

Jakub Lis

# Zespolony model signum-Gordona i modele pokrewne

Rozprawa doktorska  
przygotowana pod kierunkiem  
prof. Henryka Arodzia



Kraków, maj 2010



*Bardzo serdecznie dziękuję mojemu promotorowi, profesorowi Henrykowi Arodziowi, za czas mi poświęcony, za cenne rady i życzliwe uwagi. Dzięki nim powstanie tej pracy było możliwe.*

*Wdzięczny jestem żonie za cierpliwość i wyrozumiałość - szczególnie w okresie spisywania pracy.*

*Dziękuję również rodzicom za wsparcie.*



# Spis treści

<b>1</b>	<b>Model signum-Gordona</b>	<b>1</b>
1.1	Historia . . . . .	1
1.2	Równania Eulera-Lagrange'a . . . . .	2
1.3	Własności równania ruchu . . . . .	5
1.4	Stabilność . . . . .	6
1.5	Zespolony model signum-Gordona . . . . .	7
1.6	Wyniki własne . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Rozwiązania typu Q-ball</b>	<b>9</b>
2.1	Rozwiązania typu Q-ball - podstawy matematyczne . . . . .	9
2.2	Absolutna stabilność Q-balli . . . . .	12
2.3	Q-balle w kwantowej teorii pola . . . . .	14
2.4	Q-balle w fizyce . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Q-balle w modelu signum-Gordona</b>	<b>17</b>
3.1	Ogólne rozwiązanie . . . . .	17
3.1.1	n=1 . . . . .	19
3.1.2	n=2 . . . . .	20
3.1.3	n=3 . . . . .	22
3.2	Stabilność Q-balli w modelu signum-Gordona . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Zregularyzowany model signum-Gordona</b>	<b>25</b>
4.1	Q-balle w zregularyzowanym modelu . . . . .	25
4.2	Wyniki numeryczne dla $n = 3$ . . . . .	27
4.3	Granica $\delta \rightarrow 0$ a model signum-Gordona . . . . .	30
4.4	Konstrukcja przybliżonych rozwiązań . . . . .	32
4.5	Stabilność . . . . .	33
<b>5</b>	<b>Nieliniowa skalarna elektrodynamika</b>	<b>37</b>
5.1	Model, <i>Ansatz</i> , równania . . . . .	37

5.2	Mechaniczna interpretacja równań . . . . .	40
5.3	Elektrycznie naładowane Q-balle . . . . .	41
5.4	Elektrycznie naładowane Q-shelle . . . . .	43
5.5	Przejście od Q-balli do Q-shelli . . . . .	45
5.6	Uwagi . . . . .	47
<b>6</b>	<b>Zakończenie</b>	<b>49</b>
6.1	Bieżąca praca . . . . .	49
6.2	Podsumowanie . . . . .	51
<b>A</b>	<b>Ograniczenie na zregularyzowany potencjał</b>	<b>53</b>
<b>B</b>	<b>Relacja między Q-ballami w modelu z i bez regularyzacji</b>	<b>55</b>
B.1	Definicje i ogólne obserwacje . . . . .	55
B.2	Granica $\lim_{\delta \rightarrow 0} \hat{f}_\delta(0)$ . . . . .	57
B.3	Granica $\lim_{\delta \rightarrow 0} (\hat{f} - \hat{f}_\delta)$ . . . . .	59
B.4	Wnioski . . . . .	60
<b>C</b>	<b>Rachunek zaburzeń</b>	<b>63</b>

# Rozdział 1

## Model signum-Gordona

### 1.1 Historia

W 2002 roku prof. H. Arodź opublikował pracę [1] na temat topologicznych kompaktów. Rozważał w niej model skalarne, rzeczywistego pola  $\phi$  zadanego przez lagranżian

$$\mathcal{L}[\phi] = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi),$$

przy czym

$$V(\phi) = \begin{cases} \cos \phi - 1 & \text{dla } |\phi| \leq \phi_0 < \pi, \\ \infty & \text{dla } |\phi| > \phi_0. \end{cases}$$

Część kinetyczna (zawierająca pochodne) w tym lagranżianie jest relatywistycznie niezmiennicza, greckie litery w indeksach odnoszą się w całej pracy do składowych wektorów czasoprzestrzennych. Motywacją do tej pracy był prosty układ mechaniczny. W modelu występują dwie próżniowe wartości pola (spontaniczne łamanie symetrii  $\mathbb{Z}_2$ ). W związku z tym istnieje rozwiązanie interpolujące pomiędzy próżniami (kink). Wyróżnia się ono spośród podobnych rozwiązań tym, że pole ma wartość różną od próżniowej na skończonym przedziale (stąd nazwa kompaktów). Dokładniejsza analiza modelu pozwoliła stwierdzić, że ów zwarty nośnik rozwiązania jest związany z nieanalizacją potencjału polowego w okolicy próżni, to jest brakiem dobrze określonej pochodnej z potencjału w jego minimum. Wykryto również przybliżoną symetrię skalowania dla wzbudzeń o małych amplitudach. Wobec tego naturalnie pojawiło się zainteresowanie teorią, która pozwala przyjrzeć się dokładnie nieanalizowanej próżni. Najprostszy możliwy model pozwalający na to zadany jest relatywistycznie niezmienniczą funkcją Lagrange'a

$$\mathcal{L}[\phi] = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \lambda |\phi|, \quad (1.1)$$

gdzie  $\lambda > 0$ . Początkowo nazywano teorię zadaną w ten sposób modelem z potencjałem o kształcie V (ang. *V-shaped potential*). W roku 2006 Benny Lautrup zaproponował

wcale dowcipną nazwę: model signum-Gordona.

Model ten w jednym i dwóch wymiarach przestrzennych posiada prostą realizację mechaniczną: siatkę złożoną z piłek (punktów materialnych) połączonych z najbliższymi sąsiadami nieważkimi sprężynami. Oprócz sprężystych oddziaływań pomiędzy piłkami uwzględnia się również oddziaływanie grawitacyjne: siatka jest umieszczona na jakiejś powierzchni a energia potrzebna do podniesienia piłki na pewną wysokość jest proporcjonalna do wysokości. Ponadto zakłada się, że piłki odbijają się sprężysto od powierzchni. Wzbudzenia długozasięgowe (to jest na skali znacznie większej niż odległość pomiędzy piłkami) w takim układzie opisywane są przez podany powyżej lagranżian. Wartość pola  $\phi(t, \mathbf{x})$  jest proporcjonalna do wysokości, na jakiej znajduje się piłka z oczka siatki o współrzędnej  $\mathbf{x}$  w chwili  $t$ .

Badania nad modelami signum-Gordona trwają od kilku lat. Najwięcej uwagi poświęcono modelowi pola rzeczywistego w jednym wymiarze przestrzennym. Dla tej teorii udało się uzyskać całkiem sporo rozwiązań analitycznych. Do najważniejszych osiągnięć należy z pewnością pełna charakterystyka rozwiązań z samopodobnymi warunkami początkowymi (zob. [2], [10]) oraz znalezienie rozwiązania typu oscylon (pulson) przedstawionego w [3]. Drugi spośród wspomnianych rezultatów wydaje się szczególnie interesujący. Rozwiązanie to ma, jak prawie wszystkie rozwiązania w tym modelu, zwarty nośnik przestrzenny, jest ono periodyczne w czasie i ma skończoną energię. Ciekawie przedstawia się problem stabilności tych rozwiązań. W świetle pracy [11] można się spodziewać, że małe zaburzenie może spowodować ich rozpad. We wspomnianej pracy prezentowane są jakościowo podobne rozwiązania w innym modelu i wykazana jest ich liniowa niestabilność. W modelu signum-Gordona narazie brak jest narzędzi do badania tego typu efektów.

## 1.2 Równania Eulera-Lagrange’a

Analizę teorii (1.1) zaczniemy od znalezienia równań ruchu. W tym celu policzymy wariację działania wokół pola  $\phi_0$ . Na mocy definicji są to wyrazy rzędu  $\epsilon$  w następującej różnicy

$$\delta\mathcal{S}[\phi_0] = \int d^{n+1}x (\mathcal{L}[\phi_0 + \epsilon\phi] - \mathcal{L}[\phi_0]), \quad (1.2)$$

przy czym  $\epsilon$  jest bliskie zera. O  $\phi_0$  zakładamy, że jest klasy  $C^2$  w obszarach o ustalonym znaku, globalnie zaś jest to funkcja ciągła. Dopuszczenie skokowej zmiany wartości  $\phi_0$  na granicy obszarów o ustalonym znaku komplikuje analizę, fizycznie nie jest zaś interesujące. Równania ruchu wyznaczone są przez warunek znikania różnicy (1.2). W poszczególnych obszarach  $V_i$ , gdzie  $\phi_0$  ma ustalony znak, dla dostatecznie małego  $\epsilon$



(takiego, aby  $sign(\phi_0 + \epsilon\phi) = sign(\phi_0)$ ) różnica powyższa wynosi

$$\delta\mathcal{S} = \epsilon \sum_i \int_{V_i} d^{n+1}x \phi [\partial_\mu \partial^\mu \phi_0 - sign(\phi_0)] + \epsilon \sum_i \int_{V_i} d^{n+1}x \partial_\mu (\phi \partial^\mu \phi_0). \quad (1.3)$$

Drugi człon wynika ze wzoru Leibniza:  $\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi_0 = -\phi \partial_\mu \partial^\mu \phi_0 + \partial_\mu (\phi \partial^\mu \phi_0)$ . Na mocy twierdzenia Stokesa można go wyrazić przez całkę powierzchniową

$$\epsilon \sum_i \int_{V_i} d^{n+1}x \partial_\mu (\phi \partial^\mu \phi_0) = \epsilon \sum_i \int_{\partial V_i} d\sigma (\phi \partial^\mu \phi_0), \quad (1.4)$$

gdzie przez  $d\sigma$  oznaczamy element  $n$ -wymiarowej hiperpowierzchni. Zauważamy, że po każdej powierzchni całkujemy dwukrotnie: raz traktując ją jako granicę obszaru, gdzie  $\phi_0 > 0$ , po raz wtóry jako granicę obszaru z  $\phi_0 < 0$ . Obszar, gdzie  $\phi_0 \equiv 0$  nie daje wkładu do całki. Dla obszarów  $V_i$  i  $V_j$  sąsiadujących ze sobą można ten wzór przepisać jako całkowanie po „jednej stronie” hiperpowierzchni; należy uwzględnić ich przeciwną orientację, co daje następujący wynik

$$\int_{\partial V_i \cap \partial V_j} d\sigma \phi (\partial^\mu \phi_0^i - \partial^\mu \phi_0^j),$$

przez  $\phi_0^i$  oznaczamy funkcję  $\phi_0$  na obszarze  $V_i$ . Jeżeli wariacja ma zniknąć, to i powyższa całka powinna zniknąć na wszystkich powierzchniach. Wobec dowolności  $\phi$  w każdym punkcie powierzchni  $\partial V_i \cap \partial V_j$  musi być spełniona równość

$$d\sigma (\partial^\mu \phi_0^i - \partial^\mu \phi_0^j) = 0. \quad (1.5)$$

Najprostszym sposobem zapewnienia tej równości jest żądanie

$$\partial^\mu \phi_0^i = \partial^\mu \phi_0^j. \quad (1.6)$$

Tak więc szukana funkcja jest klasy  $C^1$ , to jest, funkcja i jej pierwsza pochodna są ciągłe. Ten sposób łączenia rozwiązań jest istotny z punktu widzenia wyników zawartych w tej pracy. Nie jest to wszak jedyne rozwiązanie tego problemu. We wspomnianych powyżej pracach na temat rozwiązań z samopodobnymi warunkami początkowymi wykorzystano możliwość sklejania na stożku świetlnym rozwiązania próżniowego z pewnym nietrywialnym rozwiązaniem. W tym wypadku warunek (1.6) nie jest spełniony w przeciwieństwie do warunku (1.5).

Warto zwrócić uwagę na funkcję tożsamościowo równą zero na pewnym odcinku. Zauważmy, że dla regularnej funkcji  $\phi$  przy dostatecznie małej wartości  $\epsilon$  działanie

$$\mathcal{S}[\epsilon\phi] = \int d^{n+1}x \left( \frac{\epsilon^2}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \lambda |\epsilon\phi| \right)$$

jest ujemne i nie jest możliwe jego rozwinięcie w potęgę  $\epsilon$ . Wobec tego funkcja tożsamościowo równa zero jest nieanalitycznym maksimum działania. Dlatego funkcję tę należy uważać za rozwiązanie teorii.

