

UNIwersYTET JAGIELLOŃSKI
WYDZIAŁ FIZYKI, ASTRONOMII I INFORMATYKI STOSOWANEJ

STUDIA MATEMATYCZNO-PRZYRODNICZE

Analiza dynamiki układu cienkiego pierścienia oraz punktowej masy, oddziałujących grawitacyjnie

Konrad Pawlik

promotor
dr hab. Andrzej ODRZYWOŁEK

Jasło 2021

Spis treści

1	Analiza potencjału cienkiego pierścienia (okręgu)	2
1.1	Położenia równowagi	4
2	Analiza prostych orbit periodycznych	6
2.1	Nieruchomy pierścień	6
2.1.1	Ruch po prostej $r=0$	6
2.1.2	Ruch na płaszczyźnie $z=0$	7
2.2	Ruchomy, nieobracający się pierścień	7
2.2.1	Ruch po prostej $r=0$	7
2.2.2	Ruch na płaszczyźnie $z=0$	8
3	Złożone orbity periodyczne	8
3.1	Nieruchomy pierścień	9
3.2	Ruchomy, nieobracający się pierścień	13
3.3	W pełni swobodny pierścień	13
3.3.1	Kąty Eulera	14
3.3.2	Główne osie bezwładności	17
3.3.3	Prędkość kątowna w układzie bryły	17
3.3.4	Lagrangian obracającego się ciała	18
3.3.5	Obrócony potencjał	18
3.3.6	Przykład w pełni swobodnej dynamiki	20
4	Potencjał torusa	21
4.1	Wyznaczenie potencjału metodą poprzez szereg	24
4.2	Wyznaczenie potencjału metodą poprzez całkowanie	32
4.3	Analiza porównawcza różnych podejść do wyznaczenia potencjału	33
4.4	Przykład dynamiki w potencjale torusa	34
5	Podsumowanie	37
A	Appendix	38
A.1	Przyjęte konwencje funkcji specjalnych wraz z implementacją w języku Wolfram <i>Mathematica</i>	38
A.2	Przyjęte w pracy oznaczenia	40
A.3	Plik z prezentacjami omówionych w pracy „choreografii” w programie <i>Mathematica</i>	41

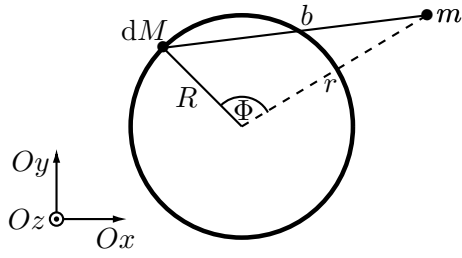
Wprowadzenie

Celem pracy jest sprawdzenie, zrozumienie i rozwinięcie wyników zawartych w artykule *Peculiarities in the gravitational field of a filamentary ring* [1], które są analizą ruchu punktowej masy próbnej w polu statycznego (nieruchomego) nieskończonego cienkiego pierścienia (okręgu). Pierścień oddziałuje grawitacyjnie z masą punktową zgodnie z teorią grawitacji Newtona. Skupiono się na przeanalizowaniu własności potencjału grawitacyjnego pierścienia, poszukiwaniu orbit periodycznych w takim układzie oraz różnymi uogólnieniami zakładającymi ruch pierścienia. Układ taki można, w przybliżeniu newtonowskim, uznać za *toy-model* masywnego dysku akrecyjnego wokół czarnej dziury, która jest modelowana jako masa punktowa. W analizie nie zostały uwzględnione żadne efekty wynikające z OTW, uwzględniono jedynie newtonowskie oddziaływanie grawitacyjne. Pominęto wewnętrzną strukturę „dysku akrecyjnego”, traktując go jako bryłę sztywną (torus), dlatego rozważany model traktować należy jako bardzo uproszczony.

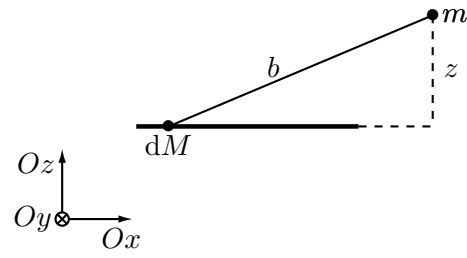
Analizę dynamiki takiego układu przeprowadzono na kilku poziomach przybliżeń. W najmniej realistycznym przybliżeniu założono statyczny pierścień, w następnym przybliżeniu dopuszczono ruch postępowy pierścienia, jednakże nie uwzględniając możliwości jego obrotu, w końcu badano w pełni swobodny pierścień, mogący się obracać. Badano także zmodyfikowaną wersję najmniej realistycznego przybliżenia, w której zamiast pierścienia wykorzystano jednorodny torus. Kolejne, bardziej ogólne, przybliżenie do przeanalizowania w przyszłości, mogłoby uwzględniać możliwość ruchu oraz obrotu torusa, efekty związane z OTW lub pierścień skończonej grubości o innym kształcie przekroju (toroid) lub rozkładzie masy innym niż jednorodny.

1 Analiza potencjału cienkiego pierścienia (okręgu)

Do dalszej analizy niezbędna jest znajomość analitycznej postaci potencjału grawitacyjnego wytwarzanego przez cienki, jednowymiarowy pierścień, czyli okrąg o promieniu R i masie M . Poniżej zaprezentowano standardowe jego wyprowadzenie.



(a) Ilustracja badanego układu w płaszczyźnie Oxy pierścienia.



(b) Ilustracja badanego układu w płaszczyźnie Oxz .

Rysunek 1: Badany układ, obserwowany w różnych płaszczyznach. Zaznaczono odcinek b pomiędzy masą punktową m oraz elementem masy pierścienia dM , dodatkowo liniami przerywanymi zaznaczono współrzędną r , czyli odległość masy m od osi symetrii pierścienia, oraz z , czyli odległość od płaszczyzny pierścienia. R to promień pierścienia. Pierścień przedstawiono za pomocą pogrubionej linii.

Oznaczenia wprowadzono na Rys. 1. Dodatkowo ϕ będzie oznaczać standardowy kąt ze współrzędnych cylindrycznych, to jest kąt pomiędzy osią Ox a wektorem położenia masy m , rzutowanym na płaszczyznę Oxy . W celu obliczenia jawnej postaci potencjału U można zapisać przyczynkę dU w następujący sposób:

$$dU = -\frac{G}{b}dM = -\frac{GM}{2\pi b}d\Phi. \quad (1)$$

W całej pracy przyjęto konwencję, iż potencjał grawitacyjny jest wielkością ujemną. Odległość b , między elementem masy dM oraz masą m , determinowana jest poprzez kąt Φ pomiędzy odcinkiem r oraz promieniem R , oraz przez r i z :

$$b^2 = z^2 + R^2 + r^2 - 2Rr \cos \Phi. \quad (2)$$

Celem uzyskania wartości potencjału od całego pierścienia, należy wyciąkować dU po jego obwodzie:

$$U(r, z, \phi) = -\int_{-\pi}^{\pi} \frac{GM}{2\pi b} d\Phi = -\frac{2GM}{\pi \sqrt{(r-R)^2 + z^2}} K\left(-\frac{4rR}{(r-R)^2 + z^2}\right). \quad (3)$$

Całka ta nie jest elementarna, wyraża się jednak poprzez znaną funkcję specjalną, zupełną całkę eliptyczną pierwszego rodzaju: $K(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-m \sin^2 \Phi}} d\Phi$. Widać, na podstawie wzoru (3), że potencjał jest niezależny od kąta ϕ , tak więc można bez straty ogólności przyjmować na wykresach przedstawiających potencjał, że $r = x$, oraz przyjąć oznaczenie $U(r, z) \equiv U(r, z, 0)$.

Na podstawie znajomości funkcji K można stwierdzić, że potencjał ma osobliwość w punkcie $(r, z) = (R, 0)$, to jest w miejscu gdzie znajduje się pierścień. Dokładniej można to zapisać jako $\lim_{(r,z) \rightarrow (R,0)} U(r, z) = -\infty$.

Rozwijając potencjał w szereg dla dużych wartości r , przy ustalonym z , dostaje się:

$$U(r, z) = -\frac{GM}{r} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right). \quad (4)$$

Analogiczny wzór zachodzi dla ustalonego r oraz dużego z . Z daleka pierścień można więc traktować jako masę punktową.

W celu narysowania przebiegu potencjału, najłatwiej zauważyć iż spełniona jest następująca zależność:

$$RU(r, z; R) = U\left(\frac{r}{R}, \frac{z}{R}; 1\right), \quad (5)$$

gdzie $U(r, z; R)$ jest oznaczeniem na potencjał $U(r, z)$ dla pierścienia o promieniu R . Łatwo zauważyć, że prawa strona równania (5) zależy wyłącznie od zmiennych bezwymiarowych. Pozwala to wprowadzić bezwymiarowy potencjał $u(r/R, z/R)$ w bezwymiarowych zmiennych, który pozwoli pokazać zupełnie ogólnie zachowanie funkcji $U(r, z; R)$, bez potrzeby ustalania wartości parametrów opisujących układ, takich jak R lub M . Dany jest on wzorem:

$$u\left(\frac{r}{R}, \frac{z}{R}\right) = \frac{R}{GM} U(r, z; R) = \frac{1}{GM} U\left(\frac{r}{R}, \frac{z}{R}; 1\right). \quad (6)$$

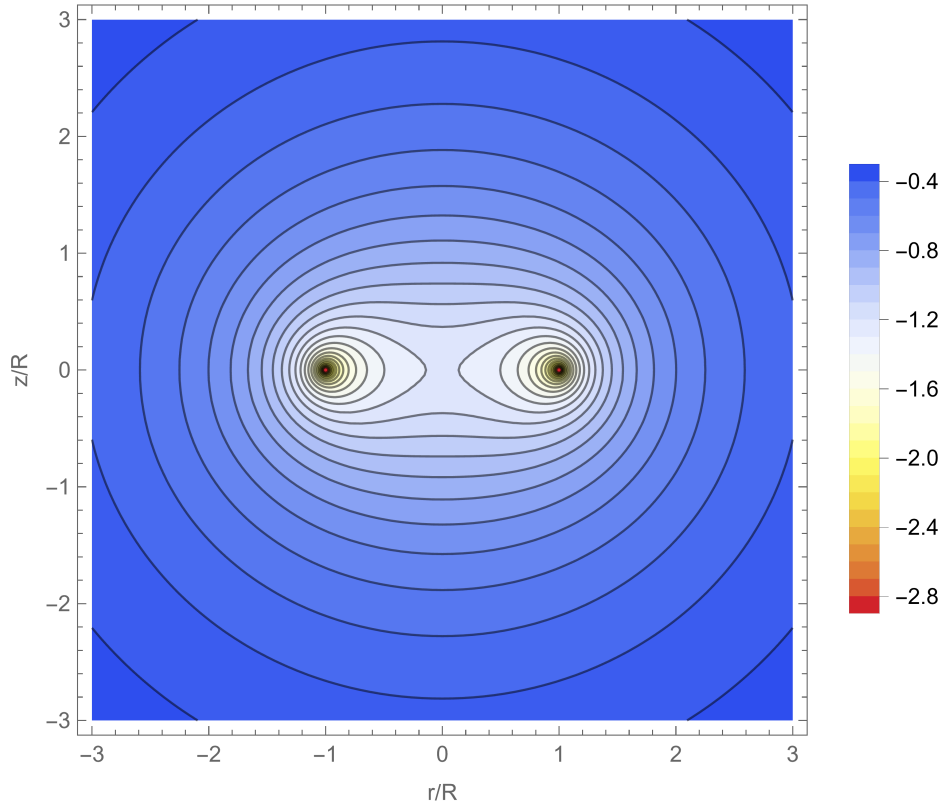
Z potencjału bezwymiarowego trywialnie można odzyskać $U(r, z; R)$. Przebieg potencjału bezwymiarowego przedstawiony jest na Rys. 2. Ze względu na symetrię walcową badanego układu, Rys. 2 dostarcza informacji o postaci potencjału również poza płaszczyzną Oxz .

1.1 Położenia równowagi

Istotnym zagadnieniem jest problem, czy mogą istnieć punkty, w których masa próbna m może spoczywać. W oczywisty sposób punkt krytyczny potencjału występuje w punkcie $(r, z) = (0, 0)$. Nie może istnieć żadne położenie równowagi dla $z \neq 0$, gdyż wtedy z -towa składowa siły działającej na masę m jest niezerowa. Tak więc ewentualnych innych punktów równowagi można się spodziewać tylko w płaszczyźnie pierścienia. Jest również oczywiste, że dla $r > R$ nie może istnieć punkt równowagi, gdyż łatwo pokazać istnienie w takim wypadku niezerowej radialnej składowej siły. Niestety niełatwe jest badanie $\frac{\partial U(r, 0)}{\partial r}$ w sposób analityczny. W celu analizy zastosowana więc zostanie własność skalowania będąca uogólnieniem równania (5):

$$U(\alpha r, \alpha z; \alpha R) = \alpha^{-1} U(r, z; R). \quad (7)$$

Potencjał U dla różnych wartości R zmienia się jedynie o domnożenie stałej oraz przeskalowanie argumentów r i z . Wystarczy więc poszukać punktów krytycznych dla jednej



Rysunek 2: Bezwymiarowy potencjał od cienkiego pierścienia w płaszczyźnie Orz . W istocie w punktach $(\pm 1, 0)$ powyższego wykresu potencjał ten ma osobliwość.

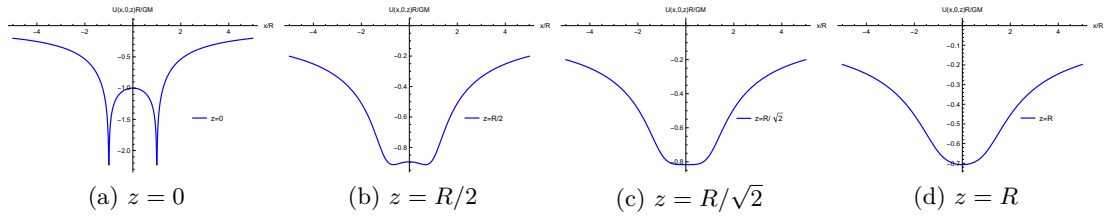
wartości R . Sprawdzono za pomocą programu *Mathematica*, że jedyny punkt krytyczny funkcji $U(r, 0)$ w przedziale $r \in [0, R]$ dla $R = 1$ znajduje się w $r = 0$.

W celu zbadania charakteru tego punktu krytycznego rozważyć można problem ogólniejszy. Jako iż $\left. \frac{\partial U(r, z)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0$, to można pomocniczo potraktować z jako parametr i wtedy badać charakter punktu krytycznego w $r = 0$.

$$\left. \frac{\partial^2 U(r, z)}{\partial r^2} \right|_{r=0} = GM \frac{2z^2 - R^2}{2(R^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}. \quad (8)$$

Druga pochodna nie rozstrzyga o charakterze punktu krytycznego dla $|z| = \frac{R}{\sqrt{2}}$. Prawdą jest jednakże $\left. \frac{\partial^3 U(r, \frac{R}{\sqrt{2}})}{\partial r^3} \right|_{r=0} = 0$ oraz $\left. \frac{\partial^4 U(r, \frac{R}{\sqrt{2}})}{\partial r^4} \right|_{r=0} = GM \frac{14}{9R^5} \sqrt{\frac{2}{3}}$. W takim razie można stwierdzić, że dla $|z| \in [0, \frac{R}{\sqrt{2}})$ radialna składowa siły ma zwrot zgodny z $\hat{r}$, czyli skierowany na zewnątrz pierścienia, natomiast dla $|z| \in [\frac{R}{\sqrt{2}}, +\infty)$ radialna składowa jest przeciwna do $\hat{r}$, czyli do środka pierścienia.

