

Wrocław, 30 czerwca 2024

Prof. dr hab. Andrzej Borowiec
Instytut Fizyki Teoretycznej
Uniwersytetu Wrocławskiego

Recenzja rozprawy doktorskiej magistra Pawła Zaleckiego

Geometric spectral functionals

Promotor: prof. dr hab. Andrzej Sitarz

Przedstawiana do oceny rozprawa wpisuje się w szeroki nurt badań geometrii nieprzemiennej, w wersji zaproponowanej przez Alaina Connes'a na początku lat osiemdziesiątych ubiegłego wieku. Jednym z zadań tego podejścia jest odkodowanie, za pomocą analizy spektralnej odpowiednich operatorów, własności geometrycznych „nieprzemiennych rozmaitości różniczkowych” sformalizowanych w postaci trójek spektralnych. Własności topologiczne kodowane są w strukturze odpowiednich C^* -algebr za pomocą twierdzenia Gelfanda-Najmarka opisującego „granicę klasyczną”.

Rozprawa doktorska mgra Pawła Zaleckiego dotyczy nowych funkcjonałów spektralnych stanowiących nieprzemienne uogólnienie wielkości geometrycznych znanych z teorii rozmaitości, jak np. metryka, działanie Einsteina, torsja. Wyniki uzyskano metodą obliczenia residuum Wodzickiego (rozwinięcia jądra operatora ciepłego), dla trójek spektralnych osadzonych na zwartych parzysto-wymiarowych rozmaitościach riemannowskich.

Podstawą rozprawy są trzy publikacje w renomowanych czasopismach matematycznych i matematyczno-fizycznych, napisane wspólnie z promotorem, prof. dr hab. Andrzejem Sitarzem oraz profesorem Ludwikiem Dąbrowskim z SISSA. Są to kolejno:

Dąbrowski, Ludwik; Sitarz, Andrzej; Zalecki, Paweł *Spectral metric and Einstein functionals*, Adv. Math. 427 (2023), Paper No. 109128, 37 pp.

Dąbrowski, Ludwik; Sitarz, Andrzej; Zalecki, Paweł; *Spectral metric and Einstein functionals for Hodge-Dirac operator*, arXiv:2307.14877, J. Noncommut. Geom. in print, 12 pp

Dąbrowski, Ludwik; Sitarz, Andrzej; Zalecki, Paweł; *Spectral torsion*, Comm. Math. Phys. 405 (2024), no. 5, Paper No. 130, 12 pp

Warto zauważyć, że mgr Paweł Zalecki jest współautorem trzech innych publikacji, nie wchodzących w skład rozprawy.

Zawartość rozprawy i osiągnięte rezultaty:

Napisana w języku angielskim, 87-stronicowa rozprawa składa się z trzech rozdziałów. Krótki, 10 stronicowy wstęp (Introduction), oprócz uwag natury historycznej, omawia podstawowe pojęcia, jak trójki i działanie spektralne, operatory pseudo-różniczkowe oraz metodę residuum Wodzickiego.

Na drugi, podstawowy rozdział zatytułowany *Spectral functionals*, składają się trzy wspomniane na początku publikacje oraz krótkie komentarze i przypisy. Półstronicowy rozdział III (Conclusions)

wskazuje na inne możliwe zastosowania przedstawionej metodologii badawczej, zarówno w przemiennym jak i nieprzemiennym przypadku. Rozprawę kończy liczący 31 pozycji spis literatury.

W obszernym 37 stronicowym artykule *Spectral metric and Einstein functionals*, wykorzystując związki pomiędzy wielkościami geometrycznymi na gładkich rozmaitościach a lokalnymi operatorami różniczkowymi działającymi na cięcia odpowiednich wiązek wektorowych, policzono a następnie uogólniono do przypadku nieprzemiennego określone funkcjonały spektralne. W pierwszej części, zbudowano odpowiednie funkcjonały metryki, metryki odwrotnej (zwanej tu dualną), oraz tensora Einsteina dla przypadku klasycznego, tj. na gładkich, zwartych i orientowalnych, parzysto-wymiarowych rozmaitościach z geometrią Riemanna. Dopiero ostatni, piąty rozdział dotyczy uogólnień do przypadku nieprzemiennego; trójek spektralnych dla konforemnie przeskalowanego 2 i 4 wymiarowego nieprzemiennego (kwantowego) torusa.

W artykule *Spectral metric and Einstein functionals for Hodge-Dirac operator* pokazano, na sporej liczbie konkretnych trójek spektralnych, że funkcjonały spektralne metryki oraz tensora Einsteina zbudowane za pomocą operatora Hodge-Diraca, są takie same jak dla kanonicznego (metrycznego) operatora Diraca działającego na cięcia wiązki spinorowej.

Ostatnia z serii prac, zatytułowana *Spectral torsion*, wprowadza nowe, trzy-liniowe, funkcjonały spektralne dla pewnej klasy trójek spektralnych, które w granicy klasycznej odpowiadają tensorowi torsji dla rozmaitości z koneksją spinową.

Prace te, których zawartość merytoryczną oceniam wysoko, zawierają cały szereg, szczegółowych i technicznie zaawansowanych rachunków, których znaczną część (jak należy się domyślać) wykonał doktorant. Wymagało to zdobycia unikatowej i nietrywialnej wiedzy oraz umiejętności nie tylko w dziedzinie geometrii Riemanna, jej nieprzemiennego odpowiednika w postaci trójek spektralnych, ale również na temat operatorów pseudo-różniczkowych, ich symboli oraz związanych z nimi technik obliczeniowych (residuum Wodzickiego). Część z przyjętych założeń (np. zwartość, dodatnia określoność metryki) zawęża na obecnym etapie badań pole dla potencjalnych zastosowań w realistycznych modelach fizycznych, stanowiąc cenny wkład do matematycznych aspektów formalizmu Connes'a. Warto nadmienić, iż zastosowane w pracy podejście zainspirowało chińskich autorów (Yong Wang, i współautorzy) do kontynuacji i rozszerzenia badań będących przedmiotem rozprawy. Ostatnio opublikowane zostały dwa artykuły odwołujące się do „Dabrowski-Sitarz-Zalecki type theorem”:

MR4741648 Yang, Yuchen; Wang, Yong; *The general Dabrowski-Sitarz-Zalecki type theorem for odd dimensional manifolds with boundary III*, J. Pseudo-Differ. Oper. Appl. 15 (2024), no. 2, Paper No. 41, 29 pp. 58J42

MR4674489 Wang, Jian; Wang, Yong *The Dabrowski-Sitarz-Zalecki type theorems for six dimensional manifolds with boundary*, J. Math. Phys. 64 (2023), no. 12, Paper No. 122501, 21 pp. 58J42 (53C27 58J40)

które świadczą o oddźwięku i uznaniu w środowisku eksperckim dla osiągniętych w dysertacji wyników i przyjętej do ich uzyskania metodologii.

Wniosek końcowy:

Uwzględniając powyższe stwierdzam bez wahania, że mgr Paweł Zalecki posiada dorobek naukowy, który w pełni spełnia wymagania stawiane przez ustawę o stopniach i tytułach naukowych a przedstawiona do oceny praca spełnia wszystkie formalne i zwyczajowe kryteria właściwe dla rozpraw doktorskich. Wnoszę o dopuszczenie pana magistra Pawła Zaleckiego do dalszych etapów postępowania doktorskiego.

Borowicz