W powyższym wyprowadzeniu może niepokoić moment, gdy zaniedbano wkład od obszaru  $sign(\phi_0) \neq sign(\phi_0 + \epsilon\phi)$ . Aby to uzasadnić oszacujemy wartość całki

$$\int d^{n+1}x (|\phi_0 + \epsilon\phi| - |\phi_0|) \quad (1.7)$$

na tym obszarze. Funkcję podcałkową można oszacować w tym obszarze następująco

$$-2|\epsilon\phi| \leq |\phi_0 + \epsilon\phi| - |\phi_0| \leq 2|\epsilon\phi|.$$

Dla dostatecznie małej wartości  $\epsilon$  powierzchnie  $\phi_0 = 0$  i  $\epsilon\phi + \phi_0 = 0$ , pomiędzy którymi całkujemy, powinny być blisko siebie. Jeżeli pochodna w kierunku stycznym do powierzchni  $\phi_0 = 0$  istnieje na całej tej powierzchni i można jej moduł ograniczyć przez pewną dodatnią liczbę, wówczas odległość pomiędzy tymi dwoma płaszczyznami jest rzędu  $\epsilon$ . Można się o tym przekonać rozwijając równanie  $\epsilon\phi + \phi_0 = 0$  wokół  $\xi$  spełniającego równość  $\phi_0(\xi) = 0$ . W rozwiązaniu pojawiają się wyrazy rzędu  $\epsilon$  oraz wyższe potęgi tego parametru. Tak więc całkowanie w kierunku prostopadłym do płaszczyzny  $\phi_0 = 0$  daje wkład rzędu  $\epsilon$ , całka w kierunkach równoległych jest z założenia skończona. Wobec tego wartość całki (1.7) policzona w interesującym nas obszarze jest rzędu  $\epsilon^2$ . Nieco inaczej wygląda sytuacja, gdy podany powyżej warunek na pochodną styczną nie jest spełniony. W szczególności dzieje się tak, gdy w kierunku stycznym do hiperpłaszczyzny  $\phi_0 = 0$  mamy zachowanie potęgowe –  $\phi_0 \sim x^m$ , przy czym  $m > 1$ . Wówczas odległość pomiędzy płaszczyznami jest rzędu  $\epsilon^{1/m}$  dla dostatecznie małego  $\epsilon$ , całka (1.7) zaś jest rzędu  $\epsilon^{1+1/m}$ . To sugeruje problemy z definicją drugiej pochodnej wariacyjnej z działania dla takich rozwiązań. Istotnie, do jej wyznaczenia konieczne jest rozwinięcie w potęgę  $\epsilon$  różnicy

$$\int d^{n+1}x d^{n+1}y [sign(\phi_0(x) + \epsilon\phi(y)) - sign(\phi_0(x))] \phi_1(x),$$

co jest równoznaczne z szacowaniem obszaru pomiędzy  $\phi_0 + \epsilon\phi = 0$  a  $\phi_0 = 0$ . W powyższym wzorze  $\phi$  i  $\phi_1$  to funkcje próbne. Rozwiązania omawiane w kolejnych rozdziałach odpowiadają  $m = 2$ . Dlatego  $\delta^2\mathcal{S}$  w ich przypadku nie istnieje.

Aby podsumować dotychczasowe rozważania definiujemy funkcję  $sign(\cdot)$

$$sign(\phi) \equiv \begin{cases} +1 & \text{gdy } \phi > 0 \\ 0 & \text{gdy } \phi = 0 \\ -1 & \text{gdy } \phi < 0. \end{cases} \quad (1.8)$$

Przy jej pomocy możemy napisać klasyczne równanie ruchu w modelu signum-Gordona

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi = -\lambda \text{sign}(\phi), \quad (1.9)$$

które należy uzupełnić uwagą, że szukamy rozwiązań klasy  $C^1$ .

Powyższa definicja  $\text{sign}(\cdot)$  pozwala uważać funkcję  $\phi \equiv 0$  za rozwiązanie równania Eulera-Lagrange'a. Dla kompletności odnotujmy, że równanie ruchu można odtworzyć traktując model signum-Gordona jako graniczny przypadek dla zregularyzowanych potencjałów

$$|\phi| = \lim_{\kappa \rightarrow 0} \sqrt{\phi^2 + \kappa^2} - \kappa, \quad \kappa > 0. \quad (1.10)$$

Jak zobaczymy w rozdziale 4, traktowanie modelu signum-Gordona jako modelu bliższego takim „porządnym” modelom jest czasem bardzo owocne.

### 1.3 Własności równania ruchu

Powyżej zapisane równanie ruchu (1.9) ma raczej zaskakującą własność: niezmienniczość ze względu na zmianę skali. Istotnie, dla dowolnego rozwiązania  $\phi$  równania (1.9) przeskalowanie zmiennych  $y_\mu = x_\mu/\eta$  i funkcji  $\tilde{\phi} = \eta^{-2}\phi$  prowadzi do relacji

$$\partial_\mu \partial^\mu \tilde{\phi} = -\lambda \text{sign}(\tilde{\phi}), \quad (1.11)$$

gdzie różniczkuje się względem nowych zmiennych  $y_\mu$ . Tak więc powyższa transformacja pozwala znajdować nowe rozwiązania równań. Działanie  $\mathcal{S}$  skaluje się przy takiej zamianie  $\mathcal{S}[\tilde{\phi}] = \eta^{3+n} \mathcal{S}[\phi]$ . Z tego widać, że jest to symetria typu *on-shell*, to znaczy symetria równań ruchu a nie teorii na poziomie lagranżianu. Pewne rozwiązania samopodobne jak i analiza rozwiązań startujących z samopodobnych warunków początkowych zostały przedstawione w pracach [3] i [4].

Energia w modelu signum-Gordona wyraża się wzorem

$$E = \int d^n x \left[ \frac{1}{2} (\partial_0 \phi)^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \lambda |\phi| \right]. \quad (1.12)$$

Symetria skalowania pozwala wyrazić energię dla rodziny rozwiązań różniących się transformacją skalowania poprzez prosty wzór  $E = \eta^{2+n} E_0$ , gdzie  $E_0$  to liczba - energia policzona dla wybranego rozwiązania.

Jak zostało już zasygnalizowane, w tej pracy będziemy zajmować się rozwiązaniami, które przyjmują nietrywialne wartości w skończonej objętości. Jest to zachowanie generyczne w modelu signum-Gordona. Aby się o tym przekonać zobaczymy, jak pole osiąga wartość próżniową modelu. Dla potrzeb analizy założymy symetrię sferyczną rozwiązania (niech  $r$  oznacza zmienną radialną w  $n$ -wymiarowej przestrzeni euklidesowej),

małą wartość pola  $\phi$  i jego pochodnej. Wówczas niezależne od czasu równanie (1.9) ma postać

$$\phi'' + \frac{n-1}{r}\phi' = \text{sign}(\phi).$$

Przybliżone rozwiązanie ma postać  $\phi(r) = \pm(r - r_0)^2/2n$ , dla pewnego  $r_0$ . Możemy założyć, że funkcja  $\phi$  gładko przechodzi w rozwiązanie próżniowe. To zapewnia skończoność działania i energii (i ewentualnie innych wielkości).

Sposób zbliżania się do próżni jest charakterystyczny dla szerokich klas modeli; w modelach masowych podejście do próżni jest eksponencjalne, w modelach bezmasowych potęgowe. Obrazowo rzecz ujmując mówimy, że paraboliczne podejście do próżni jest charakterystyczne dla modeli o nieskończonej masie (o nieskończonej masie można mówić w przypadku wielu modeli, przykładem jest model badany w [11]).

Procedura rozwiązywania równania (1.9) jest prosta: zakładamy, że funkcja  $\phi$  ma określony znak, rozwiązujemy równanie z ustalonym  $\text{sign}(\phi)$  spełniające jakieś warunki. Otrzymane rozwiązanie obowiązuje do momentu osiągnięcia przez pole wartości zerowej. Do tego rozwiązania doklejamy albo wartość próżniową, o ile warunek ciągłości pochodnej na to pozwala, albo rozwiązanie o przeciwnym znaku. Procedura jest powtarzana do czasu uzyskania rozwiązania w całym interesującym obszarze. Równanie (1.9) jest dosyć proste w obszarach o ustalonym znaku: jest to wówczas równanie liniowe niejednorodne. Nieliniowość daje o sobie znać tylko przy zmianie znaku.

## 1.4 Stabilność

Dysponując nietrywialnym rozwiązaniem w jakiejś teorii pola z gładkim potencjałem wiadomo dosyć dokładnie, jak szukać przybliżonych rozwiązań bliskich rozwiązaniu wyjściowemu  $\phi$ . Służy do tego procedura linearyzacji. Aby była ona możliwa, wyrażenie  $\delta^2\mathcal{S}[\phi]$  musi mieć sens. W przypadku rozwiązań modelu signum-Gordona, jak widać z dotychczasowych rozważań, nie jest to wyrażenie dobrze określone w pobliżu granicy obszaru, gdzie rozwiązanie jest nietrywialne, nie wspominając o obszarze, gdzie pole ma wartość próżniową. Dlatego problem ewolucji czasowej zaburzonych rozwiązań jest wciąż problemem otwartym.

Łatwo można opisać propagację zaburzenia w krótkim okresie czasu, o ile zaburzenie ma zwarty nośnik i rozmiary dużo mniejsze od rozmiarów oryginalnego rozwiązania. Można wówczas wykonać linearyzację, która prawidłowo opisuje ewolucję czasową zaburzonego rozwiązania. Opis ten załamuje się, gdy zaburzenie dociera w okolice brzegu pierwotnego rozwiązania. Nie jest jasne, co wówczas ma znaczenie, choćby w jakościowym opisie ewolucji.

## 1.5 Zespolony model signum-Gordona

Zespolony model signum-Gordona zadany jest przez następującą funkcję Lagrange'a

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi \partial^\mu \bar{\Phi} - \lambda |\Phi|, \quad (1.13)$$

gdzie  $\Phi$  i  $\bar{\Phi}$  to zespolone pole skalarne i jego zespolone sprzężenie,  $|\cdot|$  oznacza moduł liczby zespolonej,  $\lambda > 0$ . Wywody dotyczące wyprowadzenia równań ruchu i wariacji działania pozostają w mocy. Równania ruchu należy przepisać w następującej postaci

$$\partial_\mu \partial^\mu \Phi = -\frac{\lambda}{2} faza(\Phi), \quad (1.14)$$

przy czym

$$faza(\Phi) = \begin{cases} \frac{\Phi}{|\Phi|} & gdy \quad \Phi \neq 0 \\ 0 & gdy \quad \Phi = 0. \end{cases} \quad (1.15)$$

Definicję tę można uzasadnić poprzez ponowne odwołanie się do pojęcia działania i jego wariacji, bądź poprzez przywołanie regularyzacji

$$|\Phi| = \sqrt{\Phi \bar{\Phi} + \kappa^2} - \kappa, \quad \kappa > 0. \quad (1.16)$$

Istotną różnicą między modelem rzeczywistym a zespolonym jest pojawienie się dodatkowej symetrii względem zmiany fazy pola. Konsekwencjom tego faktu poświęcony jest następny rozdział. Wyniki dotyczące symetrii skalowania i trudności z pojęciem stabilności w modelu rzeczywistym, w zasadzie bez zmian przenoszą się na model z polem zespolonym.

Po raz pierwszy zespolony model signum-Gordona w jednym wymiarze został wprowadzony w pracy [4]. Zaproponowano tam, aby przy jego pomocy opisać przyklejanie się struny w trzech wymiarach do linii prostej. W tym modelu moduł wartości pola odpowiada odległości struny od prostej, faza odpowiada kątowi pomiędzy położeniem struny a pewnym umownym kierunkiem w płaszczyźnie prostopadłej do prostej, do której struna jest przyciągana. Równocześnie podano nietrywialne rozwiązania równań pola wychodząc od pewnego samopodobnego *Ansatzu*.

## 1.6 Wyniki własne

Przedstawione w tej pracy wyniki zostały zaprezentowane w trzech pracach: [7], [8], [9]. Dwie pierwsze prace zostały napisane wspólnie z prof. H. Arodziem. W [7] podane zostały rozwiązania typu Q-ball w zespolonym modelu signum-Gordona. Treść tej pracy przedstawiona została, w nieco zmienionej formie, w rozdziale 3. Praca [8] zawiera wyniki dotyczące rozszerzonego modelu signum-Gordona, w którym globalną

symetrię  $U(1)$  zastąpiono jej lokalną wersją. Rezultaty uzyskane w tej pracy przedstawione są w rozdziale 5; rozważania zawarte w dodatku C publikowane są po raz pierwszy. Artykuł [9] dotyczy zregularyzowanego modelu signum-Gordona i jego związków z modelem oryginalnym (tak będziemy czasem określać zespolony model signum-Gordona). Wykazano w niej, że Q-balle w zregularyzowanym modelu istnieją oraz pokazano, że z absolutnej stabilności Q-balli w modelu zregularyzowanym wynika absolutna stabilność Q-balli w modelu signum-Gordona. Udało się również dostosować dowód absolutnej stabilności znany dla pewnej klasy modeli w trzech wymiarach przestrzennych na potrzeby modelu zregularyzowanego. Te wyniki omówione są częściowo w rozdziale 3 oraz w rozdziale 4 i w dodatkach A oraz B.

## Rozdział 2

### Rozwiązania typu Q-ball

Jak już zostało zasygnalizowane, w zespolonym modelu signum-Gordona pojawia się dodatkowa wielkość zachowana - ładunek związany z symetrią  $U(1)$  obecną w tej teorii. Ten rozdział poświęcony jest teorii Q-balli. Są to rozwiązania pojawiające się w teoriach, w których, obok energii, istnieje jeszcze inna całka ruchu związana z symetrią wewnętrzną (to jest nie sprzęgającą się ze zmiennymi czasoprzestrzennymi) modelu. Najpierw więc przedstawimy ogólne rozważania matematyczne, pozwalające sformułować odpowiedni *Ansatz* oraz kilka matematycznych obserwacji dotyczących uzyskanych tą drogą rozwiązań. Q-balle należą do klasy nietopologicznych solitonów. Są to bowiem stabilne rozwiązania, których gęstość energii i ładunku jest dobrze zlokalizowana i nie zależy od czasu. Przymiotnik „nietopologiczne” oznacza, że ich istnienie i stabilność nie są związane z topologicznymi własnościami teorii.