Można teraz odpowiedzieć na pytanie o charakter punktu krytycznego w $(r, z) = (0, 0)$. Nie jest to punkt położenia stabilnego, ale nie jest również do końca punktem położenia niestabilnego. Żeby sprecyzować charakter równowagi w tym punkcie, należy rozważyć ograniczony zakres ruchów masy m , osobno ruchy wyłącznie w płaszczyźnie pierścienia oraz osobno ruchy w kierunku Oz . Ograniczając się do płaszczyzny pierścienia staje się to położenie równowagi niestabilnej, natomiast ograniczając się do osi Oz staje się to położenie równowagi stabilnej. Podobnie można stwierdzić, ograniczając się do płaszczyzn równoległych do Oxy , że dla $|z| \in \left[0, \frac{R}{\sqrt{2}}\right)$ jest w $r = 0$ równowaga niestabilna, natomiast dla $|z| \in \left[\frac{R}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$ stabilna. W celach zaprezentowania właśnie przedstawionych własności, umieszczono na Rys. 3 wykres potencjału na płaszczyznach równoległych do Oxy , dla różnych wartości z . Ze względu na niezależność potencjału od ϕ , wybrano $\phi = 0$, co odpowiada $r = x$.



Rysunek 3: Wykresy przedstawiające potencjał bezwymiarowy w płaszczyznach równoległych do płaszczyzny pierścienia. W istocie są to przekroje wykresu 2 dla ustalonego z . Na osiach użyto jednostek bezwymiarowych. 3a zawiera dwie osłabiwości w $x = \pm R$.

2 Analiza prostych orbit periodycznych

Jako iż na całej prostej $r = 0$ nie działa żadna siła radialna, oraz wzdłuż tej prostej jest punkt równowagi, to można rozważyć drgania masy próbnej m wzdłuż tej prostej. Z kolei cylindryczna symetria sugeruje istnienie orbit kołowych w płaszczyźnie pierścienia. Analiza została podzielona na dwie części, zgodnie z przyjętymi przybliżeniami.

2.1 Nieruchomy pierścień

2.1.1 Ruch po prostej $r=0$

Zakładając ruch po prostej $r = 0$ dostajemy uproszczoną postać potencjału zależnego tylko od z :

$$U(z) = -\frac{GM}{\sqrt{R^2 + z^2}}. \quad (9)$$

Stąd otrzymać można równanie Eulera-Lagrange'a na $z(t)$ oraz przybliżenie małych drgań:

$$\ddot{z} = -\frac{GMz}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \approx -\frac{GMz}{R^3}. \quad (10)$$

Skąd okres małych drgań wynosi:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}. \quad (11)$$

Możliwe jest w tym wypadku znalezienie okresu drgań o skończonej amplitudzie, wyraża się on poprzez funkcje eliptyczne [1]. Warto zwrócić uwagę na podobieństwo zagadnienia do problemu Sitnikova [2].

2.1.2 Ruch na płaszczyźnie $z=0$

W dalszej analizie, gdzie badany jest ruch w płaszczyźnie pierścienia ($z = 0$), przyjęto standardowe oznaczenie

$$k = -\frac{4rR}{(r-R)^2 + z^2}. \quad (12)$$

Przyjmując, że prędkość kątowna ω jest rozumiana jako wartość $\dot{\phi}$, standardowe ćwiczenie z mechaniki klasycznej prowadzi do następującego wyrażenia na prędkość kątową masy m poruszającej się po orbicie kołowej o promieniu R :

$$\omega_0^2 = \frac{GM}{\pi} \frac{(r-R)E(k) + (r+R)K(k)}{r^2|r^2 - R^2|}. \quad (13)$$

Gdzie E oznacza zupełną całkę eliptyczną drugiego rodzaju:

$E(m) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - m \sin^2 \Phi} d\Phi$. Dokładna analiza potencjału efektywnego, w ruchu po orbicie kołowej, mówi że stabilność takiej orbity zależy od promienia. Orbits blisko pierścienia są niestabilne ze względu na zaburzenia radialne oraz drobne zmiany prędkości kątowej, natomiast orbity dalsze są stabilne. Analiza numeryczna daje wartość graniczną, pomiędzy promieniami orbit stabilnych oraz niestabilnych, jako $r^* \approx 1.61R$ [1]. Więc dla promieni $R < r < r^*$ występują orbity niestabilne, dla $r > r^*$ orbity stabilne, natomiast przypadek $r = r^*$, na podstawie analizy numerycznej, jest bardziej skomplikowany. Wtedy orbita wykazuje tymczasową stabilność, gdy nieco zwiększy się promień orbity lub prędkość kątowna, natomiast orbita wykazuje niestabilność gdy promień lub prędkość kątowna się zmniejszą. Powoduje to, że maksymalny czas stabilności takiej orbity, dla $r = r^*$, wynosi połowę okresu oscylacji promienia orbity.

2.2 Ruchomy, nieobrcający się pierścień

2.2.1 Ruch po prostej $r=0$

Analogicznie jak dla pierścienia nieruchomego, rozważyć można sytuację w której zarówno środek pierścienia, jak i masa m , poruszają się jedynie wzdłuż osi Oz . Niech Z

oznacza współrzędną z -tową środka pierścienia. Potencjał wyraża się jako:

$$U(z) = -\frac{GM}{\sqrt{R^2 + (Z - z)^2}}. \quad (14)$$

Wybierając początek układu współrzędnych w środku masy układu, otrzymuje się $Z = -\frac{m}{M}z$. Ponownie można uzyskać przybliżenie małych drgań:

$$\ddot{z} = -\frac{G(M+m)z}{\left(R^2 + \left(1 + \frac{m}{M}\right)^2 z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \approx -\frac{G(M+m)z}{R^3}. \quad (15)$$

Stąd można bezpośrednio odczytać okres oscylacji:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{G(M+m)}}. \quad (16)$$

Jak widać, wzór ten redukuje się do przypadku z nieruchomym pierścieniem, kiedy masa M jest znacznie większa od m . Zgadza się to z przewidywaniami.

2.2.2 Ruch na płaszczyźnie $z=0$

Ponownie występują tutaj orbity kołowe, gdy oba ciała znajdują poruszają się w płaszczyźnie $z = 0$, tym razem jednak pierścień również okrąża środek masy układu. Pamiętając, że r jest oznaczeniem na odległość w płaszczyźnie pierścienia między m a środkiem pierścienia, można łatwo policzyć prędkość kątową takiego układu podwójnego, względem środka masy:

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{M+m}{M}}. \quad (17)$$

Problem stabilności takich orbit nie będzie rozważany w tej pracy. Godnym zauważenia jest fakt, że wszystkie rozważone wyżej orbity kołowe są stabilne ze względu na wychylenie wzdłuż osi z .

3 Złożone orbity periodyczne

Mimo pozornej prostoty, analizowany układ ma niesamowicie skomplikowaną dynamikę, pomimo że składa się z tylko dwóch obiektów fizycznych. Dla przypadku z nieruchomym pierścieniem zagadnienie ma 3 stopnie swobody, dla pierścienia który się nie obraca jest ich już 6, natomiast w najogólniejszym przypadku obracającego się pierścienia jest to aż 9 stopni swobody. Równania ruchu zawierają funkcje eliptyczne, więc nikt nie ma nadzieje na badanie tego układu inaczej niż numerycznie. Patrząc na własności potencjału oraz obserwując ewolucję tego układu, podjęto poszukiwania bardziej wyrafinowanych orbit periodycznych. Znalezione „choreografie” również podzielono na dwie części, te z pierścieniem nieruchomym oraz z ruchomym lecz nieobracającym się. W pierwszym przypadku za parametry określające warunki początkowe wybrano położenie (r, z) oraz

prędkość $(\dot{r}, \dot{z}, \dot{\phi})$. Parametr ϕ ze względu na symetrię nie ma znaczenia, więc w każdym przypadku założono $\phi = 0$. W przypadku pierścienia mogącego się poruszać, wygodniej jest podawać warunki początkowe we współrzędnych kartezjańskich. Dla masy m będą to (x, y, z) oraz $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$, natomiast dla pierścienia będą to parametry środka pierścienia (X, Y, Z) oraz $(\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z})$. Dla uproszczenia $\omega(r)$ oznaczać będzie prędkość kątową dla stabilnej orbity kołowej, która dana jest wzorem (17). Dodatkowo poprzez t_{max} oznaczono czas zbadanej stabilności orbit. Możliwe, że dla niektórych orbit stabilność utrzymuje się przez czas dłuższy niż t_{max} , gdyż niestabilność nie pojawiła się aż do zakończenia obliczeń. Wartość t_{max} jest więc podawana jako dolne oszacowanie czasu stabilności układu, a nie jako jego obliczona wartość.

Ewolucję układu znajdowano rozwiązując równania Eulera-Lagrange'a. Jak wiadomo, lagrangian jest dany jako

$$\mathcal{L} = E_{kin} - E_p, \quad (18)$$

natomiast równania Eulera-Lagrange'a dla współrzędnej uogólnionej q to

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}. \quad (19)$$

W rozpatrywanych standardowych współrzędnych cylindrycznych, bez obrotowych stopni swobody pierścienia, znalezienie energii kinetycznej E_{kin} masy próbnej m jest zadaniem trywialnym:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2).$$

Wystarczy więc do uzyskania kompletu równań podać w każdym przypadku postać energii potencjalnej E_p . W przypadku uwzględnienia obrotowych stopni swobody należy dodatkowo wyznaczyć energię kinetyczną związaną z obrotem pierścienia wokół środka masy.

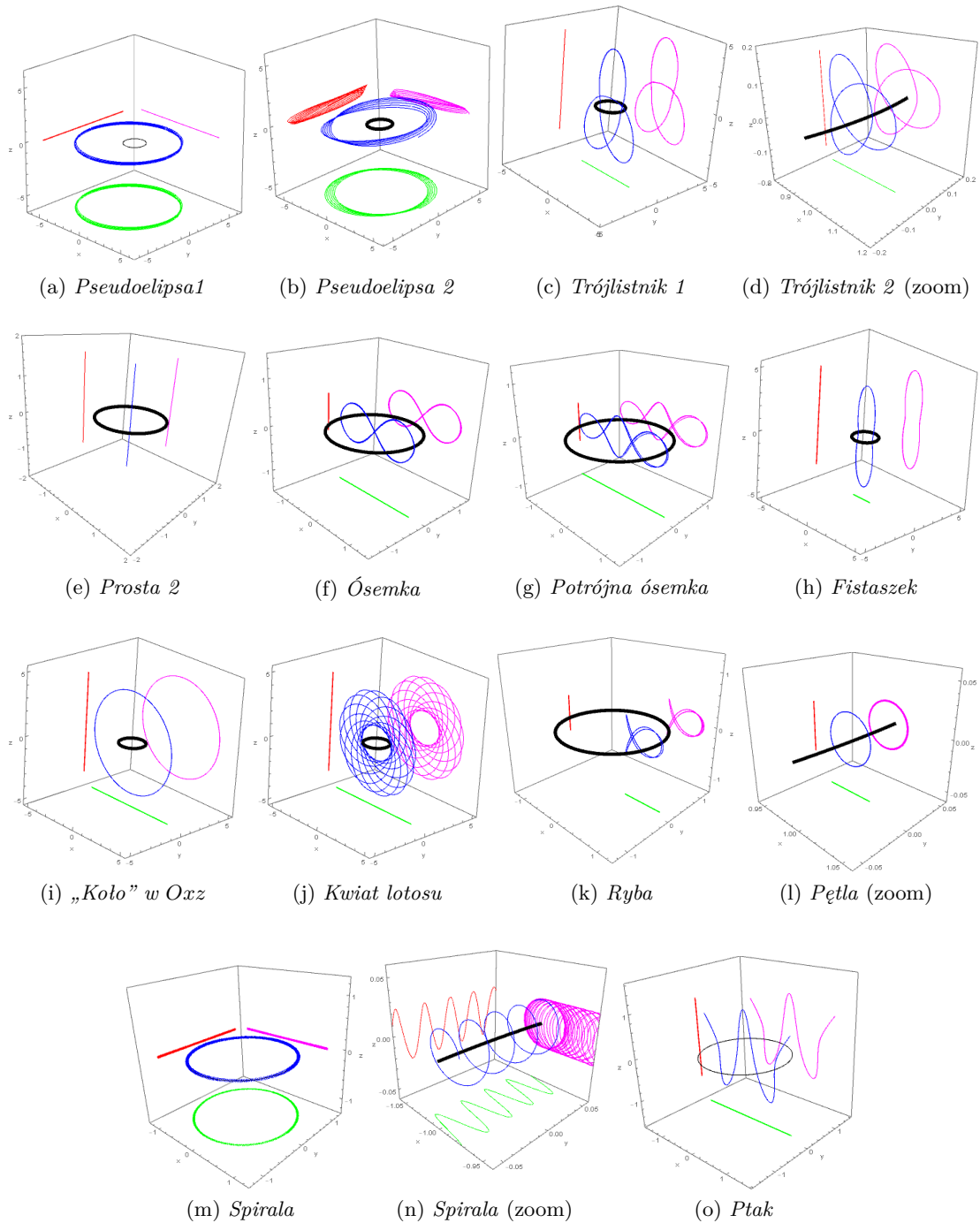
3.1 Nieruchomy pierścień

W przypadku nieruchomego pierścienia energia potencjalna E_p wyraża się jako mU , gdzie U dane jest wzorem (3). Równania Lagrange'a-Eulera rozwiązano numerycznie w programie *Mathematica* (*NDSolve*).

W Tabeli 1 zamieszczono parametry początkowe dla znalezionych „choreografii”, wraz z krótkim opisem słownym. Oprócz podanych parametrów, wzięto również $R = G = m = 1$, a środek pierścienia umieszczono w punkcie $(X, Y, Z) = (0, 0, 0)$.

Tabela 1: Warunki początkowe dla znalezionych „choreografii”, wersja z nieruchomym pierścieniem.

Nazwa	r	z	$\dot{r}$	$\dot{z}$	$\dot{\phi}$	M	t_{max}
Pseudoelipsa 1	4	0	0	0	$\omega(1.1)\frac{1.1^2}{4^2}$	10^3	10
Pseudoelipsa 2	4	0	2	2	$\omega(4)$	10^3	10
Trójlistnik	0	4	5.99236034	0	0	10^3	10
Trójlistnik 2	1.1	0	0	14.5	0	10^3	0.07975
Prosta 1	0	0	0	1	0	10^3	10
Prosta 2	0	0	0	30	0	10^3	10
Ósemka	0	0	11.3	14	0	10^3	10
Potrójna Ósemka	1.1	0	0	29.581631695	0	10^3	5
Fistaszek	0	4	4.3024	0	0	10^3	10
„Koło” w Oxz	0	4	15.3	0	0	10^3	10
Kwiat lotosu	0	4	10.43	0	0	10^3	12
Ryba	1.1	0	0	27.87	0	10^3	10
Pętla	1.02	0	0	6.3	0	10^2	10
Spirala	1.02	0	0	6.3	1	10^2	10
Ptak	0	1	3.14846517	0	0	10^3	5

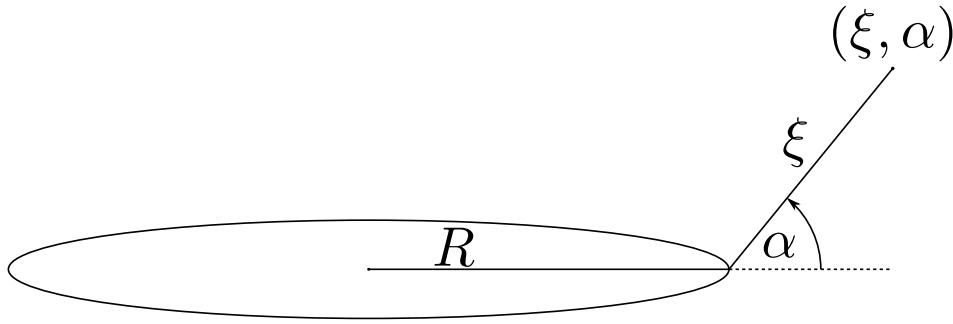


Rysunek 4: Wykresy przedstawiające ewolucję układu. Kolorem czarnym zaznaczono pierścień, niebieskim trajektorię masy m , pozostałymi kolorami rzut trajektorii na odpowiednie płaszczyzny.

