korzystaliśmy w sposób maksymalnie jasny i prosty, co mamy nadzieję przyczyni się w jakimś stopniu do lepszego naświetlenia tej strony problemu. Wspominaliśmy już kilkakrotnie o pewnych niejasnościach w podejściu A. Scardicchia oraz M. Spreafico i S. Zerbiniego. W naszej ocenie, niewiele więcej można powiedzieć o tym zagadnieniu, bez głębszego przeanalizowania użytych przez nich procedur, co na ten moment pozostaje otwartym problemem.

Ostatnią rzeczą nad którą chcielibyśmy się zatrzymać, jest teza A. Scardicchia, kilkakrotnie pojawiająca się w jego pracy [Sca05], że gdy efekt Casimira zachodzi między defektami w postaci punktów lub prostych, próżnia staje się niestabilna, czego objawem jest pojawienie się tachionów. Dla dwóch defektów punktowych, czyli dwóch delt Diraca, autor stwierdza, że tachiony pojawiają się, gdy spełniony jest warunek postaci $\gamma \leq 1$, dlatego pozwalamy sobie zaproponować inną interpretację tego problemu.

W świetle stosowanego tu formalizmu, uważamy iż nie ma powodu twierdzić, że w takich warunkach fizyczna próżnia staje się niestabilna, bądź następują inny niepożądany efekt natury fizycznej. Naszym zdaniem jedynie model pól quasi-swobodnych traci swoją rację bytu i uporczywe trzymanie się go, skutkuje pojawieniem się patologii, które nie mają jednak fizycznego znaczenia. Świadczą jedynie o ograniczeniach stosowanego formalizmu.

5.3 Lokalna gęstość energii dla modelu dwóch quasi-delt

Problem którego badaniu chcemy poświęcić tę część pracy, polega na obliczeniu gęstości energii pola skalarne $\phi(t, \vec{x})$ w układzie z dwoma quasi-deltami korzystając z formalizmu przedstawionego w rozdziale (3.5). Jak zostało tam wyjaśnione, gęstość energii jest dana jako

$$\mathcal{E}_{\text{den}}(\vec{a}, \vec{x}) = T_{\vec{a}}(\vec{x}, \vec{x}), \quad (5.99)$$

gdzie $T_{\vec{a}}(\vec{x}, \vec{y})$ jest jądrem całkowym dystrybucji

$$T_{\vec{a}}(\varphi, \psi) = \frac{1}{4}(\varphi, (h_{\vec{a}} - h)\psi) + \frac{1}{4}(\nabla\varphi, (h_{\vec{a}}^{-1} - h^{-1})\nabla\psi). \quad (5.100)$$

Zakładamy przy tym, że funkcje $\varphi(\vec{x})$, $\psi(\vec{x})$ przyjmują tylko wartości rzeczywiste i mają zwarte nośniki.

Metoda której użyjemy by obliczyć $T_{\vec{a}}(\vec{x}, \vec{y})$ ponownie jest zaczerpnięta z pracy [HS10]. Naszym punktem wyjścia są dwie elementarne tożsamości:

$$\frac{1}{k} = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} dr \frac{1}{r^2 + k^2}, \quad (5.101a)$$

$$k - p = -\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} dr r^2 \left(\frac{1}{r^2 + k^2} - \frac{1}{r^2 + p^2} \right). \quad (5.101b)$$

Jeśli we wzorach (4.18) podstawimy $w = ir$ to otrzymamy

$$G_0(-r^2) = -(r^2 + h^2)^{-1}, \quad G(-r^2) = -(r^2 + h_{\vec{a}}^2)^{-1}. \quad (5.102)$$

Korzystając teraz z reprezentacji spektralnej operatorów h i $h_{\vec{a}}$, możemy zapisać iloczynny skalarne występujące w formule (5.100) jako

$$(\varphi, (h_{\vec{a}} - h)\psi) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} dr r^2 (\varphi, [G(-r^2) - G_0(-r^2)]\psi), \quad (5.103a)$$

$$(\nabla\varphi, (h_{\vec{a}}^{-1} - h^{-1})\nabla\psi) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} dr (\nabla\varphi, [G(-r^2) - G_0(-r^2)]\nabla\psi). \quad (5.103b)$$

Jądro całkowe operatora $G(-r^2) - G_0(-r^2)$ znajdujemy poprzez zastosowanie odwrotnej transformaty Fouriera do wyrażenia ze wzoru (4.30) w którym dokonano podstawienia $w = ir$:

$$[G(-r^2) - G_0(-r^2)](\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^6} \int_{\mathbb{R}^3} d^3p e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} \frac{\mathcal{F}_{\vec{p}}}{\vec{p}^2 + r^2} \mathcal{T}(ir) \int_{\mathbb{R}^3} d^3q e^{-i\vec{y} \cdot \vec{q}} \frac{\mathcal{F}_{\vec{q}}^\dagger}{\vec{q}^2 + r^2}. \quad (5.104)$$

By uczynić wzory bardziej zrozumiałymi, w dalszym ciągu będziemy korzystać z oznaczeń

$$J(r, \vec{x}) = \begin{pmatrix} H(r, |\vec{x} - \vec{b}|) & H(r, |\vec{x} + \vec{b}|) \end{pmatrix}, \quad (5.105a)$$

$$H(r, |\vec{x}|) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3p \hat{g}(\vec{p}) \frac{e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}}}{\vec{p}^2 + r^2}. \quad (5.105b)$$

Symbol $J(r, \vec{x})$ należy rozumieć jako dwuelementowy wektor w formie wiersza.

Ponieważ funkcja $\hat{g}(\vec{p})$ jest sferycznie symetryczna, więc postać funkcji podcałkowej we wzorze (5.105b) nie ulega zmianie przy podstawieniu $\vec{p}' = O\vec{p}$, $\vec{x}' = O\vec{x}$, gdzie O jest macierzą ortogonalną 3×3 . Wobec tego funkcja $H(r, |\vec{x}|)$ zależy tylko od długości wektora $\vec{x}$, fakt ten został już uwzględniony we użytej przez nas notacji. Symbolem $H'(r, |\vec{x}|)$ będziemy oznaczać pochodną tej funkcji po drugim argumencie. Jako że $\hat{g}(\vec{p})$ jest funkcją klasy Schwartza, łatwo zauważyć, że zachodzi

$$|H(r, |\vec{x}|)| \leq \text{const} \frac{1}{1 + r^2}, \quad |H'(r, |\vec{x}|)| \leq \text{const} \frac{1}{1 + r^2}. \quad (5.106)$$

Korzystając z jawnej postaci $\mathcal{F}_{\vec{p}}$ (zob. (4.29)) możemy przepisać rozważane przez nas jądro całkowe jako

$$[G(-r^2) - G_0(-r^2)](\vec{x}, \vec{y}) = J(r, \vec{x}) \mathcal{T}(ir) J^T(r, \vec{y}). \quad (5.107)$$

Znalezienie wyrażenia odpowiadającego (5.103a) nie przedstawia teraz żadnych problemów. W przypadku wzoru (5.103b) trzeba wykonać jeden dodatkowy krok, mianowicie całkowania przez części członów zawierających $\nabla_i \varphi(\vec{x})$, gdzie $\nabla_i = \partial/\partial x_i$ i analogicznie dla funkcji $\psi(\vec{y})$. Ponieważ funkcje φ i ψ posiadają zwarte nośniki, członów brzegowe przy całkowaniu przez części znikają i ostatecznie mamy

$$\begin{aligned} T_{\vec{a}}(\vec{x}, \vec{y}) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} dr r^2 J(r, \vec{x}) \mathcal{T}(ir) J^T(r, \vec{y}) - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} dr \sum_{j=1}^3 \nabla_j J(r, \vec{x}) \mathcal{T}(ir) \nabla_j J^T(r, \vec{y}). \end{aligned} \quad (5.108)$$

Obie całki w powyższym wzorze są zbieżne, co wynika z oszacowania (4.28) na normę $\mathcal{T}(w)$ i nierówności przedstawionych w (5.106). Wnioskujemy stąd, że $T_{\vec{a}}(\varphi, \psi)$ jest dystrybucją regularną na $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$.

Zgodnie z opisaną w rozdziale (3.5) procedurą rozdzielania punktów, we wzorze (5.108) kładziemy teraz $\vec{x} = \vec{y}$ i po prostych obliczeniach dostajemy następujące wyrażenie na gęstość energii.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{den}}(\vec{a}, \vec{x}) = & \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} dr \frac{t(ir)}{t(ir)^2 - u(ir)^2} [H'(r, |\vec{x} + \vec{b}|)^2 - r^2 H(r, |\vec{x} + \vec{b}|)^2 + \\ & + H'(r, |\vec{x} - \vec{b}|)^2 - r^2 H(r, |\vec{x} - \vec{b}|)^2] - \\ & - \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} dr \frac{u(ir)}{t(ir)^2 - u(ir)^2} \left[r^2 H(r, |\vec{x} + \vec{b}|) H(r, |\vec{x} - \vec{b}|) - \right. \\ & \left. - \frac{(\vec{x} + \vec{b}) \cdot (\vec{x} - \vec{b})}{|\vec{x} + \vec{b}| |\vec{x} - \vec{b}|} H'(r, |\vec{x} + \vec{b}|) H'(r, |\vec{x} - \vec{b}|) \right]. \end{aligned} \quad (5.109)$$

Płynie stąd wniosek, że $\mathcal{E}_{\text{den}}(\vec{a}, f)$ rozumiana jako dystrybucja na funkcjach $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, jest dystrybucją regularną na $\mathbb{R}^3$.

Podobnie jak w przypadku energii globalnej, potrzebujemy teraz wyodrębnić ze wzoru (5.109) gęstość energii pochodzącą od samooddziaływania rozważanych ciał, procedura postępowania jest analogiczna jak wtedy. Najpierw obliczamy gęstość energii samooddziaływania jednego ciała, poprzez umieszczenie go w środku układu współrzędnych, co sprowadza się do podstawienia $\vec{x} - \vec{b} = \vec{y}$, i przechodząc do granicy $a \rightarrow +\infty$. W wyniku prostego rachunku dostajemy

$$\mathcal{E}_{\text{single}}(\vec{y}) = \lim_{a \rightarrow +\infty} \mathcal{E}_{\text{den}}(\vec{a}, \vec{b} + \vec{y}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} dr \frac{1}{t(ir)} [H'(r, |\vec{y}|)^2 - r^2 H(r, |\vec{y}|)^2]. \quad (5.110)$$

Gęstość energii samooddziaływania dwóch ciał jest dana przez

$$\mathcal{E}_{\text{self}}(\vec{a}, \vec{x}) = \mathcal{E}_{\text{single}}(\vec{x} + \vec{b}) + \mathcal{E}_{\text{single}}(\vec{x} - \vec{b}), \quad (5.111)$$

natomiast gęstość energii oddziaływania jest zdefiniowana jako

$$\mathcal{E}_{\text{int}}(\vec{a}, \vec{x}) = \mathcal{E}_{\text{den}}(\vec{a}, \vec{x}) - \mathcal{E}_{\text{self}}(\vec{a}, \vec{x}). \quad (5.112)$$

Tym samym otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{int}}(\vec{a}, \vec{x}) = & \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} dr \frac{u(ir)^2}{t(ir)[t(ir)^2 - u(ir)^2]} [H'(r, |\vec{x} + \vec{b}|)^2 - \\ & - r^2 H(r, |\vec{x} + \vec{b}|)^2 + H'(r, |\vec{x} - \vec{b}|)^2 - r^2 H(r, |\vec{x} - \vec{b}|)^2] - \\ & - \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} dr \frac{u(ir)}{t(ir)^2 - u(ir)^2} \left[r^2 H(r, |\vec{x} + \vec{b}|) H(r, |\vec{x} - \vec{b}|) - \right. \\ & \left. - \frac{(\vec{x} + \vec{b}) \cdot (\vec{x} - \vec{b})}{|\vec{x} + \vec{b}| |\vec{x} - \vec{b}|} H'(r, |\vec{x} + \vec{b}|) H'(r, |\vec{x} - \vec{b}|) \right]. \end{aligned} \quad (5.113)$$

5.4 Lokalna gęstość energii w granicy $\lambda \searrow 0$

Zbadamy teraz problem gęstości energii dla modelu przeskalowanego, gdzie funkcja $g(\vec{x})$ zostaje zastąpiona przez funkcję $g_\lambda(\vec{x})$. Naszym głównym celem jest zbadanie

jak przeskalowana gęstość energii $\mathcal{E}_{\text{den}}(\vec{a}, \vec{x}, \lambda)$ zachowuje się w granicy $\lambda \searrow 0$, przy ustalonych wartościach $\vec{a}$ oraz $\vec{x}$.

Aby otrzymać wyrażenie na gęstość energii przeskalowanego modelu należy we wzorach (5.109) i (5.113) dokonać podstawień

$$t(ir) \rightarrow t_\lambda(ir), \quad u(ir) \rightarrow u_\lambda(ir), \quad (5.114)$$

oraz zastąpić funkcję $H(r, |\vec{x}|)$ przez

$$H_\lambda(r, |\vec{x}|) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3p \hat{g}(\lambda p) \frac{e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}}}{\vec{p}^2 + r^2}. \quad (5.115)$$

W wyniku tego dostajemy wyrażenie na energię samoodziaływania ciał dla modelu przeskalowanego

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{self}}(\vec{a}, \vec{x}, \lambda) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} dr \frac{1}{t_\lambda(ir)} [H'_\lambda(r, |\vec{x} + \vec{b}|)^2 - r^2 H_\lambda(r, |\vec{x} + \vec{b}|)^2] + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} dr \frac{1}{t_\lambda(ir)} [H'_\lambda(r, |\vec{x} - \vec{b}|)^2 - r^2 H_\lambda(r, |\vec{x} - \vec{b}|)^2]. \end{aligned} \quad (5.116)$$

Gęstość energii oddziaływania tego modelu wynosi

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{int}}(\vec{a}, \vec{x}, \lambda) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} dr \frac{u_\lambda(ir)^2}{t_\lambda(ir)[t_\lambda(ir)^2 - u_\lambda(ir)^2]} [H'_\lambda(r, |\vec{x} + \vec{b}|)^2 - \\ &- r^2 H_\lambda(r, |\vec{x} + \vec{b}|)^2 + H'_\lambda(r, |\vec{x} - \vec{b}|)^2 - r^2 H_\lambda(r, |\vec{x} - \vec{b}|)^2] - \\ &- \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} dr \frac{u_\lambda(ir)}{t_\lambda(ir)^2 - u_\lambda(ir)^2} \left[r^2 H_\lambda(r, |\vec{x} + \vec{b}|) H_\lambda(r, |\vec{x} - \vec{b}|) - \right. \\ &\left. - \frac{(\vec{x} + \vec{b}) \cdot (\vec{x} - \vec{b})}{|\vec{x} + \vec{b}| |\vec{x} - \vec{b}|} H'_\lambda(r, |\vec{x} + \vec{b}|) H'_\lambda(r, |\vec{x} - \vec{b}|) \right]. \end{aligned} \quad (5.117)$$

Zajmijmy się teraz zachowaniem tych wyrażeń w granicy $\lambda \searrow 0$. Zaczniemy od wykonania całki po kątach w (5.115), co daje

$$H_\lambda(r, x) = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \hat{g}(\lambda p) e^{ipx} \frac{p}{p^2 + r^2}. \quad (5.118)$$

Dla prostoty użyliśmy oznaczenia $x = |\vec{x}|$. Przyjrzyjmy się występującemu w powyższej całce wyrażeniu $\hat{g}(\lambda p) \exp(ipx)$, w którym rzeczywisty argument p zostaje zastąpiony zmienną zespoloną $z \in \mathbb{C}$. Na mocy nierówności (C.4) zachodzi

$$|\hat{g}(\lambda z) \exp(izx)| \leq \exp\left(\frac{\lambda L |\Im z|}{2} - x \Im z\right). \quad (5.119)$$

Tak samo jak w rozdziale (5.2) kładziemy $L = 2\pi^2/\alpha$ oraz wprowadzamy ograniczenie na wartości jakie może przyjąć parametr skalowania: $\lambda \in (0, 1/2)$. Ostatni wzór przyjmuje dzięki temu postać

$$|\hat{g}(\lambda z) \exp(izx)| \leq \exp\left(\frac{\lambda \pi^2 |\Im z|}{\alpha} - x \Im z\right). \quad (5.120)$$

Przyjmijmy, że wartość $\vec{x}$ jest ustalona. Jeśli $\Im z > 0$ i $0 < \lambda\pi^2/\alpha < x$, $x = |\vec{x}|$ to całkę w (5.118) możemy wykonać korzystając z konturu Γ_+ przedstawionego na rysunku (7). Warunek ten możemy zinterpretować, stwierdzając, że dopuszczalny zakres wartości jakie przyjmuje parametr λ jest funkcją $\vec{x}$:

$$0 < \lambda < \min\left(\frac{1}{2}, \frac{\alpha|\vec{x}|}{\pi^2}\right). \quad (5.121)$$

Gdy ten warunek jest spełniony, całkowanie metodą residuów daje

$$H_\lambda(r, |\vec{x}|) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \hat{g}(i\lambda r) \frac{e^{-r|\vec{x}|}}{|\vec{x}|}, \quad (5.122a)$$

$$H'_\lambda(r, |\vec{x}|) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \hat{g}(i\lambda r) (1 + r|\vec{x}|) \frac{e^{-r|\vec{x}|}}{|\vec{x}|^2}. \quad (5.122b)$$

Warunek narzucony na λ który umożliwia wykonanie tej całki ma prostą interpretację fizyczną. Funkcja $H_\lambda(r, |\vec{x}|)$ jest dana wzorem (5.122a), jeśli punkt $\vec{x}$ znajduje się poza nośnikiem funkcji $g_\lambda(\vec{x})$. Inaczej mówiąc, punkt $\vec{x}$ jest poza obszarem zajmowanym przez ciało makroskopowe, którego środek znajduje się w początku układu współrzędnych. Tłumaczy to też również, dlaczego wzór ten nigdy nie jest poprawny dla $\vec{x} = 0$.

Przyjrzyjmy się teraz granicy

$$\mathcal{E}_{\text{self, lim}}(\vec{a}, \vec{x}) := \lim_{\lambda \searrow 0} \mathcal{E}_{\text{self}}(\vec{a}, \vec{x}, \lambda). \quad (5.123)$$

Dokładniej będzie nas interesowała granica punktowa powyższego wyrażenia, obliczona dla ustalonych wartości $\vec{a}$ i $\vec{x}$. Wobec tego bez straty ogólności możemy przyjąć, że parametr λ czyni zadość warunkowi (5.121). Przy tym założeniu, używając ponownie nierówności (5.120) łatwo pokazać prawdziwość następujących oszacowań.

$$|H_\lambda(r, |\vec{x}|)| \leq C_1 e^{-C_2 r}, \quad |H'_\lambda(r, |\vec{x}|)| \leq (C_3 + C_4 r) e^{-C_2 r}, \quad (5.124)$$

gdzie $C_1, C_2, C_3, C_4 > 0$. Jak wynika z nierówności (C.47) wyraz $1/t_\lambda(ir)$ jest ograniczony na moduł przez stałą, co wraz z warunkami powyżej pozwala nam w wyrażeniu na $\mathcal{E}_{\text{self}}(\vec{a}, \vec{x}, \lambda)$ wejść z granicę $\lambda \searrow 0$ pod całkę na mocy twierdzenia Lebesgue'a zbieżności majoryzowanej. W rezultacie dostajemy

$$\mathcal{E}_{\text{self, lim}}(\vec{a}, \vec{x}) = \mathcal{E}_{\text{single, lim}}(\vec{x} + \vec{b}) + \mathcal{E}_{\text{single, lim}}(\vec{x} - \vec{b}), \quad (5.125a)$$

$$\mathcal{E}_{\text{single, lim}}(\vec{x}) := \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} dr \frac{1}{\alpha + 2\pi^2 r} (1 + 2r|\vec{x}|) \frac{e^{-2r|\vec{x}|}}{|\vec{x}|^4}. \quad (5.125b)$$

Z tego co zostało wcześniej powiedziane wynika, że wzór (5.125b) ma sens tylko dla $\vec{x} \neq \vec{0}$, skutkiem czego $\mathcal{E}_{\text{self, lim}}(\vec{a}, \vec{x})$ ma sens tylko, gdy $\vec{x} \neq \pm \vec{b}$. Ten fakt jest prosty w zrozumieniu, gdyż $\mathcal{E}_{\text{single, lim}}(\vec{x})$ wyrażenie opisuje gęstość energii własnej delty Diraca, zaś nośnik osobliwy $\delta(\vec{x})$ jest równy $\{\vec{0}\}$. Widzimy więc, że dla $\lambda \neq 0$ gęstość energii jest dystrybucją regularną na $\mathbb{R}^3$, lecz dystrybucja $\mathcal{E}_{\text{self, lim}}(\vec{a}, \vec{x})$, otrzymana jako rezultat przejścia granicznego jest regularna tylko na zbiorze $\mathbb{R} \setminus \{-\vec{b}, \vec{b}\}$.