#### 2.1 Rozwiązania typu Q-ball - podstawy matematyczne

Najprostszym przykładem symetrii wewnętrznej jest globalna symetria  $U(1)$  odpowiadająca zmianie fazy zespolonego pola skalarnego. Na tym przykładzie omówimy matematyczne własności Q-balli. Rozważania te przeprowadzimy dla ogólnego lagranżianu polowego w postaci

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi \partial^\mu \bar{\Phi} - U(\Phi \bar{\Phi}), \quad (2.1)$$

gdzie  $U$  jest potencjałem polowym. O potencjale zakładamy, że  $U(\Phi) \geq 0$  dla każdego  $\Phi$  i posiada globalne minimum dla  $\Phi = 0$  ( $U(0) = 0$ ). Lagranżian ten jest niezmienniczy względem transformacji Lorentza, wymiar czasoprzestrzeni wynosi  $n+1$ . W takiej teorii na mocy twierdzenia Noether istnieje ładunek  $Q$ , wielkość stała dla rozwiązań równań ruchu. Jest ona dana wzorem

$$Q = \frac{1}{2i} \int d^n x [\bar{\Phi} \partial_0 \Phi - \partial_0 \bar{\Phi} \Phi]. \quad (2.2)$$

W powyższym wzorze całkuje się po całej przestrzeni; w kolejnych wzorach w tym rozdziale, o ile nie zostanie inaczej podane, całki bez jawnie podanego zakresu całkowania należy rozumieć w ten sam sposób. Oprócz tego również energia jest całką ruchu. Wyraża się ona następująco

$$E = \int d^n x [\partial_0 \bar{\Phi} \partial_0 \Phi + \partial_i \bar{\Phi} \partial_i \Phi + U(\bar{\Phi} \Phi)]. \quad (2.3)$$

Litery łacińskie  $i = 1, 2, \dots, n$  numerują składowe wektorów w przestrzeni euklidesowej. Uprawnione jest pytanie o rozwiązania minimalizujące energię przy zadanej wartości  $Q$ . Pytanie to postawił Sidney Coleman w pracy [12]. Precyzyjniej rzecz ujmując zbadamy, dla jakich warunków początkowych energia jest najmniejsza przy ustalonym ładunku. Dla wygody od tej chwili przyjmiemy oznaczenia  $x_\mu = (t, \mathbf{x})$ . Przez warunki początkowe rozumiemy podanie przestrzennej konfiguracji pola oraz jego pochodnej czasowej w chwili  $t = 0$ . Pole  $\Phi$  można przedstawić w formie  $F(t, \mathbf{x}) \exp(i\theta(t, \mathbf{x}))$ , gdzie funkcje  $F$  i  $\theta$  są rzeczywiste. Przy powyższych oznaczeniach ładunek liczony w chwili  $t = 0$  wyraża się wzorem

$$Q = \int d^n x \dot{\theta}(0, x) F^2(0, x), \quad (2.4)$$

gdzie kropka nad nazwą funkcji oznacza jej pochodną czasową. Energia zaś wyraża się następująco

$$E = \int d^n x [\dot{\theta}^2 F^2 + \dot{F}^2 + F^2 (\nabla \theta)^2 + (\nabla F)^2 + U(F)]. \quad (2.5)$$

Podamy teraz sposób, jak mając dane funkcje  $F(0, \mathbf{x})$ ,  $\theta(0, \mathbf{x})$  i ich pochodne czasowe, skonstruować dane początkowe o takiej samej lub niższej energii. Po pierwsze, założenie  $\dot{F}(0, \mathbf{x}) = 0$  nie zmienia ładunku i pozwala obniżyć energię konfiguracji – kładziemy  $\dot{F}(0, \mathbf{x}) = 0$ . Podobnie ma się rzecz z wyrazem  $F^2 (\nabla \theta(0, \mathbf{x}))^2$  i dlatego przyjmujemy, że  $\nabla \theta(0, \mathbf{x}) = 0$ . Po drugie, nierówność Schwarz'a dla funkcji  $F$  i  $\dot{\theta} F$  pozwala oszacować ładunek następująco

$$Q^2 \leq \int d^n x F^2 \int d^n x \dot{\theta}^2 F^2. \quad (2.6)$$

Nierówność ta wysyca się, gdy funkcje  $F$  i  $\dot{\theta} F$  są liniowo zależne, czyli gdy  $\dot{\theta}(0, \mathbf{x}) = \text{const}$ . Wówczas wyraz  $\int d^n x \dot{\theta}^2 F^2$  ma wartość  $Q^2 / \int d^n x F^2$  i jest to wartość minimalna, jaką ten wyraz może przyjąć przy danym ładunku i funkcji  $F(0, \mathbf{x})$ . Oznaczamy stałą  $\dot{\theta}(0, \mathbf{x})$  przez  $\omega$ . Funkcjonał energii przyjmuje postać

$$E = \frac{Q^2}{\int d^n x F^2} + \int d^n x [(\nabla F)^2 + U(F)]. \quad (2.7)$$

Po trzecie, warto wziąć pod uwagę twierdzenie o sferycznej zamianie (*spherical rearrangement*, podajemy za [12], [13]). Mówi ono, że przy ustalonej wartości całek



$\int d^n x F^2$  oraz  $\int d^n x U(F)$  najmniejszą wartość całka  $\int d^n x (\nabla F)^2$  przyjmuje dla pewnej sferycznie symetrycznej, monotonicznie malejącej wzdłuż zmiennej radialnej funkcji. Jest to prawda dla  $n > 2$ . Minima tego funkcjonału można wyznaczyć korzystając z rachunku wariacyjnego. Zamiast pełnego równania różniczkowego z pochodnymi cząstkowymi wystarczy ograniczyć się więc do analizy równania różniczkowego zwyczajnego w zmiennej radialnej. Ma ono postać następującą

$$F'' + \frac{n-1}{r}F' = -\frac{d}{dF} \left( \frac{\omega^2}{2}F^2 - U(F) \right), \quad (2.8)$$

gdzie ' oznacza różniczkowanie względem zmiennej  $r$  a parametr

$$\omega = \frac{Q}{\int d^n x F^2} \quad (2.9)$$

w zgodzie z powyższym wyprowadzeniem. Podstawiając do równań ruchu pola można sprawdzić, że ewolucja czasowa dla tak znalezionej konfiguracji początkowej dana jest przez *Ansatz*

$$\Phi(t, \mathbf{x}) = \exp(i\omega t)F(r). \quad (2.10)$$

Rozwiązania uzyskane przy pomocy takiego podstawienia nazywamy właśnie Q-ballami. Równanie (2.8) można interpretować jako newtonowskie równanie ruchu cząstki w potencjalnym polu sił (prawa strona równania). Wyraz zawierający pierwszą pochodną interpretuje się jako zależne od czasu tarcie -  $r$  pełni rolę czasu. Aby rozwiązanie równania miało znaczenie w teorii pola, musi spełniać dwa warunki: po pierwsze  $F$  i  $F'$  mają być funkcjami ciągłymi, skąd  $F'(0) = 0$ . Po drugie interesujące rozwiązanie ma maleć do zera, aby całki we wzorach na ładunek i energię były dobrze określone. W języku mechaniki klasycznej oznacza to, że szukamy takiego położenia  $F(0)$ , z którego swobodnie puszczona cząstka ( $F'(0) = 0$ ) po upływie nieskończonego czasu znajduje się w pozycji  $F = 0$ . Funkcja  $F$  spełniająca równanie (2.8) i podane warunki brzegowe jest czasem nazywana funkcją profilu.

W literaturze często spotyka się wyprowadzenie *Ansatzu* (2.10) korzystające z funkcjonału energii dla zadanego ładunku. Funkcjonał ten definiowany jest przy użyciu mnożników Lagrange'a (zob. np. [16]). Podejście to uzasadnia podane podstawienie, nie jest jednak pomocne w zbadaniu, czy energia przy danym ładunku posiada **globalne** minimum. Do uzyskania odpowiedzi na takie pytanie lepiej nadaje się funkcjonał (2.7). Istnienie konfiguracji odpowiadającej globalnemu minimum energii przy danej wartości ładunku nie jest oczywiste – jak za chwilę zobaczymy, w teorii swobodnej taka konfiguracja nie istnieje. Sidney Coleman w pracy [12] pokazał, że dla pewnej klasy potencjałów Q-balle istotnie mają najmniejszą możliwą energię. W rozdziale 4 przedstawimy stosowny dowód dla konkretnego modelu. Rozwiązania, które mają minimalną energię przy zadanym ładunku, nazywamy absolutnie stabilnymi.

## 2.2 Absolutna stabilność Q-balli

Poniżej prezentujemy kilka obserwacji dotyczących Q-balli. Są one ważne dla dowodu absolutnej stabilności przedstawionego w rozdziale 4, wydają się również interesujące *per se*. Najpierw sformułujemy warunek konieczny (i jak się okaże – wystarczający) istnienia rozwiązań absolutnie stabilnych.

Punktem wyjścia do dalszej analizy jest wzór (2.7). Założymy, że potencjał polowy (por. (2.1)) spełnia następujące warunki

$$U(0) = 0, \quad \frac{dU(0)}{dF} = 0, \quad \frac{d^2U(0)}{dF^2} = \mu^2.$$

W takim razie możemy rozbić potencjał na część kwadratową  $\frac{\mu^2}{2}F^2$  i resztę  $W(F) = U(F) - \frac{\mu^2}{2}F^2$ . Przy tych oznaczeniach wzór wyjściowy można przepisać w formie

$$E[F] = \int d^n x [(\nabla F)^2 + W(F)] + \frac{\mu^2}{2} \int d^n x F^2 + \frac{Q^2}{\int d^n x F^2}. \quad (2.11)$$

Rozważmy teraz funkcję  $\tilde{F}$  powiązaną z wyjściową funkcją  $F$  następująco

$$\tilde{F}(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}) + L^{-n/2}g((\mathbf{d} + \mathbf{x})/L),$$

gdzie funkcja  $g$  ma zwarty nośnik,  $\mathbf{d}$  jest wektorem a  $L$  jest dodatnią dużą liczbą. Modyfikację taką nazywamy za Colemanem dodawaniem mezonu w nieskończoności. Odpowiednio dobierając  $L$  i  $\mathbf{d}$  możemy różnicę

$$\int d^n x \left[ (\nabla \tilde{F})^2 + W(\tilde{F}) \right] - \int d^n x [(\nabla F)^2 + W(F)]$$

uczynić dowolnie bliską zera. Istotnie, liniowa zamiana zmiennych pozwala uzyskać równość

$$L^{-n} \int d^n x (\nabla g((\mathbf{d} + \mathbf{x})/L))^2 = L^{-2} \int d^n y (\nabla g(y))^2,$$

a odpowiedni dobór wektora  $\mathbf{d}$  pozwala (przy ustalonym  $L$ ) wartość całki

$$L^{-n/2} \int d^n x \nabla F(\mathbf{x}) \nabla g((\mathbf{d} + \mathbf{x})/L)$$

uczynić dowolnie małą –  $\mathbf{d}$  ma tak przesunąć argumenty, aby funkcja  $g$  była niezerowa w obszarze, w którym  $F$  przyjmuje bardzo małe wartości. Zmodyfikowany potencjał polowy  $W(F)$  można rozwinąć w szereg Taylora wokół zera; pierwszy nieznikający wyraz jest rzędu  $F^3$ . Podobnie jak powyżej pokazuje się, że odpowiednio dobierając  $L$  i  $\mathbf{d}$  wpływ funkcji  $g$  na wartość całki  $\int d^n x W(\tilde{F})$  może być dowolnie mały. W przypadku całki z  $\tilde{F}^2$  poprzednie argumenty prowadzą do równości

$$\int d^n x \tilde{F}^2 = \int d^n x F^2 + \int d^n x g^2(\mathbf{x}),$$

gdzie nie ma już zależności od  $L$  i  $\mathbf{d}$ .

Na tej podstawie można podać warunek konieczny na to, aby w modelu istniały rozwiązania o minimalnej dopuszczalnej energii przy zadanym ładunku. Aby go sformułować zauważmy jeszcze, że suma pojawiająca się w wyrażeniu na energię (2.11)

$$\frac{\mu^2}{2} \int d^n x F^2 + \frac{Q^2}{\int d^n x F^2} \quad (2.12)$$

ma minimum dla  $\int d^n x F^2 = \sqrt{2}|Q|/\mu$ , jej minimalna wartość wynosi  $\sqrt{2}|Q|\mu$ . Dlatego, jeżeli w powyższym rozumowaniu wstawi się  $F = 0$  (i odpowiednio dobierze się funkcję  $g$  definiującą  $\tilde{F}$ ), to zwiększając  $L$  można otrzymać konfiguracje, dla których

$$\lim_{L \rightarrow \infty} E[\tilde{F}] = \sqrt{2}\mu|Q|.$$

To rozumowanie zastosowane do pola swobodnego pokazuje, że w tym wypadku nie ma konfiguracji o minimalnej energii przy zadanym ładunku. Łatwo teraz zrozumieć wspomniany warunek konieczny: aby w modelu istniała konfiguracja absolutnie stabilna przy zadanej wartości  $Q^*$ , to musi istnieć funkcja  $F^*$ , dla której

$$E[F^*] < \sqrt{2}\mu|Q^*|. \quad (2.13)$$

Spełnienie tego warunku dla ładunku o wartości  $|Q^*|$  gwarantuje, że dla wszystkich  $|Q| > |Q^*|$  istnieje konfiguracja spełniająca tę nierówność. Aby się o tym przekonać, zauważmy, że z warunku (2.13) i istnienia minimum dla wyrażenia (2.12) wynika, że

$$\int d^n x [(\nabla F^*)^2 + W(F^*)] < 0. \quad (2.14)$$

W takim razie zamieniając funkcję  $F^* \rightarrow \tilde{F}^*$  poprzez dodanie w nieskończoności mezonu otrzymujemy następujący wzór na energię

$$E[\tilde{F}^*] = \int d^n x [(\nabla F^*)^2 + W(F^*)] + \frac{\mu^2}{2} \int d^n x (F^{*2} + g^2) + \frac{\tilde{Q}^2}{\int d^n x (F^{*2} + g^2)}. \quad (2.15)$$

Jeżeli w powyższym wzorze ładunek ma wartość  $|\tilde{Q}| = \mu \int d^n x (F^{*2} + g^2)/\sqrt{2}$ , to na mocy (2.14) funkcja  $\tilde{F}^*$  zadaje konfigurację, która spełnia warunek (2.13). Zawsze można tak dobrać funkcję  $g$ , aby  $|Q^*|$  było mniejsze od  $|\tilde{Q}|$ . Jak pokazał Coleman w [12], warunek (2.13) dla szerokiej klasy potencjałów jest również warunkiem wystarczającym, aby istniały absolutnie stabilne Q-balle. Skoro tak, to w danym modelu może istnieć ładunek minimalny dopuszczający ich istnienie, nie ma za to z pewnością maksymalnej wartości ładunku, dla której takie rozwiązania można znaleźć.