Duża część znalezionych orbit wykazała się niestabilnością, stąd wysoka dokładność numeryczna pewnych parametrów w Tabeli 1. Najbardziej niestabilną orbitą okazał się *Trójlistnik2* przedstawiony na Rys. 4d. Niezależnie od wybranych parametrów początkowych orbita traciła swój kształt już po jednym okresie. Ponadto zauważono zaskakującą stabilność układu *Pętla*, przedstawionego na wykresie 4l. Orbita okazuje się stabilna ze względu na wychylenie w dowolnym badanym kierunku, to jest w kierunku radialnym, wzdłuż Oz lub na płaszczyźnie Oxy . Co więcej, orbita ta jest zbliżona do kołowej, co może sugerować iż potencjał w pobliżu pierścienia przypomina potencjał centralny w płaszczyźnie Orz , wycentrowany w punkcie $(r, z) = (R, 0)$. Istotnie, można uzyskać postać asymptotyczną potencjału bardzo blisko pierścienia. W tym celu wygodnie jest wprowadzić nowe zmienne (ξ, α) :

$$r = R + \xi \cos \alpha, \quad z = R \sin \alpha, \quad (20)$$

gdzie ξ to odległość od punktu $(r, z) = (R, 0)$ w płaszczyźnie Orz , natomiast α jest kątem, który zaznaczono na Rys. 5.



Rysunek 5: Schemat wyjaśniający interpretację zmiennych (ξ, α) .

W takich zmiennych potencjał posiada następującą postać asymptotyczną:

$$U(\xi, \alpha) \simeq -\frac{GM}{\pi R} \ln \left(8 \frac{R}{\xi} \right). \quad (21)$$

Wynik nie zależy od kąta α . Widać więc, iż zgodnie z predykcją potencjał okazuje się asymptotycznie (blisko pierścienia, $\xi \approx 0$) centralny, wycentrowany w punkcie $(r, z) = (R, 0)$. Wyraz wyższego rzędu rozwinięcia asymptotycznego funkcji $U(\xi, \alpha)$ zależy już od kąta α , więc orbity kołowe wokół pierścienia, podobne do tej z układu *Pętla* muszą mieć odpowiednio mały promień, inaczej pojawiają się efekty wyższego rzędu i orbita przestaje przypominać kołową.

Niektóre trajektorie wyraźnie wyróżniają się skomplikowaniem nieoczekiwanym w tak prostej sytuacji, co świadczy o interesującej dynamice badanego układu.

3.2 Ruchomy, nieobrcający się pierścień

W przypadku gdy dodatkowo dopuści się postępowy ruch pierścienia, energia potencjalna wyraża się wzorem:

$$E_p = mU \left(\sqrt{(X - x)^2 + (Y - y)^2}, Z - z \right), \quad (22)$$

gdzie U zadane jest wzorem (3), natomiast X, Y, Z to położenie środka pierścienia. Parametry, których nie podano w Tabeli 2 są równe $G = m = 1, y = Y = z = Z = \dot{X} = \dot{Z} = 0$ oraz $t_{max} = 10$, z wyjątkiem układu *Ósemka 2*, gdzie $t_{max} = 1.02$.

Tabela 2: Warunki początkowe dla znalezionych „choreografii”, wersja z ruchomym, nieobrcającym się pierścieniem.

Nazwa	x	X	$\dot{x}$	$\dot{y}$	$\dot{Y}$	$\dot{z}$	M	R
Układ podwójny 1	1	-1	0	$\omega(2)$	$-\omega(2)$	0	10^0	1
Układ podwójny 2	10	-1	0	$10\omega(11)$	$-\omega(11)$	0	10^1	0.1
Ósemka 1	0	0	11.3	0	0	14	10^3	1
Ósemka 2	0	0	$\frac{11.3}{\sqrt{10}}$	0	0	$\frac{14}{\sqrt{10}}$	10^2	1
Spirala	1.1	0.01	-0.01	0.3	0	6	10^2	1

Ze względu na problem z ukazaniem ewolucji badanego układu w formie rysunku, zrezygnowano z graficznej formy prezentacji. Zamiast tego zamieszczona zostaje opisowa analiza znalezionych orbit. Układy podwójne to po prostu pierścień i masa m orbitujące wokół wspólnego środka masy po orbitach kołowych, które to orbity zawierają się w płaszczyźnie pierścienia. Układ nazwany ósemką jest analogiczny do podobnego układu w przypadku nieruchomego pierścienia. Dla większej masy pierścienia orbita jest znacznie stabilniejsza. Układ *Spirala* również jest analogiczny do układu o tej samej nazwie w poprzednim rozdziale. Podobnie jak poprzednio, teraz również orbita wykazuje stabilność.

3.3 W pełni swobodny pierścień

W poprzednich rozdziałach rozpatrywano jedynie ruch postępowy pierścienia, bez jego obrotu. Miało to na celu znaczące uproszczenie analizy prowadzącej do uzyskania równań ruchu, jak i samych rozwiązywanych równań ruchu. W rzeczywistości, dodanie do modelu możliwości obrotu może znacząco wpływać na dynamikę układu, dlatego bardzo ważne jest zaznajomienie się z formalizmem opisu ciał obracających się, gdy poszukuje się modelu możliwie najbardziej realistycznego. Poszukiwania lagrangianu dla ciała obracającego się rozsądnie zacząć od omówienia idei kątów Eulera.

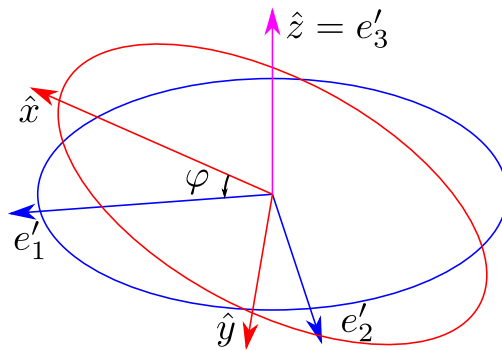
3.3.1 Kąty Eulera

Jednymi z najczęściej używanych do opisu obrotu ciał współrzędnych są kąty Eulera. Istnieje wiele konwencji co do tego jak zdefiniowane są kąty Eulera, jednakże wszystkie z nich łączy wspólna idea opisywania obrotu. Wyróżnia się dwa kartezjańskie układy współrzędnych: nieobrócony, nazywany również układem przestrzennym, oraz obrócony nazywany układem bryły. Układ przestrzenny można rozumieć jako układ w którym przebywa obserwator chcący zaobserwować obrót bryły, natomiast układ bryły to taki, w którym przebywa obserwator obracający się wraz z bryłą. Dla uproszczenia oba z tych układów mają pokrywające się początki, ale nie ma takiej konieczności z punktu widzenia matematycznego. Kąty Eulera mogą opisać obrót wokół dowolnego punktu. Wybór tego punktu nie ma znaczenia w fizyce, gdyż dowolne przekształcenie izometryczne musi być złożeniem obrotu i translacji. Skoro nie ma znaczenia, to za początki układu przestrzennego oraz bryły wybiera się środek masy badanego ciała, gdyż główne momenty bezwładności w układzie zaczepionym w środku masy najczęściej mówią o dynamice danego ciała. Wcześniej wspomniana idea kątów Eulera jest taka, że rozkłada się przejście z układu przestrzennego do układu bryły na 3 następujące po sobie obroty elementarne układu bryły, to znaczy takie wykonywane wokół jednej z osi układu bryły. Ponadto arbitralnie wyróżnia się jedną z osi układu bryły. Za pomocą dwóch pierwszych obrotów elementarnych wybierany jest kierunek w jakim ustawiona jest ta wyróżniona oś układu bryły w układzie przestrzennym, analogicznie jak wybierany jest kierunek w sferycznym układzie współrzędnych. Trzeci obrót elementarny jest wokół wyróżnionej osi. Ilustracja tej idei trzech obrotów elementarnych została przedstawiona na Rys. 6, w sposób zgodny z przyjętą w całej pracy konwencją kątów Eulera.

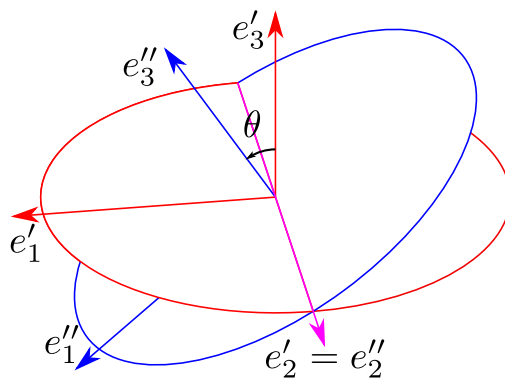
Konwencje kątów Eulera różnią się wyborem wyróżnionej osi, sposobem ustalenia jej kierunku oraz układem wokół którego osi odbywają się obroty elementarne, jak i również kierunkiem w którym naliczane są kąty. Powyżej przedstawiona idea kątów Eulera stosuje się jedynie do konwencji obrotów elementarnych wokół osi układu bryły, zwanej obrotami wewnętrznymi. Przy obrotach wokół osi układu przestrzennego, zwanych obrotami zewnętrznymi, rozumowanie to jednak pozostaje takie samo. Bez utraty ogólności dalsze rozważania będą przeprowadzane w konwencji obrotów wewnętrznych.

Rysunek 6: Przedstawienie idei kątów Eulera, jako złożenia trzech obrotów elementarnych. Bryła, wraz z osiami układu bryły, przed danym obrotem elementarnym zaznaczona jest na czerwono, po obrocie na niebiesko, oś obrotu na „różowo”.

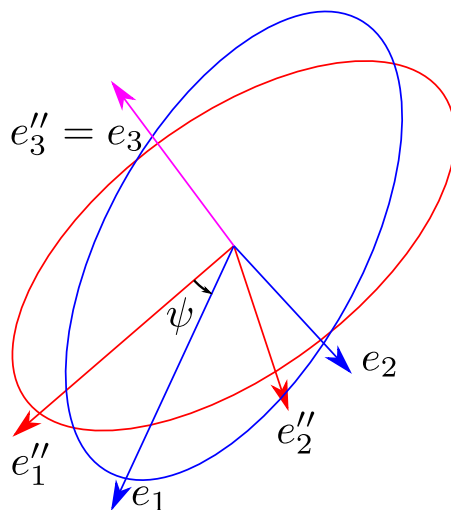
(a) Pierwszy obrót elementarny o kąt φ .



(b) Drugi obrót elementarny o kąt θ .



(c) Trzeci obrót elementarny o kąt ψ .



Dodatkowo, poszczególne obroty elementarne mogą być wykonywane wokół różnych osi układu bryły. Wyróżnia się tutaj dwie jakościowo różne konwencje: właściwe kąty Eulera, w których pierwszy oraz trzeci obrót elementarny są wokół tej samej osi (np. $z - y - z$), oraz kąty Taita–Bryana, w których wszystkie obroty elementarne są wokół innych osi układu bryły (np. $x - y - z$).

Konwencją obowiązującą w całej pracy będą właściwe kąty Eulera wykonywane kolejno wokół osi $z - y - z$ układu bryły, który jest zaczepiony w środku masy bryły, natomiast poszczególne obroty elementarne są zadanymi następującymi macierzami ortogonalnymi:

$$R_2(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos \gamma & 0 & -\sin \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{pmatrix}, \quad R_3(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Macierze te zadają również jednoznacznie kierunek, w którym naliczane są kąty. Pierwszy kąt nazywany będzie φ (patrz Rys. 6a), drugi nazywany będzie θ (patrz Rys. 6b), a trzeci nazywany będzie ψ (patrz Rys. 6c). Oś układu przestrzennego, które przed wykonaniem obrotu pokrywają się z osiami układu bryły, nazywane będą $\hat{x}$, $\hat{y}$ oraz $\hat{z}$, natomiast osie układu bryły po wykonaniu pełnego obrotu nazywane będą e_1 , e_2 oraz e_3 . Dodatkowo pomocniczo wprowadzone zostały oznaczenia na osie układu bryły po pierwszym oraz drugim obrocie elementarnym, odpowiednio są to e'_1 , e'_2 , e'_3 oraz e''_1 , e''_2 , e''_3 . Wszystkie oznaczenia widoczne są na Rys. 6. Działanie macierzy obrotu na osie układu bryły jest definiowane poprzez następującą zależność:

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = R_3(\psi)R_2(\theta)R_3(\varphi) \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Analogicznie przedstawiają się relacje za pomocą których można przedstawić osie e'_i oraz e''_i poprzez osie układu przestrzennego lub bryły, przykładowo:

$$\begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{pmatrix} = R_3(\varphi) \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} = R_2(-\theta)R_3(-\psi) \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Bardzo użytecznie jest wprowadzić macierz obrotu $R(\varphi, \theta, \psi) = R_3(\psi)R_2(\theta)R_3(\varphi)$, która opisuje pełny obrót, to jest taki po wykonaniu wszystkich obrotów elementarnych. Macierz pełnego obrotu ma następującą postać:

$$R(\varphi, \theta, \psi) = R_3(\psi)R_2(\theta)R_3(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi & \cos \theta \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi & -\sin \theta \cos \psi \\ -\cos \theta \cos \varphi \sin \psi - \sin \varphi \cos \psi & -\cos \theta \sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi & \sin \theta \sin \psi \\ \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Z postaci tej macierzy natychmiast można odczytać składowe wektorów e_i w bazie układu przestrzennego $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$. Przykładowo składowe wektora e_3 są dane jako kolejne kolumny trzeciego wiersza macierzy $R(\varphi, \theta, \psi)$, co zobaczyć można we wprowadzonym dalej równaniu (36).

3.3.2 Główne osie bezwładności

Wyrażenie na energię kinetyczną ciała mogącego się obracać jest znane i w pełnej ogólności ma postać:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot (I_c \boldsymbol{\omega}) + \frac{1}{2} M \mathbf{v}_c^2, \quad (27)$$

gdzie I_c jest tensorem momentu bezwładności względem osi przechodzących przez środek masy ciała, v_c jest prędkością postępową środka masy, M masą ciała, natomiast $\boldsymbol{\omega}$ wektorem prędkości kątowej. Tensor momentu bezwładności jest utożsamiany z macierzą symetryczną o wymiarze 3×3 , a więc istnieje zestaw trzech ortogonalnych osi względem których ma on postać diagonalną. Osie te nazywa się osiami głównymi bryły, natomiast momenty bezwładności względem tych osi nazywa się głównymi momentami bezwładności. Diagonalna postać tensora momentu bezwładności jest pożądana, gdyż znacząco upraszcza obliczenia. Dlatego też za osie układu bryły, opisane szczegółowo w rozdziale 3.3.1, będą brane osie główne tej bryły. Wtedy tensor momentu bezwładności ma postać:

$$I_c = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Przykładowo dla torusa o promieniach R_0, r_0 (Rys. 8) i masie M

$$I_c = \frac{M}{8} \begin{pmatrix} 5r_0^2 + 4R_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & 5r_0^2 + 4R_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & 6r_0^2 + 8R_0^2 \end{pmatrix}, \quad (29)$$

gdzie osie główne wybrane są w taki sposób, że e_3 leży na osi symetrii torusa, natomiast pozostałe dwie osie główne są wzięte jako dwa dowolne wektory prostopadłe do e_3 i do siebie nawzajem. Dla $r_0 \rightarrow 0$ torus przechodzi w okrąg.

Do uzyskania wyrażenia na energię kinetyczną ruchu obrotowego w zależności od kątów Eulera pozostaje więc jeszcze wyrazić $\boldsymbol{\omega}$ poprzez te kąty w układzie bryły.

3.3.3 Prędkość kątowa w układzie bryły

Prędkość kątową bryły $\boldsymbol{\omega}$ można policzyć jako sumę prędkości kątowych wynikających z każdego obrotu elementarnego osobno. Można w celu lepszego zrozumienia tego zastosować analogię do prędkości postępowej. Ruch postępowy analogicznie jak obrotowy można rozbić na trzy translacje elementarne, na przykład wzdłuż osi $\hat{x}$, $\hat{y}$ oraz $\hat{z}$ układu przestrzennego. Niech pierwsza translacja elementarna zmieni prędkość bryły o $\dot{x}\hat{x}$,

druga o $\dot{y}\hat{y}$ a trzecia o $\dot{z}\hat{z}$, oczywistym jest że po takich trzech elementarnych translacjach bryła będzie się poruszać z prędkością będącą sumą poszczególnych składowych $\dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} + \dot{z}\hat{z}$.