Chcemy uczulić Czytelnika, że fakt iż wzór (5.125b) nie jest prawdziwy dla $\vec{x} = \vec{0}$ nie wynika po prostu z tego, iż dla tego punktu nie może być spełniona zależność (5.121), lecz sięga głębiej, do sposobu w jaki gęstość energia jest określona w podejściu Herdegana. Przypomnijmy, iż lokalna gęstość energii jest w nim zdefiniowana za pomocą dystrybucji (5.100) i dokładna analiza tych wyrażeń pokazuje, iż po przejściu

granicznym wyrażenie to ma sens tylko na takim zbiorze D , którego domknięcie nie zawiera nośnika osobliwego delty Diraca, który jest równy $\vec{x} = \vec{0}$. Wówczas dla każdego punktu $\vec{x} \in D$ można znaleźć funkcje ψ i φ o nośnikach zwartych, spełniających warunki $\vec{x} \in \text{supp } \psi \cap \text{supp } \varphi$, $\text{supp } \psi \cup \text{supp } \varphi \subset D$, jak również nie przecinających się z nośnikiem osobliwym delty. Z tego powodu nie jest możliwe zdefiniowanie gęstości energii tą drogą dla $\vec{x} = \vec{0}$.

Rezultat ten wyklucza możliwość znalezienia globalnej energii samoodziaływania delty Diraca przez scałkowanie gęstości energii po $\mathbb{R}^3$. Ponieważ jednak wcześniejsza analiza pokazała, że taka energia samoodziaływania jest nieskończona, usiłowania uzyskania skończonego wyniku poprzez całkowanie gęstości energii należy uznać za tym bardziej bezzasadne. Jednak znaczenia dla poznania fizycznego tych skończonych wyrażeń na energię globalną, które zostały otrzymane poprzez odpowiednie zrenormalizowanie źle określonych wyrażeń pozostaje sprawą otwartą. Tego typu metody wielokrotnie prowadziły do wartościowych rezultatów, więc nie można ich lekką ręką odrzucić, temat ten jednak wciąż nie jest dostatecznie dobrze zrozumiany.

Należy przy tym zauważyć, że całka z $\mathcal{E}_{\text{single, lim}}(\vec{x})$ po zbiorze $\mathbb{R}^3 \setminus K(0, \varepsilon)$ jest skończona dla dowolnego $\varepsilon > 0$. Świadczy to o tym, że za nieskończoną wartość energii samoodziaływania delty nie odpowiada energia przynależna jej części regularnej, w sensie teorii dystrybucji, tylko jej części osobliwej, co nie jest trudne w zrozumieniu. Musimy zaznaczyć, że tutaj ponownie odgrywa rolę fakt, że gęstość energii została zdefiniowana za pomocą dystrybucji (5.100). Jak zostało wcześniej wspomniane, nośniki funkcji ψ i φ pojawiających się w przytoczonym wzorze muszą być zwarte i nie mogą przecinać się z nośnikiem osobliwym delty, który sprowadza się do punktu $\vec{x} = \vec{0}$. Ponieważ minimalna odległość d między dwoma zwartymi podzbiorami $\mathbb{R}^3$ jest zawsze silnie większa od zera, dlatego gęstość energii nigdy nie może być zdefiniowana na pewnym zbiorze S , który zawiera co najmniej pewną kulę domkniętą $\bar{K}(0, \varepsilon) \subset S$. To zaś wyklucza możliwość wzięcia granicy $\varepsilon \searrow 0$ w całce po zbiorze $\mathbb{R}^3 \setminus K(0, \varepsilon)$.

W tym momencie pozostaje nam zbadać następującą granicę dla gęstości energii oddziaływania:

$$\mathcal{E}_{\text{int, lim}}(\vec{a}, \vec{x}) := \lim_{\lambda \searrow 0} \mathcal{E}_{\text{int}}(\vec{a}, \vec{x}, \lambda). \quad (5.126)$$

Tak jak poprzednio interesuje nas granica punktowa, gdy $\vec{x}$ i $\vec{a}$ są ustalone, zaś $\lambda \searrow 0$. Metoda jej obliczenia jest dokładnie analogiczna do tej użytej dla energii samoodziaływania i tak jak tam sprowadza się do pokazania, że spełnione są założenia twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności majoryzowanej. Ponownie przyjmujemy, że parametr λ spełniony warunek (5.121) i tym samym prawdziwe są nierówności (5.124). Ponownie nierówność (C.47) gwarantuje nam, że wyraz $1/t_\lambda(ir)$ jest ograniczony przez stałą. Oczywiście uogólnienie wzoru (4.26) na macierz $\mathcal{T}_\lambda(w)$ wraz z nierówności (4.44) pozwala nam stwierdzić, że wyrażenie $[t_\lambda(ir)^2 - u_\lambda(ir)^2]^{-1}$ również jest ograniczone od góry przez stałą. Dla członów zawierających funkcję $u_\lambda(ir)$ potrzebujemy jeszcze skorzystać z nierówności (C.55). Proste połączenie tych wyników dowodzi, że założenia o zbieżności majoryzowanej są spełnione, dzięki czemu po krótkich

rachunkach dostajemy

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{\text{int, lim}}(\vec{a}, \vec{x}) = & \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{+\infty} dl \frac{e^{-2l}}{(\gamma + l)[(\gamma + l)^2 - e^{-2l}]} \times \\
& \times \left[\frac{e^{-2l|\vec{x}+\vec{b}|/a}}{|\vec{x}+\vec{b}|^4} \left(1 + 2l \frac{|\vec{x}+\vec{b}|}{a} \right) + \frac{e^{-2l|\vec{x}-\vec{b}|/a}}{|\vec{x}-\vec{b}|^4} \left(1 + 2l \frac{|\vec{x}-\vec{b}|}{a} \right) \right] - \\
& - \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{+\infty} dl \frac{e^{-l}}{(\gamma + l)^2 - e^{-2l}} \frac{e^{-l(|\vec{x}+\vec{b}|+|\vec{x}-\vec{b}|)/a}}{|\vec{x}+\vec{b}||\vec{x}-\vec{b}|} \times \\
& \times \left[\frac{l^2}{a^2} \left(1 - \frac{(\vec{x}+\vec{a}) \cdot (\vec{x}-\vec{a})}{|\vec{x}+\vec{b}||\vec{x}-\vec{b}|} \right) - \right. \\
& \left. - \frac{(\vec{x}+\vec{b}) \cdot (\vec{x}-\vec{b})}{|\vec{x}+\vec{b}||\vec{x}-\vec{b}|} \frac{1 + l(|\vec{x}+\vec{b}| + |\vec{x}-\vec{b}|)/a}{|\vec{x}+\vec{b}||\vec{x}-\vec{b}|} \right].
\end{aligned} \tag{5.127}$$

Choć znaleziony wzór na gęstość energii oddziaływania jest dość złożony, to jednocześnie łatwo odczytać kilka jego podstawowych własności. Dzięki obecności wyrazów postaci $\exp(-l|\vec{x}|/a)$ całka z $\mathcal{E}_{\text{int, lim}}(\vec{a}, \vec{x})$ po zbiorze $\mathbb{R}^3 \setminus (K(\vec{b}, \varepsilon) \cup K(-\vec{b}, \varepsilon))$ jest zbieżna dla każdego $\varepsilon > 0$. Jednak całka po $\mathbb{R}^3$ jest rozbieżna, ze względu na obecność, tak samo jak dla energii samoodziaływania, członu zachowującego się jak $|\vec{x}|^{-4}$. Również jak poprzednio rozważania na gruncie analizy dystrybucji zabraniają przyjęcie $\varepsilon = 0$, więc także tutaj fakt rozbieżności tej całki nie stanowi problemu.

Interesującym faktem jest to, że wyrażenie (5.127) jest uniwersalne w badanej klasie modeli. Rozumiemy przez to, iż nie zawiera żadnych parametrów zależnych od wyboru konkretnej postaci modelu. Jednocześnie wiemy, że globalna energia Casimira dana jest wzorem (5.49) który jest silnie zależny od wybranego modelu. Jak zostało powiedziane w rozdziale (3.5) Andrzej Herdegen wykazał, że dla nieosobliwego modelu, można odtworzyć energię globalną z energii lokalnej, jego wynik zawarty jest we wzorze (3.75). Wzór ten mówi, że lokalna gęstość energii rozumiana jako dystrybucja jest zbieżna do energii globalnej, gdy funkcja próbna $f(\vec{x})$ na której jest obliczona dąży w odpowiedni sposób do funkcji stałej $f_{\text{lim}}(\vec{x}) = 1$. Wynik ten można przetłumaczyć, przy odpowiednich założeniach, na równość energii globalnej $\mathcal{E}_a$ z całką z gęstości energii $\mathcal{E}_{\text{den}}(\vec{x})$.

Przedstawione wyniki w sposób jasny pokazują, że nie musi to być prawdą dla modelu osobliwego. Nawet gdyby było dopuszczone wycałkowanie wzoru (5.126) po $\mathbb{R}^3$ i wynik był skończony, co jest jednak zabronione, nie jest możliwe otrzymanie zależnego od modelu wzoru (5.49), poprzez całkowanie niezależnej od wyboru modelu gęstości energii.

Uzyskane rezultaty będziemy teraz chcieli porównać z gęstością energii pojedynczej delty Diraca obliczoną przez D. Fermiego i L. Pizzocchero. Autorzy ci chcieli, przynajmniej dla przypadku pola skalarnego, podać bardziej systematyczny niż natenczas dostępne w literaturze, podejście do badania efektu Casimira w różnych konfiguracjach geometrycznych i wersjach badanego problemu. Z tego powodu wyniki otrzymane dla delty Diraca stanowią tylko skromną część ich wyników, co skutkuje między innymi tym, że interesujące nas rezultaty są rozrzucone po kilku publikacjach.

Z prac tych należy wymienić książkę Fermiego i Pizzocchero *Local Zeta Regularization and the Scalar Casimir Effect* zawierającą wykład ich podejścia. [FP17]. Gęstość

energii dla układu z pojedynczą deltą Diraca została obliczona, obok innych wielkości, w ich pracy *Local Casimir Effect for a Scalar Field in Presence of a Point Impurity* [FP18]. W końcu sam D. Fermi opublikował pracę *The Casimir energy anomaly for a point interaction* w której podjął się próby obliczenia globalnej energii Casimira dla tego układu, poprzez wycałkowanie gęstości energii obliczonej w poprzedniej wspomnianej pracy. [Fer20].

W pracy *On the Casimir Effect with δ -Like Potentials, and a Recent Paper by K. Ziemian (Ann. Henri Poincaré, 2021)* ([FP23] Fermi i Pizzocchero wykazali błąd w artykule autora tej rozprawy *Algebraic Approach to Casimir Force Between Two δ -like Potentials*, w którym pierwszy raz opublikowano referowane w niniejszej pracy wyniki dla układu dwóch quasi-delt. Fermi i Pizzocchero wskazali też na wynikające z wspomnianego wcześniej pomyłki, błędne stwierdzenia na temat niezgodności wyników otrzymanych w [Zie21], z tymi uzyskanymi przez tych dwóch autorów. Ich uwagi poskutkowały publikacją tekstu poprawki *Correction to: Algebraic Approach to Casimir Force Between Two δ -like Potentials* [Zie23].

Podjmiemy się teraz próby możliwie krótkiego omówienia podstaw podejścia Fermiego i Pizzocchero, które są wyłożone w książce [FP17]. Rozpatrują oni pole skalarne w czasoprzestrzeni o $d + 1$ wymiarach, przy czym gdy chodzi o część przestrzenną, to przyjmują, iż pole znajduje się w obszarze $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ i może spełniać odpowiednie warunki brzegowe określone na $\partial\Omega$. W dalszym ciągu będziemy przyjmować, że $d = 3$. Czytelnik powinien również mieć na uwadze, że referując ich wyniki pozwalamy sobie na pewne zmiany w notacji w stosunku do oryginału, mając nadzieję, iż uczyni to tekst łatwiejszym w lekturze.

W omawianym podejściu pole skalarne $\hat{\phi}(t, \vec{x})$ jest rozumiane jako dystrybucja, której wartościami na funkcjach próbnych są operatory samosprężone działające na przestrzeni Focka. Autorzy stosują notację funkcyjną również dla dystrybucji, co należy mieć na uwadze podczas lektury wzorów poniżej. Pole to może oddziaływać z niezależnym od czasu klasycznym potencjałem $V(\vec{x})$, zdefiniowanym przez gładką funkcję. Ewolucja czasowa pola jest wyznaczona przez równanie

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + V(\vec{x}) \right) \hat{\phi}(t, \vec{x}) = 0 \quad (5.128)$$

oraz odpowiednie warunki brzegowe na $\partial\Omega$.

Centralne miejsce w podejściu Fermiego i Pizzocchero zajmuje operator $\mathcal{A}_{\text{BC}}$ zdefiniowany przez wzór

$$\mathcal{A}_{\text{BC}} := -\Delta + V(\vec{x}), \quad (5.129)$$

i odpowiednie warunki brzegowe. By podkreślić ich rolę dodaliśmy do jego symbolu indeks BC. Operator $\mathcal{A}_{\text{BC}}$ musi być zdefiniowany w taki sposób by był on samosprężonym operatorem działającym na przestrzeni Hilberta $L^2(\Omega, dx)$, ze standardowym iloczynem skalarnym

$$(f, g) := \int_{\Omega} d^3x \overline{f(\vec{x})} g(\vec{x}). \quad (5.130)$$

Co więcej, operator ten musi być *ściśle dodatni*, co oznacza, iż jego widmo $\sigma(\mathcal{A}_{\text{BC}})$ musi spełniać warunek

$$\sigma(\mathcal{A}_{\text{BC}}) \subset [\varepsilon^2, +\infty), \quad \varepsilon > 0. \quad (5.131)$$

Jak zobaczymy, wymóg ten prowadzi do wielu komplikacji technicznych, które pojawiają się w prezentowanym formalizmie.

W omawianym podejściu, podobnie jak zostało to zrobione w rozdziale (3.5) lokalną gęstość energii jest zdefiniowana za pomocą wyrazu $T_{0,0}(t, \vec{x})$ tensora energii-pędu dla pola skalarowego. Podobnie jak Dappiaggi, Nosari i Pianamonti (zob. roz. (3.6)), korzystają oni z tensora energii-pędu dla pola, które na poziomie klasycznym oddziałuje ze skalarą krzywizny poprzez obecność członu $\xi R(x)$ w równaniu ruchu. W dalszym ciągu w przytaczanych wzorach będziemy zawsze kłaść $\xi = 0$. Warto w tym miejscu przytoczyć formę tensora energii-pędu używaną przez Fermiego i Pizzocchero:

$$\hat{T}_{\mu,\nu}(t, \vec{x}) = \partial_\mu \hat{\phi}(t, \vec{x}) \partial_\nu \hat{\phi}(t, \vec{x}) - \eta_{\mu\nu} \left(\partial^\lambda \hat{\phi}(t, \vec{x}) \partial_\lambda \hat{\phi}(t, \vec{x}) + V(\vec{x}) \hat{\phi}(t, \vec{x})^2 \right). \quad (5.132)$$

Po położeniu $V(\vec{x}) \equiv 0$ tensor ten jest równoważny temu z równania (3.67).

Niech Ω_{BC} oznacza teraz stan podstawowy dla modelu pola skalarowego z odpowiednimi warunkami brzegowymi na $\partial\Omega$. Lokalna gęstość energii której badania autorzy chcą się zająć, dana jest jako

$$\mathcal{E}_{\text{FP,den}}(\vec{x}) = (\Omega_{\text{BC}}, \hat{T}_{0,0}(\vec{x}) \Omega_{\text{BC}}). \quad (5.133)$$

Od tego miejsca dla większej zwięzłości będziemy przyjmować, że $t = 0$ i opuszczać w notacji zmienną czasową. Jak wcześniej zauważyli Fermi i Piazocchero, $\hat{\phi}(t, \vec{x})$ jest dystrybucją, więc wyrażenie $\hat{T}_{0,0}(\vec{x})$ jako w ogólności pozbawione sensu, gdyż zawiera kwadrat dystrybucji. Również ostre warunki brzegowe, jak zobaczymy dalej, także w tym podejściu mogą być przyczyną pojawienia się źle zdefiniowanych wyrażeń.

By zaradzić temu, wprowadzona jest odpowiednia procedura regularyzacji i renormalizacji. Pierwszym krokiem w jej sformułowaniu jest wprowadzenie parametru renormalizacji κ , który posiada wymiar masy. Niech teraz $u \in \mathbb{C}$ będzie dowolną liczbą zespoloną. Definiujemy operator

$$\mathcal{A}_{\text{BC},u} := (\kappa^{-2} \mathcal{A}_{\text{BC}})^{u/4}. \quad (5.134)$$

Z przyczyn które staną się jasne później będzie nas interesowała granica $u \rightarrow 0$, co sprawia, że nie możemy zignorować faktu, iż dla większości wartości zespolonych $\mathcal{A}_{\text{BC},u}$ jest silnie nielokalnym operatorem. Dysponując tym aparatem formalnym możemy zdefiniować **dzeta zregularizowany operator pola**:

$$\hat{\phi}^u(t, \vec{x}) := \mathcal{A}_{\text{BC},u} \hat{\phi}(t, \vec{x}) = (\kappa^{-2} \mathcal{A}_{\text{BC}})^{u/4} \hat{\phi}(t, \vec{x}). \quad (5.135)$$

Musimy tutaj zwrócić uwagę Czytelnika na następujący fakt. Podczas gdy $\hat{\phi}(t, \vec{x})$ jest polem lokalnym to $\hat{\phi}^u(t, \vec{x})$ jest już *nielokalnym* obiektem. Co więcej w przeciwieństwie do modeli wprowadzonych w rozdziale (4.1), nie jest nam znany sposób w jaki można by scharakteryzować w sposób dokładny jego nielokalność. Niestety, autorzy nie poddają problemowi nielokalności pola $\hat{\phi}^u(t, \vec{x})$ dokładniejszej analizie.

Zauważymy, że Fermi i Pizzocchero tak jak Spreafico i Zerbini mówią o „dzeta regularyzacji” lub „dzeta renormalizacji”, przez analogię do słynnej funkcji dzeta Riemanna. Niemniej w żadnej z tych prac nie jest wyjaśnione, jaka jest wzajemna relacja tych dwóch podejść.

Aby nadać sens wyrażeniu (5.133) autorzy dokonują mechanicznego podstawienia $\hat{\phi} \mapsto \hat{\phi}^u$ we wzorze (5.132) otrzymując

$$\hat{T}_{\mu,\nu}^u(\vec{x}) = \partial_\mu \hat{\phi}^u(\vec{x}) \partial_\nu \hat{\phi}^u(\vec{x}) - \eta_{\mu\nu} (\partial^\lambda \hat{\phi}^u(\vec{x}) \partial_\lambda \hat{\phi}^u(\vec{x}) + V(\vec{x}) \hat{\phi}^u(\vec{x})^2). \quad (5.136)$$

Tak zregularizowany tensor energii-pędu $\hat{T}_{\mu,\nu}^u(\vec{x})$, w przeciwieństwie do tego z wzoru (5.132), jest już wielkością *nielokalną*. Niestety i tutaj autorzy nie dyskutują w sposób

szczegółowy co ta utrata lokalności oznacza dla rozważanej teorii. Niezależnie od tego, zregularyzowana *nielokalna* gęstość energii jest teraz określona jako

$$\mathcal{E}_{\text{FP,den}}^u(\vec{x}) = (\Omega_{\text{BC}}, \hat{T}_{0,0}^u(\vec{x}) \Omega_{\text{BC}}). \quad (5.137)$$

Choć siła przyzwyczajenia każe nam nazwać wielkość z powyższego wzoru „lokalną gęstością energii”, to musimy ponownie z całą siłą podkreślić, że wzór ten przedstawia silnie nielokalną wielkość, bo zdefiniowany jest za pomocą nielokalnego pola $\hat{\phi}^u(\vec{x})$. Jednocześnie należy wskazać, iż Fermi i Pizzocchero zwykle nie nazywają tej wielkości „lokalną gęstością energii”. Zamiast tego mówią o *próżniowych wartościach oczekiwanych* (VEV, ang. *vacuum expectation values*) odpowiednich operatorów, w tym wypadku składowej $\hat{T}_{0,0}^u(\vec{x})$.