Kolejna obserwacja ogranicza możliwe wartości wyrażenia (2.12). Przyjmijmy, że znamy funkcję  $F_m$ , która minimalizuje funkcjonal energii (2.7). Pokażemy, że

$$\int d^n x F_m^2(\mathbf{x}) > \frac{\sqrt{2}Q}{\mu}. \quad (2.16)$$

Najpierw wykażemy, że niemożliwe jest, aby  $\int d^n x F_m^2(\mathbf{x}) < \frac{\sqrt{2}Q}{\mu}$ . Istotnie, jeżeli by tak było, to poprzez dodanie mezonu w nieskończoności (zwiększenie wartości  $\int d^n x F^2$  bez zmiany  $Q$ ) można by obniżyć wartość wyrażenia (2.12) i, co za tym idzie, wartość energii. Dla  $F_m$  z definicji jest to niemożliwe. Pozostaje wykluczyć możliwość  $\int d^n x F_m^2(\mathbf{x}) = \frac{\sqrt{2}Q}{\mu}$ . W tym celu przeskalowujemy zmienne  $x \rightarrow (1 + \alpha)x$ . Po takiej zmianie energia skaluje się według wzoru

$$E \rightarrow E + \alpha \left( (n-2) \int d^n x (\nabla F_m)^2 + n \int d^n x W(F_m) \right) + o(\alpha). \quad (2.17)$$

Na mocy założenia suma (2.12) jest w minimum, nie modyfikuje więc wyrażenia na energię w pierwszym (liniowym) rzędzie. Jeżeli  $F_m$  istotnie jest w minimum funkcjonału, wówczas pozostałe wyrazy w rzędzie  $\alpha$  powinny się kasować, czyli

$$\frac{n-2}{n} \int d^n x (\nabla F_m)^2 = - \int d^n x W(F_m).$$

Stąd wynika, że dla  $n \neq 2$

$$\int d^n x (\nabla F_m)^2 \geq \left| \int d^n x W(F_m) \right|. \quad (2.18)$$

Na mocy wzoru (2.11) oraz założeń:  $E[F_m] < \sqrt{2}\mu Q$  i  $\int d^n x F_m^2(\mathbf{x}) = \frac{\sqrt{2}Q}{\mu}$  mamy nierówność

$$\int d^n x (\nabla F_m)^2 < \left| \int d^n x W(F_m) \right|. \quad (2.19)$$

Wyrażenie (2.18) jest negacją relacji (2.19), co dowodzi tezy. W przypadku  $n = 2$  znikanie wyrazów rzędu  $\alpha$  w wyrażeniu możliwe jest tylko wtedy, gdy  $\int d^n x W(F_m) = 0$ . Jest to jednak niemożliwe na mocy (2.19) dla niezerowego  $F_m$ .

## 2.3 Q-balle w kwantowej teorii pola

Równanie profilu dla Q-balli (2.8) można otrzymać w inny sposób opierając się na pracy R. Rajaramana i E. Weinberga [14]. Artykuł ten odpowiada na pytanie o rolę klasycznej symetrii  $U(1)$  (i innych grup symetrii) na poziomie kwantowym. Problem jest rozważany w ramach formalizmu całek po trajektoriach i polowego przybliżenia WKB. Poniżej zostanie zarysowane przedstawione tam rozumowanie prowadzące również do równania profilu. W oryginalnej pracy rozważano model w wymiarze  $1 + 1$ , wynik wydaje się jednak być prawdziwy dla dowolnej liczby wymiarów przestrzennych. W formalizmie całek po trajektoriach w kwantowej teorii pola fundamentalną wielkością jest

$$\mathcal{Z} = \int D[\Phi] D[\bar{\Phi}] e^{iS},$$

gdzie działanie dane jest wzorem

$$\mathcal{S} = \int d^{n+1}x \mathcal{L}[\partial\Phi, \partial\bar{\Phi}, \Phi, \bar{\Phi}],$$

a lagranżian  $\mathcal{L}$  ma postać jak w (2.1). Pole  $\Phi$  w tym lagranżianie wyrażamy następnie przez „promień” i „kąć”:  $\Phi(t, \mathbf{x}) = \rho(t, \mathbf{x}) \exp(i\theta(t, \mathbf{x}))$ , przy czym przyjmujemy, że  $\rho > 0$ . Dla uniknięcia trudności, ograniczamy się do rozważania pola na odcinku (w zwartej przestrzeni). Następnie funkcję  $\theta$  wyrażamy w postaci szeregu harmonicznego

$$\theta = b(t) + \sum_{k_n \neq 0} b_n(t) e^{i\mathbf{k}_n \mathbf{x}}.$$

W tych nowych zmiennych całka funkcjonalna jest kwadratowa w zmiennej  $b$  i można ją w sposób jawny wykonać. W rezultacie otrzymuje się efektywny lagranżian

$$\mathcal{L}_{eff} = (\partial_t \rho)^2 - (\nabla \rho)^2 + \rho^2 \left[ (\partial_t \tilde{\theta})^2 - (\nabla \tilde{\theta})^2 \right] - U(\rho) - \frac{\left( q + \int \rho^2 \partial_t \tilde{\theta} d^n x \right)^2}{\left( \int \rho^2 d^n x \right)^2}, \quad (2.20)$$

gdzie  $q$  jest skwantowanym ładunkiem (w jednostkach ładunku jest to liczba naturalna) a  $\tilde{\theta} = \theta - b(t)$ . Innymi słowy,  $\tilde{\theta}$  to funkcja kąta spełniająca warunek  $\int d^n x \tilde{\theta} = 0$ . Należy wspomnieć, że ten lagranżian efektywny został wyprowadzony przy pewnych upraszczających założeniach. Wyprowadzenie bez tych uproszczeń jest możliwe, jednak zdaniem autorów wynik jest bardziej skomplikowany. Mimo to dalsza dyskusja pozostaje prawdziwa również w ramach pełnej teorii.

Z otrzymanego  $\mathcal{L}_{eff}$  można wyprowadzić równania na  $\rho$  i  $\theta$ . Wstawiając do tych równań  $\tilde{\theta} \equiv 0$  pozostaje równanie na  $\rho$  równoważne równaniu profilu Q-balla dla  $Q = q$ . Tak więc, w przybliżeniu WKB rozwiązanie typu Q-ball jest analogiczne do statycznego rozwiązania interpolującego pomiędzy dwoma próżniami w teorii  $\phi^4$ . Podobnie jak w tamtym modelu, energię Q-balla można traktować jako dobre oszacowanie energii pewnych stanów obecnych w teorii kwantowej, por. [15]. W przypadku kinku poprawki kwantowe do masy są małe dla małej stałej sprzężenia. Wyznaczenie kwantowych poprawek do masy Q-balli jest nietrywialnym zadaniem, w przypadku modelu signum-Gordona jest to w tym momencie zadanie niewykonalne. Trudno więc orzec, choćby jakościowo, jaka jest rola Q-balli w kwantowym modelu signum-Gordona.

## 2.4 Q-balle w fizyce

Q-ballom poświęcono wiele uwagi w literaturze. Analitycznych rozwiązań istnieje bardzo niewiele, stąd też liczne opracowania dotyczące przybliżonych własności rozwiązań typu Q-ball. Dobry przegląd tego, co na ten temat zostało ustalone, znajduje się

w pracy doktorskiej M. Tsumagari [16]. Zaletą tej pracy jest również kompletny spis literatury. Wiele spośród wyników dotyczących Q-bali nie stosuje się do rozwiązań tego typu w modelu signum-Gordona ze względu na jego nieanalityczność. Jak można się spodziewać, choćby na podstawie paragrafu 2.2, dużą rolę w analizach Q-bali odgrywa parametr masowy obecny w teorii. W interesującym nas modelu ten parametr nie jest zdefiniowany.

Praca przeglądowa z 1992 roku [17] o nietopologicznych solitonach wymienia trzy obszary ich zastosowań: kondensaty bozonowe, model Friedberga-Lee hadronów i solitonowe modele gwiazd. W ostatnich latach Q-balle odzyskały popularność. Stało się tak za sprawą supersymetrycznych teorii. Opisuąc początki wszechświata w ich ramach Q-balle naturalnie pojawiają się w wyniku procesów nierównowagowych. Jako rozwiązania stabilne (choć nawet słabe oddziaływania z innymi polami mogą zamienić je z konfiguracji absolutnie stabilnej w konfiguracje długożyjące, por. [19]) mogły przetrwać bardzo długo. Dlatego dziś są wymieniane jako kandydaci na ciemną materię.

Pojawiające się w tym kontekście efektywne potencjały określające samoodziaływanie pola  $U(|\Phi|)$  są jakościowo bliższe potencjałowi signum-Gordona niż potencjałom analitycznym. Często są one nieanalityczne w minimum – pojawia się w nich człon proporcjonalny do  $\Phi\bar{\Phi} \ln(\Phi\bar{\Phi})$  a dla dużych wartości pola zachodzi  $U(|\Phi|)/|\Phi|^2 \rightarrow 0$ . Również na poziomie wyników istnieje pewne jakościowe podobieństwo - zależność  $E(Q)$  jest potęgowa, por. [18].

## Rozdział 3

### Q-balle w modelu signum-Gordona

W tym rozdziale przedstawimy rozwiązania typu Q-ball w modelu signum-Gordona w dowolnej liczbie wymiarów przestrzennych  $n$ . Dla  $n > 1$  dosyć szczegółowo omawiamy konstrukcję tych rozwiązań; okaże się ona istotna w rozdziale 4. Następnie przedstawiamy bardziej szczegółowo własności Q-balli w wymiarach  $n = 1, 2, 3$ . W przypadku  $n = 2$  dyskutujemy pokrótce rozwiązania modelu signum-Gordona, które minimalizują energię dla zadanego ładunku i momentu pędu a także powiązanie tego modelu z modelem znanym w literaturze pod nazwą *baby-Skyrme model*. Przy omawianiu rozwiązań dla  $n = 3$  prezentujemy, obok charakterystyk rozwiązania podstawowego, również „wzbudzone” Q-balle.

#### 3.1 Ogólne rozwiązanie

Wstawiając *Ansatz* (2.10) na rozwiązania typu Q-ball do równania (1.14) otrzymujemy równanie na funkcję profilu  $F$

$$F'' + \frac{n-1}{r}F'(r) = \frac{\lambda}{2}\text{sign}(F) - \omega^2F, \quad (3.1)$$

gdzie funkcja  $\text{sign}(\cdot)$  jest zdefiniowana wzorem (1.8). Przeskalowanie zmiennej radialnej  $y = \omega r$  i funkcji  $\lambda f(y) = 2\omega^2F(y/\omega)$  pozwala przepisać powyższe równanie w następującej formie

$$f'' + \frac{n-1}{y}f' + f = \text{sign}(f). \quad (3.2)$$

W równaniu występuje symetria zamiany  $f \rightarrow -f$ . Wystarczy więc ograniczyć się do badania rozwiązań z  $f(0) > 0$ . Równanie to przy ustalonym znaku rozwiązania jest liniowym równaniem niejednorodnym. Ogólne rozwiązanie takiego problemu to suma rozwiązania szczególnego spełniającego niejednorodne równanie i liniowo niezależnych funkcji spełniających równanie jednorodne. Współczynniki przy rozwiązaniach równania jednorodnego dobiera się tak, aby były spełnione warunki brzegowe.

Dla równania (3.2) z warunkiem  $f(0) > 0$  szczególne rozwiązanie to funkcja stała  $f \equiv +1$ . Rozwiązanie części jednorodnej gdy  $n > 1$  można znaleźć poprzez podstawienie  $f(y) = y^{-\alpha}R(y)$ , przy czym  $\alpha = (n - 2)/2$  (przypadek  $n = 1$  omówimy poniżej). Równanie na funkcję  $R$  jest równaniem Bessela rzędu  $\alpha$ . Rozwiązania wyjściowego problemu są więc powiązane z funkcjami Bessela pierwszego  $J_\alpha$  i drugiego  $Y_\alpha$  rodzaju. Przyjmujemy, że dwa liniowo niezależne rozwiązania  $u_1$  i  $u_2$  wyjściowego problemu (3.2) mają postać:

$$u_1 = y^{-\alpha}J_\alpha(y), \quad u_2 = y^{-\alpha}Y_\alpha(y). \quad (3.3)$$