Tak więc pierwszy z obrotów elementarnych wykonywany jest wykonywany z prędkością kątową $\dot{\varphi}\hat{z}$, drugi z prędkością kątową $\dot{\theta}e'_2$ a trzeci z prędkością kątową $\dot{\psi}e_3$, tak więc całkowita prędkość kątowa wynosi:

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\hat{z} + \dot{\theta}e'_2 + \dot{\psi}e_3. \quad (30)$$

Pozostaje więc wyrazić $\hat{z}$ oraz e'_2 poprzez osie układu bryły e_i . Po skorzystaniu z relacji (24)-(26) otrzymuje się:

$$\hat{z} = -e_1 \sin \theta \cos \psi + e_2 \sin \theta \sin \psi + e_3 \cos \theta. \quad (31)$$

$$e'_2 = e_1 \sin \psi + e_2 \cos \psi. \quad (32)$$

Prowadzi to do ostatecznego wyrażenia na prędkość kątową w układzie bryły:

$$\boldsymbol{\omega} = e_1(\dot{\theta} \sin \psi - \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi) + e_2(\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi) + e_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta). \quad (33)$$

3.3.4 Lagrangian obracającego się ciała

Korzystając z równań (28) oraz (33) można wyrazić obrotową część lagrangianu dla dowolnej swobodnej bryły:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}I_1(\dot{\theta} \sin \psi - \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi)^2 + \frac{1}{2}I_2(\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi)^2 + \frac{1}{2}I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2. \quad (34)$$

W sytuacji gdy dwa główne momenty bezwładności są sobie równe, na przykład $I_1 = I_2$, lagrangian znacząco się upraszcza

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}I_1(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2. \quad (35)$$

Z taką sytuację mamy do czynienia w przypadku torusa (29).

3.3.5 Obrócony potencjał

Do pełnego lagrangianu potrzebny jest również potencjał jaki wytwarza obrócony pierścień. W celu jego wyznaczenia niech X, Y, Z będą współrzędnymi środka pierścienia w układzie przestrzennym, x, y, z współrzędnymi masy punktowej w tym układzie oraz φ, θ, ψ kątami Eulera, o które obrócił się pierścień. Potencjał pierścienia ze względu na jego symetrię zależy od dwóch wielkości: odległości masy punktowej od osi symetrii pierścienia r' , oraz odległości masy punktowej od płaszczyzny pierścienia z' . Dla nieobróconego pierścienia potencjał wynosił $U(r, z)$, tak jak w równaniu (3) wyprowadzonym w Rozdziale 1. Potencjał obróconego pierścienia będzie wynosił więc po prostu $U(r', z')$.

Do obliczenia r' oraz z' przydatna będzie znajomość wektora normalnego do płaszczyzny pierścienia, czyli wersora e_3 , wyrażonego przez osie układu przestrzennego. Ze wzorów (24) oraz (26) można wyznaczyć:

$$e_3 = \hat{x} \sin \theta \cos \varphi + \hat{y} \sin \theta \sin \varphi + \hat{z} \cos \theta. \quad (36)$$

Widać po tym równaniu że wybór takiej a nie innej konwencji kątów Eulera nie był przypadkiem, otrzymuje się bowiem, że wersor normalny do płaszczyzny pierścienia ma znaną postać wersora radialnego ze współrzędnych sferycznych.

W celu obliczenia r' można skorzystać z formuły, która zwraca odległość między prostą przechodzącą przez dwa punkty $\mathbf{x}_1$ oraz $\mathbf{x}_2$ o znanych współrzędnych a punktem o współrzędnych $\mathbf{x}_0$ [22]:

$$r' = \frac{\|(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \times (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|}. \quad (37)$$

W powyższym równaniu oraz w dalszej części pracy $\|\cdot\|$ oznacza normę wektora. Wynik nie zależy od wybranych punktów na prostej, można więc wybrać:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 + e_3. \quad (38)$$

Otrzymuje się wtedy

$$\begin{aligned} r' = & \left\{ [(X-x) \cos \theta + (Z-z) \sin \theta \cos \varphi]^2 \right. \\ & + [(Y-y) \cos \theta + (Z-z) \sin \theta \sin \varphi]^2 \\ & \left. + \sin^2 \theta [(X-x) \sin \varphi + (Y-y) \cos \varphi]^2 \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (39)$$

Żeby obliczyć z' można zastosować podobną metodę co przy r' , gdyż znana jest formuła na odległość pomiędzy płaszczyzną, o wektorze normalnym $\mathbf{n}$ oraz zawierającą punkt $\mathbf{x}_1$, a punktem $\mathbf{x}_0$ [23]:

$$z' = \frac{|\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1)|}{\|\mathbf{n}\|} \quad (40)$$

Poszczególne wielkości powyższego równania można w tym przypadku wziąć jako

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n} = e_3. \quad (41)$$

W efekcie otrzymuje się wyrażenie na z' :

$$z' = \left| \sin \theta [(X-x) \cos \varphi + (Y-y) \sin \varphi] + (Z-z) \cos \theta \right|. \quad (42)$$

W praktyce wartość bezwzględna we wzorze powyżej jest zbędna, bo w potencjale (3) występuje wyłącznie z^2 .

3.3.6 Przykład w pełni swobodnej dynamiki

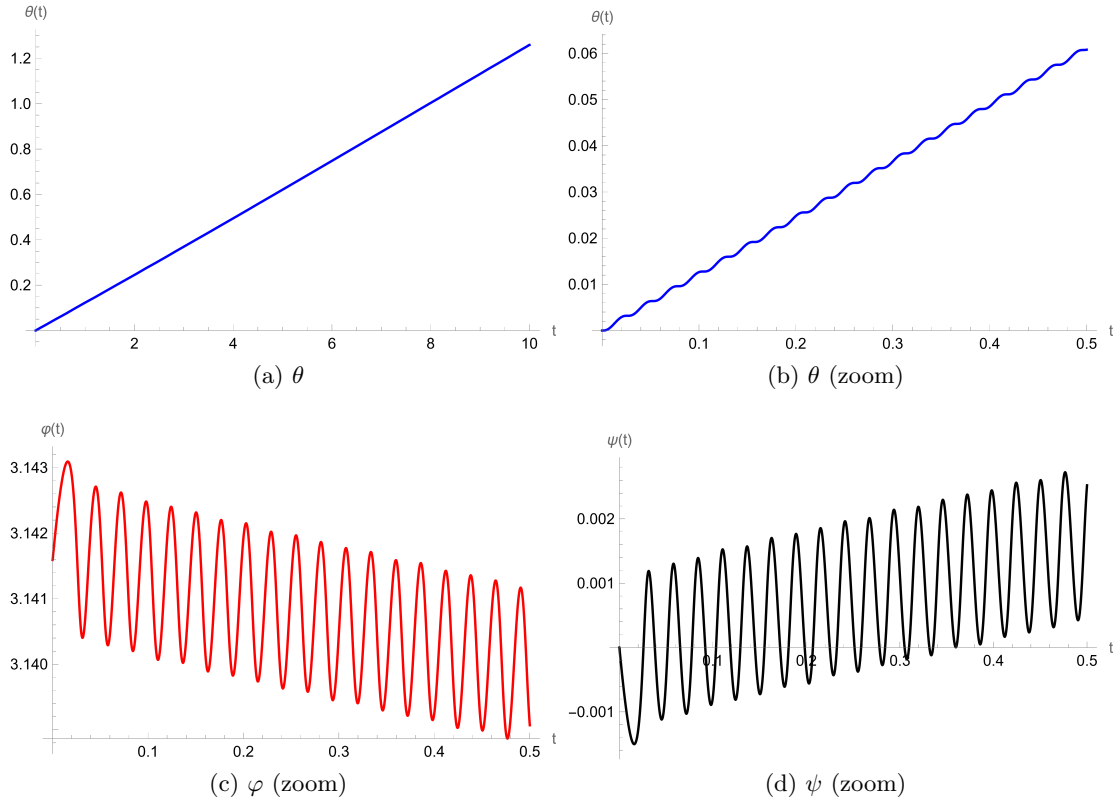
Powyżej dostarczony formalizm może zostać wykorzystany do opisu w pełni swobodnego ruchu dowolnej bryły sztywnej. Dla pierścienia i masy punktowej pełny lagrangian składa się z energii kinetycznej ruchu postępowego środka masy, energii kinetycznej ruchu obrotowego pierścienia danej wzorem (34) oraz energii potencjalnej, czyli potencjału od obróconego pierścienia $U(r', z')$ (zob. równania (39) oraz (42)) domnożonego przez masę m . Do opisu układu użyto zmiennych x, y, z (położenie masy punktowej), X, Y, Z (położenie środka masy pierścienia) oraz φ, θ, ψ (kąty Eulera opisujące orientację pierścienia). Zbadano jeden zestaw parametrów początkowych, które są uogólnieniem wcześniej badanego układu *Spirala* (zob. Rys. 4mn) na przypadek pełnej swobody ruchu pierścienia. Wybrano w nim $G = R = m = 1$, $y = Y = z = Z = \theta = \psi = \dot{x} = \dot{X} = \dot{\varphi} = \dot{\theta} = \dot{\psi} = 0$ oraz $t_{max} = 10$. Pozostałe parametry początkowe podano w Tabeli 3.

Tabela 3: Warunki początkowe dla znalezionych „choreografii”, wersja z ruchomym, obracającym się pierścieniem.

Nazwa	x	X	φ	$\dot{y}$	$\dot{Y}$	$\dot{z}$	$\dot{Z}$	M
Spirala	$1.02 \frac{100}{101}$	$-\frac{1.02}{101}$	π	$0.3 \frac{100}{101}$	$-\frac{0.3}{101}$	$6.3 \frac{100}{101}$	$-\frac{6.3}{101}$	10^2

Ustalenie $\varphi = \pi$ nie ma żadnego fizycznego wpływu na układ, jednakże upraszcza numeryczne rozwiązanie równań ruchu. Wartości parametrów początkowych w istocie są takie same jak dla układu *Spirala* z Tabeli 1 po przetransformowaniu ich do układu spoczywającego środka masy. Obserwowane jest zachowanie analogiczne jak w przypadku pierścienia spoczywającego, to znaczy masa punktowa zaczyna ruchem spiralnym okrążyć pierścień. Dodatkowe oddziaływanie masy na pierścień zmienia jego orientację, lecz nie wytrąca jej to ze spiralnej orbity. Zgodnie z równaniem (21) potencjał w pobliżu pierścienia jest silnie pułapkujący, więc obrót pierścienia okazuje się niewystarczający aby wyrzucić masę punktową z jej spiralnej orbity.

Interesujący może również być wpływ masy m na orientację pierścienia w przestrzeni. Przebiegi poszczególnych kątów Eulera w czasie zamieszczono na Rys. 7.



Rysunek 7: Przebiegi wartości poszczególnych kątów Eulera w zależności od czasu.

Na powyższych wykresach widać wyraźnie oscylacje kątów, których okres pokrywa się z okresem obrotu masy punktowej wokół pierścienia. Należy zauważyć, że przy nieobecności masy m każdy z tych kątów byłby stały, więc jakiegokolwiek zmiany θ, φ, ψ pochodzą od oddziaływania grawitacyjnego. Można policzyć, iż moment pędu układu wzdłuż osi Oy jest w chwili początkowej niezerowy, co manifestuje się narastaniem kąta θ na Rys. 7a. Co najciekawsze, widoczne są również oscylacje kąta ψ , mimo iż mogłoby się wydawać, że masa punktowa nie może bezpośrednio rozpędzać obrotu pierścienia wokół jego osi symetrii. Jednakże należy zauważyć, że wszystkie kąty Eulera są ze sobą sprzężone w lagrangianie, a co za tym idzie mogą wymieniać momenty pędu między sobą. Jest to tylko jeden z przykładów na wysoce nieintuicyjne zachowanie bryły sztywnej.

4 Potencjał torusa

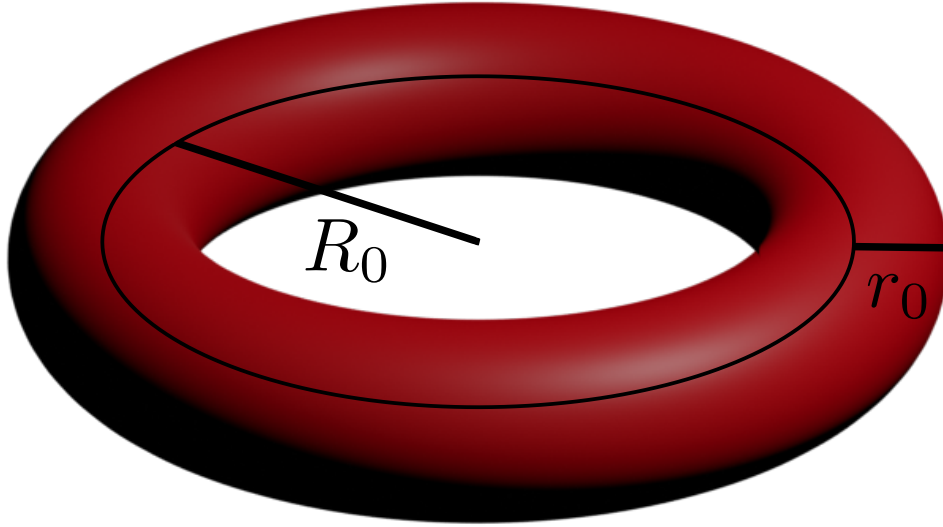
Wiele naturalnie formujących się struktur posiada kształt toroidalny, przykładem mogą być różne obiekty astrofizyczne, takie jak galaktyki pierścieniowe albo struktury ciemnej materii [8]. Również dyski akrecyjne mogą być przybliżane poprzez taki kształt.

Stąd naturalnie pojawia się problem znalezienia potencjału generowanego w przestrzeni przez taki torus. Problem próbował rozwiązać wybitny niemiecki matematyk Bernhard Riemann w jednej ze swoich ostatnich prac [3], jednakże nie dokończył tej pracy. Po jego śmierci problemowi potencjału torusa nikt nie poświęcał uwagi, aż stosunkowo niedawno, w 2003 roku, rosyjski uczony B. P. Kondratyev odświeżył ten problem [4, 7], podając potencjał na osi symetrii jednorodnego torusa o gęstości τ , promieniu R_0 oraz grubości r_0 (oznaczenia wyjaśnione na Rys. 8) :

$$U(0, 0, z) = -\frac{8}{3}\pi\tau Gr_0 R_0 J(z) = -\frac{4}{3}\frac{GM_t}{\pi r_0} J(z). \quad (43)$$

We wzorze powyżej $M_t = 2\pi^2\tau R_0 r_0^2$ jest masą torusa, natomiast $J(z)$ jest funkcją zadaną następującym wzorem:

$$J(z) = \left(\frac{1}{\tilde{k}} + \tilde{k}\right) E(\tilde{k}^2) - \left(\frac{1}{\tilde{k}} - \tilde{k}\right) K(\tilde{k}^2), \quad \text{gdzie} \quad \tilde{k} = \frac{r_0}{\sqrt{R_0^2 + z^2}}. \quad (44)$$



Rysunek 8: Torus wraz z zaznaczonym promieniem głównym R_0 (ang. *major radius*) oraz promieniem pomniejszym r_0 (ang. *minor radius*).