Musimy teraz omówić jak przebiega proces otrzymywania skończonych rezultatów na podstawie wyrażeń takich jak (5.137). Podejście jakie proponują autorzy jest następujące. Niech f^u będzie dowolną wielkością fizyczną zależną od wprowadzonego wcześniej parametru $u \in \mathbb{C}$, taką jak ta przedstawiona w we wspomnianym wcześniej wzorze. Przyjmijmy, że pierwotnie jest ona funkcją analityczną u określoną na zbiorze $\mathcal{U}_0 \subset \mathbb{C}$. W tym momencie konieczne jest rozróżnienie dwóch przypadków.

1) Możliwe jest przedłużenie f^u do funkcji analitycznej na zbiorze $\mathcal{U}$ zawierającym zero. Wówczas zrenormalizowaną wersję f^u otrzymujemy biorąc wartość tak przedłużonej funkcji w $u = 0$:

$$f_{\text{RP}} = f^0. \quad (5.138)$$

Symbol RP pochodzi od angielskiego *regular part*, które to zwrot oznacza nieosobliwą część rozwinięcia funkcji analitycznej w szereg Laurenta. Oznaczenie to w trochę zmienionej formie przyjmujemy za oryginalnymi pracami.

2) Funkcja f^u przedłuża się do funkcji analitycznej na zbiorze $\mathcal{U}$, który nie zawiera 0, ale zawiera zbiór postaci $0 < |u| < r$, $r > 0$. Wówczas rozwijamy przedłużoną funkcję f^u w szereg Laurenta

$$f^u = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f_i u^i. \quad (5.139)$$

Renormalizacja polega teraz na wzięciu zerowego wyrazu tego rozwinięcia

$$f_{\text{RP}} = f_0. \quad (5.140)$$

Niezależnie od tego która z tych metod została zastosowana, by zdefiniować f_{RP} , samą tą operację będziemy oznaczać tym samym symbolem RP f^u :

$$\text{RP } f^u := f_{\text{RP}}. \quad (5.141)$$

Sami autorzy przyznają, że ta definicja renormalizacji dopuszcza pewne dwuznaczności, które pokażemy na przykładzie energii globalnej. Zregularyzowana energia globalna jest zdefiniowana jako

$$\mathcal{E}_{\text{FP}}^u := \int_{\Omega} d^3x (\Omega_{\text{BC}}, \hat{T}_{0,0}^u(\vec{x}) \Omega_{\text{BC}}). \quad (5.142)$$

Powstaje teraz pytanie, w jaki sposób określić wartość zrenormalizowanej energii? Czy jako

$$\mathcal{E}_{\text{FP,ren}} := \text{RP} \int_{\Omega} d^3x (\Omega_{\text{BC}}, \hat{T}_{0,0}^u(\vec{x}) \Omega_{\text{BC}}), \quad (5.143)$$

czy może ma użyć następującego wyrażenia?

$$\mathcal{E}_{\text{FP,ren}} := \int_{\Omega} d^3x \text{Ren} (\Omega_{\text{BC}}, \hat{T}_{0,0}^u(\vec{x}) \Omega_{\text{BC}}). \quad (5.144)$$

Autorzy jawnie stwierdzają, że te dwie definicje nie muszą być równoważne. Wielkość reprezentowana przez wzór (5.141) z definicji jest skończona, podczas gdy całka (5.142) we wzorze może być rozbieżna. Ostatecznie autorzy przyjęli pragmatyczne podejście do problemu, korzystając z tej postaci wyrażenia na $\mathcal{E}_{\text{FP,ren}}$ która jest w danym momencie wygodniejsza.

Potrzebujemy dodać małe zastrzeżenie do faktu, że wzór (5.143) zawsze reprezentuje skończoną wielkość. Jest tak, jeśli można dokonać odpowiedniego przedłużenia funkcji reprezentowanej przez to wyrażenie, do funkcji analitycznej w otoczeniu zera, a jak niedługo zobaczymy w konkretnym modelu może to być niewykonalne.

By zrozumieć wyniki otrzymane przez Fermiego i Pizzocchero musimy omówić podział na **energię objętościową** (ang. *bulk energy*) i **energię brzegową** (ang. *boundary energy*), którego dokonują. Obie te energie poddawane są w ich pracach odpowiedniej regularyzacji i renormalizacji. Wyjaśnienie jak te pojęcia funkcjonują w ich pracach wymaga wprowadzenia dodatkowej aparatury technicznej.

Niech $\mathcal{A}$ będzie samosprzężonym operatorem na $L^2(\mathbb{R}^3, dx)$, silnie dodatnim w sensie (5.131). Za pomocą rachunku operatorowego określamy jak poprzednio operator $\mathcal{A}^{-s}$, $s \in \mathbb{C}$, jego jądro całkowe będziemy oznaczać jako $\mathcal{A}^{-s}(\vec{x}, \vec{y})$. Wielkość tą będziemy nazywać **s-tym jądrem Dirichleta** i oznaczać jako symbolem $D_s(\vec{x}, \vec{y})$:

$$D_s(\vec{x}, \vec{y}) := \mathcal{A}^{-s}(\vec{x}, \vec{y}). \quad (5.145)$$

By uprościć dalsze rachunki wprowadzamy oznaczenie

$$D_{\text{BC},s}(\vec{x}, \vec{y}) := \mathcal{A}_{\text{BC}}^{-s}(\vec{x}, \vec{y}). \quad (5.146)$$

Długi rachunek wychodzący od wzoru (5.135) pozwala pokazać, że globalną zregularyzowaną energię $\mathcal{E}_{\text{FP}}^u$ można wyrazić za pomocą $D_{\text{BC},s}(\vec{x}, \vec{y})$ w następujący sposób

$$\mathcal{E}_{\text{FP}}^u = E^u + B^u, \quad (5.147a)$$

$$E_{\text{FP}}^u := \frac{\kappa^u}{2} \int_{\Omega} d^3x D_{\text{BC},(u-1)/2}(\vec{x}, \vec{x}), \quad (5.147b)$$

$$B_{\text{FP}}^u := \frac{\kappa^u}{4} \int_{\partial\Omega} da(\vec{x}) \frac{\partial}{\partial n_{\vec{y}}} D_{\text{BC},(u+1)/2}(\vec{x}, \vec{y}), \quad (5.147c)$$

gdzie $n_{\vec{y}}$ to wektor normalny do $\partial\Omega$. Wielkość E_{FP}^u nosi nazwę zregularyzowanej energii objętościowej, a B_{FP}^u zregularyzowanej energii brzegowej.

Przejdźmy teraz do pracy Fermiego i Pizzocchero *Local Casimir Effect for a Scalar Field in Presence of a Point Impurity*, [FP18]. Wśród jej wyników jest obliczenie zrenormalizowanej gęstości energii dla układu pola skalarnego zawierającego pojedynczą deltę Diraca. Będziemy przyjmowali, że owa delta znajduje się w środku układu współrzędnych. Niestety, rachunek ten jest uwikłany w dodatkowe problemy natury technicznej, które musimy pokrótce omówić.

Delta Diraca jest wprowadzona do badanego modelu poprzez zdefiniowanie operatora $\mathcal{A}_{\text{BC}}$ jako

$$\mathcal{A}_{\text{BC}} := -\Delta, \quad (5.148)$$

wraz z warunkami brzegowymi odpowiadającym delcie Diraca w punkcie $\vec{x} = \vec{0}$. Jak już to była powiedziane w rozdziale (4.1), ściśle zdefiniowany potencjał typu delta Diraca w trzech wymiarach przestrzennych zawiera swobodny parametr, oznaczanym przez Fermiego i Pizzocchero symbolem λ . Wedle tego co podali w pracy [FP23], parametr λ i parametr α wprowadzony przez nas w równaniu (4.13) wiąże związek

$$\alpha = \frac{2\pi^2}{\lambda}. \quad (5.149)$$

Widmo tak określonego operatora $\mathcal{A}_{\text{BC}}$ jest równe $[0, +\infty)$, więc nie jest spełniony warunek (5.131). By to obejść autorzy wprowadzają do modelu kolejny parametr $\varepsilon > 0$, definiując operator

$$\mathcal{A}_{\text{BC}}^\varepsilon := \mathcal{A}_{\text{BC}} + \varepsilon^2 \text{id}. \quad (5.150)$$

W odpowiednim momencie trzeba będzie wziąć granicę $\varepsilon \searrow 0$, co zostaje przez autorów określone, jako „renormalizacja obciążenia podczerwonego”, choć z testu pracy wynika, że zdawali sobie sprawę, iż to określenie może być nieadekwatne. Wobec tego musimy używać podwójnie zregulizowanego, *nielokalnego* pola

$$\hat{\phi}^{\varepsilon, u}(t, \vec{x}) := \mathcal{A}_{\text{BC}}^{\varepsilon, u} \hat{\phi}(t, \vec{x}) = (\kappa^{-2} \mathcal{A}_{\text{BC}}^\varepsilon)^{u/4} \hat{\phi}(t, \vec{x}). \quad (5.151)$$

Tensor energii-pędu ponownie dostajemy za poprzez wykonanie we wzorze (5.132) podstawienia $\phi \mapsto \hat{\phi}^{\varepsilon, u}$. Stajemy więc przed problemem zrenormalizowania wyrażenia zależnego od dwóch parametrów, u i ε :

$$(\Omega_{\text{BC}}, \hat{T}_{0,0}^{\varepsilon, u}(\vec{x}) \Omega_{\text{BC}}) \quad (5.152)$$

Ponownie, podkreślmy, że powyższy wzór przedstawia silnie nielokalne wyrażenie.

W omawianej pracy wybrana zostaje następująca procedura usunięcia zależności od tych dwóch parametrów. Najpierw dokonywana jest renormalizacja na poziomie parametrów u , potem brana jest granica $\varepsilon \searrow 0$ z tak otrzymanej wartości. Przykładowo, dla gęstości energii mamy

$$\mathcal{E}_{\text{FP, ren den}}(\vec{x}) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \text{RP}(\Omega_{\text{BC}}, \hat{T}_{0,0}^{\varepsilon, u}(\vec{x}) \Omega_{\text{BC}}). \quad (5.153)$$

Należy wspomnieć, że w tej pracy przebadano zrenormalizowane w ten sposób elementy tensora $\hat{T}_{0,0}^{\varepsilon, u}(\vec{x})$, nie podjęto jednak analizy energii globalnej, zdefiniowanej jako całka po $\mathbb{R}^3$ z tej wielkości. Zagadnienie to zostanie omówione dopiero w następnej pracy autorstwa samego D. Fermiego [Fer20].

W wyniku dość długich rachunków autorzy wyliczyli, że gęstość energii w tym podejściu wyraża się wzorem

$$\mathcal{E}_{\text{FP, ren den}}(\vec{x}) = \frac{1}{8\pi^2 |\vec{x}|^4} \left[1 + \left(1 - \frac{2|\vec{x}|}{\lambda} \right) \int_0^{+\infty} dv \frac{e^{-2|\vec{x}|v/\lambda}}{1+v} \right], \quad (5.154)$$

gdzie λ to parametr od którego zależy rodzina potencjałów typu delta Diraca w trzech wymiarach przestrzennych.

Wyrażenie (5.154) przedstawia już wielkość lokalną. Z jednej strony, fizyka każe nam oczekiwać takiego właśnie rezultatu, z drugiej zawilóść użytej procedury renormalizacji, sprawia, że fakt ten nie jest wcale oczywisty. Wbrew temu, co zostało podane w pracy [Zie21], która zawierała błąd rachunkowy, wzór ten jest równoważny formule (5.125b). Wszystkie te zagadnienia są szczegółowo omówione w pracy [FP23].

Ponieważ równoważność obu tych wyrażeń nie musi być wcale oczywista, zaprezentujemy krótki rachunek, który tego dowodzi. By to uczynić we wzorze (5.154) na $\mathcal{E}_{\text{FP, ren den}}(\vec{x})$ dokonujemy podstawienia (5.149). W następny kroku przepisujemy ten wzór jako

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\text{FP, ren den}}(\vec{x}) &= \frac{1}{8\pi^2|\vec{x}|^4} \left[1 + \left(1 - \frac{\alpha|\vec{x}|}{\pi^2} \right) \int_0^{+\infty} dv \frac{e^{-\alpha|\vec{x}|v/\pi^2}}{1+v} \right] = \\ &= \frac{1}{8\pi^2|\vec{x}|^4} \left[\rho \int_0^{+\infty} dv e^{-\rho v} + (1-\rho) \int_0^{+\infty} dv \frac{e^{-\rho v}}{1+v} \right]_{\rho=\alpha|\vec{x}|/\pi^2}.\end{aligned}\quad (5.155)$$

Na mocy elementarnej tożsamości

$$\rho + \frac{1-\rho}{1+v} = \frac{1+\rho v}{1+v}, \quad (5.156)$$

zależność ta przybiera postać

$$\mathcal{E}_{\text{FP, ren den}}(\vec{x}) = \frac{1}{8\pi^2|\vec{x}|^4} \int_0^{+\infty} dv \frac{1+\rho v}{1+v} e^{-\rho v} \Big|_{\rho=\alpha|\vec{x}|/\pi^2}. \quad (5.157)$$

Po podstawieniu $v = 2\pi^2 r/\alpha$ i dokonaniu elementarnych przekształceń dostajemy

$$\mathcal{E}_{\text{FP, ren den}}(\vec{x}) = \frac{1}{4|\vec{x}|^4} \int_0^{+\infty} dr \frac{1+2r|\vec{x}|}{\alpha+2\pi^2 r} e^{-2|\vec{x}|r} = \mathcal{E}_{\text{single, lim}}(\vec{x}), \quad (5.158)$$

co dowodzi zgodności wyrażenia na energię samoodziaływania pojedynczej delty uzyskanego przez Fermiego i Piazzocchero, z tym podanym w niniejszej pracy.

Przejdźmy w końcu do omówienia pracy samego D. Fermiego *The Casimir energy anomaly for a point interaction*, [Fer20]. Autor przyznaje w niej, że energii policzona według przepisu (5.144), gdzie gęstość energii dana jest przez (5.154) prowadzi do rozbieżnej całki. Wobec tego decyduje się, wykazując spory pragmatyzm, skorzystać ze wzoru (5.145), czyli najpierw wyciąkować $(\Omega_{\text{BC}}, \hat{T}_{0,0}^{\varepsilon,u}(\vec{x})\Omega_{\text{BC}})$, dopiero później dokonać renormalizacji. Co warto zaznaczyć, wyrażenie $(\Omega_{\text{BC}}, \hat{T}_{0,0}^{\varepsilon,u}(\vec{x})\Omega_{\text{BC}})$ nie pojawia się już więcej w tej pracy, bo Fermi powołując się na książkę napisaną wraz z Piazzocchero [FP17], stwierdza, że zachodzi związek

$$\int_{\Omega} d^3x (\Omega_{\text{BC}}, \hat{T}_{0,0}^{\varepsilon,u}(\vec{x})\Omega_{\text{BC}}) = E_{\text{FP}}^{\varepsilon,u} + B_{\text{FP}}^{\varepsilon,u}, \quad (5.159)$$

gdzie $\Omega = \mathbb{R}^0 \setminus \{\vec{0}\}$, zaś energia objętościowa $E^{\varepsilon,u}$ i brzegowa $B^{\varepsilon,u}$ są zdefiniowane jak w wzorach (5.147a) i (5.147b). Choć wzory te pochodzą z pracy opublikowanej przez samego Fermiego, uważamy, że oznaczanie tej wielkości za pomocą inicjałów jego i Piazzocchero jest uzasadnione tym, iż jest ona pokłosiem ich długiej współpracy. Od tego momentu praca zajmuje się wyłącznie badaniem wyrażeń na energię objętościową i energię brzegową.

D. Fermi staje teraz przed problemem, że wyrażenie $E_{\text{FP}}^{\varepsilon,u}$ jest rozbieżne dla każdego u , nawet pod nieobecność delty Diraca. Dlatego postanawia on zająć się „względna” energią objętościową $\Delta E_{\text{FP}}^{\varepsilon,u}$ zdefiniowaną w następujący sposób. Niech λ oznacza parametr wyznaczający model delty Diraca w trzech wymiarach przestrzennych. Rozważamy po wzięciu $\lambda = 0$ redukuje się, przynajmniej formalnie, do

problemu swobodnego pola skalarnego w $\mathbb{R}^3$. Przyjęcie $\lambda = 0$ zgodnie z wzorami (4.8), (4.13) i (5.149) odpowiada wzięciu¹¹ $\alpha = +\infty$. Względna globalna energia w ujęciu Fermiego jest dana jako

$$\Delta E_{\text{FP}}^{\varepsilon, u} = \frac{\kappa^u}{2} \int_{\Omega} d^3x \left(D_{\text{BC}, \varepsilon, (u-1)/2}(\vec{x}, \vec{x}) - D_{\text{BC}, \varepsilon, (u-1)/2}(\vec{x}, \vec{x}) \Big|_{\alpha=+\infty} \right). \quad (5.160)$$

Ta wielkość okazuje się już skończona dla $\Re u > -1$ i ma biegun w $u = 0$. Fermi stosuje teraz już znaną procedurę, najpierw renormalizuje $\Delta E_{\text{FP}}^{\varepsilon, u}$ usuwając parametr u , następnie bierze granicę $\varepsilon \searrow 0$. Po uwzględnieniu (5.149) jego rezultat można zapisać jako

$$\mathcal{E}_{\text{FP, ren}} = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \text{RP} \Delta E_{\text{FP}}^{\varepsilon, u} = \frac{\alpha}{4\pi^3} \ln(2\pi^2 \kappa / \alpha). \quad (5.161)$$

W tym i dalszych wzorach dokonaliśmy podstawienia (5.87).

W tym momencie Fermi odnosi się do wyników przedstawionych w rozdziale 4.1 pracy Spreafico i Zerbiniego [SZ09]. W rozdziale tym podają oni dość skomplikowane wyrażenie na logarytm funkcji rozdziału $\ln Z$ dla układu z jedną deltą Diraca. Fermi stosując do ich wyniku wzór (5.95), wylicza energię całkowitą, dostając

$$\mathcal{E}_{\text{SP, single}} = \frac{\alpha}{4\pi^3} \left(1 - \ln(\alpha l_{\text{ren}} / 2\pi^2) \right). \quad (5.162)$$

Słusznie zauważa on, że wzory (5.161) i (5.162) będą się pokrywać, jeśli przyjmiemy, iż zachodzi relacja

$$l_{\text{ren}} = \frac{e}{\kappa}, \quad (5.163)$$

gdzie $e \approx 2.72$ to dobrze znana stała matematyczna.

Końcowy krok jego analizy jest szczególnie kontrowersyjny, z punktu przyjętego w tej pracy podejścia do efektu Casimira. Fermi oblicza bowiem energię brzegową $B_{\text{FP}}^{\varepsilon, u}$ po dwóch brzegach zbioru $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, którymi jest „sfera w nieskończoności” i „sfera w zerze”. Dokładniej rozważa on całkę (5.147b) po sferze $S(r)$, gdy $r \nearrow +\infty$ i $r \searrow 0$. Z jego pracy wnioskujemy, że procedura renormalizacji energii brzegowej przebiega w następujący sposób. Najpierw przechodzimy z promieniem r do odpowiedniej granicy, następnie usuwana jest zmienna u , na samym końcu brana jest granica $\varepsilon \searrow 0$. Autor wylicza

$$\lim_{r \nearrow +\infty} B_{\text{FP}}^{\varepsilon, u}(r) = 0, \quad (5.164)$$

więc zgodnie z oczekiwaniami „brzeg w nieskończoności” nie daje wkładu do energii brzegowej. Problem powstaje przy obliczaniu całki dla „brzeg w zerze”, gdzie autor otrzymuje

$$\lim_{r \searrow 0} B_{\text{FP}}^{\varepsilon, u}(r) = \infty, \quad (5.165)$$

dla każdego $u \in \mathbb{C}$. Tym samym energia brzegowa okazuje się być rozbieżna

$$B_{\text{FP, ren}} := \lim_{\varepsilon \searrow 0} \text{RP} \left(\lim_{r \searrow 0} B_{\text{FP}}^{\varepsilon, u}(r) \right) = \infty. \quad (5.166)$$

Fermi podsumowuje tą sytuację stwierdzeniem, iż fakt, że renormalizacja nie była w stanie usunąć wszystkich nieskończoności z problemu, wynika z tego, że model delty Diraca nie nadaje się do opisu fizyki w małej skali z którą mamy do czynienia w granicy $r \searrow 0$, odległościach, gdyż w prawdziwym świecie, nie ma obiektów tego typu. Jedynie gdy analizujemy konkretny problem w skali dużo większej niż

¹¹Nie będziemy dyskutować tego, czy taka procedura jest w pełni poprawna matematycznie.

rozmiar ciała które w modelu efektywnym zastąpiliśmy deltą, taka idealizacja jest dopuszczalna.