Dla  $y$  bliskiego zera funkcje te zachowują się następująco

$$u_1 \approx a - by^2, \quad u_2 \approx cy^{-2\alpha}, \quad (3.4)$$

gdzie  $a$ ,  $b$  i  $c$  są dodatnimi stałymi. W przypadku  $n = 2$  powyższy wzór zawodzi dla funkcji  $u_2$ , zachowuje się ona dla argumentów bliskich zera według wzoru:  $u_2 \sim \ln(y)$ . Wartości obu tych funkcji dla  $y > 0$  oscylują wokół zera z malejącą amplitudą, w szczególności  $|u_1(0)| > |u_1(y)|$  dla dowolnego  $y$ . Można ten fakt uzasadnić następująco: część jednorodna równania (3.2) odpowiada równaniu oscylatora harmonicznego z tarcielem zależnym od czasu. Jakościowo rozwiązania te dobrze reprezentowane są przez rozwiązanie dla  $n = 3$ , gdzie  $u_1(y) = \sin y/y$  i  $u_2(y) = \cos y/y$ . Warunkiem brzegowym dla funkcji profilu jest  $f'(0) = 0$ . Dowolne rozwiązanie równania (3.2) spełniające ten warunek oraz mające wybraną wartość w zerze  $f(0) > 0$  ma następującą postać

$$f_+(y) = \frac{f(0) - 1}{u_1(0)}u_1(y) + 1. \quad (3.5)$$

Ta funkcja stanowi rozwiązanie równania (3.2) na odcinku  $(0, y_1)$ , przy czym  $y_1$  jest najmniejszym pierwiastkiem równania  $f_+(y) = 0$ . Jeżeli  $f(0)$  jest dostatecznie małe,  $f_+$  jest prawidłowym rozwiązaniem równania dla wszystkich argumentów. Wynika to z konstrukcji  $f_+$  – ma ona postać przeskalowanej funkcji  $u_1$ , której wykres przesunięto o wektor  $(0, +1)$ . Stąd też wnioskujemy, że pochodne funkcji  $u_1$  i  $f_+$  zerują się dla tych samych argumentów. Oznaczamy przez  $y_0 > 0$  najmniejszy argument  $y$ , dla którego  $u_1'(y_0) = 0$  oraz  $f_0 = 1 - \frac{u_1(0)}{u_1(y_0)}$ ; należy zauważyć, że  $u_1(y_0) < 0$ , co widać choćby z podanej analogii mechanicznej. Przy tych oznaczeniach można podać, kiedy warunek  $f_+(y_1) = 0$  ma rozwiązanie. Dzieje się tak, gdy  $f(0) > f_0$  – wówczas  $f_+(y_0) < 0$ . Zatem  $y_1 < y_0$  i  $f_+'(y_1) < 0$ . Jeżeli  $f(0) < f_0$ , wówczas nie istnieje punkt  $y_1$  i  $f_+(y) > 0$  dla wszystkich nieujemnych argumentów. Sytuacja komplikuje się, gdy  $f(0) = f_0$ . Wówczas  $f(y_0) = 0$  i  $f'(y_0) = 0$  a równanie traci jednoznaczność. Dla  $y > y_0$  dopuszczalne są trzy rozwiązania:  $\pm f_+$  oraz rozwiązanie  $f = 0$ . Ze względu na kontekst teorii pola wybieramy tę ostatnią możliwość. Tak więc profil Q-balla opisywany jest przez



następującą funkcję

$$f(y) = \begin{cases} -\frac{u_1(y)}{u_1(y_0)} + 1 & \text{dla } y < y_0 \\ 0 & \text{dla } y > y_0. \end{cases} \quad (3.6)$$

W ten sposób pokazaliśmy, że w dowolnej liczbie wymiarów  $n > 1$  w modelu signum-Gordona Q-balle istnieją. Teraz należy zbadać globalne charakterystyki tych rozwiązań: ładunek i energię. Okazuje się, że fizycznie cenną informację można otrzymać wyrażając wzory na ładunek i energię przez  $f$  i  $y$ :

$$Q = \frac{\lambda^2}{\omega^{n+3}} \left( \frac{\Omega_{n-1}}{4} \int dy y^{n-1} f^2 \right), \quad (3.7)$$

$$E = \frac{\lambda^2}{\omega^{n+2}} \left( \frac{\Omega_{n-1}}{4} \int dy y^{n-1} [(f')^2 + f^2 + 2|f|] \right). \quad (3.8)$$

W powyższych wzorach  $\Omega_{n-1}$  oznacza powierzchnię sfery  $n - 1$  - wymiarowej. Zauważmy, że wyrażenia w nawiasach okrągłych są liczbami nie mającymi istotnego wpływu na fizyczne właściwości Q-balli. Oznaczmy je odpowiednio przez  $c_Q$  i  $c_E$ . Z powyższych wzorów wynika zależność

$$E = c_E \lambda^{\frac{2}{n+3}} \left( \frac{Q}{c_Q} \right)^{\frac{n+2}{n+3}}. \quad (3.9)$$

Związek ten nie zależy od postaci rozwiązań, może być zastosowany do modelu w jednym wymiarze przestrzennym przy odpowiedniej definicji stałych  $c_E$  i  $c_Q$ . Takiej relacji pomiędzy energią i ładunkiem można się spodziewać na podstawie symetrii skalowania. Zależność (3.9) świadczy o stabilności rozwiązań ze względu na rozpad – energia pojedynczego Q-balla o ładunku  $Q$  jest mniejsza od energii dwóch Q-balli o ładunkach  $Q_1$  i  $Q_2$ , przy czym  $|Q_1| + |Q_2| = |Q|$ . Wynika to z własności funkcji potęgowej: jeżeli  $x \in (0, 1)$ , to  $x^s > x$  gdy  $0 < s < 1$  i  $x^s < x$  gdy  $s > 1$ . Stąd otrzymujemy nierówność

$$\left| \frac{Q_1}{Q} \right|^{\frac{n+2}{n+3}} + \left| \frac{Q_2}{Q} \right|^{\frac{n+2}{n+3}} \geq 1,$$

która jest równoznaczna ze stwierdzeniem, że  $E(Q_1) + E(Q_2) \geq E(Q)$

### 3.1.1 $n=1$

W jednym wymiarze przestrzennym równanie profilu (3.2) redukuje się do elementarnego równania:

$$f'' + f = 1, \quad (3.10)$$

gdzie założyliśmy, że szukane rozwiązanie jest dodatnie ( $sign(f) = 1$ ). Rozwiązanie ze środkiem ciężkości w  $Y$  można zapisać w następującej formie:

$$f(y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } y - Y < -\pi \\ 1 + \cos(y - Y - \pi) & \text{dla } -\pi < y - Y < \pi \\ 0 & \text{dla } y - Y > \pi. \end{cases} \quad (3.11)$$

Ładunek i energia dane są wzorami

$$Q = \frac{3\pi\lambda^2}{4\omega^4}, \quad E = \frac{2\pi\lambda^2}{\omega^3}. \quad (3.12)$$

Jak zostało wspomniane w rozdziale 1, model ten może opisywać przyciągające oddziaływanie struny z linią prostą. Powyższe rozwiązanie ma wówczas interpretację obracającego się wokół owej prostej „garba” o skończonej szerokości; na pozostałym obszarze struna jest przyklejona do przyciągającej linii.

Na osi rzeczywistej można umieszczać obok siebie wiele różnych Q-balli. O ile ich nośniki nie stykają się, Q-balle ze sobą nie oddziałują. Interakcje pomiędzy nimi są opisywane jako procesy w pełni nieliniowe. W pierwszym odruchu dobrym podejściem do badania oddziaływania wydaje się rozwiązanie powstałe w wyniku umieszczenia obok siebie dwóch rozwiązań tak, aby się stykały (osiągały wartość próżniową w tym samym punkcie - jedno od prawej, drugie od lewej strony). Taka konfiguracja jest dokładnym rozwiązaniem równania Eulera-Lagrange’a. Niestety, opis małego zaburzenia tego rozwiązania nic nie wnosi. Jak wynika z dyskusji w rozdziale 1, liniowa ewolucja (z uwzględnieniem stałości ładunku) zwartego zaburzenia na krótką metę jest dozwolona i sprawdza się wszędzie wewnątrz rozwiązania z wyjątkiem interesującego obszaru.

### 3.1.2 $n=2$

W tym wypadku interesujące stałe wyznaczono numerycznie. Funkcja profilu ma postać

$$f(y) = \begin{cases} \frac{J_0(y)}{|J_0(y_0)|} + 1 & \text{dla } y \geq y_0 \\ 0 & \text{dla } y < y_0, \end{cases}$$

gdzie  $y_0 \approx 3.8317$ ,  $J_0(y_0) \approx -0.4028$ . Ładunek i energię można obliczyć mając  $c_Q = \frac{\pi}{2}y_0^2$  i  $c_E = \frac{5\pi}{4}y_0^2$ . Wyrażenia na  $c_Q$  i  $c_E$  można otrzymać wstawiając do odpowiednich całek zależności wynikające z równania (3.2) a następnie całkując przez części.

W dwóch wymiarach przestrzennych udało się uogólnić otrzymane rozwiązania, zob. [6]. Obok ładunku  $Q$  i energii  $E$  model signum-Gordona posiada bowiem jeszcze inną wielkość niezmienną w czasie - moment pędu  $M_z$

$$M_z = -\frac{1}{2} \int d^2x (\partial_t \bar{\Phi} \partial_\theta \Phi + \partial_\theta \bar{\Phi} \partial_t \Phi),$$

gdzie  $\Phi$  jest zespolonym polem skalarnym występującym w lagranżianie (1.13) a  $\theta$  współrzędną kątową w płaszczyźnie  $(x_1, x_2)$ . Naturalne jest więc pytanie o konfigurację pola, która przy zadanym ładunku  $Q$  i momencie pędu  $M_z$  ma najmniejszą możliwą energię. Zagadnienie to można sformalizować wprowadzając mnożniki Lagrange'a. Problem sprowadza się wówczas do minimalizacji funkcjonału  $E + \lambda_1 Q + \lambda_2 M_z$ , gdzie  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  to wspomiane mnożniki. Bliższa analiza tego funkcjonału pozwala ograniczyć poszukiwania poprzez wstawienie do równań ruchu *Ansatzu*

$$\Phi = \exp(i\omega t) \exp(iN\theta) F(r),$$

gdzie  $N$  jest liczbą naturalną. W ten sposób otrzymuje się równanie na funkcję profilu

$$F'' + \frac{1}{r} F' + \left( \omega - \frac{N^2}{r^2} \right) F = \frac{\lambda}{2} \text{sign}(F),$$

przy czym  $F'(0) = 0$  a dla  $N > 0$  dodatkowo  $F(0) = 0$ . Jak należy oczekiwać, dla  $N = 0$  dostajemy wzór (3.1). Analiza równania pozwala uzasadnić, że tylko dla  $N = 1$  pojawiają się rozwiązania, które w sąsiedztwie  $r = 0$  przyjmują niezerowe wartości. Pozostałe rozwiązania (dla  $N > 1$ ) mają kształt pierścienia: funkcja  $F$  przyjmuje nietrywialne wartości na odcinku  $(r_1, r_2)$ , przy czym  $0 < r_1 < r_2$ . Dzięki symetrii skalowania można wzory na całki ruchu wyrazić następująco

$$E \sim \frac{g_1(N)}{\omega^4}, \quad Q \sim -\frac{g_2(N)}{\omega^5}, \quad M_z = -NQ,$$

gdzie  $g_1$  i  $g_2$  są funkcjami zależnymi tylko od  $N$ . Dla dużych wartości  $N$  została znaleziona przybliżona relacja łącząca trzy całki ruchu

$$E \sim \lambda^{2/5} |M_z|^{1/5} |Q|^{3/5}.$$

Omówione powyżej wyniki zostały wykorzystane w pracy [20] dotyczącej modelu znanego pod angielską nazwą *baby-Skyrme model*. Teoria ta opisuje odwzorowanie z trójwymiarowej czasoprzestrzeni (dwa wymiary przestrzenne) na pole wektorowe: trójwymiarowe wektory o ustalonej długości. Aby zapewnić skończoność energii konieczne jest wybranie próżni, czyli wektora do którego dążą wartości pola w nieskończoności. Tak więc teoria ta opisuje odwzorowanie  $S^2 \rightarrow S^2$  (gdzie  $S^2$  jest dwuwymiarową sferą). Stąd wynika nietrywialna struktura topologiczna rozwiązań. Co więcej, aby w teorii pojawiały się stabilne rozwiązania, konieczne jest dodanie do modelu (arbitralnego) potencjału polowego. Zazwyczaj potencjał ten jest taką funkcją odchylenia od wektora odniesienia, że pozostaje w teorii swoboda obrotu wektorów w płaszczyźnie prostopadłej do wektora próżniowego. Ta swoboda powoduje pojawienie się całki

ruchu – ładunku innego niż ładunek topologiczny. Przy pomocy projekcji stereograficznej można przepisać lagranżian tej teorii przy użyciu skalarnego pola zespolonego  $u$ . W tym języku ma on postać

$$\mathcal{L} = 4 \frac{\partial_\mu u \partial^\mu \bar{u}}{(1 + |u|^2)^2} - 8\beta \frac{(\partial_\mu u \partial^\mu \bar{u})^2 - (\partial_\mu u)^2 (\partial_\nu \bar{u})^2}{(1 + |u|^2)^4} - \lambda \frac{|u|}{\sqrt{1 + |u|^2}},$$

gdzie  $\beta > 0$  i  $\lambda > 0$  są parametrami modelu. Ostatni wyraz w powyższym wzorze pochodzi od oddziaływania. Wspomniana symetria w tym języku odpowiada symetrii zmiany fazy pola. Jak zauważają autorzy cytowanej pracy, przy tym wyborze oddziaływania dla pól o małych amplitudach lagranżian powyższy dąży do lagranżianu zespolonego modelu signum-Gordona. Ten fakt pozwala oczekiwać, że dla małych wartości pola Q-balle są rozwiązaniami teorii, przynajmniej w sektorze topologicznie trywialnym. Numeryczna analiza potwierdza to przypuszczenie a jakościowe własności rozwiązań pozostają bliskie Q-ballom znanym z modelu signum-Gordona. Najbardziej znaczącą różnicą jest pojawienie się minimalnej częstości  $\omega$ , dla której udało się znaleźć rozwiązania typu Q-ball.