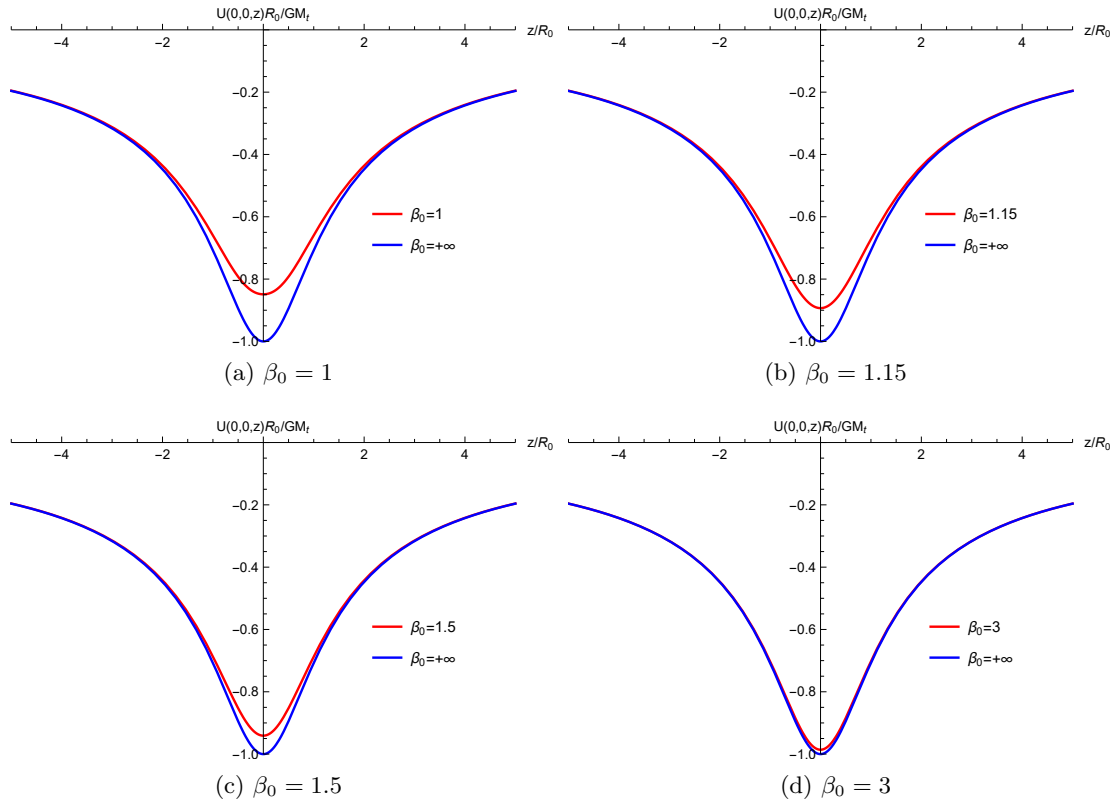
Niestety, nawet okrojony do $r = 0$ potencjał ogólnego torusa nie posiada własności skalowania, jak to było w przypadku cienkiego pierścienia. Dlatego trudne będzie wyciągnięcie ogólnych wniosków na jego temat. Jednakże zawężając się do torusów o ustalonym stosunku $\beta_0 = R_0/r_0$, ponownie można zauważyć własność skalowania:

$$\tilde{k} = \frac{1}{\beta_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{R_0}\right)^2}}. \quad (45)$$

Zapisując $\tilde{k}$ w taki sposób widać, iż przy ustalonym β_0 funkcja J zależy jedynie od z/R_0 , co symbolicznie będzie zapisywane jako $J\left(\frac{z}{R_0}\right)$. Korzystając z tej własności, podobnie jak dla cienkiego pierścienia, można wyrazić bezwymiarowy potencjał dla torusa przy ustalonym β_0 :

$$\frac{U(0,0,z)R_0}{GM_t} = -\frac{4}{3}\frac{\beta_0}{\pi}J\left(\frac{z}{R_0}\right) \quad (46)$$

Dla kilku wybranych wartości β_0 przedstawiono wykres potencjału na Rys. 9.



Rysunek 9: Wykresy przedstawiające bezwymiarowy potencjał torusa na jego osi symetrii walcowej. Dla porównania na każdym z wykresów na niebiesko zaznaczono potencjał cienkiego pierścienia (czyli torusa dla którego $\beta_0 = +\infty$) o takiej samej masie i promieniu równym R_0 . Torus maksymalnie „gruby”, odpowiada $\beta_0 = 1$.

Od momentu pojawienia się rozwiązania (43) na osi torusa pojawiło się kilka opracowań problemu potencjału torusa w dowolnym punkcie, każde podchodzące do niego w nieco inny sposób.

- W 2007 roku Kondratyev znalazł wyrażenie całkowe na potencjał torusa, sumując potencjały cienkich dysków [5].
- Do 2010 roku Kondratyev we współpracy z innymi uczonymi znaleźli wyrażenie na potencjał torusa w postaci szeregu Laplace’a [6, 7].
- W 2010 roku Bannikova i inni odnaleźli wyrażenie całkowe na potencjał torusa, sumując potencjały cienkich pierścieni (okręgów) [8].
- W 2018 roku Matt Majic, traktując problem znalezienia potencjału jako poszukiwanie rozwiązania równania Poissona (podobnie jak w oryginalnym podejściu Riemanna [3]), znalazł wyrażenie na potencjał torusa w postaci szybko zbieżnego szeregu nieskończonego [9].

Jak widać, każde z dotychczas otrzymanych rozwiązań potencjału torusa zostało otrzymane na drodze jednego z dwóch podejść: rozwiązania w postaci całki oznaczonej, lub szybko zbieżnego szeregu nieskończonego. Nie udało się dotychczas uzyskać rozwiązania będącego skończoną kombinacją znanych funkcji elementarnych lub specjalnych.

Warto poddać każde z wyżej wymienionych podejść głębszej analizie, celem oceny stosowności tych rozwiązań do badania dynamiki układu torusa i masy punktowej.

4.1 Wyznaczenie potencjału metodą poprzez szereg

W celu pełnego zrozumienia wyników pracy [9] należy najpierw omówić przyjętą metodę znalezienia potencjału torusa U . Wykorzystano fakt, iż spełnia on równanie Poissona

$$\nabla^2 U = -4\pi G \tau(\mathbf{x}), \quad (47)$$

gdzie $\tau(\mathbf{x})$ jest gęstością torusa w punkcie $\mathbf{x}$. W przypadku jednorodnego torusa

$$\tau(\mathbf{x}) = \tau \chi_{torus}(\mathbf{x}), \quad (48)$$

gdzie $\chi_{torus}(\mathbf{x})$ jest funkcją charakterystyczną torusa, która przyjmuje wartość 1 dla punktów $\mathbf{x}$ w jego wnętrzu i wartość 0 dla $\mathbf{x}$ poza torusem. Do rozwiązania tego problemu wykorzystano jego naturalne współrzędne, to znaczy współrzędne toroidalne, definiowane w następujący sposób za pomocą współrzędnych kartezjańskich x , y , z oraz parametru a :

$$\eta = \frac{1}{2} \ln \frac{(\rho + a)^2 + z^2}{(\rho - a)^2 + z^2}, \quad \sigma = \pi \delta_z^0 \Theta(a - \rho) + \operatorname{sgn}(z) \arccos \frac{r^2 - a^2}{\sqrt{(r^2 + a^2)^2 - 4\rho^2 a^2}} \quad (49)$$

$$\phi = \operatorname{atan2}(x, y); \quad \eta \geq 0, \quad -\pi < \sigma \leq \pi, \quad 0 \leq \phi < 2\pi,$$

gdzie wykorzystano funkcję delta kroneckera δ_z^0 , funkcję Heaviside’a $\Theta(a - \rho)$, funkcję signum $\operatorname{sgn}(z)$ oraz $\operatorname{atan2}$ zwracającą kąt pomiędzy punktem (x, y) a osią Ox wraz z odpowiednim uwzględnieniem ćwiartki w której znajduje się ten punkt. Konwencja

odnośnie $\Theta(0)$ może być dowolna, gdyż dla $(\rho, z) = (a, 0)$ kąt σ nie jest dobrze określony. Ponadto dla zwartości zapisu wprowadza się następujące podstawienia:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \beta = \cosh \eta = \frac{r^2 + a^2}{\sqrt{(r^2 + a^2)^2 - 4\rho^2 a^2}}, \quad (50)$$

gdzie $\beta \geq 1$ oraz $r, \rho \geq 0$. Wcześniej wprowadzone oznaczenie $\beta_0 = R_0/r_0$ jest nieprzypadkowe, jak się okazuje jest to wartość β na powierzchni rozpatrywanego torusa. Z pomocą tych współrzędnych można opisać dowolny torus spełniający $\beta_0 > 1$, czyli każdy oprócz takiego, dla którego $R_0 = r_0$. Dzieje się tak dlatego, że $\beta = 0$ implikuje $\rho = 0$, więc taki torus byłby w tych współrzędnych jedynie osią Oz . Można zrozumieć wykluczenie tego konkretnego torusa patrząc na Rys. 10. Torusy o coraz mniejszym β_0 są w tych współrzędnych coraz większe, natomiast taki spełniający $\beta_0 = 1$ musiałby być nieskończonych rozmiarów, redukuje się on więc do samej osi Oz w tych współrzędnych.

Transformacja odwrotna do współrzędnych kartezjańskich zadana jest jako:

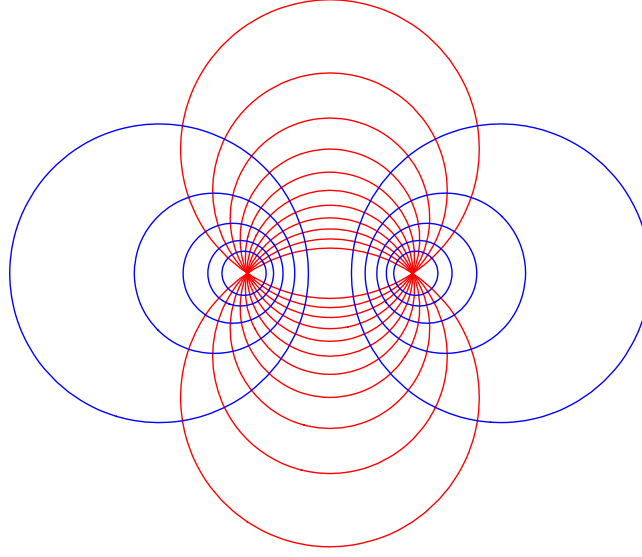
$$x = \frac{a \sinh \eta \cos \phi}{\cosh \eta - \cos \sigma}, \quad y = \frac{a \sinh \eta \sin \phi}{\cosh \eta - \cos \sigma}, \quad z = \frac{a \sin \sigma}{\cosh \eta - \cos \sigma}. \quad (51)$$

Współrzędne te mają bardzo naturalną interpretację, przedstawioną na Rys. 10. Można sprawdzić, że powierzchnie stałego η są torusami, które na płaszczyźnie z Rys. 10 zaznaczone są kolorem niebieskim, ponadto wraz z rosnącym η generowane są torusy o coraz mniejszym r_0 . Dla $\eta = 0$ otrzymuje się torus zdegenerowany do osi z , natomiast dla $\eta = \infty$ torus zdegenerowany do okręgu o promieniu $a = \sqrt{R_0^2 - r_0^2}$, który dalej okaże się być okręgiem ogniskowania oraz zbiorem wszystkich punktów osobliwych tego układu współrzędnych. Współrzędna σ jest kątem, który określa położenie na niebieskich okręgach z Rys. 10. Linie stałego σ na Rys. 10 zaznaczone są czerwonymi okręgami. Punkty przecięcia wszystkich z tych okręgów są nazywane ogniskami. Ogniska na płaszczyźnie rysunku 10 nazywane będą F_1 oraz F_2 . Wtedy dla punktu P z płaszczyzny Oxz zachodzi

$$\sigma = \angle (|PF_1|, |PF_2|), \quad (52)$$

czyli jest to kąt pomiędzy odcinkami łączącymi punkt P z ogniskami. Wszystkie ogniska toroidalnego układu współrzędnych znajdują się na okręgu o promieniu a , należy zwrócić uwagę iż a jest tym samym parametrem co w równaniu (49). Okrąg ten nazywany będzie okręgiem ogniskowania.

Warto zwrócić uwagę na człon z deltą Kroneckera w definicji σ w równaniu (49). Jest on niezgodny z najczęściej używaną konwencją, na przykład tą z [9], jednakże człon ten jest konieczny w celu poprawnego określenia kąta σ na płaszczyźnie $z = 0$. W powszechnie obowiązującej konwencji bez członu z deltą, na tej płaszczyźnie otrzymuje się $\sigma = 0$. Jednakże zaraz ponad płaszczyznę $z = 0$ otrzymamy wtedy $\sigma \approx \pi$ dla $\rho < a$ oraz $\sigma \approx 0$ dla $\rho > a$, natomiast zaraz pod tą płaszczyznę $\sigma \approx -\pi$ dla $\rho < a$ oraz $\sigma \approx 0$ dla $\rho > a$. Widać więc że członu z deltą Kroneckera nie można pomijać, gdyż kąt σ posiadałby skok dla $z = 0$, $\rho < a$. Prawidłowy kąt w tym obszarze to $\sigma = \pi$.



Rysunek 10: Układ współrzędnych dwubiegunowych. Obrót tego układu współrzędnych wokół pionowej osi symetrii rysunku generuje współrzędne toroidalne. Szczegółowe wyjaśnienie w tekście.

Wracając do głównego problemu, okazuje się iż operator Laplace'a separuje się we współrzędnych toroidalnych, co oznacza że dowolne rozwiązanie równania Poissona uda się wyrazić jako kombinację liniową następujących harmonik:

$$\Delta \left\{ \begin{matrix} P_{n-1/2}^m(\beta) \\ Q_{n-1/2}^m(\beta) \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \cos(n\sigma) \\ \sin(n\sigma) \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} e^{+im\phi} \\ e^{-im\phi} \end{matrix} \right\}, \quad \Delta = \sqrt{2\beta - 2\cos\sigma}, \quad n, m \in \mathbb{N}, \quad (53)$$

gdzie nawias wąsaty oznacza kombinację liniową wyrażeń objętych przez ten nawias. Symetria problemu narzuca liczbę azymutalną $m = 0$ [9]. Funkcje $P_{n-1/2}^m$ oraz $Q_{n-1/2}^m$ są stowarzyszonymi funkcjami Legendre'a połówkowego rzędu, odpowiednio pierwszego i drugiego rodzaju. Funkcje $P_{n-1/2}^m(\beta)$ są osobliwe na pierścieniu ogniskowania ($\beta = \infty$), natomiast funkcje $Q_{n-1/2}^m(\beta)$ są osobliwe na osi Oz ($\beta = 1$). Przyjęte definicje funkcji Legendre'a oraz implementacja w programie *Mathematica* znajdują się w dodatku A.1.

W celu uproszczenia problemu można równanie (47) rozwiązać osobno w dwóch obszarach, wewnątrz torusa uzyskując rozwiązanie U_i oraz na zewnątrz torusa z rozwiązaniem U_o , a następnie narzucić odpowiednie warunki na powierzchni torusa celem uzyskania odpowiedniej regularności rozwiązania. Ponadto można U_i przedstawić jako $U_i = U_P + U_L$, gdzie U_P jest dowolną funkcją spełniającą w tym obszarze równanie Poissona, natomiast U_L jest funkcją spełniającą równanie Laplace'a w tym obszarze,

odpowiednio dopasowaną do U_P . Tak więc problem zredukowano do następujących równań:

$$\nabla^2 U_P = -4\pi G\tau, \quad \nabla^2 U_L = \nabla^2 U_o = 0, \quad (54)$$

z warunkiem na brzegu torusa:

$$U_i = U_o, \quad \partial_\beta U_i|_{\beta=\beta_0} = \partial_\beta U_o|_{\beta=\beta_0}. \quad (55)$$

Przyjęto $U_P = \frac{2}{3}\pi G\tau(r^2 + a^2)$. Mimo iż wybór U_P jest zupełnie arbitralny, to może jednak wpływać on na tempo zbieżności uzyskanego rozwiązania. Prowadzi to do następujących rozwiązań na poszczególne potencjały:

$$\begin{aligned} U_P &= \Delta \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n(\beta) \cos(n\sigma), \\ U_L &= \Delta \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n Q_{n-1/2}(\beta) \cos(n\sigma), \\ U_o &= \Delta \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n P_{n-1/2}(\beta) \cos(n\sigma), \end{aligned} \quad (56)$$

gdzie $a_n(\beta)$, b_n oraz c_n należy wyznaczyć. Wynoszą one [9]:

$$\begin{aligned} a_n(\beta) &= -\frac{8}{3}G\tau a^2 \epsilon_n \beta Q'_{n-1/2}(\beta), \\ b_n &= \sinh^2 \eta_0 \left[P_{n-1/2}(\beta_0) a'_n(\beta_0) - P'_{n-1/2}(\beta_0) a_n(\beta_0) \right], \\ c_n &= \sinh^2 \eta_0 \left[Q_{n-1/2}(\beta_0) a'_n(\beta_0) - Q'_{n-1/2}(\beta_0) a_n(\beta_0) \right], \end{aligned} \quad (57)$$