Ostatnie stwierdzenie, że model delty nie nadaje się do opisu fizyki w małych skalach jest jak najbardziej zgodne z podejściem prezentowanym w tej pracy. O tym, że jest to błędna idealizacja w kontekście efektu Casimira pisaliśmy już wielokrotnie w poprzednich rozdziałach. Jednocześnie podejście Fermiego i Pizzocchero zostawia nas z wieloma pytaniami oraz, w naszej ocenie, nie jest ono w pełni satysfakcjonujące.

Zacniemy od kilku uwag natury ogólnej. Pierwszą rzeczą na którą musimy zwrócić uwagę, to fakt, iż procedura regularyzacji i renormalizacji, poprzez przedłużenie analityczne i wzięcie zerowego wyrazu rozwinięcia, nie posiada interpretacji fizycznej, a przynajmniej nie jest ona nam znana. Po drugie przypadek pola skalarnego oddziałującego z deltą Diraca i zapewne wiele innych, wymaga wprowadzenia dodatkowej regularyzacji (5.150), uzależnionej od parametru ε . Cała procedura renormalizacji staje się tym samym szczególnie trudna w dokładnym prześledzeniu i ocenie. Nie jesteśmy w stanie powiedzieć, czy zaproponowana procedura zależy od kolejności usuwania parametrów u i ε , kwestia ta nie jest dyskutowana w przytaczanych publikacjach.

Kolejny problem związany jest z energią objętościową wyliczoną przez Fermiego dla pojedynczej delty Diraca (5.161). Jak już wcześniej widzieliśmy, podstawiając $\lambda = 0$, gdzie λ to parametr odpowiadający używanemu w tej pracy parametrowi α , autor otrzymuje gęstość energii dla swobodnego pola skalarnego, która jest rozbieżna. Zgodnie z poglądem wyrażonym w rozdziale (2.3), wskazuje to na to, że energia układu nie została poprawnie zdefiniowana. Nasza lektura książki Fermiego i Pizzocchero *Local Zeta Regularization and the Scalar Casimir Effect* [FP17], wskazuje iż tak jest istotnie i autorzy nie zastosowali odpowiedniej procedury „uporządkowania normalnego” w definicji gęstości energii.

Wreszcie należy zauważyć, że jeśli przez renormalizację rozumiemy procedurę usuwania nieskończoności z danego modelu, to procedura przeprowadzona przez Fermiego w [Fer20] nie powiodła się, gdyż energia brzegowa obliczona we wzorze (5.166) jest dalej nieskończona. Fermi i Pizzocchero w pracy [FP23] komentując ten fakt stwierdzili, że trzeba zauważyć, iż po przeprowadzonej procedurze energia objętościowa jest skończona i równa wynikowi otrzymanemu przez Spreafico i Zerbiniego. Jak również, że obecność tego typu nieusuwalnych nieskończoności w modelach z „klasycznymi warunkami brzegowymi jest dobrze znaną patologią kwantowej teorii pola”. Jest to prawdą, lecz obecność takich nieskończoności jest niewątpliwie niepożądana.

Niewątpliwie, fakt, że udało się pokazać zgodność energii objętościowej wyliczonej przez Fermiego z tą globalną energią wyliczoną przez Spreafico i Zerbiniego jest godny uwagi. Należy jednak zauważyć, iż w podejściu Spreafico i Zerbiniego otrzymuje się zrenormalizowaną, skończoną energię globalną, podczas gdy wynik Fermiego prowadzi do skończonej energii objętościowej i rozbieżną energię brzegową. Powstaje więc pytanie, w jakim sensie można mówić o tożsamości tych wyników? Zrozumienie tego utrudnia fakt, że Fermi nie liczy energii globalnej jako całki z gęstości energii, lecz korzysta ze wzorów (5.147a)–(5.147c). Właściwe więc zrozumienie tych wyników wymaga szczegółowej analizy związku jaki zachodzi między (5.153) i (5.161).

Choć więc wynik Fermiego i Pizzocchero odnośnie gęstości energii jest zgodny z tym przedstawionym w pracach [Zie21] i [Zie23], w obecnej chwili nie jest jasne jaką procedurę należałoby do niego zastosować by otrzymać wzór (5.161). Jednocześnie chcemy podkreślić ponownie, że nie jest możliwe otrzymanie zaleźnego od własności modelu wzoru (5.49) na energię globalną, jaki przewiduje stosowane tu podejście, z uniwersalnego w badanej klasie modeli wzoru (5.125b).

Dochodzimy więc do trudnej w ocenie sytuacji, gdy wyniki trzech różnych publikacji, są zbieżne ze sobą w wielu miejscach, jednak ich wzajemna relacja jest zrozumiana bardzo słabo. Nie jest to jednak sytuacja nietypowa w badaniu modelu Casimira, gdzie związek między różnymi formalizmami teoretycznymi tu stosowanym jest często bardzo trudny do ustalenia. Jednocześnie mamy nadzieję, że analiza przedstawiona w tej pracy jest na tyle jasna gdy chodzi o użyte metody i podejście obliczeniowe, że rzuci pewne światło na ten problem.

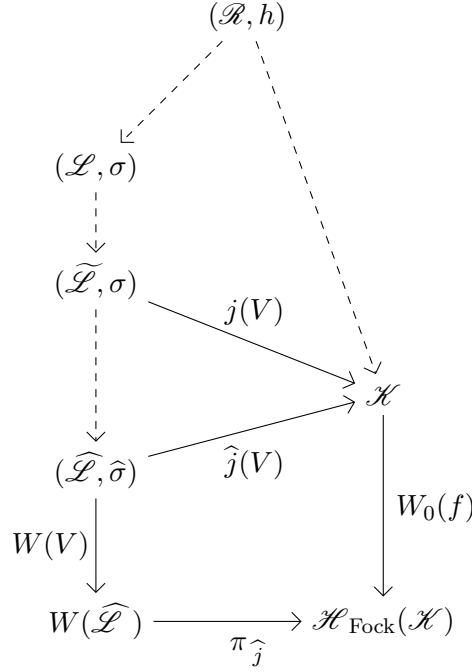
6 Podziękowania

W pierwszym rzędzie chciałbym podziękować Andrzejowi Herdegenowi za wprowadzenie mnie w tematykę algebraicznej kwantowej teorii pola i jej zastosowań do badania efektu Casimira. A także, za nieprzebraną wyrozumiałość, wsparcie oraz wytrwałość, bez których ta praca nigdy nie zostałaby ukończona.

Wyrazy wdzięczności należą się również Bogdanowi Damskiemu, za zwrócenie naszej uwagi na problem efektu Casimira w układzie z quasi-deltami. Pawłowi Duchowi i Wojciechowi Dybie chciałbym podziękować za niezliczone okazje do rozmów, które bardzo poszerzyły moje rozumienie kwantowej teorii pola i efektu Casimira.

Niezwykle mocno pragnę podziękować moim rodzicom, Mirosławie i Krzysztofowi, mojej siostrze Annie i jej mężowi Arturowi za niezliczoną ilość momentów, kiedy udzielili mi wsparcia. Bez niego ta praca na pewno nie dobiegłaby końca.

Na koniec chciałbym podziękować Iwonie Grabskiej-Gradzińskiej, za to czego mnie nauczyła o języku polskim, edycji tekstów i tworzeniu rysunków do nich. Mam nadzieję, że pozytywne ślady jej wpływu można dostrzec w niniejszej pracy.



Rysunek 6: Schemat budowy przestrzeni symplektycznych, algebr i reprezentacji dla teorii quasi-swobodnej. Strzałka przerywana oznacza, że drugi obiekt jest konstruowany z użyciem pierwszego. Strzałka ciągła wraz z znajdującym się obok niej symbolem funkcji, oznacza, że dana funkcja odwzorowuje pierwszy obiekt w drugi.

A Konstrukcja algebr i reprezentacji teorii quasi-swobodnych

A.1 Przestrzenie symplektyczne teorii quasi-swobodnej

W dodatku tym przedstawimy schemat budowy odpowiednich przestrzeni symplektycznych wykorzystywanych przy konstrukcji teorii quasi-swobodnej. Naszym punktem wyjścia jest para $(\mathcal{R}, h)$, gdzie $\mathcal{R}$ to rzeczywista przestrzeń Hilberta, a h to samosprężony, dodatni operator $h > 0$ o dziedzinie $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}(h)$. Budujemy sumę prostą

$$\mathcal{L} = \mathcal{D}(h) \oplus \mathcal{R} \subset \mathcal{R} \oplus \mathcal{R}. \quad (\text{A.1})$$

Jeśli wektor $V \in \mathcal{L}$ to będziemy go zapisywali jako $V = v \oplus u$, $v \in \mathcal{D}_{\mathcal{R}}(h)$, $u \in \mathcal{R}$. Dla $V_1 = v_1 \oplus u_1$, $V_2 = v_2 \oplus u_2$ definiujemy w standardowy sposób iloczyn symplektyczny

$$\sigma(V_1, V_2) = (v_2, u_1) - (v_1, u_2) \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.2})$$

Tym samym $(\mathcal{L}, \sigma)$ staje się przestrzenią symplektyczną.

W następnym kroku dokonujemy kompleksyfikacji przestrzeni $\mathcal{R}$ dostając przestrzeń $\mathcal{K}$ określoną nad ciałem liczby zespolone:

$$\mathcal{K} = \mathcal{R} \oplus i\mathcal{R}. \quad (\text{A.3})$$

Jej elementy będziemy zapisywać jako $v + iu \in \mathcal{K}$, gdzie $v, u \in \mathcal{R}$. Iloczyn skalarny na $\mathcal{K}$, oznaczany w taki sposób jak dla $\mathcal{R}$, jest dany przez wzór

$$(v_1 + iu_1, v_2 + iu_2) = (v_1, v_2) + (u_1, u_2) + i(v_1, u_2) - i(u_1, v_2). \quad (\text{A.4})$$

Z wzoru tego wynika, że ten iloczyn skalarny jest antyliniowy w lewym argumencie i liniowy w prawym. Przestrzeń $\mathcal{K}$ staje się tym samym przestrzenią Hilberta. Na $\mathcal{K}$

określamy również operator sprzężenia zespolonego K

$$\mathcal{K} \ni x \rightarrow Kx \equiv \bar{x} \in \mathcal{K}, \quad K(v + iu) = v - iu. \quad (\text{A.5})$$

Operator h określony na $\mathcal{R}$ można w jednoznaczny sposób rozszerzyć do operatora liniowego nad $\mathbb{C}$ działającego w przestrzeni $\mathcal{K}$, który będziemy oznaczać tym samym symbolem. Dokładniej, dla $x = v + iu \in \mathcal{K}$ określamy

$$h(z(v + iu)) = z(h(v) + ih(u)), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (\text{A.6})$$

Dziedzina tego operatora wynosi $\mathcal{D}_{\mathcal{K}}(h) = \mathcal{D}_{\mathcal{R}}(h) \oplus i\mathcal{D}_{\mathcal{R}}(h)$. Operator ten jest samosprzężony, dodatni i przemienny z operacją sprzężenia K .

Ponieważ operator h jest dodatni, więc rachunek operatorów pozwala wziąć jego pierwiastek i utworzyć operatory $h^{\pm 1/2}$. Możemy teraz zdefiniować podprzestrzeń $\widetilde{\mathcal{L}}$ przestrzeni $\mathcal{L}$

$$\widetilde{\mathcal{L}} = \mathcal{D}_{\mathcal{R}}(h) \oplus \mathcal{D}_{\mathcal{R}}(h^{-1/2}). \quad (\text{A.7})$$

W tym miejscu warto zaznaczyć, że $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}(h) \subset \mathcal{D}_{\mathcal{R}}(h^{1/2})$. Możemy teraz określić funkcję $j : \widetilde{\mathcal{L}} \rightarrow \mathcal{K}$ następującym wzorem:

$$j(V) = h^{1/2}v - ih^{-1/2}u, \quad V = v \oplus u \in \widetilde{\mathcal{L}}. \quad (\text{A.8})$$

Z własności h wynika, że $\text{Ran } j$ jest gęstą, liniową nad $\mathbb{R}$ podprzestrzenią $\mathcal{K}$, zaś j jest bijekcją z $\widetilde{\mathcal{L}}$ na $\text{Ran } j$. W tym jednak momencie napotykamy na pewien problem, może bowiem zajść sytuacja, że $\text{Ran } j \neq \mathcal{K}$. By obejść trudności z tym związane rozszerzymy przestrzeń $\widetilde{\mathcal{L}}$ do przestrzeni $\widehat{\mathcal{L}}$, a odwzorowanie j do funkcji $\widehat{j}$, tak by zachodziło $\text{Ran } \widehat{j} = \mathcal{K}$.

W tym celu rozpatrzmy przestrzenie $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}(h^{1/2})$ oraz $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}(h^{-1/2})$ i określmy na nich iloczyny skalarne

$$(v_1, v_2)_+ = (h^{1/2}v_1, h^{1/2}v_2), \quad v_1, v_2 \in \mathcal{D}_{\mathcal{R}}(h^{1/2}), \quad (\text{A.9a})$$

$$(u_1, u_2)_- = (h^{-1/2}u_1, h^{-1/2}u_2), \quad u_1, u_2 \in \mathcal{D}_{\mathcal{R}}(h^{-1/2}). \quad (\text{A.9b})$$

Możemy teraz zdefiniować normy

$$\|v\|_+ = \sqrt{(v, v)_+}, \quad v \in \mathcal{D}_{\mathcal{R}}(h^{1/2}) \quad (\text{A.10a})$$

$$\|u\|_- = \sqrt{(u, u)_-}, \quad u \in \mathcal{D}_{\mathcal{R}}(h^{1/2}) \quad (\text{A.10b})$$

Niech $\mathcal{R}_{\pm}$ oznacza uzupełnienie przestrzeni $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}(h^{\pm 1/2})$ w normie $\|\cdot\|_{\pm}$. Dokonujemy przedłużenia iloczynu skalarnego $(\cdot, \cdot)_{\pm}$ na całą przestrzeń $\mathcal{R}_{\pm}$. Wraz z tym iloczynem przestrzeń $\mathcal{R}_{\pm}$ staje się przestrzenią Hilberta, a zbiór $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}(h^{\pm 1/2})$ jest w niej gęsty.

Ponieważ dla $v \in \mathcal{D}_{\mathcal{R}}(h^{1/2})$ mamy $\|v\|_+ = \|h^{1/2}v\|$, więc odwzorowanie

$$\mathcal{D}_{\mathcal{R}}(h^{1/2}) \ni v \mapsto h^{1/2}v \in \mathcal{R} \quad (\text{A.11})$$

gdzie $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}(h^{1/2})$ jest wyposażone w normę $\|\cdot\|_+$, jest odwzorowaniem liniowym ograniczonym. Na mocy podstawowego twierdzenia o przedłużaniu operatorów ograniczonych $h^{1/2}$ można przedłużyć do operatora $\widehat{h^{1/2}}$:

$$\widehat{h^{1/2}} : \mathcal{R}_+ \rightarrow \mathcal{R}, \quad \|\widehat{h^{1/2}}v\| = \|v\|_+. \quad (\text{A.12})$$

Analogicznie definiujemy

$$\widehat{h^{-1/2}} : \mathcal{R}_- \rightarrow \mathcal{R}, \quad \|\widehat{h^{-1/2}}u\| = \|u\|_-. \quad (\text{A.13})$$

Dla dowolnych $v \in \mathcal{D}_{\mathcal{R}}(h^{1/2})$ i $u \in \mathcal{D}_{\mathcal{R}}(h^{-1/2})$ zachodzi nierówność

$$|(v, u)| = |(h^{1/2}v, h^{1/2}u)| \leq \|v\|_+ \|u\|_-, \quad (\text{A.14})$$

tym samym iloczyn (v, u) określony na $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}(h^{1/2}) \times \mathcal{D}_{\mathcal{R}}(h^{-1/2})$ można przedłużyć do

$$\mathcal{R}_+ \times \mathcal{R}_- \ni v, u \mapsto \langle v, u \rangle \in \mathbb{R}, \quad |\langle v, u \rangle| \leq \|v\|_+ \|u\|_-. \quad (\text{A.15})$$

Przestrzeń $(\widehat{\mathcal{L}}, \widehat{\sigma})$

$$\widehat{\mathcal{L}} = \mathcal{R}_+ \oplus \mathcal{R}_-, \quad \widehat{\sigma}(V_1, V_2) = \langle v_2, u_1 \rangle - \langle v_1, u_2 \rangle, \quad (\text{A.16})$$

jest przestrzenią symplektyczną. Definiujemy odwzorowania

$$\widehat{j} : \widehat{\mathcal{L}} \rightarrow \mathcal{H}, \quad \widehat{j}(V) = \widehat{h^{1/2}v} - i\widehat{h^{-1/2}u}. \quad (\text{A.17})$$

Można pokazać, że zachodzi $\text{Ran } \widehat{j} = \mathcal{H}$.

A.2 Przestrzeń Focka i operatory Weyla

Konstrukcję przestrzeni Focka rozpoczynamy od wybrania zespolonej Hilberta $\mathcal{H}$, która opisuje „stany jednocząstkowe” danej teorii. Będziemy zakładać, że przestrzeń ta jest ośrodkowa. Zaczniemy od przypomnienia, że iloczyn tensorowy przestrzeni Hilberta $H_1, H_2, \dots, H_n$ również jest przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym

$$\begin{aligned} (\psi_1 \otimes \psi_2 \otimes \dots \otimes \psi_n, \chi_1 \otimes \chi_2 \otimes \dots \otimes \chi_n) &= \\ &= (\psi_1, \chi_1)_1 (\psi_2, \chi_2)_2 \dots (\psi_n, \chi_n)_n, \quad \psi_i, \chi_i \in H_i, \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

gdzie $(\cdot, \cdot)_i$ oznacza iloczyn skalarny w H_i . To samo jest prawdą dla symetrycznego iloczynu tensorowego. Ponieważ będziemy korzystali tylko z bozonowej przestrzeni Focka, do dalszych rozważań wystarczające są następujące przestrzenie.

$$\mathcal{H}_0 = \mathbb{C}, \quad \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}, \quad \mathcal{H}_n = S(\underbrace{\mathcal{H} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}}_{n \text{ razy}}), \quad n \geq 2. \quad (\text{A.19})$$

Przez S oznaczyliśmy tu operator symetryzacji iloczynu tensorowego. Wprowadzone obiekty matematyczne można zinterpretować w następujący sposób. Przestrzeń $\mathcal{H}_0$ zawiera tylko stan podstawowy teorii Ω , $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}$ zawiera stany opisujące pojedynczą cząstkę, zaś $\mathcal{H}_n$ zawiera stany opisujące n nierozróżnialnych bozonów.