### 3.1.3 $n=3$

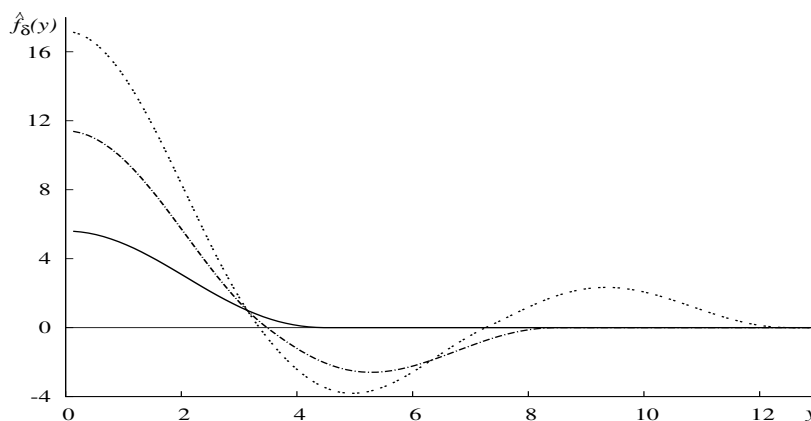
W trzech wymiarach przestrzennych  $u_1$  wyraża się przez funkcję elementarną  $\sin y/y$ . W tym wypadku rozwiązanie ma postać

$$f(y) = \begin{cases} 1 - \frac{y_0 \sin y}{y \sin y_0} & \text{dla } y < y_0 \\ 0 & \text{dla } y > y_0 \end{cases}, \quad (3.13)$$

gdzie  $y_0 \approx 4.4934$ . Całkowanie pozwala wyznaczyć stałe  $c_Q = 5\pi y_0^3/6$  oraz  $c_E = 2\pi y_0^3$ . Powyższa funkcja nie jest jedynym rozwiązaniem równania (3.2). Oprócz niego możliwe są rozwiązania, które zmieniają znak zanim zostaną sklejone z wartością próżniową. Ilość izolowanych zer dobrze charakteryzuje kolejne rozwiązania. Na rysunku 3.1 wykreślone zostały trzy przykładowe funkcje profilu tego typu. Chociaż rozwiązania takie prezentujemy dla  $n = 3$ , pojawiają się one w dowolnej liczbie wymiarów  $n > 1$ . W rozdziale 5 przedstawimy uogólnienie podstawowych Q-balli w trzech wymiarach przestrzennych.

## 3.2 Stabilność Q-balli w modelu signum-Gordona

Ważne miejsce Q-balli w wielu teoriach wynika z ich stabilności. Póki co, w modelu signum-Gordona niewiele wiadomo na ten temat: jak pokazano powyżej, rozpad Q-balla na mniejsze nie jest energetycznie korzystny. Pojęcie liniowej stabilności nie ma



Rysunek 3.1: Trzy rozwiązania równania (3.2) w trzech wymiarach przestrzennych o najniższych energiach.

sensu. Pozostaje pytanie o absolutną stabilność. Poniżej przedstawiamy rozumowanie, które dowodzi, że dla zadanego ładunku  $Q$  nie istnieje inne rozwiązanie o mniejszej energii od energii pojedynczego Q-balla. Dowód ten jest koncepcyjnie bardzo prosty. Z drugiej strony, mimo użycia elementarnych narzędzi matematycznych, jest on w znacznej mierze techniczny i rozległy. Dlatego tutaj zaprezentujemy jego ideę i ostateczny argument na rzecz absolutnej stabilności. Wyniki cząstkowe znajdują się w następnym rozdziale i dodatku B.

Pierwszym krokiem jest rozważenie Q-bali w zregulowanej teorii. Odpowiedni model, sygnalizowany już wcześniej, zadany jest lagranżianem

$$\mathcal{L}_\kappa = \partial_\mu \Phi \partial^\mu \bar{\Phi} - \lambda \left( \sqrt{\Phi \bar{\Phi} + \kappa^2} - \kappa \right), \quad (3.14)$$

gdzie  $\lambda > 0$  i  $\kappa > 0$ . W modelu tym również występują Q-balle. Są one scharakteryzowane w rozdziale 4. Równanie profilu w takim modelu zależy od jednego parametru  $\delta = 2\omega^2\kappa/\lambda$ , gdzie  $\omega$  pochodzi z *Ansatzu* (2.10). Wykażemy najpierw, że w granicy  $\delta \rightarrow 0$  rozwiązania zregulowanego modelu dążą do rozwiązań modelu bez regularyzacji (dla tej samej wartości  $\lambda$  i  $\omega$ ) w sposób jednostajny. W tej granicy również energia i ładunek wyliczone w zregulowanym modelu dążą do wartości znanych z modelu signum-Gordona. Te fakty uzasadniają oznaczenie funkcji profilu Q-bali przez  $F_\kappa(\mathbf{x})$ , przy czym dla  $\kappa \neq 0$  odpowiada ona Q-balom w zregulowanym modelu a dla  $\kappa = 0$  odpowiada rozwiązaniom w oryginalnym modelu. Następnie pokażemy, że rozwiązania w zregulowanym modelu są absolutnie stabilne. Mając na uwadze te wyniki możemy teraz wykazać, że stabilność Q-bali w modelu signum-Gordona wynika ze stabilności Q-bali w modelu zregulowanym. Zgodnie z wprowadzeniem (por. rozdział 2), ograniczamy się do badania warunków początkowych w pewnej chwili czasu. Ładunek  $Q$  traktujemy jako ustalony parametr. Energia konfiguracji  $F$  dana

jest wówczas wzorem (w oryginalnym modelu)

$$E_{s-G}[F] = \frac{Q^2}{\int d^n x F^2} + \int d^n x [(\nabla F)^2 + \lambda|F|].$$

Funkcjonał energii w teorii zregulowanej parametrem  $\kappa$  ma postać

$$E_\kappa[F] = \frac{Q^2}{\int d^n x F^2} + \int d^n x [(\nabla F)^2 + \lambda(\sqrt{F^2 + \kappa^2} - \kappa)].$$

Ze wzoru  $|a| - |b| = (a^2 - b^2)/(|a| + |b|)$  wynika, że

$$E_{s-G}[F] - E_\kappa[F] = 2\lambda\kappa \int d^n x \frac{|F|}{\sqrt{F^2 + \kappa^2} + \kappa + |F|},$$

czyli

$$E_{s-G}[F] \geq E_\kappa[F] \tag{3.15}$$

dla każdej funkcji  $F$  przy ustalonej wartości ładunku. Oznacza to, że dla każdego  $\kappa > 0$  prawdziwe są nierówności

$$E_{s-G}[F_0] \geq E_\kappa[F_0] \geq E_\kappa[F_\kappa]. \tag{3.16}$$

Teraz możemy pokazać absolutną stabilność Q-bali w modelu signum-Gordona przy założeniu absolutnej stabilności Q-bali w modelu zregulowanym i wspomnianej powyżej zależności  $E_\kappa[F_\kappa] \rightarrow E_{s-G}[F_0]$  gdy  $\kappa \rightarrow 0$ . Dowolna funkcja  $F$  spełnia następujący ciąg nierówności (na podstawie wzoru (3.15) i absolutnej stabilności Q-bali w modelu z regularyzacją)

$$E_{s-G}[F] \geq E_\kappa[F] \geq E_\kappa[F_\kappa]. \tag{3.17}$$

Odejmując w powyższych nierównościach  $E_{s-G}[F_0]$  od każdego wyrazu otrzymujemy

$$E_{s-G}[F] - E_{s-G}[F_0] \geq E_\kappa[F_\kappa] - E_{s-G}[F_0]. \tag{3.18}$$

Na podstawie (3.16) wiadomo, że wyraz po prawej stronie tej nierówności jest nie-dodatni. Powyższa relacja (3.18) jest prawdziwa dla dowolnej wartości parametru  $\kappa$ , dlatego moduł różnicy po prawej stronie znaku równości może być dowolnie bliski zera. Uzasadnia to ostatecznie szukaną relację

$$E_{s-G}[F] - E_{s-G}[F_0] \geq 0. \tag{3.19}$$

Pozostaje wykazać, że w modelu zregulowanym Q-balle istnieją i są absolutnie stabilne oraz uzasadnić relację  $E_\kappa[F_\kappa] \rightarrow E_{s-G}[F_0]$ . Dwa pierwsze zagadnienia omówione są w kolejnym rozdziale, ostatnie w dodatku B.

## Rozdział 4

### Zregulowany model signum-Gordona

W tym rozdziale zostaną przedstawione wyniki, w dużej części numeryczne, dotyczące zregulowanego modelu signum-Gordona. Większość z nich została już zasygnalizowana w ostatnim paragrafie poprzedniego rozdziału. Prezentowane ustalenia analityczne w zasadzie nie zależą od wymiaru przestrzeni. Wyjątkiem jest dowód absolutnej stabilności, który został przeprowadzony w trzech wymiarach przestrzennych. Obliczenia numeryczne ilustrujące Q-balle dotyczą również przypadku  $n = 3$ .

#### 4.1 Q-balle w zregulowanym modelu

Jak już wspominaliśmy, zregulowany model signum-Gordona zadany jest lagranżianem

$$\mathcal{L}_\kappa = \partial_\mu \Phi \partial^\mu \bar{\Phi} - \lambda(\sqrt{\Phi \bar{\Phi} + \kappa^2} - \kappa). \quad (4.1)$$

Wstawienie *Ansatzu* (2.10) do równania Eulera-Lagrange'a, przeskalowanie zmiennej radialnej  $y = \omega r$  i funkcji  $2\omega^2 F(y/\omega) = \lambda f_\delta(y)$  prowadzi do równania

$$f_\delta'' + \frac{n-1}{y} f_\delta' + f_\delta = \frac{f_\delta}{\sqrt{\delta^2 + f_\delta^2}}, \quad (4.2)$$

gdzie  $\delta = 2\omega^2 \kappa / \lambda$ . Interesujące nas rozwiązania mają wszędzie ciągłą pochodną (więc  $f_\delta'(0) = 0$ ) oraz skończony ładunek i energię, skąd  $f_\delta(\infty) = 0$ . Rozwiązanie spełniające te warunki oznaczamy przez  $\hat{f}_\delta$ . W ramach analogii mechanicznej patrzymy na to równanie jak na równanie Newtona dla cząstki w potencjale  $\frac{1}{2}f_\delta^2 - \sqrt{\delta^2 + f_\delta^2} + \delta$ . Na cząstkę tę działa również siła tarcia zależna od czasu. Potencjał ma dwa symetryczne minima dla  $0 < \delta < 1$ :  $f = \pm\sqrt{1 - \delta^2}$  i jedno lokalne maksimum dla  $f = 0$ . Gdy  $\delta > 1$  potencjał posiada jedno globalne minimum dla  $f = 0$ . Niemożliwe jest wówczas skonstruowanie rozwiązania nieoscyłującego w nieskończoność - zlinearyzowane równanie wokół takiego pojedynczego minimum odpowiada jednorodnej części równania (3.2). Tak więc asymptotyczne zachowanie rozwiązań dane jest przez kombinację funkcji  $u_1$

i  $u_2$  zdefiniowanych w poprzednim rozdziale. Takie rozwiązania asymptotyczne są niecałkowalne, co widać choćby na przykładzie  $n = 3$  – odpowiednie rozwiązanie jest proporcjonalne do funkcji  $F_{as} = \sin(r + r_0)/r$  dla pewnego  $r_0$ . Całka  $\int_R^\infty dr r^2 F_{as}^2$ , gdzie  $R > 0$ , nie istnieje.

W przypadku  $n > 1$  analogia mechaniczna prowadzi do heurystycznego argumentu na rzecz istnienia poszukiwanych rozwiązań. Zakładając, że  $0 < \delta < 1$ , jesteśmy w stanie tak dobrać wartość  $f_\delta(0)$ , że cząstka startując z zerową prędkością ( $f'_\delta(0) = 0$ ) nie zdoła pokonać bariery lokalnego maksimum i przez nieskończony czas będzie oscylować wokół jednego z symetrycznych minimów potencjału. Z drugiej strony można znaleźć takie  $f(0)$ , że cząstka pokona barierę potencjału wokół  $f = 0$  i przejdzie do drugiego „dołka” potencjału. Stąd wnioskujemy, że istnieje  $f(0)$  dzielące te dwie rodziny rozwiązań. Dla takiego rozwiązania  $f(\infty) = 0$ . To rozwiązanie jest funkcją profilu Q-balla.