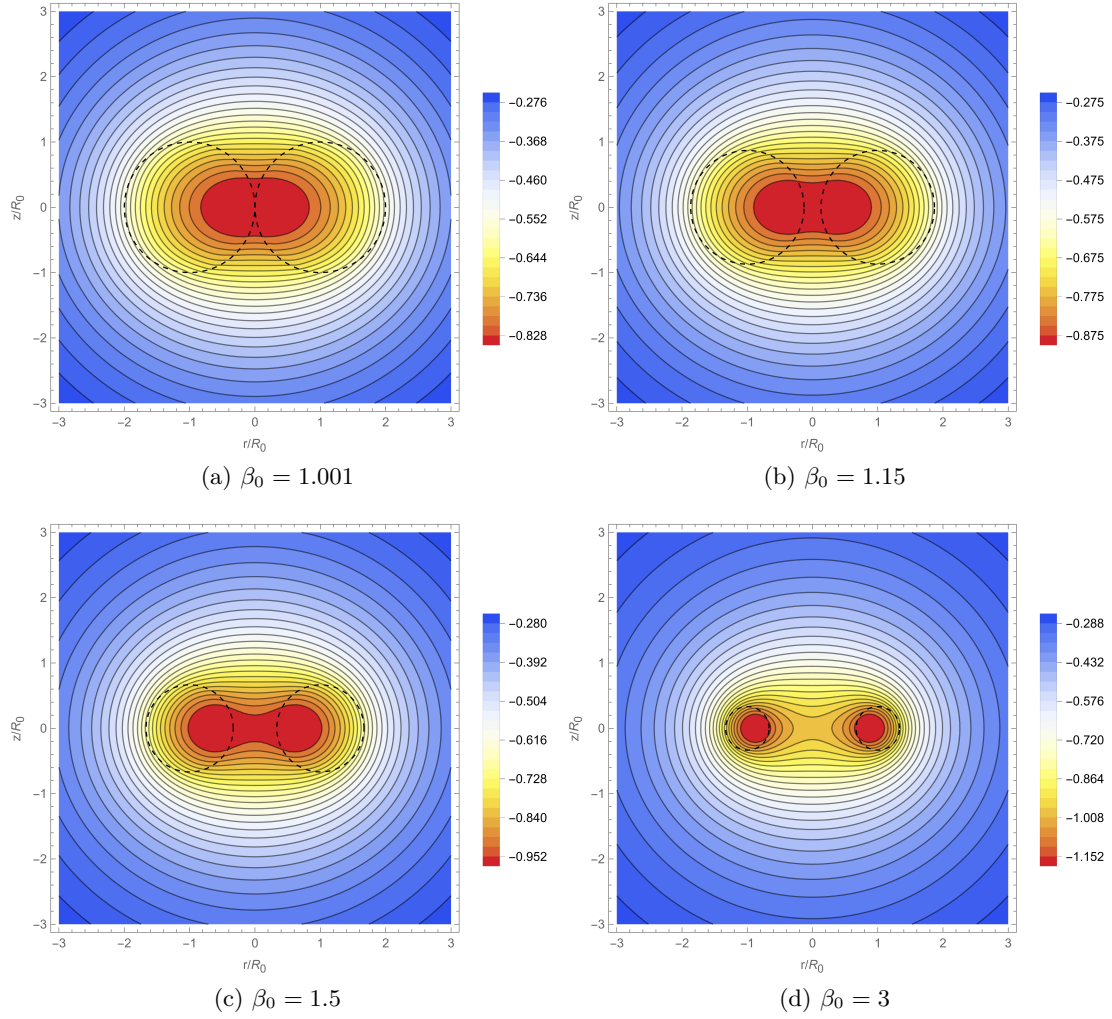
gdzie wykorzystano następujące podstawienia:

$$\epsilon_n = 2 - \delta_n^0, \quad \eta_0 = \text{arcosh}(\beta_0). \quad (58)$$

Do numerycznego wyznaczenia tych wielkości wygodnie jest użyć następujących tożsamości [9]:

$$\begin{aligned} a'_n(\beta) &= \frac{8}{3}G\tau a^2 \epsilon_n \left[\frac{\beta^2 + 1}{(\beta^2 - 1)^{3/2}} Q_{n-1/2}^1(\beta) - \frac{(n^2 - 1/4)\beta}{\beta^2 - 1} Q_{n-1/2}(\beta) \right], \\ Q'_{n-1/2}(\beta) &= \frac{Q_{n-1/2}^1(\beta)}{\sinh \eta} = \frac{Q_{n-1/2}^1(\beta)}{\sqrt{\beta^2 - 1}}, \\ P'_{n-1/2}(\beta) &= \frac{P_{n-1/2}^1(\beta)}{\sinh \eta} = \frac{P_{n-1/2}^1(\beta)}{\sqrt{\beta^2 - 1}}. \end{aligned} \quad (59)$$

W oparciu o powyższe wzory wygenerowano wykresy przedstawiające wartości potencjału bezwymiarowego $\frac{UR_0}{GM_t}$ dla torusów o kilku różnych wartościach β_0 . Wyniki przedstawiono na Rys. 11.



Rysunek 11: Wykresy przedstawiające bezwymiarowy potencjał torusa w płaszczyźnie Oxz dla różnych wartości β_0 . Linia przerywaną zaznaczono punkty tej płaszczyzny należące do powierzchni torusa. Ze względu na ograniczenia metody obliczania potencjału (omówione poniżej), na wykresie 11a nie wybrano wartości $\beta_0 = 1$ lecz nieco większą. Dla porównania można zobaczyć potencjał okręgu na Rys. 2.

Na powyższym rysunku można zaobserwować, że wraz z rosnącą grubością pierścienia (czyli z malejącym β_0) coraz mniej widoczny jest kształt toroidalny wykresu potencjału, a kontury stałego U przestają być wyrażście wklęsłe dla β_0 o wartości w okolicy 1. Ponadto należy zauważyć, że wraz z rosnącą odległością od środka układu współrzędnych potencjał zaczyna coraz bardziej nabierać sferycznej symetrii, tak jak można by się tego spodziewać.

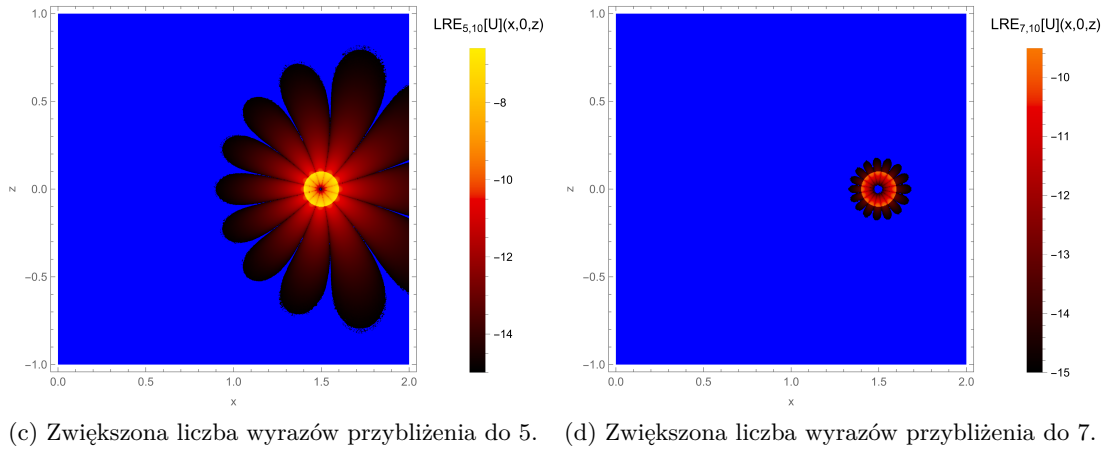
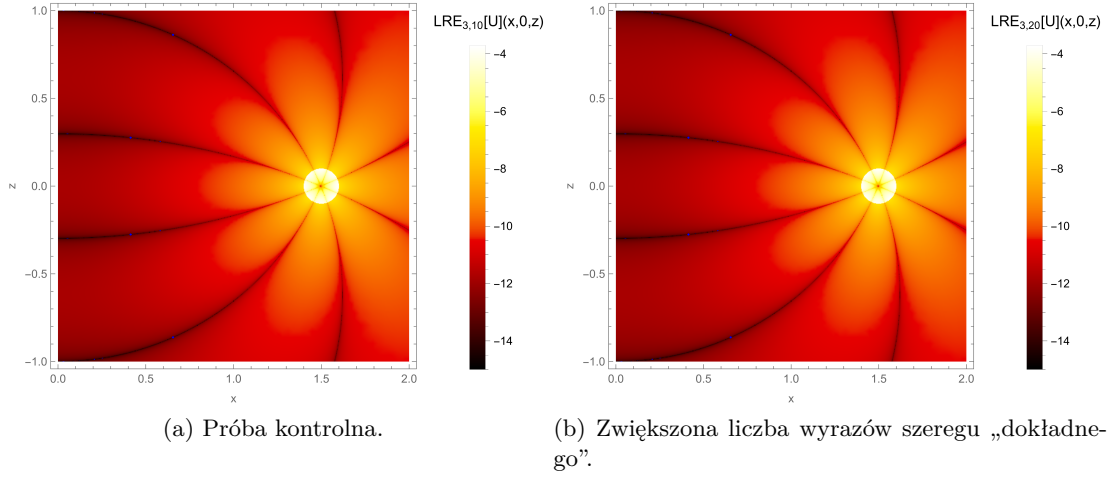
Bardzo wyraźnym problemem omawianej metody jest jej mała stosowność dla „gru-

bych” torusów o β_0 zbliżonym do 1. We wnętrzu torusa potencjał jest dany przez funkcje $Q_{n-1/2}^m(\beta)$, które są osobliwe na osi Oz . Gdy torus jest odpowiednio gruby, to jego wewnętrzny brzeg jest blisko tej osobliwości, więc potrzeba znacznie więcej wyrazów szeregu dla dobrego odwzorowania potencjału. Przykładowo, do utworzenia wykresu 11a konieczne było ponad 100 wyrazów szeregu, co spowodowało że czas obliczania punktów na tym wykresie wyniósł ponad godzinę. Dla porównania, ilość wyrazów szeregu potrzebna do wytworzenia pozostałych wykresów wynosiła nie więcej niż 15 a czas obliczeń był rzędu kilku minut. Tego rodzaju problemy zdają się jednak występować tylko dla torusów o β_0 naprawdę bliskim 1, to jest dla $\beta_0 < 1.1$.

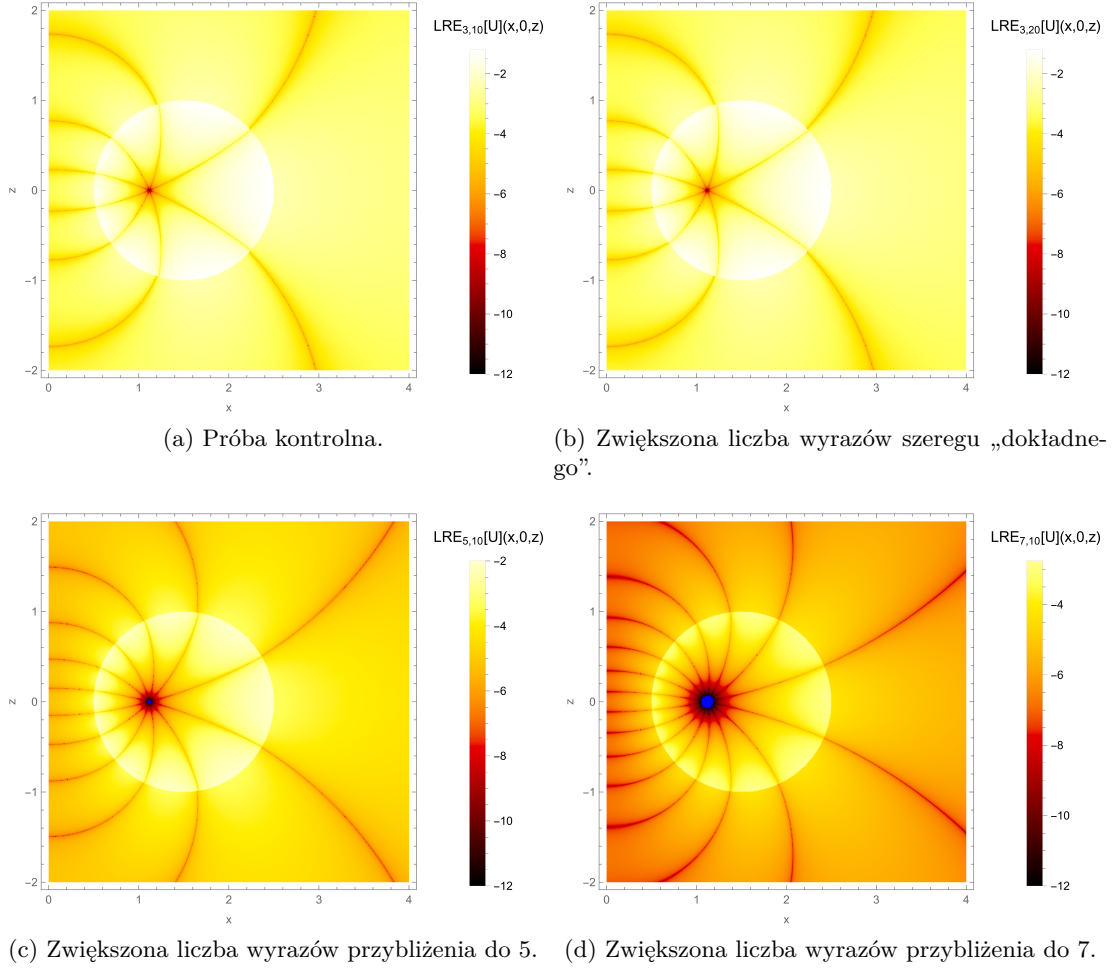
Pozostaje więc kwestia tempa zbieżności szeregu dla torusów powyżej arbitralnego progu $\beta_0 = 1.1$. W celu jego zbadania odtworzono i rozszerzono testy wykonane w pracy [9]. W artykule [9], do badania tempa zbieżności używany jest logarytmiczny błąd względny (LRE – logarithmic relative error) funkcji f w punkcie $\mathbf{x} = (x, y, z)$, definiowany jako

$$LRE_{i,j}[f](\mathbf{x}) = \log_{10} \left(\left| \frac{f_i(\mathbf{x}) - f_j(\mathbf{x})}{f_i(\mathbf{x})} \right| \right), \quad (60)$$

gdzie f_i jest zapisem symbolicznym, oznaczającym funkcję powstałą z wzięcia i pierwszych wyrazów rozwinięcia w szereg funkcji f . Takie stwierdzenie w ogólności nie jest jednoznaczne bez sprecyzowania bazy w jakiej następuje rozwinięcie w szereg. Dlatego na potrzeby pracy licencjackiej będzie to rozumiane jako i pierwszych wyrazów w rozwinięciu potencjału zgodnie ze wzorem (56). Wzór (60) należy rozumieć następująco: i pierwszych wyrazów rozwinięcia funkcji f jest przybliżeniem funkcji f , którego dokładność będzie badana. Natomiast j pierwszych wyrazów rozwinięcia funkcji f , gdzie $j > i$, jest uznane jako wyrażenie numerycznie niemal identyczne z funkcją f . Ewentualne różnice są zanedbywane. Wtedy wielkość dana wzorem (60) określa o ile rzędów wielkości błąd jest mniejszy od wartości funkcji. Praca [9] nie podaje ile wyrazów szeregu zostało uznane za funkcję dokładną. W poniższej analizie wybrano, że będzie to $j = 10$ wyrazów szeregu. Przeprowadzono dwa testy. Pierwszy miał na celu stwierdzenie czy 10 wyrazów faktycznie jest wystarczającą ilością i zaobserwowano jak się zmienia błąd gdy za funkcję dokładną uznamy $j = 20$ wyrazów szeregu. Drugi test badał jak się zmienia błąd wraz z rosnącą ilością wyrazów w przybliżeniu potencjału. Testy przeprowadzono dla dwóch parametrów torusów, takich samych jak w pracy [9], czyli dla torusa cienkiego $R_0 = 1.5$, $r_0 = 0.1$ oraz dla grubego $R_0 = 1.5$, $r_0 = 1$. Wyniki obu testów dla obu torusów przedstawiają Rys. 12 oraz 13.



Rysunek 12: Wykres błędu potencjału dla torusa o $R_0 = 1.5$, $r_0 = 0.1$ dla różnych ilości wyrazów szeregu przybliżenia oraz szeregu „dokładnego”. Dla wszystkich wykresów zastosowano taki sam zakres funkcji kolorującej, t.j., konkretny kolor na każdym wykresie odpowiada tej samej wartości rysowanej funkcji. Punkty, w których błąd był poniżej zakresu, zaznaczono na niebiesko.