Przestrzeń Focka jest zdefiniowana jako odpowiednia suma prosta przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}_n$:

$$\mathcal{H}_{\text{Fock}}(\mathcal{H}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n. \quad (\text{A.20})$$

Ta suma prosta składa się ze wszystkich nieskończonych ciągów $(\psi_0, \psi_1, \dots)$ spełniających warunek

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|\psi_n\|_n^2 < +\infty, \quad \psi_i \in \mathcal{H}_i, \quad (\text{A.21})$$

gdzie $\|\cdot\|_i$ oznacza normę w $\mathcal{H}_i$. Można pokazać, że przestrzeń ta sama jest przestrzenią Hilberta. Przestrzeń Focka można interpretować jako przestrzeń zawierającą wszystkie stany które zawierają tylko skończoną liczbę cząstek. Wychodząc od tego punktu widzenia wprowadzamy operator liczby cząstek N , najpierw na przestrzeniach $\mathcal{H}_i$, $i = 0, 1, 2, \dots$

$$N\psi = 0 \quad \psi = 0, \quad \psi \in \mathcal{H}_0, \quad (\text{A.22a})$$

$$N\psi = n\psi, \quad \psi \in \mathcal{H}_n, \quad (\text{A.22b})$$

Poprzez warunek liniowości można go określić na wszystkich elementach przestrzeni Focka $\psi = (\psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots) \in \mathcal{H}_{\text{Fock}}(\mathcal{H})$, takich że $\psi_i \neq 0$ tylko dla skończonej liczby indeksów. Następnie możemy przedłużyć operator N do operatora samosprzężonego z dziedziną $\mathcal{D}_{\mathcal{H}_{\text{Fock}}}(N) \subset \mathcal{H}_{\text{Fock}}(\mathcal{H})$. Stan próżni Focka jest dany przez

$$\Omega = (1, 0, 0, \dots). \quad (\text{A.23})$$

Na zbiorze $\mathcal{D}(N^{1/2})$ określamy dla każdego $f \in \mathcal{H}$ operatory kreacji $a^*(f)$ i anihilacji $a(f)$. Działanie operatora kreacji na stan $\psi \in \mathcal{H}_n$ jest określone jako

$$a^*(f)\psi = \sqrt{n+1} S(f \otimes \psi) \in \mathcal{H}_{n+1}, \quad (\text{A.24})$$

Obecność czynnika $\sqrt{n+1}$ jest konieczna by zapewnić, że operatory anihilacji i kreacji będą spełniać związki komutacji, analogiczne dla tych które spełniają operatory spotykane w problemie n -wymiarowego kwantowego oscylatora harmonicznego. Operator anihilacji definiujemy za pomocą relacji

$$(\chi, a(f)\psi) = (a^*(f)\chi, \psi). \quad (\text{A.25})$$

Operatory $a(f)$ i $a^*(f)$ przedłużamy do operatorów określonych na $\mathcal{D}_{\mathcal{H}_{\text{Fock}}}(N^{1/2})$, używając tej samej metody co dla operatora N . Dla $\varphi \in \mathcal{D}(N)$ zachodzi teraz

$$[a(f), a^*(g)]\varphi = (f, g)\varphi. \quad (\text{A.26})$$

Definiujemy również rodzinę operatorów $\Phi_0(f)$, $f \in \mathcal{H}$ poprzez zależność

$$\Phi_0(f)\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(a(f) + a^*(f))\psi, \quad \psi \in \mathcal{D}(N^{1/2}). \quad (\text{A.27})$$

Operator Weyl'a $W_0(f)$ na przestrzeni Focka są określone przez wzór

$$W_0(f) = e^{i\Phi_0(f)}. \quad (\text{A.28})$$

Operator Weyl'a pozwalają nam na przeniesienie operatora unitarnego U określonego na $\mathcal{H}$ na pełną przestrzeń Focka. Mianowicie definiujemy operator unitarny $\Gamma(U)$ na przestrzeni Focka za pomocą zależności

$$\Gamma(U)W_0(f)\Omega = W_0(Uf)\Omega. \quad (\text{A.29})$$

Można pokazać, że $\Gamma(U)$ przeprowadza podprzestrzeń $\mathcal{H}_n$ w nią samą:

$$\Gamma(U)|_{\mathcal{H}_n} : \mathcal{H}_n \rightarrow \mathcal{H}_n. \quad (\text{A.30})$$

Zachodzi również

$$\Gamma(U)|_{\mathcal{H}_n} = \underbrace{U \otimes U \otimes \dots \otimes U}_{n \text{ razy}}. \quad (\text{A.31})$$

Niech teraz h będzie samosprzężonym, niekoniecznie ograniczonym, operatorem określonym na $\mathcal{D}_{\mathcal{H}}(h) \subset \mathcal{H}$. Wówczas e^{iht} jest jednoparametrową grupą operatorów unitarnych na $\mathcal{H}$, natomiast $\Gamma(e^{iht})$ jest jednoparametrową grupą transformacji

unitarnych przestrzeni Focka. Na mocy twierdzenia Stone'a istnieje operator samosprężony $d\Gamma(h)$ taki, że

$$\Gamma(\exp(iht)) = \exp(itd\Gamma(h)). \quad (\text{A.32})$$

Wprowadźmy oznaczenie

$$\mathcal{D}_n(h) = S(\mathcal{D}_{\mathcal{H}}(h) \otimes \dots \otimes \mathcal{D}_{\mathcal{H}}(h)). \quad (\text{A.33})$$

Można pokazać, iż

$$\begin{aligned} d\Gamma(h)|_{\mathcal{D}_n(h)} &= h \otimes \text{id} \otimes \dots \otimes \text{id} + \text{id} \otimes h \otimes \text{id} \otimes \dots \otimes \text{id} + \\ &+ \dots + \text{id} \otimes \text{id} \otimes \dots \otimes \text{id} \otimes h. \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

W powyższym wyrażeniu po prawej stronie zawsze występuje iloczyn tensorowy n operatorów.

Oznaczmy przez $\bar{a}(f)$ domknięcie operatora $a(f)$. W $\mathcal{H}$ wybieramy przeliczalną bazę ortonormalną $\{f_i\}$, taką że $f_i \in \mathcal{D}_{\mathcal{H}}(h^{1/2})$. Niech

$$\mathcal{V}_h = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{D}_{\mathcal{H}_{\text{Fock}}}(\bar{a}(h^{1/2}f_i)) \subset \mathcal{H}_{\text{Fock}}(\mathcal{H}). \quad (\text{A.35})$$

Definiujemy zbiór

$$Q_h(q) = \left\{ \psi \in \mathcal{H}_{\text{Fock}}(\mathcal{H}) \mid \psi \in \mathcal{V}_h, \sum_{i=1}^{\infty} \|\bar{a}(h^{1/2}f_i)\psi\|^2 < +\infty \right\}. \quad (\text{A.36})$$

Na $Q_h(q)$ określamy formę domkniętą:

$$q_h(\psi, \chi) = \sum_i (\bar{a}(h^{1/2}f_i)\psi, \bar{a}(h^{1/2}f_i)\chi), \quad \psi, \chi \in Q(q). \quad (\text{A.37})$$

Można pokazać, że zachodzi następująca, kluczowa relacja

$$q_h(\psi, \chi) = (\psi, d\Gamma(h)\chi). \quad (\text{A.38})$$

W szczególności dla operatora N mamy

$$N = d\Gamma(\text{id}). \quad (\text{A.39})$$

A.3 Transformacje symplektyczne i transformacje Bogoliubowa

Niech $\mathcal{H}$ będzie zespoloną przestrzenią Hilberta, której iloczyn skalarnym będziemy oznaczać $(\cdot, \cdot)$. Przestrzeń $\mathcal{H}$ jako przestrzeń nad ciałem liczb rzeczywistych jest przestrzenią symplektyczną z iloczynem symplektycznym równym $\Im(\cdot, \cdot)$. Odwzorowanie liniowe nad ciałem liczb rzeczywistych $L : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ nazywamy **transformacją symplektyczną** jeśli jest bijekcją i zachodzi

$$\Im(Lf, Lg) = \Im(f, g). \quad (\text{A.40})$$

Dla transformacji symplektycznej L określamy dwa następujące operatory

$$T = \frac{1}{2}(L - iLi), \quad S = \frac{1}{2}(L + iLi). \quad (\text{A.41})$$

Operator T jest liniowy, zaś S jest antyliniowy nad $\mathbb{C}$. Dla tak zdefiniowanych operatorów zachodzi oczywista relacja $L = T + S$.

Niech $W_0(f)$, $f \in \mathcal{H}$ będą określonymi przez wzory (A.27) i (A.28) operatorami Weyla działającym na przestrzeń Focka $\mathcal{H}_{\text{Fock}}(\mathcal{H})$. Określamy teraz następującą rodzinę operatorów

$$W_{0,L}(f) = W_0(Lf). \quad (\text{A.42})$$

Przejdźcie od $W_0(f)$ do $W_{0,L}(f)$ nosi nazwę **transformacji Bogoliubowa** i często zapisuje się ją w następującej, równoważnej formie

$$\Phi_0(f) \mapsto \Phi_{0,L}(f) = \Phi_0(Lf). \quad (\text{A.43})$$

Dla wektorów $\psi \in \mathcal{D}(\Phi_0(Lf)) \cap \mathcal{D}(\Phi_0(Lif))$ określamy odpowiedniki operatorów anihilacji i kreacji $a_L(f)$ i $a_L^*(f)$ za pomocą relacji

$$a_L(f)\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_{0,L}(f) + i\Phi_{0,L}(if))\psi, \quad (\text{A.44a})$$

$$a_L^*(f)\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_{0,L}(f) - i\Phi_{0,L}(if))\psi. \quad (\text{A.44b})$$

Jeśli ponadto zachodzi $\psi \in \mathcal{D}(N^{1/2})$ to spełnione są następujące zależności:

$$a_L(f)\psi = a(Tf)\psi + a^*(Sf)\psi, \quad (\text{A.45a})$$

$$a_L^*(f)\psi = a^*(Tf)\psi + a(Sf)\psi, \quad (\text{A.45b})$$

$$a(f)\psi = a_L(T^*f)\psi - a_L^*(S^*f)\psi, \quad (\text{A.45c})$$

$$a^*(f)\psi = a_L^*(T^*f)\psi - a_L(S^*f)\psi. \quad (\text{A.45d})$$

Dla wektorów spełniających warunek $\varphi \in \mathcal{D}(N)$ zachodzi również

$$[a_L(f), a_L^*(g)]\varphi = (f, g)\varphi. \quad (\text{A.46})$$

Mówimy, że transformację Bogoliubowa jest **implementowalna w przestrzeni** $\mathcal{H}$ jeśli istnieje unitarny operator U_L , taki że dla każdego $f \in \mathcal{H}$ zachodzi jeden z dwóch równoważnych warunków:

$$W_{0,L}(f) = U_L W_0(f) U_L^*, \quad (\text{A.47a})$$

$$\Phi_{0,L}(f) = U_L \Phi_0(f) U_L^*, \quad (\text{A.47b})$$

Warunkiem koniecznym i wystarczającym by transformacja Bogoliubowa była implementowana jest to by zdefiniowany w (A.41) operator S był klasy Hilberta-Schmidta (zob. dodatek A.4 w [Her05]):

$$\text{Tr}[SS^*] < +\infty. \quad (\text{A.48})$$

Istnieje wówczas jedyny, z dokładnością do czynnika fazowego, unormowany wektor Ω_L , który spełnia zależność

$$a_L(f)\Omega_L = 0, \quad f \in \mathcal{H}. \quad (\text{A.49})$$

Wektor ten posiada następującą własność:

$$\Omega_L \in \bigcap_{l=1}^{\infty} \mathcal{D}(N^{l/2}). \quad (\text{A.50})$$

Możemy teraz określić operator U_L poprzez równość

$$U_L a^*(f_1) a^*(f_2) \dots a^*(f_k) \Omega = a_L^*(f_1) a_L^*(f_2) \dots a_L^*(f_k) \Omega_L, \quad (\text{A.51})$$

gdzie $k = 0, 1, 2, \dots$, $f_1, f_2, \dots, f_k \in \mathcal{H}$. Korzystając z (A.46) łatwo pokazać, że zachodzi następująca relacja

$$(a_L^*(f)\Omega_L, a_L^*(g)\Omega_L) = (f, g). \quad (\text{A.52})$$

A.4 Ewolucja czasowa teorii quasi-swobodnej

Zajmiemy się teraz zagadnieniem określenia ewolucji czasowej na przestrzeniach skonstruowanych w dodatku (A.1), rozpoczynając od przestrzeni symplektycznej $(\mathcal{L}, \sigma)$. Zawsze będziemy zakładać, że wszystkie parametry określające masę zostały wchłonięte w operatory pędu. Ponieważ przestrzeń $(\mathcal{L}, \sigma)$ jest zbudowana z pary $(\mathcal{R}, h)$ jako $v \oplus u \in \mathcal{L} = \mathcal{D}_{\mathcal{R}}(h) \oplus \mathcal{R}$, więc podany poniżej hamiltonian tego modelu jest dobrze określony:

$$\mathcal{H}(v, u) = \frac{1}{2}[(u, u) + (hv, hv)]. \quad (\text{A.53})$$

Ewolucja zadana przez ten hamiltonian posiada jawne rozwiązanie postaci

$$T_t(v \oplus u) = (\cos(ht) v + \sin(ht) h^{-1}u) \oplus (-\sin(ht) hv + \cos(ht) u). \quad (\text{A.54})$$

Operatory T_t tworzą jednoparametrową grupę transformacji symplektycznych, spełniając bowiem relacje

$$T_t T_s = T_{t+s}, \quad \sigma(T_t V_1, T_t V_2) = \sigma(V_1, V_2). \quad (\text{A.55})$$

Zachodzi również następujący związek wyrażający to, że rozważany model jest symetryczny względem odwrócenia czasu:

$$T_{-t} = (\text{id} \oplus -\text{id}) T_t (\text{id} \oplus -\text{id}). \quad (\text{A.56})$$

Każda podprzestrzeń $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L} = \mathcal{D}_{\mathcal{R}}(h) \oplus \mathcal{R}$, która jest niezmiennicza względem prawa ewolucji

$$T_t \mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_1, \quad (\text{A.57})$$

określa nowy model w ramach rozważanej teorii. Jedną z takich podprzestrzeni jest $\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{D}_{\mathcal{R}}(h^{1/2}) \oplus \mathcal{D}_{\mathcal{R}}(h^{-1/2})$, która posiada tę własność, że dla każdego wektora $V \in \tilde{\mathcal{L}}$ zachodzi

$$j(T_t V) = e^{iht} j(V), \quad (\text{A.58})$$

gdzie funkcja j została zdefiniowana w równaniu (A.8). Ostatnia zależność pokazuje, że przestrzeń $\text{Ran } j$ jest niezmiennicza względem e^{iht} , co wraz z faktem, że j jest bijekcją na swój obraz prowadzi do

$$T_t V = j^{-1}(e^{iht} j(V)). \quad (\text{A.59})$$

Wzorując się na tej relacji definiujemy ewolucję czasową na przestrzeni $\widehat{\mathcal{L}}$ jako

$$\widehat{T}_t V = \widehat{j}^{-1}(e^{iht} \widehat{j}(V)), \quad V \in \widehat{\mathcal{L}}. \quad (\text{A.60})$$

Jak zostało powiedziane w (3.3) przestrzeń $(\widehat{\mathcal{L}}, \widehat{\sigma})$ wyznacza maksymalny model quasi-swobodny, zaś odpowiednie podprzestrzenie $\mathcal{L}_1 \subset \widehat{\mathcal{L}}$ zamknięte ze względu na ewolucję czasową definiują inne możliwe modele. Należy jednak zwrócić uwagę, że sama niezmienniczość względem $\widehat{T}_t$ nie gwarantuje niezmienniczości względem odwrócenia czasu. Jednak w naszych rozważaniach ograniczymy się tylko do podprzestrzeni posiadających tę ostatnią własność. Okazuje się przy tym, że warunek niezmienniczości względem odwrócenia czasu jest równoważny temu, że zachodzi

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_+ \oplus \mathcal{L}_-, \quad \mathcal{L}_{\pm} \subset \mathcal{R}_{\pm}. \quad (\text{A.61})$$

Możemy teraz przenieść ewolucję czasową z $\widehat{\mathcal{L}}$ na algebrę $W(\widehat{\mathcal{L}})$, poprzez przyjęcia następującego związku:

$$\alpha_t(W(V)) = W(\widehat{T}_t V). \quad (\text{A.62})$$

Ewolucja czasowa na przestrzeń $\mathcal{H}_{\text{Fock}}(\mathcal{K})$ przyjmuje teraz postać

$$W_0(e^{iht}f) = e^{itH_{\text{Fock}}} W_0(f) e^{-itH_{\text{Fock}}}, \quad f \in \mathcal{K}. \quad (\text{A.63})$$

Operator ewolucji czasowej jest dany jako

$$H_{\text{Fock}} = d\Gamma(h). \quad (\text{A.64})$$

A.5 Przestrzenie symplektyczne układu Q - M

Niech na rzeczywistej przestrzeni Hilberta $\mathcal{R}$ będzie określony samosprzężony, dodatni operator h i rodzina operatorów h_a spełniająca te same warunki. Maksymalna przestrzeń symplektyczna dla modelu określonego przez h jest dana jako

$$\widehat{\mathcal{L}} = \mathcal{R}_+ \oplus \mathcal{R}_-, \quad (\text{A.65})$$

gdzie $\mathcal{R}_\pm$ to uzupełnienie przestrzeni liniowej $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}(h^{\pm 1/2})$ w normie danej odpowiednio przez (A.12) i (A.13). Analogicznie przestrzeń symplektyczna dla teorii danej przez operator h_a jest postaci

$$\widehat{\mathcal{L}}_a = \mathcal{R}_{+,a} \oplus \mathcal{R}_{-,a}. \quad (\text{A.66})$$

Przestrzeń $\mathcal{R}_{+,a}$ jest uzupełnieniem przestrzeni $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}(h_a^{1/2})$ w normie zdefiniowanej w taki sam sposób jak w (A.12). Analogicznie sposób definiujemy przestrzeń $\mathcal{R}_{-,a}$. Wprowadzamy oznaczenia

$$\mathcal{D}_{\pm,a} := \mathcal{D}_{\mathcal{R}}(h^{\pm 1/2}) \cap \mathcal{D}_{\mathcal{R}}(h_a^{\pm 1/2}). \quad (\text{A.67})$$

Będziemy zakładać, że przestrzeń $\mathcal{D}_{\pm,a}$ jest gęsta zarówno w przestrzeni $\mathcal{R}_\pm$ jak i w $\mathcal{R}_{\pm,a}$. Przyjmijmy, że istnieje podprzestrzeń $\mathcal{L}^0 \subset \mathcal{L}_1$, gdzie $\mathcal{L}_1$ jest przestrzenią definiującą rozważany model, która spełnia następujące warunki:

$$\mathcal{L}^0 = \mathcal{L}_+^0 \oplus \mathcal{L}_-^0, \quad (\text{A.68a})$$

$$\mathcal{L}_\pm^0 \subset \mathcal{D}_{\pm,a} \quad (\text{A.68b})$$

oraz $\mathcal{L}_\pm^0$ jest gęsta w $\mathcal{R}_\pm$ i $\mathcal{R}_{\pm,a}$. Wówczas jak pokazano w rozdziale 5 pracy [Her05], jeśli zachodzi relacja

$$h_a = h^{1/2} C_a h^{1/2}, \quad (\text{A.69})$$

gdzie C_a dla ustalonego a jest samosprzężonym, dodatnim i ograniczonym operatorem, wówczas prawdą jest, że

$$\widehat{\mathcal{L}} = \widehat{\mathcal{L}}_a. \quad (\text{A.70})$$

B Granica resolwentowa operatorów i twierdzenie Trottera-Kato

Treść niniejszego dodatku jest poświęcona problemowi granicy resolwentowej rodziny operatorów i wariantowi twierdzenia Trotter-Kato. Twierdzenie to pomaga rozstrzygnąć dość subtelny problem, mianowicie kiedy można dowieść istnienia operatora, do którego wcześniej wspomniana rodzina jest zbieżna w sensie granicy resolwentowej.

Od ogólności rozważań, ważniejsze jest dla nas to by przedstawione tu wyniki dały się łatwo zastosować do problemów omawianych w głównej części prezentowanej pracy.

By ułatwić lekturę tej części pracy, zdecydowaliśmy skorzystać tutaj z innej notacji, niż w głównej części pracy. Notacja z której będziemy tutaj korzystać jest dobrze znana w literaturze, stosowana jest przykładowo w książce Reeda i Simona [RS80]. Resolwentę operatora A będziemy więc zapisywać jako

$$R_z(A) = (z - A)^{-1}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (\text{B.1})$$

Niech A_λ , $\lambda \in (0, 1]$, będzie rodziną samosprzężonych operatorów, niekoniecznie ograniczonych, określonych na pewnej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Mówimy, że rodzina ta jest zbieżna do operatora A w sensie **silnej granicy resolwentowej** (ang. *limit in the strong resolvent sense*) przy $\lambda \searrow 0$, jeśli dla dowolnych ustalonych $\psi \in \mathcal{H}$ i $z \in \mathbb{C}$, takiego że $\Im z \neq 0$, zachodzi

$$\lim_{\lambda \searrow 0} \|R_z(A_\lambda)\psi - R_z(A)\psi\| = 0. \quad (\text{B.2})$$

Ten rodzaj granicy jest uogólnieniem pojęcia silnej granicy operatorów na przypadek operatorów nieograniczonych. Więcej informacji na ten temat Czytelnik może znaleźć w rozdziale VIII.7 książki Reeda i Simona, w szczególności polecamy jego uwagę twierdzenia VIII.19 i VIII.20 w tym rozdziale [RS80].

Załóżmy teraz, że dla każdego ustalonego $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ resolwenta $R_z(A_\lambda)$ jest zbieżna silnie do pewnego operatora ograniczonego, który oznaczajmy będziemy O_z . Twierdzenie Trottera-Kato (zob. tw. VIII.22 w [RS80]) podaje warunki przy których z istnienia tej granicy można wnioskować o istnieniu operatora A , takiego że

$$O_z = R_z(A). \quad (\text{B.3})$$

Poniżej pokażemy jak korzystając z technik użytych do dowodu tego twierdzenia można pokazać, iż istnieje operator $\tilde{h}_a^2$, taki że rodzina $h_{a,\lambda}^2$ wprowadzona w rozdziale (4.3) jest do niego zbieżna w sensie silnej granicy resolwentowej

$$\text{SRL-}\lim_{\lambda \searrow 0} h_{a,\lambda}^2 = \tilde{h}_a^2. \quad (\text{B.4})$$

Nasze rozważania zaczniemy od przypomnienia wzoru (4.47) wyliczonego w rozdziale (4.3), który przedstawia graniczną w sensie przestrzeni $L^2(\mathbb{R}^6, d^6p)$ postać jądra całkowego operatora $G_\lambda(w^2) - G_0(w^2)$:

$$\begin{aligned} L^2\text{-}\lim_{\lambda \searrow 0} \langle \vec{p} | G_\lambda(w^2) - G_0(w^2) | \vec{q} \rangle &= -\frac{1}{(\alpha - i2\pi^2 w)^2 - (2\pi^2 e^{iwa}/a)^2} \times \\ &\times \frac{1}{w^2 - \vec{p}^2} \begin{pmatrix} e^{-i\vec{b} \cdot \vec{p}} & e^{i\vec{b} \cdot \vec{p}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha - i2\pi^2 w & 2\pi^2 \frac{e^{iwa}}{a} \\ 2\pi^2 \frac{e^{iwa}}{a} & \alpha - i2\pi^2 w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\vec{b} \cdot \vec{q}} \\ e^{-i\vec{b} \cdot \vec{q}} \end{pmatrix} \frac{1}{w^2 - \vec{q}^2}. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Z oszacowania (4.28) wynika, że wyrażenia występujące w mianownikach w powyższym wzorze mogą być równe zero tylko jeśli $w^2 \in [0, +\infty)$ (równoważnie $\Im w = 0$), tym samym wzór ten przedstawia funkcję zmiennej w^2 analityczną w zbiorze $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$.