Zauważmy, że dla  $n = 1$  analogia mechaniczna ma większą wartość: pozwala podać dokładną postać rozwiązania. W tym wypadku cząstka porusza się bez tarcia. Stąd otrzymujemy, że energia mechaniczna

$$E_{mech} = \frac{1}{2}f'^2 + \frac{1}{2}f^2 + \delta - \sqrt{f^2 + \delta^2}$$

jest całką równania (4.2). Szukane rozwiązanie (funkcję profilu Q-balla) otrzymujemy wstawiając  $E_{mech} = 0$ . To prowadzi do niejawniej postaci rozwiązania

$$y(f_\delta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\sqrt{1-\delta}}^{f_\delta} \frac{dz}{\sqrt{\sqrt{z^2 + \delta^2} - \delta - \frac{1}{2}z^2}}.$$

Przypadek ten pozostawiamy jednak na marginesie rozważań. Dla  $n = 2$  nie dysponujemy żadnym twierdzeniem uzasadniającym istnienie rozwiązań typu Q-ball, dlatego jesteśmy zdani na podaną powyżej heurzę. Dla  $n \geq 3$  istnienie poszukiwanych rozwiązań jest zagwarantowane na mocy twierdzenia wykazanego w [13]. Twierdzenie to mówi, że jeśli  $V$  spełnia pewne warunki, to równanie na funkcję rzeczywistą  $\psi$

$$\Delta\psi = \frac{dV(\psi)}{d\psi} \tag{4.3}$$

ma jedno, sferycznie symetryczne, monotonicznie malejące (w kierunku zmiennej radialnej) i znikające w nieskończoności rozwiązanie różne od rozwiązania  $\psi = 0$ . Co więcej, wartość całki

$$\int_{\mathbb{R}^n} d^n x [(\nabla\psi)^2 + V(\psi)]$$

dla tego rozwiązania jest równa lub mniejsza od wartości tej całki policzonej dla jakiegokolwiek innej znikającej w nieskończoności funkcji. Równość może zajść tylko dla funkcji sferycznie symetrycznych i monotonicznie malejących. Twierdzenie to zostało wykazane przy założeniu, że



- $V(\psi)$  jest funkcją ciągłą i różniczkowalną;
- $V(0) = dV(0)/d\psi = 0$ ;
- istnieje takie  $\psi_0$ , że  $V(\psi_0) < 0$ ;
- istnieją dodatnie liczby  $a, b, \alpha$  i  $\beta$ , takie że  $\alpha < \beta < 2n/(n-2)$  oraz

$$V \geq a|\psi|^\alpha - b|\psi|^\beta.$$

Zauważmy, że równanie (4.2) można zapisać w formie (4.3) przyjmując, że

$$V(f_\delta) = \left( \sqrt{f_\delta^2 + \delta^2} - \delta \right) - \frac{1}{2}f_\delta^2. \quad (4.4)$$

Potencjał ten w sposób oczywisty spełnia pierwsze trzy warunki konieczne do zastosowania powyższego twierdzenia. Spełnienie ostatniego warunku jest również możliwe, przynajmniej dla  $n = 3, 4, 5$  (patrz dodatek A); wskazanie odpowiednich stałych dla większej liczby wymiarów wydaje się kwestią techniczną. Tak więc istnienie rozwiązań typu Q-ball mamy zagwarantowane dla  $n = 3, 4, 5$  dla oddziaływań typu  $\sqrt{\Phi\bar{\Phi} + \kappa^2}$ . Zanim zostaną zaprezentowane wyniki numeryczne dotyczące Q-bali w trzech wymiarach, przedstawimy jeszcze prosty wniosek z równania (4.2). Równanie to zlinearyzowane wokół rozwiązania  $f_\delta(0) \equiv 0$  ma postać

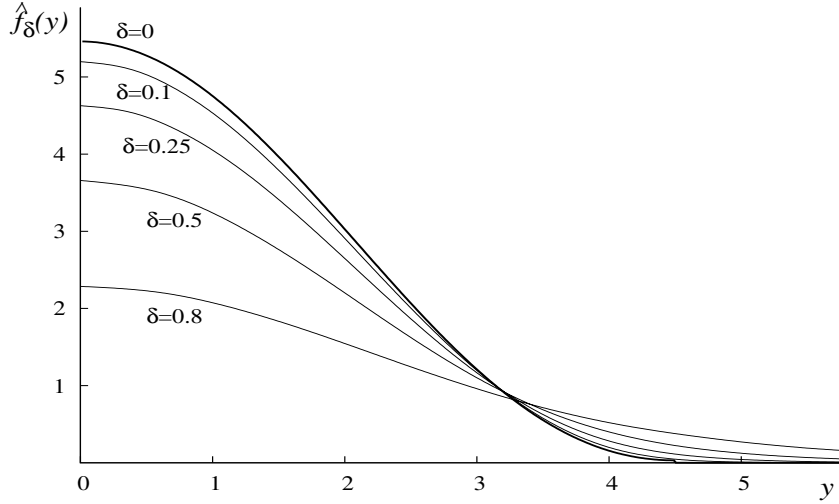
$$f_\delta'' + \frac{n-1}{y}f_\delta' - (\delta^{-1} - 1)f_\delta = 0.$$

Rozwiązania tego równania znikające w nieskończoności wyrażają się poprzez zmodyfikowane funkcje Bessla:  $y^{1-n/2}K_{n/2-1}(\sqrt{\delta^{-1}-1}y)$ . To oznacza, że daleko od centrum funkcje profilu Q-bali znikają jak  $y^{(1-n)/2}e^{-\sqrt{\delta^{-1}-1}y}$ . Dlatego oczekujemy, że nie tylko całka  $\int dy y^{n-1}\hat{f}_\delta^2$  jest wykonalna, ale i całka  $\int dy y^{n-1}\hat{f}_\delta$  jest skończona.

## 4.2 Wyniki numeryczne dla $n = 3$

Rysunek 4.1 przedstawia funkcje profilu otrzymane z numerycznego całkowania równania (4.2) w trzech wymiarach przestrzennych dla różnych wartości parametru  $\delta$ . Dla porównania wykreślono również rozwiązanie znane z oryginalnego modelu signum-Gordona (oznaczone przez  $\delta = 0$ ). Wykres ten pokazuje jasno, że Q-balle w modelach signum-Gordona zregularyzowanym i oryginalnym są ze sobą związane.

Z punktu widzenia fizyki ciekawe są zależności pomiędzy globalnymi wielkościami



Rysunek 4.1: Funkcje profilu dla różnych wartości parametru  $\delta$ . Rozwiązanie znane z modelu signum-Gordona jest zaznaczone jako  $\delta = 0$ .

charakteryzującymi rozwiązania: ładunkiem, energią i parametrem  $\delta$ . Ładunek  $Q$  i energię  $E$  można wyrazić następująco

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} \left( \frac{2\kappa}{\delta} \right)^3 \int_0^\infty \hat{f}_\delta^2 r^2 dr = \frac{(2\kappa)^3}{\lambda} \underline{Q}(\delta), \quad (4.5)$$

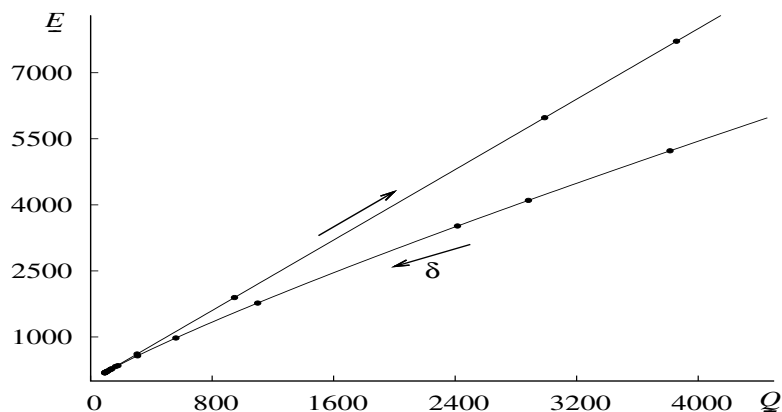
$$E = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}} \left( \frac{2\kappa}{\delta} \right)^{5/2} \int_0^\infty dr r^2 \left[ \hat{f}'_\delta{}^2 + \hat{f}_\delta^2 + 2 \left( \sqrt{\hat{f}_\delta^2 + \delta^2} - \delta \right) \right] = \frac{(2\kappa)^{5/2}}{\sqrt{\lambda}} \underline{E}(\delta). \quad (4.6)$$

$\underline{Q}$  oraz  $\underline{E}$  są funkcjami tylko parametru  $\delta$ . Powyższe wzory są użyteczne do charakterystyki Q-balli w danej teorii: zadane  $\lambda$  i  $\kappa$ , zmienne  $\omega$ . Relacja  $\underline{E}(\underline{Q})$  jest pokazana na wykresie 4.2. Jak widać, w teorii pojawia się ładunek minimalny, dla którego można znaleźć rozwiązanie typu Q-ball. Rozwiązanie to ma również najmniejszą energię. Tablica 4.1 pokazuje, że rozwiązanie to pojawia się dla  $\delta \approx 0.96$ . Istnienie minimalnego ładunku jest typowe w teoriach pola masywnego. Oczywiście absolutnie stabilne mogą być rozwiązania odpowiadające dolnej gałęzi relacji na  $E(Q)$  (por. wykres 4.2).

Zregularyzowany model odtwarza w granicy  $\delta \rightarrow 0$  (czyli  $\omega \rightarrow 0$ , duże wartości ładunku i energii) własności oryginalnego modelu signum-Gordona. Przekonuje o tym wykres 4.3. Na wykresie tym zestawiona jest zależność znana z modelu signum-Gordona  $\underline{E}_{sG}(\underline{Q}_{sG})$  z danymi z numeryki. Aby porównać otrzymane wyniki należy ładunek i energię policzone dla modelu signum-Gordona wyrazić w jednostkach właściwych dla modelu z regularyzacją. W tym celu definiujemy

$$\underline{Q}_{sG} = \lambda(2\kappa)^{-3} Q_{sG} \quad i \quad \underline{E}_{sG} = \sqrt{\lambda}(2\kappa)^{-3/2} E_{sG}$$

gdzie  $Q_{sG}$  i  $E_{sG}$  dane są odpowiednio wzorami (3.7) i (3.8), oznaczenie  $sG$  zostało dodane w tym rozdziale, aby uniknąć niejasności. Relacja  $\underline{E}_{sG}(\underline{Q}_{sG})$  dla oryginalnego



Rysunek 4.2: Relacja  $\underline{E}(Q)$  dla zregulowanego modelu signum-Gordona. Dla zadanego ładunku (większego od ładunku minimalnego) istnieją dwa różne Q-balle, co powoduje powstanie szpica na wykresie. Strzałki pokazują kierunek zmiany parametru  $\delta$  wzdłuż linii rozwiązań.

modelu ma postać

$$\underline{E}_{sG} = c_E c_Q^{-5/6} (\underline{Q}_{sG})^{5/6}, \quad (4.7)$$

gdzie  $c_E$  i  $c_Q$  zostały wyznaczone w rozdziale 3. Dla kompletności odnotujemy, że w przypadku Q-balli w zregulowanym modelu signum-Gordona oprócz absolutnej stabilności można mówić o stabilności ze względu na rozpad Q-balla na mniejsze z zachowaniem ładunku i o liniowej stabilności (nie ma problemu z drugą pochodną wariacyjną z funkcjonału energii czy działania). Jest dosyć zaskakującym faktem, że w obu wypadkach warunek stabilności ma postać (zob. [16], [17])

$$\frac{\omega}{Q} \frac{dQ}{d\omega} \leq 0.$$

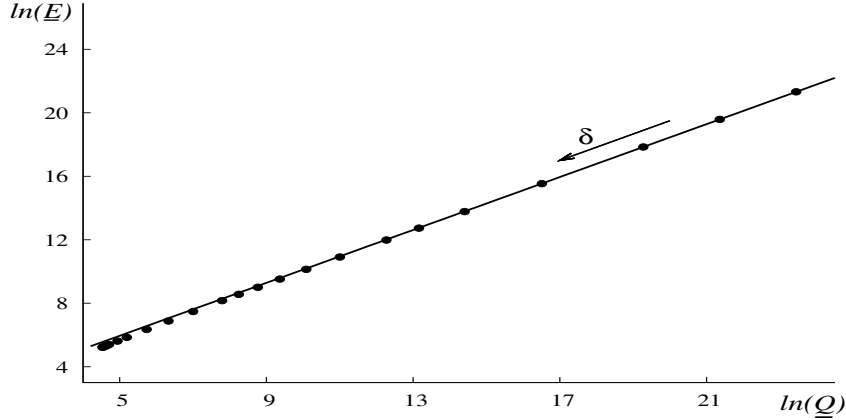
Rozwiązania z dolnej gałęzi spełniają ten warunek, gdyż  $\omega \sim \sqrt{\delta}$ . Warunek konieczny na absolutną stabilność rozwiązań (rozdział 2) można wyrazić następująco

$$2\underline{Q} > \underline{E}.$$

Dane numeryczne wskazują, że warunek ten jest spełniony dla rozwiązań przy  $\delta < 0.91$  (dolna gałąź!). Tak więc rozwiązania z  $\delta > 0.91$  nie są absolutnie stabilne. Jako ciekawostkę odnotowujemy, że rozwiązania z górnej gałęzi w przybliżeniu spełniają powyższą relację.

W tabeli 4.1 podano dane dla kilku przykładowych numerycznych rozwiązań.

W kolejnych paragrafach będziemy zainteresowani badaniem, co się dzieje gdy  $\delta \rightarrow 0$  w nieco innym sensie niż powyżej, a mianowicie, gdy  $\kappa \rightarrow 0$  a  $\omega$  i  $\lambda$  są ustalone. Do



Rysunek 4.3: Punkty pochodzą z numerycznych rozwiązań modelu signum-Gordona. Linia ciągła ilustruje zależność (4.7). Jak widać, zgodność jest bardzo dobra.

dalszych badań wygodnie jest wzory (4.5) i (4.6) przepisać w dowolnej liczbie wymiarów w postaci analogicznej do wzorów (3.7) i (3.8)

$$Q = \frac{\lambda^2}{\omega^{n+3}} \left( \frac{\Omega_{n-1}}{4} \int_0^\infty \hat{f}_\delta^2 r^2 \right) dr = \frac{\lambda^2}{\omega^{n+3}} c_Q(\delta)$$

oraz

$$E = \frac{\lambda^2}{\omega^{n+2}} \left( \frac{\Omega_{n-1}}{4} \int_0^\infty dr r^2 \left[ \hat{f}'_\delta{}^2 + \hat{f}_\delta^2 + 2 \left( \sqrt{\hat{f}_\delta^2 + \delta^2} - \delta \right) \right] \right) = \frac{\lambda^2}{\omega^{n+2}} c_E(\delta).$$

Ten zapis uwydatnia podobieństwo teorii z regularyzacją i bez niej. Relację  $E(Q)$  w zregularyzowanym modelu można zapisać podobnie jak relację (3.9)

$$E = c_E(\delta) \lambda^{\frac{2}{n+3}} \left( \frac{Q}{c_Q(\delta)} \right)^{\frac{n+2}{n+3}}. \quad (4.8)$$

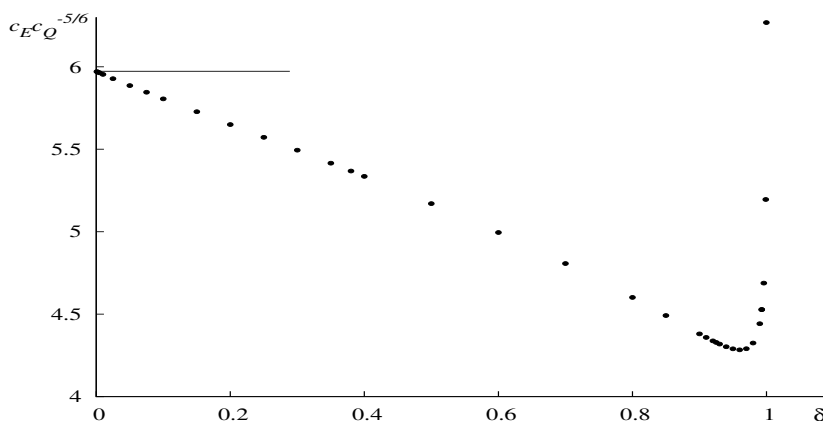
Zależność  $c_E(\delta) c_Q^{-5/6}(\delta)$  dla modelu w trzech wymiarach przedstawiona jest na wykresie 4.4.