Rysunek 13: Analogicznie jak na Rys. 12, ale dla „grubego” torusa o $R_0 = 1.5$, $r_0 = 1$.

Wynik testu pierwszego potwierdza, że dla badanych torusów 10 wyrazów szeregu istotnie można uznać za dokładny potencjał, gdyż nie ma widocznej różnicy pomiędzy wykresami 12a, 12b oraz pomiędzy 13a, 13b. Zaobserwowano również bardzo szybki spadek błędu wraz ze zwiększeniem ilości wyrazów przybliżenia. W szczególności gwałtowny wzrost dokładności przybliżenia jest widoczny dla torusa cienkiego, punkty niebieskie na wykresach 12c oraz 12d są w zasadzie poniżej typowej dokładności numerycznej. Jest bardzo ciekawym, że obszary na których błąd jest zerowy przypominają linie pola dipola elektrycznego. Można na podstawie przeprowadzonych testów wysnuć wniosek, iż do osiągnięcia bardzo przyzwoitej dokładności potencjału poza torusem wystarcza niewielka liczba wyrazów szeregu oraz dokładność przybliżenia szybko rośnie wraz z ilością wyrazów. Im torus cieńszy (im większe β_0) tym szybciej osiąga się pożądaną dokładność. Z kolei potencjał we wnętrzu torusa jest znacząco mniej dokładny oraz wolniej zbieżny,

jednakże dla celów symulacji ruchu masy punktowej poza torusem nie jest to przeszkoda.

4.2 Wyznaczenie potencjału metodą poprzez całkowanie

Inną możliwością wyznaczenia potencjału jest obliczenie go poprzez całkowanie numeryczne w pojedynczych punktach. Można obliczyć w ten sposób wartość potencjału na odpowiednio gęstej trójwymiarowej siatce punktów, następnie policzyć interpolację na pozostałe punkty. Sposób wycałkowania potencjału w pojedynczym punkcie również nie jest bez znaczenia. Torus można złożyć z pojedynczych punktów, ale również z pierścieni lub dysków. Przykładowo dla składania jednorodnego torusa z punktów można symbolicznie napisać:

$$U(\mathbf{x}) = -G \int_{\text{torus}} \frac{\tau}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} d^3\mathbf{x}'. \quad (61)$$

Jednakże korzystanie z powyższego wzoru jest nieefektywne obliczeniowo, wykonywana jest tam całka potrójna, podczas gdy w pozostałych metodach składania torusa całkowania są co najwyżej dwa.

Przykładem metody w której wystarczą całkowania podwójne jest złożenie torusa z pierścieni. Używając (3) można zdefiniować potencjał pierścienia o masie 1, promieniu r_p umieszczonego w płaszczyźnie $z = z_p$, o osi symetrii pokrywającej się z osią Oz :

$$U_p(r, z, r_p, z_p) = -\frac{2G}{\pi\sqrt{(r-r_p)^2 + (z-z_p)^2}} K\left(-\frac{4r_pr}{(r-r_p)^2 + (z-z_p)^2}\right). \quad (62)$$

Wykorzystując tę pomocniczą funkcję, potencjał torusa o gęstości τ , promieniu głównym R_0 oraz pomniejszym r_0 wyraża się następującym wzorem:

$$U(r, z) = \int_{-r_0}^{r_0} \left(\int_{R_0-\sqrt{r_0^2-z_p^2}}^{R_0+\sqrt{r_0^2-z_p^2}} U_p(r, z, r_p, z_p) 2\pi r_p \tau dr_p \right) dz_p. \quad (63)$$

Analogicznie mając wyrażenie na potencjał cienkiego dysku można uzyskać potencjał całego torusa poprzez całkę pojedynczą. Potencjał cienkiego dysku nie jest jednak sprawą trywialną, gdyż wymaga on całkowania wyrażeń zawierających funkcję eliptyczną. Problem ten posiada znane rozwiązanie [10], więc podobnie jak poprzednio można wprowadzić funkcję pomocniczą $U_d(r, z, r_d, z_d)$, która jest równa potencjałowi dysku o jednostkowej masie, promieniu r_d umieszczonego w płaszczyźnie $z = z_d$, o osi symetrii pokrywającej się z osią Oz :

$$U_d(r, z, r_d, z_d) = -\frac{2G}{\pi a^2} \left\{ \pi |z - z_d| \Theta(r_d - r) - \sqrt{(r_d + r)^2 + (z - z_d)^2} \left[E(q) + \frac{r_d - r}{r_d + r} \left(\frac{q}{n} K(q) + \frac{n - q}{n} \Pi(n|q) \right) \right] \right\}, \quad (64)$$

gdzie $q = \frac{4r_d r}{(z - z_d)^2 + (r_d + r)^2}$, $n = \frac{4r_d r}{(r_d + r)^2}$, Θ jest funkcją Heaviside'a a Π zupełną całką eliptyczną trzeciego rodzaju: $\Pi(n|m) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{(1 - n \sin^2 \Phi) \sqrt{1 - m \sin^2 \Phi}} d\Phi$. Użyto niestandardowych oznaczeń na zmienne eliptyczne, żeby uniknąć konfliktu oznaczeń. Powyższy wzór jest stosowalny dla $r \neq r_d$, wartość potencjału dysku dla $r = r_d$ można uzyskać jako granicę powyższego wzoru dla $r \rightarrow r_d$.

Potencjał torusa wyraża się wtedy wzorem:

$$U(r, z) = \int_{-r_0}^{r_0} \pi \left[\left(R_0 + \sqrt{r_0^2 - z_d^2} \right)^2 U_d \left(r, z, R_0 + \sqrt{r_0^2 - z_d^2}, z_d \right) - \left(R_0 - \sqrt{r_0^2 - z_d^2} \right)^2 U_d \left(r, z, R_0 - \sqrt{r_0^2 - z_d^2}, z_d \right) \right] \tau dz_d \quad (65)$$

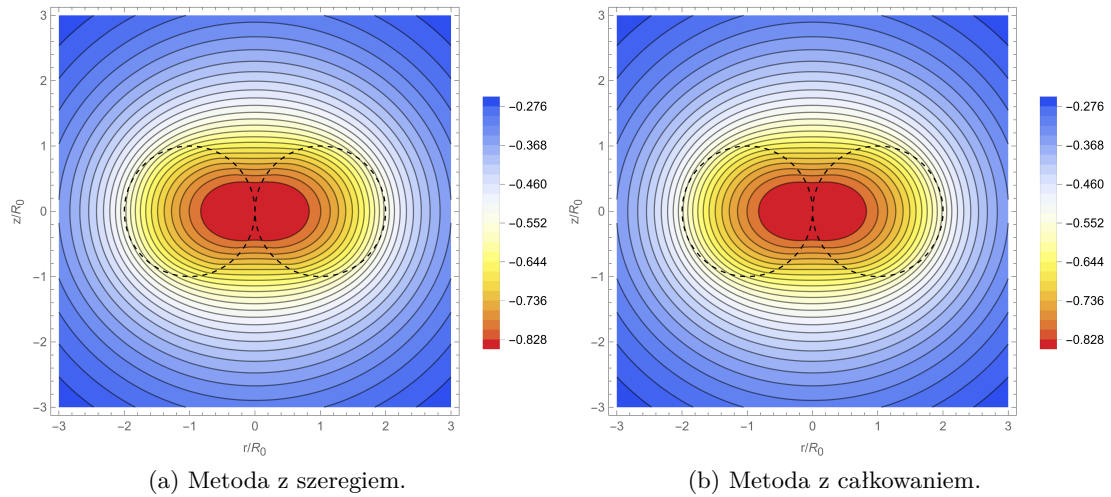
Z trzech powyższych metod całkowania najłatwiejsza wydaje się być ta oparta na składaniu torusa z cienkich pierścieni, gdyż posiada ona stosunkowo proste granice całkowania i mało skomplikowaną funkcję podcałkową, zapewnia ona również stosunkowo szybki czas obliczeń. Składanie torusa z punktów daje najprostszą możliwą funkcję podcałkową za cenę długiego czasu obliczeń, natomiast składanie torusa z dysków daje najbardziej skomplikowaną funkcję podcałkową, w zamian jednak zapewnia najlepszy czas obliczeń, gdy tylko zaimplementowane są optymalne metody obliczania funkcji eliptycznych. Powyżej zaprezentowane metody całkowe stosują się do dowolnego torusa spełniającego $0 < r_0 \leq R_0$, czas obliczeń nie zależy znacząco od stosunku $\beta_0 = R_0/r_0$.

4.3 Analiza porównawcza różnych podejść do wyznaczenia potencjału

Z dwóch powyżej zaprezentowanych podejść każde ma swoje wady i zalety. Metoda polegająca na rozwinięciu w szereg daje dla dużej klasy torusów bardzo dużą dokładność, nawet dla wzięcia niewielkiej liczby wyrazów szeregu, co przedstawiają Rys. 12 oraz 13. Taka dokładność jest osiągnięta niezależnie od punktu w którym oblicza się potencjał, chociaż szereg okazał się wolniej zbieżny dla punktów wewnątrz torusa. Z kolei metoda poprzez całkowanie daje bardzo dokładnie obliczoną wartość potencjału (z dokładnością numeryczną całkowania) na ustalonej trójwymiarowej siatce punktów, natomiast poza tą siatką błąd jest zależny od dokładności interpolacji. Czas obliczeń w metodzie z szeregiem jest uzależniony od stosunku $\beta_0 = R_0/r_0$ badanego torusa, jest on znacząco dłuższy

dla $\beta_0 \approx 1$. Natomiast w metodzie z całkowaniem czas obliczeń zależy jedynie nieznacznie od β_0 . Jedyną rzeczą której nie można zrobić w metodzie z szeregiem jest policzenie potencjału dla torusa o $\beta_0 = 1$, ze względu na osobliwość funkcji $Q_{n-1/2}^m(\beta)$ na osi Oz , gdyż taki torus styka się z nią. Tego problemu nie da się rozwiązać biorąc skończoną liczbę wyrazów w rozwinięciu potencjału. Można w niej jednak liczyć potencjał torusa o $\beta_0 = 1$ odpowiednio daleko od osobliwych punktów. Nie ma powyższego problemu metoda całkowania. Sytuacja jest dokładnie odwrotna w przypadku torusów o dużym β_0 , to jest bardzo cienkich. W bliskim sąsiedztwie powierzchni torusa potencjał bardzo gwałtownie się zmienia wraz z położeniem, czego niewystarczająco gęsta trójwymiarowa siatka punktów w metodzie z całkowaniem może nie wylapać, co może skutkować zupełnie nietrafioną interpolacją. Natomiast w metodzie z szeregiem ten bardzo duży skok potencjału będzie obecny, gdyż w punktach spełniających $\beta_0 = \infty$ funkcje $P_{n-1/2}^m(\beta)$ są osobliwe. „Reguła kciuka” powinna być więc taka, że gdy oblicza się potencjał torusa spełniającego $\beta_0 \approx 1$ lub gdy pożądana jest wysoka dokładność potencjału wewnątrz torusa, to lepsza będzie metoda z całkowaniem, natomiast w pozostałych sytuacjach lepsza będzie metoda z rozwinięciem w szereg.

Dla weryfikacji, iż obie metody istotnie dają takie same wartości potencjału przedstawiono ich porównanie na Rys. 14.



Rysunek 14: Bezwymiarowy potencjał torusa o $\beta_0 = 1.001$ uzyskany dwoma metodami, poprzez szereg oraz poprzez całkowanie.

4.4 Przykład dynamiki w potencjale torusa

Oba z opisanych powyżej sposobów na uzyskanie potencjału torusa mogą zostać wykorzystane do badania dynamiki w jego potencjale ciała punkowego. Rys. 14 ilustruje

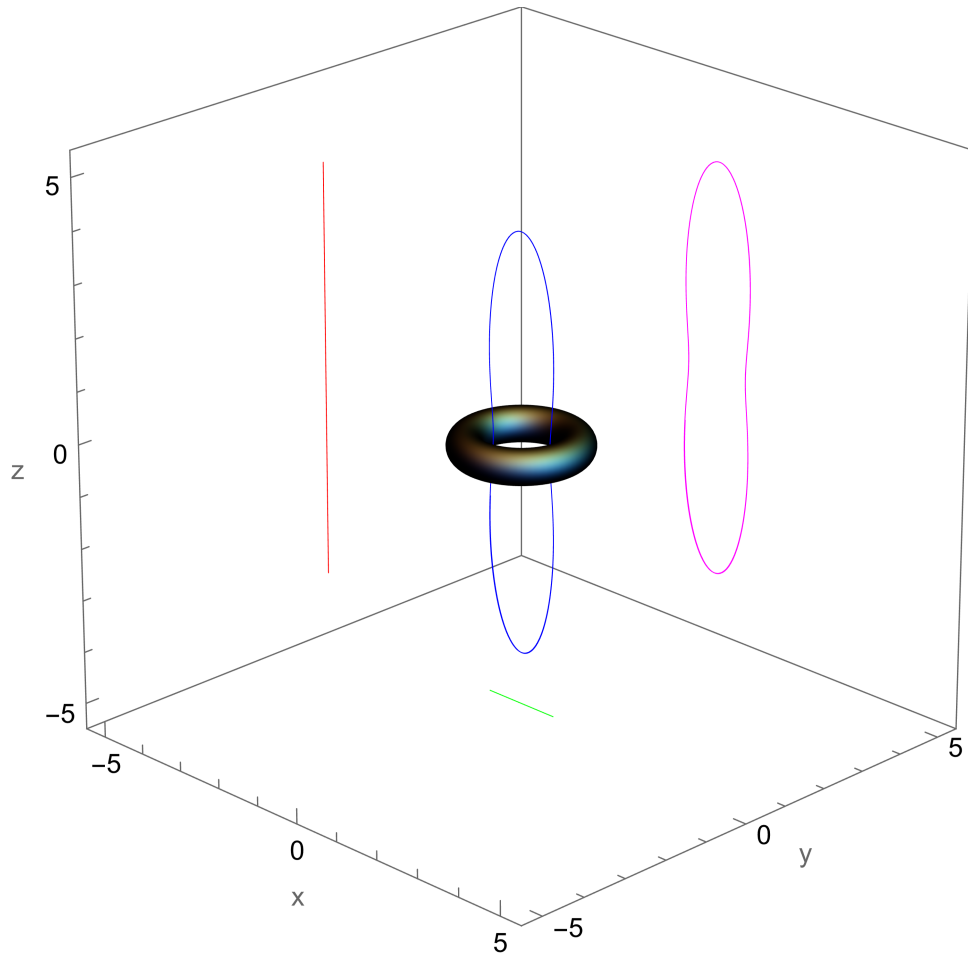
obie z przedstawionych metod – dają takie same wartości potencjału. W celu prezentacji dynamiki w potencjale torusa wybrano więc jedną, mianowicie wyznaczanie potencjału poprzez szereg. Jako potencjał wzięto 4 pierwsze wyrazy rozwinięcia w szereg ze wzoru (56). Rozważono nieruchomy, nieobracający się torus oraz orbitującą go masę punktową.

Zbadano dwa zestawy parametrów początkowych masy punktovej. Pierwszy był on identyczny jak dla układu *Ósemka* z Tabeli 1. Dodatkowo ustalono też parametry torusa jako $R_0 = 1$ oraz $r_0 = 0.0001$. Potencjał tak cienkiego torusa powinien być niemal identyczny z potencjałem cienkiego pierścienia, danego wzorem (3), dlatego spodziewana jest identyczna lub przynajmniej bardzo zbliżona dynamika masy punktovej jak dla układu *Ósemka* z tabeli 1. Istotnie, okazuje się iż dla tego torusa masa punktovej porusza się po na tyle podobnej orbicie jak w przypadku cienkiego pierścienia, że jakiegokolwiek różnice nie są widoczne gołym okiem. Trajektoria masy punktovej wokół torusa wygląda więc identycznie jak na Rys. 4f.