Ze zbieżności w sensie przestrzeni $L^2(\mathbb{R}^6, d\mu)$ wynika, że dla każdego w^2 , spełniającego warunek $\Im w > 0$ operator $G_\lambda(w^2) - G_0(w^2)$ jest zbieżny w sensie silnej zbieżności operatorów do pewnego operatora $\tilde{G}(w^2) - G_0(w^2)$. Połóżmy $w = i\mu$, $w^2 = -\mu^2$. Korzystając z tego, iż nierówności (4.44) i (4.45) nie zależą od λ , możemy

powtórzyć rozumowanie z rozdziału (4.2) prowadzące do nierówności (4.33), w efekcie czego otrzymujemy

$$\|G_\lambda(-\mu^2)\| \leq \text{const} \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu^2} \right). \quad (\text{B.6})$$

Stąd zaś dostajemy

$$\|\tilde{G}(-\mu^2)\| \leq \text{const} \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu^2} \right). \quad (\text{B.7})$$

Jądro całkowe operatora $\tilde{G}(-\mu^2)$ warto jest podać w postaci jawnej.

$$\begin{aligned} \langle \vec{p} | \tilde{G}(-\mu^2) - G_0(-\mu^2) | \vec{q} \rangle &= -\frac{1}{(\alpha + 2\pi^2\mu)^2 - (2\pi^2 e^{-\mu a}/a)^2} \times \\ &\times \frac{1}{\mu^2 + \vec{p}^2} \begin{pmatrix} e^{-i\vec{b} \cdot \vec{p}} & e^{i\vec{b} \cdot \vec{p}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha + 2\pi^2\mu & 2\pi^2 \frac{e^{-\mu a}}{a} \\ 2\pi^2 \frac{e^{-\mu a}}{a} & \alpha + 2\pi^2\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\vec{b} \cdot \vec{q}} \\ e^{-i\vec{b} \cdot \vec{q}} \end{pmatrix} \frac{1}{\mu^2 + \vec{q}^2}. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Rozpatrzmy teraz operator $\tilde{G}(-1)$. Na podstawie nierówności (B.7) wnioskujemy, że istnieje stała $C > 0$, taka że zachodzi

$$\|\tilde{G}(-1)\| \leq C, \quad (\text{B.9})$$

to zaś oznacza, że szereg potęgowy operatorów

$$\tilde{G}(w^2) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1 - w^2)^i \tilde{G}(-1)^{i+1}, \quad (\text{B.10})$$

jest zbieżny co najmniej w kole $|-1 - w^2| < 1/C$ i definiuje w nim operator ograniczony. Używając metody szeregów potęgowych, analogicznej dla tej stosowanej dla funkcji jednej zmiennej zespolonej, możemy określić $\tilde{G}(w^2)$ w każdym punkcie $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$. Ponieważ zbiór ten jest jednospójny, wartość $\tilde{G}(w^2)$ nie zależy od sposobu w jaki przedłużenie analityczne zostało wykonane. Na mocy analityczności prawej strony (B.5) musi zachodzić

$$\begin{aligned} \langle \vec{p} | \tilde{G}(w^2) - G_0(w^2) | \vec{q} \rangle &= -\frac{1}{(\alpha - i2\pi^2 w)^2 - (2\pi^2 e^{iwa}/a)^2} \times \\ &\times \frac{1}{w^2 - \vec{p}^2} \begin{pmatrix} e^{-i\vec{b} \cdot \vec{p}} & e^{i\vec{b} \cdot \vec{p}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha - i2\pi^2 w & 2\pi^2 \frac{e^{iwa}}{a} \\ 2\pi^2 \frac{e^{iwa}}{a} & \alpha - i2\pi^2 w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\vec{b} \cdot \vec{q}} \\ e^{-i\vec{b} \cdot \vec{q}} \end{pmatrix} \frac{1}{w^2 - \vec{q}^2}. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Pozostaje pokazać, że istnieje operator samosprężony, którego resolwenta jest równa funkcji o wartościach operatorowych $\tilde{G}(w^2)$. Zaczniemy od przypomnienia pierwszego równania resolwenty:

$$R_{z_1}(A) - R_{z_2}(A) = (z_2 - z_1)R_{z_2}(A)R_{z_1}(A). \quad (\text{B.12})$$

To równanie jest oczywiście spełnione, przez wszystkie resolwenty $G_\lambda(w^2)$, więc przez przejście do granicy otrzymujemy, że spełnia je też $\tilde{G}(w^2)$. W ten sam sposób pokazujemy następujące własności:

$$[\tilde{G}(z_1), \tilde{G}(z_2)] = 0, \quad (\text{B.13a})$$

$$\tilde{G}(z)^* = \tilde{G}(\bar{z}), \quad (\text{B.13b})$$

gdzie $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$.

Przejdźmy teraz do problemu obrazu $\text{Ran } \tilde{G}(w^2)$. Z przemienności operatorów $\tilde{G}(z_1)$ i $\tilde{G}(z_2)$ oraz pierwszego równania resolwentowego wynika, że obraz wszystkich

operatorów $\tilde{G}(z)$ są sobie równe, ograniczmy się więc do rozpatrzenia $\text{Ran } \tilde{G}(-1)$. Z wzoru (B.8) wynika, że jest to ograniczony, silnie ujemny operator, więc $\text{Ran } \tilde{G}(-1)$ jest gęsty w przestrzeni Hilberta. Skorzystajmy teraz z dobrze znanego w analizie funkcjonalnej wzoru

$$\text{Ker } \tilde{G}(w^2) = (\text{Ran } \tilde{G}(w^2)^*)^\perp = (\text{Ran } \tilde{G}((w^2)^*))^\perp = (\text{Ran } \tilde{G}(-1))^\perp = \{0\}. \quad (\text{B.14})$$

Ponieważ jądro $\tilde{G}(w^2)$ jest trywialne, jest on iniekcją, czyli jest bijekcją z $\mathcal{H}$ na $\text{Ran } \tilde{G}(w^2)$. Tym samym możemy zdefiniować operator $\tilde{h}_{a,\lambda}^2$ jako

$$\tilde{h}_{a,\lambda}^2 = w^2 - \tilde{G}(w^2)^{-1}. \quad (\text{B.15})$$

Z pierwszego równania resolwentowego wynika, że definicja ta jest niezależna od wyboru $w^2 \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$.

Ostatni krok polega na pokazaniu, że $\tilde{h}_a^2$ jest operatorem samoprzężonym. Zastosujemy tu standardowe twierdzenie mówiące o tym, kiedy operator symetryczny jest samosprężony (por. tw. VIII.3 w [RS80]). Zgodnie z nim operator symetryczny A określony na gęstej podprzestrzeni $\mathcal{H}$ jest samosprężony wtedy i tylko wtedy, gdy $\text{Ran}(A \pm i) = \mathcal{H}$. Mamy

$$\text{Ran}(\tilde{h}_a^2 \pm i) = \text{Ran}(-\tilde{G}(\mp i)^{-1}) = \mathcal{H}. \quad (\text{B.16})$$

C Własności $\hat{g}(p)$ i M_p oraz powiązanych z nimi funkcji

W tym dodatku przebadamy własności funkcji $\hat{g}(z)$, M_z oraz pewnych funkcji z nim powiązanych. Funkcje $\hat{g}(z)$ i M_z są analitycznymi przedłużeniami funkcji $\hat{g}(p)$ oraz M_p zdefiniowanych w rozdziale (4.1) na całą płaszczyznę zespoloną $\mathbb{C}$.

C.1 Oszacowania na funkcję $\hat{g}(z)$ i jej pochodne

Niniejsza część tego dodatku poświęcona jest wyprowadzeniu oszacowań na funkcję $\hat{g}(z)$ oraz jej pochodne $\hat{g}'(z)$ i $\hat{g}''(z)$, które obowiązują dla wszystkich $z \in \mathbb{C}$.

Formuła wyrażająca $\hat{g}(p)$ jako transformatę Fouriera funkcji $g(x)$ (jednej zmiennej), może zostać uogólniona na przypadek dowolnej liczby zespolonej z :

$$\hat{g}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx x^2 g(x) \frac{\sin(zx)}{zx}. \quad (\text{C.1})$$

Dzięki temu $\hat{g}(z)$ i $M_z = \hat{g}(z)^2$ są teraz zdefiniowane jako funkcje analityczne na całej płaszczyźnie $\mathbb{C}$. Wzór (C.1) przekształcamy do postaci

$$\hat{g}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx x^2 g(x) \int_0^1 d\tau \cos(zx\tau). \quad (\text{C.2})$$

Ponieważ zachodzi elementarna nierówność

$$|\cos(z)| \leq \exp(|\Im z|), \quad (\text{C.3})$$

a nośnik funkcji $g(x)$ jest zawarty w przedziale $[-L/2, L/2]$, dostajemy

$$\begin{aligned} |\hat{g}(z)| &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-L/2}^{L/2} dx x^2 g(x) \int_0^1 d\tau e^{|\Im z| |x| \tau} \leq \\ &\leq e^{L|\Im z|/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-L/2}^{L/2} dx x^2 g(x) = e^{L|\Im z|/2}, \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

gdzie w ostatnim kroku użyliśmy warunku normalizacji (4.16). Tym samym

$$|M_z| = |\hat{g}(z)^2| \leq e^{L|\Im z|}. \quad (\text{C.5})$$

Prowadzi to do ważnej nierówności

$$|M_z e^{i\mu z}| \leq e^{-(\mu \Im z - L|\Im z|)}, \quad \mu \in \mathbb{R}. \quad (\text{C.6})$$

W szczególności dla funkcji $u(w)$, zdefiniowanej w równaniu (4.24b), przy $\Im w > 0$, dostajemy

$$|u(w)| \leq \frac{\alpha}{\gamma} e^{-(a-L)\Im w} \leq \frac{\alpha}{\gamma}. \quad (\text{C.7})$$

Przypomnijmy, że zawsze musi zachodzić $a > L$.

Podstawmy teraz $z = ik$, $k \geq 0$ w równaniu (C.1). Ponieważ $\sin(ik) = i \sinh(k)$, w prosty sposób dostajemy

$$\hat{g}(ik) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx x^2 g(x) \frac{\sinh(kx)}{kx}. \quad (\text{C.8})$$

Ponieważ $\sinh(kx)/kx$ jest rzeczywistą, parzystą funkcją monotonicznie rosnącą dla $kx \geq 0$, to samo jest też prawdą dla $\hat{g}(ik)$.

Przejdziemy teraz do oszacowania $\hat{g}'(z)$, gdzie pochodną rozumiemy w sensie pochodnej funkcji zespolonej. Funkcje występujące we wzorze (C.2) spełniają założenia o różniczkowaniu pod znakiem całki, na mocy czego dostajemy

$$\hat{g}'(z) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx x^3 g(x) \int_0^1 d\tau \tau \sin(zx\tau). \quad (\text{C.9})$$

Korzystając z elementarnej nierówności $|\sin(z)| \leq \exp(|\Im z|)$ mamy

$$\begin{aligned} |\hat{g}'(z)| &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{L|\Im z|/2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx |x^3| g(x) \int_0^1 d\tau \tau \leq \\ &\leq \frac{L}{4} e^{L|\Im z|/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx x^2 g(x) = \frac{L}{4} e^{L|\Im z|/2} \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Podsumowując

$$|\hat{g}'(z)| \leq \frac{L}{4} e^{L|\Im z|/2}. \quad (\text{C.11})$$

Analogiczny rachunek daje nam

$$|\hat{g}''(z)| \leq \frac{L^2}{12} e^{L|\Im z|/2}. \quad (\text{C.12})$$

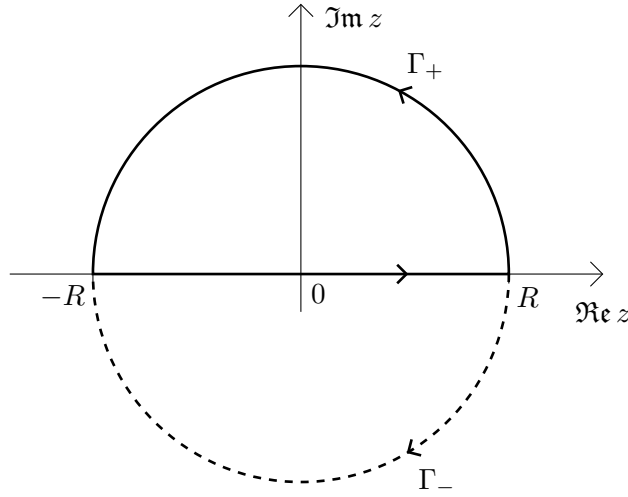
C.2 Wyprowadzenie wzoru (4.24b)

Wykażemy tutaj równość

$$-(U_{\vec{a}} g, G_0(w^2)g) = 2\pi^2 M_w \frac{e^{iwa}}{a}. \quad (\text{C.13})$$

Rozpocniemy od prostych przekształceń

$$-(U_{\vec{a}} g, G_0(w^2)g) = - \int_{\mathbb{R}^3} d^3p e^{i\vec{a} \cdot \vec{p}} \frac{|\hat{g}(p)|^2}{w^2 - \vec{p}^2} = \frac{2\pi}{ia} \int_{-\infty}^{+\infty} dp e^{iap} M_p \frac{p}{p^2 - w^2}. \quad (\text{C.14})$$



Rysunek 7: Dwa często używane kontury całkowania.

Zauważmy, że na mocy wzoru (C.6) zachodzi

$$|e^{iaz} M_z| \leq e^{-(a \operatorname{Im} z - L |\operatorname{Im} z|)}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (\text{C.15})$$

Ponieważ $a > L$ więc całkę tę możemy obliczyć stosując metodę residuów dla konturu Γ_+ , z rys. (7). W rezultacie dostajemy równość (C.13).

C.3 Własności funkcji $\check{M}_x$

W tej części pracy przeanalizujemy jednowymiarową odwrotną transformatę Fourier funkcji M_p :

$$\check{M}_x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dp e^{ipx} M_p. \quad (\text{C.16})$$

Na początku rozważymy jednowymiarową transformatę Fouriera funkcji $\hat{g}(p)$:

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dp e^{ipx} \hat{g}(p). \quad (\text{C.17})$$

Korzystając ze znanych własności splotu transformaty Fouriera dwóch funkcji i faktu, że $M_p = \hat{g}(p)^2$ otrzymujemy

$$\check{M}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} dy h(x-y) h(y), \quad (\text{C.18})$$

Ze wzoru (4.9) oraz własności transformaty Fouriera wynika iż

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ipx} h'(x) = ip \hat{g}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ipx} (-xg(x)), \quad (\text{C.19})$$

czyli

$$h'(x) = -xg(x), \quad (\text{C.20})$$

Ponieważ funkcja $h(x)$ znika dla $x \leq -L/2$, możemy napisać

$$h(x) = - \int_{-\infty}^x dy y g(y). \quad (\text{C.21})$$

Z ostatniego wzoru i z własności funkcji¹² $g(x)$ wynika, że $h(x)$ jest parzystą, nieujemną funkcją, oraz że $\text{supp } h(x) \subset \text{supp } g(x) = [-L/2, L/2]$. Korzystając z tego dostajemy

$$\check{M}_x \geq 0, \quad (\text{C.22a})$$

$$\check{M}_0 > 0, \quad (\text{C.22b})$$

$$\text{supp } \check{M}_x \subset [-L, L]. \quad (\text{C.22c})$$

Ponieważ $h'(x)$ jest funkcją ciągłą o zwartym nośniku, we wzorze (C.18) możemy wejść z pochodną pod całkę:

$$\frac{d}{dx} \check{M}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} dy h'(x-y) h(y) \quad (\text{C.23})$$

Po dokonaniu zmiany zmiennych $y \rightarrow y+x$ i skorzystanie z tego, że $h'(x)$ jest nieparzysta, dostajemy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy h'(x-y) h(y) = - \int_{-\infty}^{+\infty} dy h'(y) h(x+y) \quad (\text{C.24})$$

Całkę tę zapisujemy jako sumę dwóch całek i w pierwszej z nich dokonujemy zmiany zmiennych $y \rightarrow -y$.

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} dy h'(y) h(x+y) = \int_0^{+\infty} dy h'(y) h(x-y) - \int_0^{+\infty} dy h'(y) h(x+y). \quad (\text{C.25})$$

Ponieważ funkcja $h(x)$ jest parzysta, możemy zastąpić $h(x-y)$ przez $h(|x-y|)$.

$$\frac{d}{dx} \check{M}_x = \int_0^{+\infty} dy h'(y) [h(|x-y|) - h(x+y)]. \quad (\text{C.26})$$

Z wzoru (C.20) wynika, że dla $x \geq 0$ funkcja $h(x)$ jest nierosnąca, stąd

$$\check{M}'_x \leq 0, \quad x \geq 0. \quad (\text{C.27})$$

Warunek normalizacji (4.16) implikuje $M_0 = 1$ (zob. rów. (4.17a)), więc zachodzi równość

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \check{M}_x = \sqrt{2\pi}. \quad (\text{C.28})$$

Wyprowadzimy teraz oszacowanie na wartość funkcji $\check{M}_x$ w punkcie $x = 0$. Aby uprościć jego zastosowanie w głównym tekście, idąc za tym co zostało powiedziane na

¹²W tym miejscu potrzebujemy skorzystać z technicznego warunku narzuconego na funkcję g : $g(\vec{x}) \geq 0$. Dowód tej nierówności jest głównym powodem dla którego ograniczamy się do funkcji posiadających tę własność.

początku rozdziału (5.2) przyjmijmy $L = 2\pi^2/\alpha$. Zaczniemy od zapisania warunku (4.16) w formie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx g(x) = \sqrt{2\pi}. \quad (\text{C.29})$$

Korzystając teraz z faktu, że zachodzi $g(x) \geq 0$ i $\text{supp } g \subset [-L/2, L/2]$ dostajemy

$$h(x) \leq \int_{-\infty}^x dy |y|g(y) \leq \frac{\sqrt{2\pi}^3 \pi}{2\alpha}. \quad (\text{C.30})$$

Analogiczne rozumowanie daje nam

$$\check{M}_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} dy h(y)^2 \leq \frac{4\pi^7}{\alpha^3}. \quad (\text{C.31})$$

Ostatecznie dostajemy

$$0 < \check{M}_0 \leq \frac{4\pi^7}{\alpha^3}. \quad (\text{C.32})$$

C.4 Dowód nierówności (4.27)

Celem niniejszego dodatku jest wykazanie nierówności

$$\Re \int_{-\infty}^{+\infty} du \frac{w^2}{w^2 - u^2} M_u \geq 0, \quad \Im w > 0. \quad (\text{C.33})$$

Wyrażenie w powyższej całce możemy zapisać jako iloczyn dwóch funkcji

$$f_1(u) = \frac{-w^2}{u^2 - w^2}, \quad f_2(u) = M_u. \quad (\text{C.34})$$

Zarówno f_1 jak i f_2 należą do przestrzeni $L^2(\mathbb{R}, du)$, więc całkę (C.33) możemy rozumieć jako ich iloczyn skalarny (f_1, f_2) w tej przestrzeni. Na mocy tożsamości Parsewala-Plancherela dostajemy

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} du \frac{-w^2}{u^2 - w^2} M_u &= -\frac{w^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \check{M}_x \int_{-\infty}^{+\infty} du \frac{e^{iux}}{u^2 - w^2} = \\ &= -i\sqrt{2\pi}w \int_0^{\infty} dx e^{iwx} \check{M}_x = \sqrt{2\pi}\check{M}_0 + \sqrt{2\pi} \int_0^{\infty} dx e^{iwx} \check{M}'_x, \end{aligned} \quad (\text{C.35})$$

gdzie w ostatnim kroku wykonaliśmy całkowanie przez części. Korzystając z własności (C.27) otrzymujemy

$$\left| \int_0^{+\infty} dx e^{iwx} \check{M}'_x \right| \leq \int_0^{+\infty} dx |\check{M}'_x| = - \int_0^{+\infty} dx \check{M}'_x = \check{M}_0. \quad (\text{C.36})$$

co wraz z wzorem (C.35) daje nam nierówność (C.33).