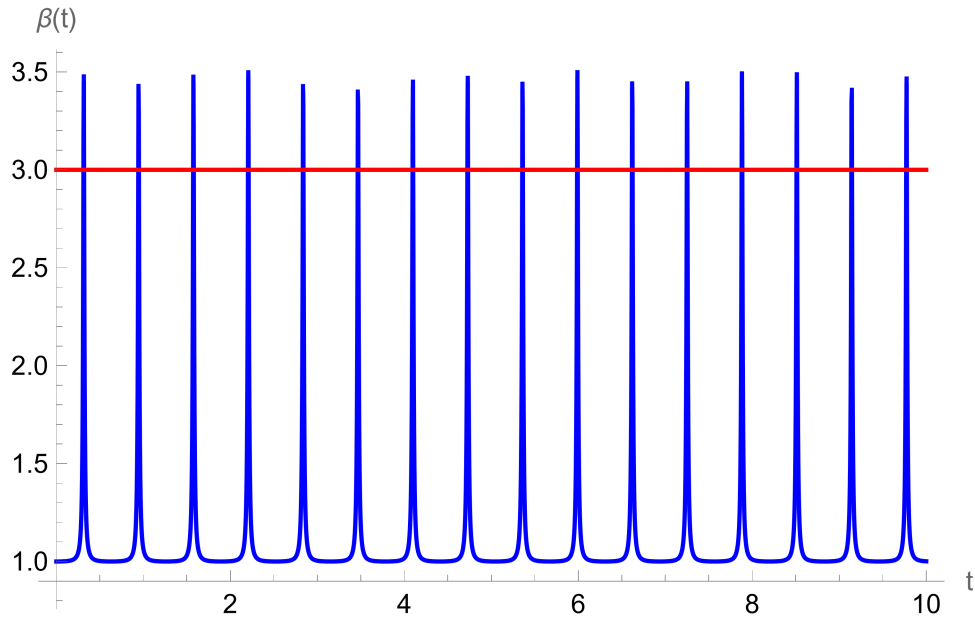
Drugi zestaw parametrów był drobną modyfikacją układu *Fistaszek* z tabeli 1. Zmieniono jedynie jeden parametr początkowy, to jest wybrano $\dot{r} = 3.9313891645$, ponadto wybrano torus o parametrach $R_0 = 1$, $r_0 = \frac{1}{3}$. Można zauważyć, iż przy takim samym t_{max} konieczna jest znacznie wyższa precyzja warunków początkowych by zapewnić przybliżone domykanie się orbity, niż w przypadku cienkiego pierścienia. Uzyskaną trajektorię przedstawia Rys. 15.

Kształt trajektorii przypomina tę z wersji z ciekim pierścieniem. Po uważnym przyjrzeniu się trajektorii można zauważyć, iż penetruje ona torus. Znacznie dokładniej można to zobaczyć na Rys. 16, pokazującym zależność współrzędnej toroidalnej (50) od czasu. Gdy wykres $\beta(t)$ jest ponad wartością $\beta_0 = 3$, oznacza to, że masa punktovej znajduje się we wnętrzu torusa. Na wykresie 16 widoczne są piki przekraczające wartość β_0 . Jest to dowód na stosowalność metody z wyznaczeniem potencjału poprzez szereg również do trajektorii penetrujących powierzchnię torusa. Nie była to rzecz oczywista, gdyż wzięcie tylko skończonej ilości wyrazów szeregu generuje nieciągłość potencjału na powierzchni torusa, nieciągłość ta jednak szybko zmniejsza się wraz z rosnącą ilością wyrazów szeregu.

Co ciekawe, ostre maksima na wykresie 16 pozwalają na dokładne oszacowanie okresu takiego ruchu. Za ich pomocą oszacowano iż okres wynosi $1.261\sqrt{\frac{R_0^3}{G(M/1000)}}$. Dokonano tu przejścia z wielkości bezwymiarowych, używanych do obliczeń, do wielkości wymiarowych. Pracowano w bezwymiarowym układzie w którym $R_0 = G = 1$, $M = 1000$, uzyskano w nim bezwymiarowy okres 1.261. Jedyną kombinacją tych wielkości dającą wymiar czasu jest $\sqrt{\frac{R_0^3}{GM}}$, okres musi więc być proporcjonalny do tej kombinacji. Stała proporcjonalności musi być taka, by po wstawieniu $R_0 = G = 1$, $M = 1000$ odzyskać bezwymiarowy okres równy 1.261, w tym celu wystarczy w mianowniku umieścić $M/1000$ zamiast M .



Rysunek 15: Wykres przedstawiający ewolucję układu dla podanych w tekście parametrów zmodyfikowanego układu *Fistaszek*. Kolorem niebieskim zaznaczono trajektorię masy m , pozostałymi kolorami rzut trajektorii na odpowiednie płaszczyzny. Torus ma parametry $R_0 = 1$ oraz $r_0 = \frac{1}{3}$.



Rysunek 16: Na niebiesko wykres współrzędnej toroidalnej $\beta(t)$ dla zmodyfikowanego układu *Fistaszek* (parametry podane w tekście). Kolorem czerwonym zaznaczono $\beta = \beta_0 = 3$. Zmienna wysokość maksimów uwidacznia użycie parametrów odbiegających od idealnie periodycznego ruchu.

5 Podsumowanie

Praca zawiera dogłębną analizę aparatu matematyczno-fizycznego niezbędnego do analizy grawitującego układu zawierającego jednorodny torus o masie M oraz masę punktową (lub kulę) o masie m . Z braku czasu jedynie zasygnalizowano i zademonstrowano możliwość analizy uwzględniającej wszystkie postępowe i obrotowe stopnie swobody układu, a także oddziaływanie z torusem o skończonej grubości. Stworzony model posłuży w przyszłości do analizy stabilności układu czarna dziura - torus oraz poszukiwania sztucznego stabilnego układu („choreografii”) dwóch ciał w którym będzie można zmierzyć stałą grawitacyjną G .

A Appendix

A.1 Przyjęte konwencje funkcji specjalnych wraz z implementacją w języku Wolfram *Mathematica*

- Zupełna całka eliptyczna pierwszego rodzaju [11]:

$$K(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - m \sin^2 \Phi}} d\Phi. \quad (\text{A.1})$$

Implementacja w *Mathematica*: `EllipticK[m]`.

- Zupełna całka eliptyczna drugiego rodzaju [12]:

$$E(m) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - m \sin^2 \Phi} d\Phi. \quad (\text{A.2})$$

Implementacja w *Mathematica*: `EllipticE[m]`.

- Zupełna całka eliptyczna trzeciego [13]:

$$\Pi(n|m) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{(1 - n \sin^2 \Phi) \sqrt{1 - m \sin^2 \Phi}} d\Phi. \quad (\text{A.3})$$

Implementacja w *Mathematica*: `EllipticPi[n,m]`

- Funkcja Γ Eulera [14]

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx, \quad \text{dla } \operatorname{Re}(z) > 0, \quad (\text{A.4})$$

gdzie Re oznacza część rzeczywistą. Dziedzinę można rozszerzyć na zbiór $z \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_+)$ jako przedłużenie analityczne funkcji zadanej wzorem (A.4). Przyjęto $\mathbb{N}_+$ jako zbiór liczb naturalnych dodatnich, natomiast $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_+$ jako zbiór liczb całkowitych niedodatnich.

Można podać równoważną definicję tej funkcji, która bez konieczności przedłużenia analitycznego jest zbieżna na maksymalnej dziedzinie [14]:

$$\Gamma(z) = \int_1^\infty x^{z-1} e^{-x} dx + \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!(k+z)}. \quad (\text{A.5})$$

Implementacja w *Mathematica*: `Gamma[z]`.

- Funkcja hipergeometryczna ${}_2F_1$ [15, 16]:

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(b+k)}{\Gamma(b)} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c+k)} \frac{z^k}{k!}, \quad \text{dla } |z| < 1. \quad (\text{A.6})$$

Dziedzinę można rozszerzyć na zbiór $z \in \mathbb{C}$ poprzez przedłużenie analityczne względem z przy ustalonych a, b, c [16, 17].

Implementacja w *Mathematice*: `Hypergeometric2F1[a,b,c,z]`.

- Funkcja hipergeometryczna zregularyzowana ${}_2\tilde{F}_1$ [15, 18]:

$${}_2\tilde{F}_1(a, b; c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(b+k)}{\Gamma(b)} \frac{1}{\Gamma(c+k)} \frac{z^k}{k!}, \quad \text{dla } |z| < 1. \quad (\text{A.7})$$

Dziedzinę można rozszerzyć na zbiór $z \in \mathbb{C}$ poprzez przedłużenie analityczne względem z przy ustalonych a, b, c [18, 19].

Implementacja w *Mathematice*: `Hypergeometric2F1Regularized[a,b,c,z]`.

- Stowarzyszona funkcja Legendre’a pierwszego rodzaju [20]:

$$P_n^m(z) = \frac{(z+1)^{m/2}}{(z-1)^{m/2}} {}_2\tilde{F}_1\left(-n, n+1; 1-m; \frac{1-z}{2}\right). \quad (\text{A.8})$$

Ze względu na różne cięcia na płaszczyźnie zespolonej wyróżnia się trzy typy funkcji Legendre’a pierwszego rodzaju, są one określone na różnych dziedzinach. W całej powyższej pracy, jak i w [9], przez funkcję Legendre’a rozumiana jest ta typu trzeciego. W poniżej przedstawionej implementacji trzeci argument funkcji to właśnie typ.

Implementacja w *Mathematice*: `LegendreP[n,m,3,z]`.

- Stowarzyszona funkcja Legendre’a drugiego rodzaju [15, 21]:

$$Q_n^m(z) = \frac{\pi e^{i\pi m}}{2 \sin(m\pi)} \left(P_n^m(z) - \frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n-m+1)} P_n^{-m}(z) \right), \quad m \notin \mathbb{Z}. \quad (\text{A.9})$$

Dla $m \in \mathbb{Z}$ funkcja ta definiowana jest jako granica $\lim_{m' \rightarrow m} Q_n^{m'}(z)$ [21]. Ze względu na różne cięcia na płaszczyźnie zespolonej wyróżnia się trzy typy funkcji Legendre’a drugiego rodzaju, są one określone na różnych dziedzinach. W całej powyższej pracy, jak i w [9], przez funkcję Legendre’a rozumiana jest ta typu trzeciego. W poniżej przedstawionej implementacji trzeci argument funkcji to właśnie typ.

Implementacja w *Mathematice*: `LegendreQ[n,m,3,z]`

A.2 Przyjęte w pracy oznaczenia

Symbol	Znaczenie
M	masa cienkiego pierścienia
m	masa próbnego ciała punktowego
r, z, ϕ	współrzędne cylindryczne opisujące położenie masy punktowej (poza rozdziałem 4.1)
x, y, z	współrzędne kartezjańskie opisujące położenie masy punktowej
Φ	kąt opisujący położenie elementu masy dM na pierścieniu
R	promień cienkiego pierścienia
b	odległość między elementem masy dM oraz masą m
U	potencjał grawitacyjny
u	bezwymiarowy potencjał grawitacyjny w bezwymiarowych zmiennych
G	stała grawitacji
T	okres
k	parametr eliptyczny zdefiniowany wzorem (12)
ω	prędkość kątowna
X, Y, Z	współrzędne kartezjańskie opisujące położenie środka pierścienia
$\mathcal{L}$	lagrangian
E	energia
t_{max}	maksymalny zbadany czas stabilności orbity
ξ, α, ϕ	współrzędne opisujące położenie masy punktowej, które zadane są wzorem (20)
φ, θ, ψ	kąty eulera
$\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$	kartezjańskie osie układu przestrzennego
e'_i, e''_i, e_i	kartezjańskie osie układu bryły, kolejno po jednym, dwóch oraz trzech obrotach elementarnych
I	tensor momentu bezwładności
R_0	promień główny torusa
r_0	promień pomniejszy torusa
r'	odległość pomiędzy masą punktową oraz osią symetrii pierścienia
z'	odległość pomiędzy masą punktową oraz płaszczyzną pierścienia
$\mathbf{n}$	wektor normalny do pierścienia
τ	gęstość
M_t	masa torusa
$J, \tilde{k}$	funkcja oraz zmienna zdefiniowane wzorem (44)
β_0	parametr zdefiniowany jako R_0/r_0
η, σ, ϕ	współrzędne toroidalne, zdefiniowane wzorem (49)
a	promień okręgu ogniskowania współrzędnych toroidalnych
r, ρ	promień kolejno ze współrzędnych sferycznych i cylindrycznych, zdefiniowane w równaniu (50) (tylko w rozdziale 4.1)
β	pomocnicza zmienna toroidalna, zadana wzorem (50)
Δ	pomocnicza zmienna toroidalna, zadana wzorem (53)
a_n, b_n, c_n	współczynniki rozwinięcia potencjału torusa w szereg, zadane wzorem (56)
q, n	parametr i cecha f. eliptycznej Π zdefiniowane poniżej wzoru (64) (tylko w rozdziale 4.2)

A.3 Plik z prezentacjami omówionych w pracy „choreografii” w programie *Mathematica*

Załączony do pracy plik Choreografie_prezentacje.nb.

Bibliografia

- [1] D. Schumayer, D. A. W. Hutchinson, (2019), *Peculiarities in the gravitational field of a filamentary ring*.
arXiv:1902.03344v1
<https://arxiv.org/pdf/1902.03344.pdf>
- [2] http://www.scholarpedia.org/article/Sitnikov_problem
- [3] B. Riemann, (2004), *Collected papers*.
Kendrick Press, Inc, 417-423.
- [4] B. P. Kondratyev, (2003), *The potential theory and equilibrium figures*.
Regular and Chaotic Dynamic Press, Moscow-Izhevsk (in Russian).
- [5] B. P. Kondratyev, (2007), *The potential theory. New methods and problems with solutions*.
Mir, Moscow, 512 pp (in Russian).
- [6] B. P. Kondratyev, A. S. Dubrovskii, N.G. Trubitsyna et al., (2009), *Laplace series expansion of the potential of a homogeneous circular torus*.
Tech. Phys. **54**, 176–181.
<https://link.springer.com/article/10.1134/S1063784209020042>
- [7] B. P. Kondratyev, N. G. Trubitsina, (2010), *Laplace series expansion of the internal potential of a homogeneous circular torus*.
Tech. Phys. **55**, 22–25.
<https://link.springer.com/article/10.1134/S1063784210010044>
- [8] E. Yu. Bannikova, V. G. Vakulik, V. M. Shulga, (2010) *Gravitational potential of a homogeneous circular torus: a new approach*
arXiv:1009.4324v2
<https://arxiv.org/pdf/1009.4324.pdf>
- [9] M. Majic, (2018). *Exact gravitational potential of a homogeneous torus in toroidal coordinates and a surface integral approach to Poisson’s equation*.
arXiv:1803.00003v1
<https://arxiv.org/pdf/1803.00003.pdf>

- [10] H. Lass, L. Blitzer, (1983). *The gravitational potential due to uniform disks and rings*.
Celestial mechanics, **30**, 225-228.
<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1983CeMec..30..225L/abstractL>
- [11] <http://functions.wolfram.com/08.02.07.0001.01>
- [12] <http://functions.wolfram.com/08.01.07.0001.01>
- [13] <http://functions.wolfram.com/08.03.07.0001.01>
- [14] <https://functions.wolfram.com/GammaBetaErf/Gamma/introductions/Gamma/02/>
- [15] <http://functions.wolfram.com/06.10.27.0001.01>
- [16] <https://functions.wolfram.com/HypergeometricFunctions/Hypergeometric2F1/02/01/>
- [17] <https://functions.wolfram.com/HypergeometricFunctions/Hypergeometric2F1/02/02/>
- [18] <https://functions.wolfram.com/HypergeometricFunctions/Hypergeometric2F1Regularized/02/01/>
- [19] <https://functions.wolfram.com/HypergeometricFunctions/Hypergeometric2F1Regularized/02/02/>
- [20] <http://functions.wolfram.com/07.09.02.0001.01>
- [21] <https://functions.wolfram.com/HypergeometricFunctions/LegendreQ3General/02/>
- [22] Weisstein, Eric W. *Point-Line Distance-3-Dimensional*. From MathWorld—A Wolfram Web Resource.
<https://mathworld.wolfram.com/Point-LineDistance3-Dimensional.html>
- [23] Weisstein, Eric W. *Point-Plane Distance*. From MathWorld—A Wolfram Web Resource.
<https://mathworld.wolfram.com/Point-PlaneDistance.html>