C.5 Własności funkcji $r_\lambda(l)$

Naszym celem w tej części pracy, jest zbadanie własności funkcji

$$r_\lambda(l) = \frac{\gamma}{\alpha} t_\lambda\left(\frac{il}{a}\right) = \gamma + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} du \frac{l^2}{l^2 + u^2} M_{\lambda u/a}, \quad l > 0. \quad (\text{C.37})$$

Całkę we wzorze powyższej zinterpretujemy jako iloczyn skalarny w $L^2(\mathbb{R}, du)$ funkcji

$$f_1(u) = \frac{l^2}{l^2 + u^2}, \quad f_2(u) = M_{\lambda u/a}. \quad (\text{C.38})$$

Na mocy tożsamości Parsewala-Plancharela przechodzimy z reprezentacji pędów do reprezentacji położeń.

$$\hat{f}_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} du e^{iux} M_{\lambda \frac{u}{a}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{a}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} du e^{iau \frac{x}{\lambda}} M_u = \frac{a}{\lambda} \check{M}_{ax/\lambda}, \quad (\text{C.39a})$$

$$\hat{f}_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} l^2 \int_{-\infty}^{+\infty} du \frac{e^{iux}}{l^2 + u^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} l^2 \int_{-\infty}^{+\infty} du \frac{e^{iux}}{(u + il)(u - il)}. \quad (\text{C.39b})$$

W przypadku $x = 0$, całkę w (C.39b) obliczamy w sposób elementarny, jest ona równa πl . Dla $x > 0$ stosujemy metodę residuów, całkując po konturze Γ_+ z rys. (7), otrzymując jako rezultat

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} l^2 \int_{-\infty}^{+\infty} du \frac{e^{iux}}{(u + il)(u - il)} = \frac{\pi l}{\sqrt{2\pi}} e^{-lx}. \quad (\text{C.40})$$

Identyczny wynik otrzymujemy dla $x < 0$, wykonując całkę po konturze Γ_- , również przedstawionego na rys. (7). Dla wszystkich wartości x obowiązuje więc zależność

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} l^2 \int_{-\infty}^{+\infty} du \frac{e^{iux}}{(u + il)(u - il)} = \frac{\pi l}{\sqrt{2\pi}} e^{-l|x|}. \quad (\text{C.41})$$

Stąd

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} du \frac{l^2}{l^2 + u^2} M_{\lambda u/a} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} l \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{a}{\lambda} e^{-l|x|} \check{M}_{ax/\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} l \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\lambda l|x|/a} \check{M}_x, \quad (\text{C.42})$$

co daje

$$r_\lambda(l) = \gamma + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} l \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\lambda l|x|/a} \check{M}_x, \quad l > 0. \quad (\text{C.43})$$

Na mocy tego co powiedziano na początku rozdziału (5.2), kładziemy teraz $L = 2\pi^2/\alpha$ i ograniczamy zakres λ do przedziału $[0, 1/2)$. W tym wypadku możemy dołączyć do tego zbioru $\lambda = 0$, gdyż funkcja $r_\lambda(l)$ jest tam dobrze określona. Z wzoru (C.43) wynika, że $r_\lambda(l)$ jako funkcja λ jest gładka i maleje monotonicznie dla $\lambda \geq 0$. Na mocy twierdzenia o zbieżności majoryzowanej oraz (C.28) dostajemy

$$\lim_{\lambda \searrow 0} r_\lambda(l) = r_0(l) = \gamma + l, \quad (\text{C.44})$$

lub równoważnie

$$\lim_{\lambda \searrow 0} t_\lambda(ik) = \alpha + 2\pi^2 k, \quad k = \frac{l}{a}. \quad (\text{C.45})$$

W dodatku C.3 pokazaliśmy, że $\text{supp } \check{M}_x \subset [-L, L]$, dzięki czemu podstawiając we wzorze (C.43) za $|x|$ wartość $L = 2\pi^2/\alpha$, dostajemy

$$\gamma \leq \gamma + le^{-\lambda l/\gamma} \leq r_\lambda(l) \leq \gamma + l. \quad (\text{C.46})$$

Ponieważ $\alpha/\gamma > 0$ to na mocy definicji funkcji $r_\lambda(l)$, po podstawieniu $k = l/a$ powyższe nierówności przybierają formę:

$$\alpha \leq t_\lambda(ik) \leq \alpha + 2\pi^2 k. \quad (\text{C.47})$$

Wprowadźmy teraz oznaczenia

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}2\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx |x| \check{M}_x, \quad 0 < b_1 \leq \frac{1}{\alpha}, \quad (\text{C.48a})$$

$$b_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}4\pi^4} \int_{-\infty}^{+\infty} dx |x|^2 \check{M}_x, \quad 0 < b_2 \leq \frac{1}{\alpha^2}. \quad (\text{C.48b})$$

Korzystając z nich możemy napisać

$$r'_0(l) = \left. \frac{d}{d\lambda} r_\lambda(l) \right|_{\lambda=0} = -\frac{\alpha b_1 l^2}{\gamma}, \quad (\text{C.49})$$

Fakt, że (C.44) zawiera $\exp(-\lambda l/a)$ pozwala w prosty sposób znaleźć następujące oszacowania.

$$|r'_\lambda(l)| \leq |r'_0(l)| = \frac{\alpha b_1 l^2}{\gamma} \leq \frac{l^2}{\gamma}, \quad (\text{C.50a})$$

$$|r''_\lambda(l)| \leq r''_0(l) = \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^2 b_2 l^3 \leq \frac{l^3}{\gamma^2}. \quad (\text{C.50b})$$

C.6 Własności funkcji $n_\lambda(l)$

W tym dodatku przyjrzymy się własnościom funkcji

$$n_\lambda(l) = \frac{\gamma}{\alpha} u_\lambda\left(\frac{il}{a}\right) = M_{i\lambda l/a} e^{-l}, \quad l > 0, \quad (\text{C.51})$$

i jej dwóch pierwszych pochodnych. Tak jak wyjaśniono w rozdziale (5.2) kładziemy $L = 2\pi^2/\alpha$ i $\lambda \in [0, 1/2)$.

Funkcja $n_\lambda(l)$ i jej pochodne są dobrze określone również dla $\lambda = 0$ i są ciągłe jako funkcje tego argumentu. Stąd dostajemy

$$\lim_{\lambda \searrow 0} n_\lambda(l) = e^{-l}. \quad (\text{C.52})$$

Ponieważ $M_{i\lambda l/a}$ jest parzystą funkcją swojego argumentu, więc

$$n'_0(l) = \left. \frac{d}{d\lambda} n_\lambda(l) \right|_{\lambda=0} = 0. \quad (\text{C.53})$$

Na podstawie wzoru (C.8) na $\hat{g}(ik)$ łatwo zobaczyć, że $n_\lambda(l)$ jest rzeczywistą, silnie rosnącą funkcją λ oraz $n_\lambda(l) > 0$ dla wszystkich dopuszczalnych wartości λ i l . Korzystając z nierówności (C.5), (C.11) i (C.12) w prosty sposób dostajemy

$$0 < n_\lambda(l) \leq e^{-l/2}, \quad (C.54a)$$

$$|n'_\lambda(l)| \leq \frac{l}{2\gamma} e^{-l/2}, \quad |n''_\lambda(l)| \leq \frac{7l^2}{24\gamma^2} e^{-l/2}. \quad (C.54b)$$

Na mocy definicji funkcji $n_\lambda(l)$ i nierówność (C.54a) otrzymujemy następujące oszacowania:

$$0 \leq u_\lambda(ik) \leq \frac{\alpha}{\gamma} e^{-\frac{ka}{2}} \leq \frac{\alpha}{\gamma}, \quad (C.55)$$

gdzie $k = l/a$.

D Rozwinięcie całek zawierających funkcję $M_{\lambda p}$

Ten dodatek poświęcony jest wyprowadzeniu następujących zależności

$$\mathcal{J}_1 = \Re \int_0^{+\infty} dq \frac{q^2}{(q+il)^2} M_{\lambda q/a} = \frac{1}{\lambda} \frac{\pi\gamma\chi}{2} - \pi l + \mathcal{R}_1(a, l, \lambda), \quad (D.1a)$$

$$|\mathcal{R}_1(a, l, \lambda)| \leq \lambda \frac{3\pi l^2}{2\gamma}, \quad (D.1b)$$

$$\mathcal{J}_2 = \Re \int_0^{+\infty} dq \frac{q \sin(q)}{(q+il)^2} M_{\lambda q/a} = \frac{\pi}{2} (1-l) e^{-l} + \mathcal{R}_2(a, l, \lambda), \quad (D.2a)$$

$$|\mathcal{R}_2(a, l, \lambda)| \leq \lambda \frac{\pi}{2\gamma} l(2+l) e^{-l/2}. \quad (D.2b)$$

Tak jak wyjaśniono na początku rozdziału (5.2) przyjmujemy, że zachodzą następujące relacje $L = 2\pi^2/\alpha$ i $\lambda \in (0, 1/2)$.

Wyprowadzenie wspomnianych zależności zaczniemy od zdefiniowania funkcji

$$K(\mu, l, a) = \int_{-\infty}^{+\infty} dq \frac{e^{-i\mu q}}{(q+il)^2} M_{q/a} = -\sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\mu a} dx \left(\mu - \frac{x}{a}\right) e^{-l(\mu-x/a)} \check{M}_x, \quad (D.3)$$

gdzie $\mu \in \mathbb{R}$, $l > 0$. Dla otrzymania drugiej równości skorzystaliśmy z twierdzenia Parseval-Plancherel i całkowania metodą residuów po konturach Γ_+ i Γ_- (zob. rys. (7)). Ponieważ funkcja $|M_{q/a} q^n (q+il)^{-2}|$ jest całkowna dla dowolnego n przy ustalonym l , więc $K(\mu, l, a)$ jest klasy $\mathcal{C}^\infty$ w argumentie μ . Analogiczny rozumowanie stosuje się do zmiennej $l > 0$.

Zauważmy następujące proste zależności.

$$\mathcal{J}_1 = \frac{1}{2} \Re \int_{-\infty}^{+\infty} dq \frac{q^2}{(q+il)^2} M_{\lambda q/a} = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{d\mu^2} K(\mu, l, a/\lambda) \Big|_{\mu=0}, \quad (D.4a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_2 &= -\frac{1}{2} \frac{d}{d\mu} \Re \int_{-\infty}^{+\infty} dq \frac{\cos(\mu q)}{(q+il)^2} M_{\lambda q/a} \Big|_{\mu=1} = \\ &= -\frac{1}{4} \frac{d}{d\mu} [K(\mu, l, a/\lambda) + K(-\mu, l, a/\lambda)] \Big|_{\mu=1}. \end{aligned} \quad (D.4b)$$

Elementarne różniczkowanie pierwszej z tych zależności daje nam

$$-\frac{1}{2} \frac{d^2}{d\mu^2} K(\mu, l, a/\lambda) = \frac{2\pi a}{\lambda} \check{M}_0 - \frac{\sqrt{2\pi}}{2} l \int_0^{+\infty} dx (2 - \lambda \frac{x}{a}) e^{-\lambda x/a} \check{M}_x. \quad (D.5)$$

Na mocy definicji γ i χ (por. (5.1) i (4.19)) dostajemy

$$\mathcal{J}_1 = \frac{1}{\lambda} \frac{\pi\gamma\chi}{2} - \frac{\sqrt{2\pi}}{2} l \int_0^{+\infty} dx (2 - \lambda \frac{x}{a}) e^{-\lambda x/a} \check{M}_x, \quad (D.6)$$

Całkę występującą w ostatnim wzorze przekształcamy w następujący sposób:

$$\begin{aligned} & -\frac{\sqrt{2\pi}}{2} l \int_0^{+\infty} dx (2 - \lambda \frac{x}{a}) e^{-\lambda x/a} = \\ & = -\sqrt{2\pi} l \int_0^{+\infty} dx e^{-\lambda x/a} \check{M}_x + \frac{\sqrt{2\pi}}{2} l \int_0^{+\infty} dx \lambda \frac{x}{a} e^{-\lambda x/a} \check{M}_x = \\ & = -\sqrt{2\pi} l \int_0^{+\infty} dx \check{M}_x - \sqrt{2\pi} \int_0^{+\infty} dx (e^{-\lambda x/a} - 1) \check{M}_x + \\ & + \lambda \frac{\sqrt{2\pi}}{2} l^2 \int_0^{+\infty} dx \frac{x}{a} e^{-\lambda x/a} \check{M}_x. \end{aligned} \quad (D.7)$$

Na mocy (C.28) dostajemy

$$-\sqrt{2\pi} l \int_0^{+\infty} dx \check{M}_x = -\pi l. \quad (D.8)$$

Możemy więc zapisać

$$\mathcal{J}_1 = \Re \int_0^{+\infty} dq \frac{q^2}{(q + il)^2} M_{\lambda q/a} = \frac{1}{\lambda} \frac{\pi\gamma\chi}{2} - \pi l + \mathcal{R}_1(a, l, \lambda), \quad (D.9a)$$

$$\mathcal{R}_1(a, l, \lambda) = -\sqrt{2\pi} l \int_0^{+\infty} dx (e^{-\lambda x/a} - 1) \check{M}_x + \lambda \frac{\sqrt{2\pi}}{2} l^2 \int_0^{+\infty} dx \frac{x}{a} e^{-\lambda x/a} \check{M}_x. \quad (D.9b)$$

W dodatku (C.3) pokazano, że $\check{M}_x \geq 0$ i $\text{supp } \check{M}_x \subset [-L, L]$ (zob. (C.22a) i (C.22b)), więc maksymalna wartość jaką może przyjmować x w powyższych wyrażeniach jest na moduł równa $L = 2\pi^2/\alpha$. Korzystając ponadto z elementarnej nierówności $|\exp(-x) - 1| \leq x$ dla $x \geq 0$, dostajemy

$$\left| \sqrt{2\pi} l \int_0^{+\infty} dx (e^{-\lambda x/a} - 1) \check{M}_x \right| \leq \lambda \frac{\pi l^2}{\gamma}. \quad (D.10)$$

Ta sama metoda, korzystająca tym razem z nierówności $0 < \exp(-x) \leq 1$, prawdziwej dla $x \geq 0$, daje nam

$$\left| \lambda \frac{\sqrt{2\pi}}{2} l^2 \int_0^{+\infty} dx \frac{x}{a} e^{-\lambda x/a} \check{M}_x \right| \leq \lambda \frac{\pi l^2}{2\gamma}. \quad (D.11)$$

To dowodzi oszacowania (D.1b).

Przejdźmy teraz do analizy wyrażenia na $\mathcal{J}_2$. Ponieważ $\text{supp } \check{M}_x \subset [-L, L]$ funkcja $K(-\mu, l, a/\lambda)$ znika dla $\mu a/\lambda > L$ lub równoważnie $\mu < \lambda L/a$. Ponieważ $a > L$, $\lambda < 1/2$ (to samo zachodzi dla $\lambda \leq 1$), więc istnieje $\varepsilon > 0$, taki że dla $\mu > 1 - \varepsilon$ funkcja $K(-\mu, l, a/\lambda)$ znika. Tym samym tylko pierwsza pochodna w (D.4b) wnosi niezerowy wkład do wyrażenia. Dzięki temu łatwo obliczamy

$$\mathcal{J}_2 = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} dx [1 - l(1 - \lambda \frac{x}{a})] e^{-l(1-\lambda x/a)} \check{M}_x. \quad (\text{D.12})$$

W powyższej całce można by przyjąć granice $-L$ i L , jednak dla wygody pozostawiliśmy je w takiej formie. Wyrażenie to przekształcamy w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_2 &= \frac{\sqrt{2\pi}}{4} e^{-l} \int_{-\infty}^{+\infty} dx [1 - l(1 - \lambda \frac{x}{a})] e^{\lambda x l/a} \check{M}_x = \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{4} e^{-l} \int_{-\infty}^{+\infty} dx (1 - l) e^{\lambda x l/a} \check{M}_x + \frac{\sqrt{2\pi}}{4} e^{-l} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \lambda \frac{x}{a} e^{\lambda x l/a} \check{M}_x \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

Zajmijmy się teraz pierwszym wyrazem z powyższego wzoru:

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{2\pi}}{4} e^{-l} (1 - l) \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{\lambda x l/a} \check{M}_x = \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{4} e^{-l} (1 - l) \int_{-\infty}^{+\infty} dx \check{M}_x + \frac{\sqrt{2\pi}}{4} e^{-l} (1 - l) \int_{-\infty}^{+\infty} dx (e^{\lambda x l/a} - 1) \check{M}_x = \\ &= \frac{\pi}{2} (1 - l) + \frac{\sqrt{2\pi}}{4} e^{-l} (1 - l) \int_{-\infty}^{+\infty} dx (e^{\lambda x l/a} - 1) \check{M}_x \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

Dzięki elementarnej z nierówności $|\exp(x) - 1| \leq x \exp(x)$, $x \geq 0$, dostajemy następujące oszacowanie

$$\left| \frac{\sqrt{2\pi}}{4} e^{-l} (1 - l) \int_{-\infty}^{+\infty} dx (e^{\lambda x l/a} - 1) \check{M}_x \right| \leq \lambda \frac{\pi}{2\gamma} (1 + l) l e^{l(\lambda/\gamma - 1)}. \quad (\text{D.15})$$

Ponieważ wedle przyjętych przez nas założeń $\gamma > 1$ i $\lambda < 1/2$, więc wyrażenie po prawej stronie ostatniej nierówności można dodatkowo uprościć:

$$\left| \frac{\sqrt{2\pi}}{4} e^{-l} (1 - l) \int_{-\infty}^{+\infty} dx (e^{\lambda x l/a} - 1) \check{M}_x \right| \leq \lambda \frac{\pi}{2\gamma} (1 + l) l e^{-l/2}. \quad (\text{D.16})$$

Przejdźmy teraz do oszacowania drugiego członu w (D.13). Stosując te same metody co poprzednio w łatwy sposób dostajemy

$$\left| \frac{\sqrt{2\pi}}{4} e^{-l} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \lambda \frac{x}{a} e^{\lambda x l/a} \check{M}_x \right| \leq \lambda \frac{\pi}{2\gamma} l e^{l(\lambda/\gamma - 1)} \leq \lambda \frac{\pi}{2\gamma} l e^{-l/2}. \quad (\text{D.17})$$

Tym samym możemy napisać

$$\mathcal{I}_2 = \frac{\pi}{2}(1-l) + \mathcal{R}_2(a, l, \lambda), \quad (\text{D.18a})$$

$$\mathcal{R}_2(a, l, \lambda) = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} e^{-l}(1-l) \int_{-\infty}^{+\infty} dx (e^{\lambda x l/a} - 1) \check{M}_x + \frac{\sqrt{2\pi}}{4} e^{-l} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \lambda \frac{x}{a} e^{\lambda x l/a} \check{M}_x, \quad (\text{D.18b})$$

$$|\mathcal{R}_2(a, l, \lambda)| \leq \lambda \frac{\pi}{2\gamma} (2+l) l e^{-l/2}. \quad (\text{D.18c})$$

Kończy to dowód wzorów zależności, którym poświęcony jest ten dodatek.

E Rozwinięcie funkcji $Q_\lambda^{(i)}(a, l)$

Problemem którego chcemy się tu podjąć, jest rozwinięcie w szereg Taylora z resztą następujących funkcji

$$Q_\lambda^{(1)}(a, l) = \frac{n_\lambda(l)^2}{r_\lambda(l)[r_\lambda(l)^2 - n_\lambda(l)^2]}, \quad Q_\lambda^{(2)}(a, l) = \frac{n_\lambda(l)}{r_\lambda(l)^2 - n_\lambda(l)^2}. \quad (\text{E.1})$$

Wyraz rzędu zerowego mają postać

$$Q_0^{(1)}(a, l) = \frac{e^{-2l}}{(\gamma + l)[(\gamma + l)^2 - e^{-2l}]}, \quad Q_0^{(2)}(a, l) = \frac{e^{-l}}{(\gamma + l)^2 - e^{-2l}}, \quad (\text{E.2})$$

gdzie $\gamma = \alpha a / 2\pi^2 > 1$.

Jak zostało powiedziane w dodatkach C.5 i C.6, funkcja $r_\lambda(l)$ jest ściśle malejąca jako funkcja λ , zaś $n_\lambda(l)$ jest ściśle rosnąca jako funkcja tej samej zmiennej. Wobec tego funkcja

$$d(a, l, \lambda) = \frac{1}{r_\lambda(l)^2 - n_\lambda(l)^2}, \quad (\text{E.3})$$

jest ściśle rosnąca w λ . Z wzorów (4.26) i (4.28) wynika, że wyrażenie $t_\lambda(l)^2 - u_\lambda(l)^2$ zawsze jest różne od zera, co wraz z nierównościami (C.46) i (C.54a) pozwala stwierdzić, iż mianownik funkcji $d(a, l, \lambda)$ jest zawsze dodatni. Tym samym

$$0 < d(a, l, \eta) \leq d(a, l, \lambda), \quad \eta \in [0, \lambda]. \quad (\text{E.4})$$

Zgodnie z dyskusją na początku rozdziału (5.2) przyjmujemy $L = 2\pi^2/\alpha$ i $\lambda \in [0, 1/2]$. Dołączenie $\lambda = 0$ do zbioru parametrów skalowania uzasadnimy tak jak w dodatkach (C.5) i (C.6). Dzięki nierównościami (C.46) oraz (C.53), otrzymujemy

$$d(a, l, \lambda) \leq \frac{1}{(\gamma + l e^{-\lambda l/\gamma})^2 - 1} \leq \quad (\text{E.5a})$$

$$\leq \frac{1}{\gamma^2 - 1}, \quad (\text{E.5b})$$

Korzystając dalej z nierówności (C.46) i (C.53), po przeprowadzeniu prostego rachunku dostajemy następujące oszacowania na dwie pierwsze pochodne funkcji $d(a, l, \lambda)$ po zmiennej λ :

$$|d'(a, l, \lambda)| \leq \frac{ld^2}{\gamma} [2l(\gamma + l) + e^{-l}]. \quad (\text{E.6a})$$

$$|d''(a, l, \lambda)| \leq \frac{2l^2 d^2}{\gamma^2} \left\{ l(\gamma + l) + l^2 + \frac{13}{24}e^{-l} + 4d \left[l(\gamma + l) + \frac{1}{2}e^{-l} \right]^2 \right\}, \quad (\text{E.6b})$$

Dla większej przejrzystości zapisu po prawej stronie równości opuściliśmy argumenty od których zależy funkcja $d(a, l, \lambda)$.

Korzystając teraz z nierówności (E.5a), (C.46), (C.53) i warunku $\lambda \in [0, 1/2)$ dostajemy następujące nierówności.

$$0 < Q_\lambda^{(1)}(a, l) \leq \frac{1}{\gamma} d(a, l, \lambda) e^{-l}, \quad 0 < Q_\lambda^{(2)}(a, l) \leq d(a, l, \lambda) e^{-l/2}. \quad (\text{E.7})$$

Następny krok sprowadza się do wzięcia rozwinięcia Taylora i oszacowania reszty za pomocą nierówności podanych wyżej oraz w dodatkach (C.5) i (C.6). Rachunek ten jest zupełnie elementarny, a jedynie bardzo długi, dlatego poprzestaniemy na podaniu końcowych rezultatów.

$$Q_\lambda^{(1)}(a, l) = Q_0^{(1)}(a, l) + \mathcal{R}_3(a, l, \lambda), \quad (\text{E.8a})$$

$$|\mathcal{R}_3(a, l, \lambda)| \leq \lambda \frac{le^{-l}d}{\gamma^2} \left\{ 1 + \frac{l}{\gamma} + d \left[2l(\gamma + l) + e^{-l} \right] \right\}, \quad (\text{E.8b})$$

$$Q_\lambda^{(1)}(a, l) = Q_0^{(1)}(a, l) + \frac{d}{d\lambda} Q_0^{(1)}(a, l) \Big|_{\lambda=0} + \mathcal{R}_4(a, l, \lambda), \quad (\text{E.9a})$$

$$\frac{d}{d\lambda} Q_\lambda^{(1)}(a, l) \Big|_{\lambda=0} = \alpha \frac{b_1}{\gamma} \frac{l^2 [3(\gamma + l)^2 e^{-2l} - e^{-4l}]}{(\gamma + l)^2 [(\gamma + l)^2 - e^{-2l}]^2}, \quad (\text{E.9b})$$

$$\begin{aligned} |\mathcal{R}_4(a, l, \lambda)| &\leq \\ &\leq \lambda^2 \frac{le^{-l}d}{\gamma^3} \left(ld \left\{ l(\gamma + l) + l^2 + \frac{13}{24}e^{-l} + 4d \left[l(\gamma + l) + \frac{1}{2}e^{-l} \right]^2 \right\} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\gamma + l)^2}{\gamma} \left\{ d \left[2l(\gamma + l) + e^{-l} \right] + \frac{l}{\gamma^2} \right\} + \frac{l}{24\gamma} (13\gamma + 25l) \right), \end{aligned} \quad (\text{E.9c})$$

$$Q_\lambda^{(2)}(a, l) = Q_0^{(2)}(a, l) + \mathcal{R}_5(a, l, \lambda), \quad (\text{E.10a})$$

$$|\mathcal{R}_5(a, l, \lambda)| \leq \lambda \frac{le^{-l/2}d}{\gamma} \left\{ \frac{1}{2} + d \left[2l(\gamma + l) + e^{-l} \right] \right\}. \quad (\text{E.10b})$$

Bibliografia

- [Alb+86] Sergio Albeverio i in. *Nonstandard methods in stochastic analysis and mathematical physics*. Pure and Applied Mathematics. Orlando, Florida: Academic Press, Inc., 1986.
- [Alb+88] Sergio Albeverio i in. *Solvable Models in Quantum Mechanics*. Texts and Monographs in Physics. New York, Berlin, Heidelberg, London, Paris, Tokyo: Springer, 1988.

- [BDF09] R. Brunetti, M. Dütsch i K. Fredenhagen. “Perturbative algebraic quantum field theory and the renormalization groups”. W: *Adv. Theor. Math. Phys* 13 (2009), s. 1541–1599. DOI: 10.4310/ATMP.2009.v13.n5.a7. arXiv: 0901.2038 [math-th].
- [BF23] Detlev Buchholz i Kalus Fredenhagen. *Algebraic quantum field theory: objectives, methods, and results*. 2023. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2305.12923>. arXiv: 2305.12923 [math-ph].
- [BG78] Peter H.G.M. van Blokland i J. Theodoor G. Overbeek. “van der Waals forces between objects covered with a chromium layer”. W: *J. Chem. Soc., Faraday Trans. 1* 74 (1978), s. 2637–2651. DOI: 10.1039/F19787402637.
- [BLD16] G. Bimonte, D. López i R.S. Decca. “Isoelectronic determination of the thermal Casimir force”. W: *Phys. Rev. B* 93 (18 maj 2016), s. 184434. DOI: 10.1103/PhysRevB.93.184434. arXiv: 1509.05349 [cond-mat.mes-hall].
- [Bło+77] J. Błocki i in. “Proximity forces”. W: *Annals Phys.* 105 (1977), s. 427–462. DOI: 10.1016/0003-4916(77)90249-4.
- [BM69] Lowell S. Brown i G. Jordan Maclay. “Vacuum Stress between Conducting Plates: An Image Solution”. W: *Phys. Rev.* 184 (5 sierp. 1969), s. 1272–1279. DOI: 10.1103/PhysRev.184.1272.
- [BR] Ola Bratteli i Derek W. Robinson. *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics*. T. I & II. Berlin, Heidelberg: Springer.
- [Bre+01] G. Bressi i in. “Experimental studies of macroscopic forces in the micrometre range”. W: *Class. Quantum Grav.* 88 (2001), s. 3943. DOI: 10.1088/0264-9381/18/18/313.
- [Bre+02] G. Bressi i in. “Measurement of the Casimir Force between Parallel Metallic Surfaces”. W: *Phys. Rev. Lett.* 88 (4 sty. 2002), s. 041804. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.88.041804>. arXiv: 0203002 [quant-ph].
- [Cas48] Hendrik Brugt Gerhard Casimir. “On the Attraction Between Two Perfectly Conducting Plates”. W: *Kon. Ned. Akad. Wetensch. Proc* 51.7 (1948), s. 793–795.
- [Cha+01] H. B. Chan i in. “Quantum mechanical actuation of microelectromechanical systems by the Casimir force”. W: *Science* 291 (5510 mar. 2001), s. 1941–1944. DOI: 10.1126/science.1057984.
- [CP48] H.B.G. Casimir i D. Polder. “The Influence of Retardation on the London-van der Waals Forces”. W: *Phys. Rev.* 73 (4 lut. 1948), s. 360–372. DOI: 10.1103/PhysRev.73.360.
- [Dal+11] Diego Dalvit i in., red. *Casimir Physics*. Heidelberg, Dordrecht, London, New York: Springer, 2011.
- [DDG21] Paweł Duch, Michael Dütsch i José M. Gracia-Bondía. “Diphoton decay of the higgs from the Epstein–Glaser viewpoint”. W: *Eur. Phys. J. C* 81 (2 2021), s. 131–175. DOI: <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-021-08898-z>. arXiv: 2011.12675 [hep-th].
- [Dec+03] R. S. Decca i in. “Improved tests of extra-dimensional physics and thermal quantum field theory from new Casimir force measurements”. W: *Phys. Rev. D* 68 (11 paź. 2003), s. 116003. DOI: 10.1103/PhysRevD.68.116003. arXiv: 0310157 [hep-ph].

- [DNP16] Claudio Dappiaggi, Gabriele Nosari i Nicola Pinamonti. “The Casimir effect from the point of view of algebraic quantum field theory”. W: *Math. Phys. Anal. Geom.* 19.2 (2016), s. 12. DOI: 10.1007/s11040-016-9216-y. arXiv: 1412.1409 [math-ph].
- [Dod20] Viktor Dodonov. “Fifty Years of the Dynamical Casimir Effect”. W: *Physics* 2.1 (2020), s. 67–104. ISSN: 2624-8174. DOI: 10.3390/physics2010007.
- [Fer20] Davide Fermi. “The Casimir energy anomaly for a point interaction”. W: *Modern Physics Letters A* 35 (sty. 2020), s. 2040008. DOI: 10.1142/S0217732320400088. arXiv: 1909.00604 [math-ph].
- [Few20] Christopher J. Fewster. “A Generally Covariant Measurement Scheme for Quantum Field Theory in Curved Spacetimes”. W: *Progress and Visions in Quantum Theory in View of Gravity*. Red. Felix Finster i in. Cham: Springer International Publishing, 2020, s. 253–268. ISBN: 978-3-030-38941-3. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-38941-3_11. arXiv: 1904.06944 [gr-qc].
- [Fie60] M. Fierz. “On the attraction of conducting planes in vacuum”. W: *Helv. Phys. Acta* 33 (list. 1960), s. 855–858.
- [FLM11] César D. Fosco, Fernando C. Lombardo i Francisco D. Mazzitelli. “Proximity force approximation for the Casimir energy as a derivative expansion”. W: *Phys. Rev. D* 84 (10 list. 2011), s. 105031. DOI: 10.1103/PhysRevD.84.105031. arXiv: 1109.2123 [hep-th].
- [FP17] Davide Fermi i Livio Pizzocchero. *Local Zeta Regularization and the Scalar Casimir Effect*. WORLD SCIENTIFIC, 2017. DOI: 10.1142/10570. eprint: <https://www.worldscientific.com/doi/pdf/10.1142/10570>.
- [FP18] Davide Fermi i Livio Pizzocchero. “Local Casimir Effect for a Scalar Field in Presence of a Point Impurity”. W: *Symmetry* 10.2 (2018), s. 38. DOI: 10.3390/sym10020038. arXiv: 1712.10039 [math-ph].
- [FP23] Davide Fermi i Livio Pizzocchero. “On the Casimir Effect with δ -Like Potentials, and a Recent Paper by K. Ziemian (Ann. Henri Poincaré, 2021)”. W: *Annales Henri Poincaré* 24 (2023), s. 2363–2400. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00023-022-01263-0>.
- [FR19] Christopher J. Fewster i Kasia Rejzner. *Algebraic Quantum Field Theory – an introduction*. 2019. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1904.04051>. arXiv: 1904.04051 [hep-th].
- [Gar+12a] Daniel Garcia-Sanchez i in. “Casimir Force and *In Situ* Surface Potential Measurements on Nanomembranes”. W: *Physical Review Letters* 109 (2012), s. 027202. DOI: 10.1103/PhysRevLett.109.027202. arXiv: 1207.4429 [quant-ph].
- [Gar+12b] Daniel Garcia-Sanchez i in. “Erratum: Casimir Force and *In Situ* Surface Potential Measurements on Nanomembranes [Phys. Rev. Lett. 109, 027202 (2012)]”. W: *Phys. Rev. Lett.* 109 (15 paź. 2012), s. 159902. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.109.027202>.
- [Gol98] Robert Goldblatt. *Lectures on the Hyperreals. An Introduction to Non-standard Analysis*. I. Graduate Texts in Mathematics 188. New York, Berlin, Heidelberg, Barcelona, Budapest, Hong Kong, London, Milan, Paris, Singapore, Tokyo: Springer, 1998.

- [Haa13] Rudolf Haag. *On the Sharpness of Localization of Individual Events in Space and Time*. 2013. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1303.6431>. arXiv: arXiv:1303.6431 [quant-ph].
- [Haa96] Rudolf Haag. *Local Quantum Physics. Fields, Particles, Algebras*. Second Revised and Enlarged Edition. Berlin, Heidelberg, New York, Barcelona, Budapest Hong Kong, London, Milan, Paris, Santa Clara, Singapore, Tokyo: Springer, 1996.
- [Her01] Andrzej Herdegen. “No-nonsens Casimir force”. W: *Acta Phys. Polon.* B32 (2001), s. 55–65. arXiv: 0008.207 [hep-th].
- [Her05] Andrzej Herdegen. “Quantum backreaction (Casimir) effect I. What are admissible idealizations?” W: *Ann. Henri Poincaré* 6 (2005), s. 657–695. DOI: 10.1007/s00023-005-0219-7. arXiv: 0412.132 [hep-th].
- [Her06] Andrzej Herdegen. “Quantum backreaction (Casimir) effect II. Scalar and electromagnetic fields”. W: *Ann. H. Poincaré* 7 (2006), s. 253–301. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00023-005-0249-1>. arXiv: 0507.023 [hep-th].
- [HS10] Andrzej Herdegen i Mariusz Stopa. “Global vs local Casimir effect”. W: *Ann. Henri Poincaré* 11 (2010), s. 1171–1200. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00023-010-0053-4>. arXiv: 1007.2139 [hep-th].
- [KM06] G. L. Klimchitskaya i V. M. Mostepanenko. “Experiment and theory in the Casimir effect”. W: *Contemporary Physics* 47.3 (2006), s. 131–144. DOI: 10.1080/00107510600693683. arXiv: 0609145 [quant-ph].
- [KM22] G.L. Klimchitskaya i V.M. Mostepanenko. “Current status of the problem of thermal Casimir force”. W: *International Journal of Modern Physics A* 19 (2022), s. 2241002. DOI: <https://doi.org/10.1142/S0217751X22410020>. arXiv: 2204.06290 [quant-ph].
- [KM23] G.L. Klimchitskaya i V.M. Mostepanenko. “Comparison of the Lifshitz Theory Using the Nonconventional Fit of Response Functions with Precise Measurements of the Casimir Force”. W: *Symmetry* 15.5 (2023). ISSN: 2073-8994. DOI: 10.3390/sym15051011. arXiv: 2305.02608 [quant-ph].
- [Lam97] S.K. Lamoreaux. “Demonstration of the Casimir Force in the 0.6 to 6 μm Range”. W: *Phys. Rev. Lett.* 78 (1 sty. 1997), s. 5–8. DOI: 10.1103/PhysRevLett.78.5.
- [Lam98] S.K. Lamoreaux. “Erratum: Demonstration of the Casimir Force in the 0.6 to 6 μm Range [Phys. Rev. Lett. 78, 5 (1997)]”. W: *Phys. Rev. Lett.* 81 (24 grud. 1998), s. 5475–5476. DOI: 10.1103/PhysRevLett.81.5475.
- [Leo19] Ulf Leonhardt. “Lifshitz theory of the cosmological constant”. W: *Annals of Physics* 411 (2019), s. 167973. ISSN: 0003-4916. DOI: 10.1016/j.aop.2019.167973. arXiv: 1910.02441 [gr-qc].
- [Lif56] E.M. Lifshitz. “The theory of molecular attractive forces between solids”. W: *Sov. Phys. JETP* 2.1 (1956). Translated from Russian by M. Hamermesh, s. 73–83. DOI: <https://doi.org/10.1016/B978-0-08-036364-6.50031-4>.

- [Meh67] J. Mehra. “Temperature correction to the casimir effect”. W: *Physica* 37.1 (1967), s. 145–152. ISSN: 0031-8914. DOI: [https://doi.org/10.1016/0031-8914\(67\)90115-2](https://doi.org/10.1016/0031-8914(67)90115-2).
- [MUV01] M. Bordag, U. Mohideen i V.M. Mostepanenko. “New developments in the Casimir effect”. W: *Physics Reports* 353.1–3 (2001), s. 1–205. DOI: 10.1016/S0370-1573(01)00015-1. arXiv: 0106045 [quant-ph].
- [PS95] M. E. Peskin i D. V. Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. I. Westview Press, 1995.
- [RS78a] Michael Reed i Barry Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics III: Scattering Theory*. I. San Diego, New York, Berkeley, Boston, London, Sydney, Tokyo, Toronto: Academic Press, Inc., 1978.
- [RS78b] Michael Reed i Barry Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics IV: Analysis of Operators*. I. New York, San Francisco, London: Academic Press, Inc., 1978.
- [RS80] Michael Reed i Barry Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis*. Revised and enlarged edition. San Diego, New York, Boston, London, Sydney, Tokyo, Toronto: Academic Press, 1980.
- [Sca05] Antonello Scardicchio. “Casimir dynamics: Interactions of surfaces with codimension > 1 due to quantum fluctuations”. W: *Phys. Rev. D* 72 (6 wrz. 2005), s. 065004. DOI: 10.1103/PhysRevD.72.065004. arXiv: 0503170 [hep-th].
- [Sha06] Ramamurti Shankar. *Mechanika kwantowa*. I. Tłum. Mirosław Łukaszewski. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 2006.
- [SP21] René I. Sedmik i Mario Pitschmann. “Next Generation Design and Prospects for CANNEX”. W: *Universe* 7 (7 2021), s. 234. DOI: <https://doi.org/10.3390/universe7070234>. arXiv: 2107.07645 [physics.ins-det].
- [Spa58] M. J. Sparnaay. “Measurements of attractive forces between flat plates”. W: *Physica* 24 (1958), s. 751–764. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0031-8914\(58\)80090-7](https://doi.org/10.1016/S0031-8914(58)80090-7).
- [Spr+18] Benjamin Spreng i in. “Proximity force approximation and specular reflection: Application of the WKB limit of Mie scattering to the Casimir effect”. W: *Phys. Rev. A* 97 (6 czer. 2018), s. 062504. DOI: 10.1103/PhysRevA.97.062504. arXiv: 1803.02254 [quant-ph].
- [Sum12] Stephen J. Summers. *A Perspective on Constructive Quantum Field Theory*. Work published on ArXiv. 2012. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1203.3991>. arXiv: 1203.3991 [math-ph].
- [Sus+11] A.O. Sushkov i in. “New Experimental Limits on Non-Newtonian Forces in the Micrometer Range”. W: *Phys. Rev. Lett.* 107 (17 paź. 2011), s. 171101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.107.171101. arXiv: 1701.02351 [quant-ph].
- [SZ09] Mauro Spreafico i Sergio Zerbini. “Finite temperature quantum field theory on noncompact domains and application to delta interactions”. W: *Reports on Mathematical Physics* 63 (kw. 2009), s. 163–177. DOI: 10.1016/S0034-4877(09)00011-1. arXiv: 0709.4109 [math-ph].

- [Tan+07] L. Tang i in. “Measurement of non-monotonic Casimir forces between silicon nanostructures”. W: *Nature Photonics* 11 (2007), s. 97–101. DOI: 10.1038/nphoton.2016.254. arXiv: 1701.02351 [quant-ph].
- [Tay72] John R. Taylor. *Scattering Theory: The Quantum Theory on Nonrelativistic Collisions*. New York, London, Sydney, Toronto: John Wiley & Sons, Inc., 1972.
- [Tay84] Peter Taylor. “The Relation Between Classical and Quantum Mechanics”. Prac. dokt. Oxford University, 1984. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1806.08827>. arXiv: 180608827 [quant-ph].
- [Zie21] Kamil Ziemian. “Algebraic Approach to Casimir Force Between Two δ -like Potentials”. W: *Ann. Henri Poincaré* 22 (2021), s. 1751–1781. DOI: 10.1007/s00023-005-0219-7.
- [Zie23] Kamil Ziemian. “Correction to: Algebraic Approach to Casimir Force Between Two δ -like Potentials”. W: *Ann. Henri Poincaré* (2023). DOI: 10.1007/s00023-023-01383-1.