### 4.3 Granica $\delta \rightarrow 0$ a model signum-Gordona

W dodatku B znajduje się dowód faktu, że funkcja profilu Q-balla w zregularyzowanym modelu jest tym bliższa funkcji profilu Q-balla w oryginalnym modelu, im mniejszy jest parametr regularyzacji. Ścisłe rzecz ujmując wykazano, że  $\hat{f}_\delta$  jest jednostajnie zbieżna do  $\hat{f}$  gdy  $\delta \rightarrow 0$ . Na poziomie globalnych charakterystyk również uprawnione jest przejście graniczne, to znaczy, dla ustalonych parametrów  $\omega$  i  $\lambda$  granica  $\kappa \rightarrow 0$  dla wielkości  $E(\kappa)$  i  $Q(\kappa)$  istnieje i jest równa odpowiednim wyrażeniom

$\delta$	$f_\delta(0)$	$\underline{Q}$	$\underline{E}$
0.9999	0.0613	947.16	1894.41
0.999	0.1928	306.32	612.95
0.99	0.5844	117.44	235.75
0.97	0.9629	93.62	188.49
0.96	1.0948	92.62	186.53
0.95	1.2094	93.59	188.43
0.8	2.2862	179.77	348.21
0.7	2.7938	309.38	571.87
0.38	4.1318	2882.26	4101.18
0.1	5.1988	213385	160261

Tablica 4.1: Dane numeryczne wybranych rozwiązań.



Rysunek 4.4: Zależność energii od parametru  $\delta$  przy ustalonym ładunku w trzech wymiarach przestrzennych, por. wzór (4.8). Wartość znana z modelu signum-Gordona – ok. 5.97 – zaznaczona jest przez poziomą prostą.

w modelu signum-Gordona.

Przedstawiony dowód jest w dużej mierze techniczny. Przebiega w kilku etapach. Wykorzystuje on fakt, że równanie na różnicę pomiędzy pewnym rozwiązaniem równania z modelu signum-Gordona i pewnym rozwiązaniem równania w zregulowanym modelu jest niejednorodnym równaniem liniowym. W takim razie jest to równanie rozwiązywalne przy pomocy odpowiednich funkcji Greena. Szacując to rozwiązanie można pokazać, że wartość  $\hat{f}_\delta(0)$  dąży do  $f_0$  (oznaczenie z paragrafu 3.1) gdy  $\delta \rightarrow 0$ . Fakt ten jest kluczowy przy dowodzie zbieżności jednostajnej.

Zbieżność jednostajna pociąga za sobą zbieżność całek w skończonym obszarze; nie

przenosi się automatycznie na zbieżność całek w nieskończonej objętości. Tak więc pokazanie, że w omawianej granicy ładunek i energia są zbieżne do wartości znanych z modelu bez regularyzacji wymaga oddzielnego uzasadnienia.

Skoro funkcje profilu w obu modelach są sobie bliskie, można wykorzystać znane funkcje  $\hat{f}$  do konstrukcji przybliżonych rozwiązań w modelu zregularyzowanym. Propozycja procedury, która to umożliwi oraz jej porównanie z rozwiązaniami numerycznymi są tematem następnego paragrafu.

## 4.4 Konstrukcja przybliżonych rozwiązań

Punktem wyjścia do rozważań jest wzór (B.15) zapisany w postaci

$$\hat{f}(y) - \hat{f}_\delta(y) = \int_0^y G(y, s) s^{n-1} \varphi(\hat{f}_\delta(s)) ds + Au_1(y),$$

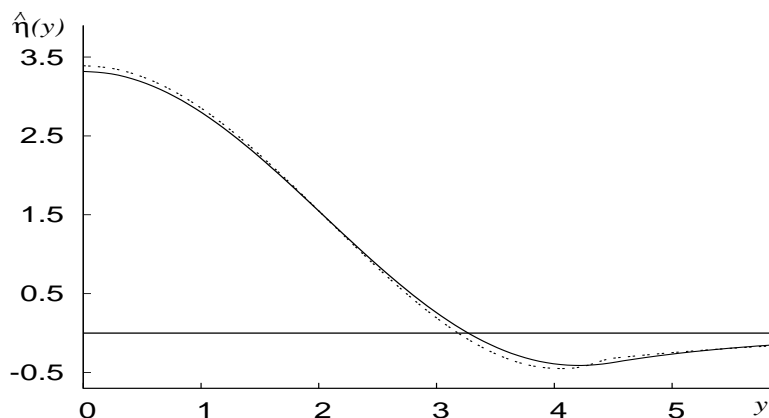
gdzie  $G$  jest odpowiednią funkcją Greena a  $\varphi(\hat{f}_\delta)$  pewną funkcją zależną od  $\delta$  (por. dodatek B). Rozwiązanie powyższe obowiązuje na odcinku  $(0, y_0)$ . Przybliżenie polega na zastąpieniu  $\varphi(\hat{f}_\delta)$  przez  $\varphi(\hat{f})$ . Stała  $A$  jest w tym momencie wolnym parametrem, którego wartość zostanie ustalona potem. Dla  $y > y_0$  możemy posłużyć się rozwiązaniem równania (4.2) obowiązującym dla małych wartości  $f_\delta$ , czyli tam, gdzie rozwinięcie  $\sqrt{\delta^2 + f_\delta^2} = \delta + f_\delta^2 \delta^{-1} / 2 + \dots$  jest dobrym przybliżeniem. Rozwiązanie to ma postać (w trzech wymiarach)  $f_\delta = By^{-1} e^{-y\sqrt{\delta/(1-\delta)}}$ , gdzie stała  $B$  jest wolnym parametrem. Parametr ten można wyznaczyć z warunku ciągłości pochodnych w punkcie sklejanja, czyli w  $y_0$

$$\int_0^{y_0} \frac{dG(y, s)}{dy} s^{n-1} \varphi(\hat{f}(s)) ds = -B \frac{\exp -\sqrt{\frac{1}{\delta} - 1} y_0}{y_0} \left( \sqrt{\frac{1}{\delta} - 1} + \frac{1}{y_0} \right);$$

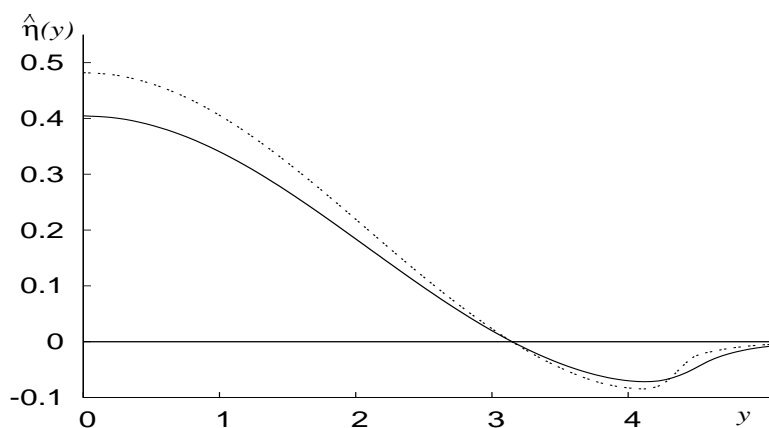
zależność od  $A$  nie pojawia się, gdyż  $u_1'(y_0) = 0$ . Teraz możemy wyznaczyć wartość  $A$ . Aby nowa funkcja była ciągła potrzeba, żeby

$$A = -\frac{1}{u_1(y_0)} \int_0^{y_0} \left[ \frac{y_0}{y_0 \sqrt{\frac{1}{\delta} - 1} + 1} \frac{dG(y, s)}{dy} + G(y, s) \right] s^{n-1} \varphi(\hat{f}(s)) ds.$$

Całkowanie w powyższych wzorach jest trudne (o ile w ogóle wykonalne analitycznie). Poniżej porównujemy  $\hat{\eta} = \hat{f} - \hat{f}_\delta$  uzyskane z rozwiązań numerycznych i numerycznego całkowania powyższych wzorów. Jak widać (por. rysunki 4.5 i 4.6), zgodność jest całkiem dobra nawet dla dużych wartości parametru  $\delta$ .



Rysunek 4.5: Funkcja  $\hat{\eta} = \hat{f} - \hat{f}_\delta$  dla  $\delta = 0.8$ , linia ciągła odzwierciedla dokładną różnicę (z numeryki), linia przerywana wynika z przedstawionego przybliżenia.



Rysunek 4.6: Funkcja  $\hat{\eta} = \hat{f} - \hat{f}_\delta$  dla  $\delta = 0.1$ , linia ciągła odzwierciedla dokładną różnicę, linia przerywana - przybliżenie.

## 4.5 Stabilność

Wykażemy teraz, że rozwiązania typu Q-ball są w trzech wymiarach przestrzennych absolutnie stabilne – przy zadanym ładunku mają najmniejszą możliwą energię. Przedstawiony dowód jest prostą adaptacją dowodu podanego przez S. Coleman dla pewnej klasy potencjałów. Konieczne różnice mają charakter techniczny.

W rozdziale 2 argumentowaliśmy, że w celu znalezienia minimum funkcjonału energii wystarczy ograniczyć się do badania funkcjonału

$$E_Q = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x [(\nabla F)^2 + U(F)] + \frac{Q^2}{\int_{\mathbb{R}^3} d^3x F^2}. \quad (4.9)$$

Równanie na funkcję profilu, które dostaje się poprzez wariację powyższego funkcjonału, wyznacza jego punkt stacjonarny. Nie jest jednak pewne, czy jest to globalne minimum. Nie jest nawet pewne, czy takie globalne minimum istnieje. S. Coleman dowiódł, że jeżeli potencjał polowy  $U(F)$  spełnia cztery warunki, to Q-balle dla  $n = 3$  są rozwiązaniami absolutnie stabilnymi. Te warunki to:

- $U(0) \geq 0$ , przy czym tylko dla  $F = 0$  zachodzi równość;
- $U$  jest dwukrotnie różniczkowalne,  $dU(0)/dF = 0$  i  $d^2U(0)/dF^2 = \mu^2$ ;
- funkcja  $U(F)/F^2$  ma minimum dla pewnego  $F_0 \neq 0$ ;
- istnieją trzy dodatnie liczby  $a, b, c$ , przy czym  $c > 2$ , takie że

$$\frac{1}{2}\mu^2 F^2 - U(F) \leq \min(a, b|F|^c). \quad (4.10)$$

Jak widać zregulowany potencjał signum-Gordona nie spełnia dwóch ostatnich warunków. Można argumentować, że warunek trzeci jest spełniony przez  $F_0 = \infty$ . Warunek ten w oryginalnej pracy gwarantuje spełnienie warunku koniecznego stabilności Q-balli (patrz rozdział 2.2). W zregulowanym modelu signum-Gordona warunek konieczny jest spełniony na mocy relacji  $E(Q)$ , która dla dużych wartości  $Q$  odtwarza relację z modelu bez regularyzacji  $E \sim Q^{\frac{n+2}{n+3}}$ . Stąd wynika, że dla dostatecznie dużej wartości  $Q$  spełniony jest warunek  $\sqrt{2}\mu|Q| > E$ .

Dla wygody wprowadzamy oznaczenia

$$\begin{aligned} I[F] &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3x F^2, \\ K[F] &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3x (\nabla F)^2, \\ V[F] &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3x U(F) = \lambda \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \left( \sqrt{F^2 + \kappa^2} - \kappa \right), \end{aligned}$$

i

$$W[F] = U[F] - \frac{1}{2}\mu^2 I[F],$$

gdzie  $\mu^2 = \lambda/\kappa$ . Ostatnia wielkość spełnia następującą zależność

$$W[F] = -\frac{\mu^2}{2\lambda^2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x U^2(F). \quad (4.11)$$

Tak więc,  $W[F]$  przyjmuje ujemne wartości dla dowolnego  $F \neq 0$ . Funkcjonał energii wygodnie jest zapisać na dwa sposoby. Pierwszy z nich dany jest przez wzór (4.9), drugi zaś ma postać

$$E_Q = K + \frac{\mu^2}{2}I + W + \frac{Q^2}{I}. \quad (4.12)$$



Rozważmy ciąg funkcji  $\{F_i\}_{i=1}^\infty$ , gdzie  $\lim_{i \rightarrow \infty} E_Q[F_i] = \inf E$ . Istnienie takiego ciągu wynika z definicji infimum. Na mocy argumentów z rozdziału 2.2 możemy przyjąć, że  $F_i$  jest funkcją dodatnią, sferycznie symetryczną i monotonicznie (to jest wzdłuż zmiennej radialnej) malejącą do zera.  $K$  jest dodatnią wielkością ograniczoną od góry przez energię. Tak więc z  $K[F_i]$  można wybrać podciąg zbieżny. Podobnie dla  $V$ . Jeżeli  $E$ ,  $K$  i  $V$  są zbieżne, również  $I$  i  $W$  mają granicę. Wartości graniczne będziemy zaznaczać tyldą, np.

$$\tilde{K} = \lim_{i \rightarrow \infty} K[F_i].$$

Co więcej, możemy wybrać taki podciąg funkcyjny, że wielkości  $E$ ,  $K$ ,  $V$  i  $W$  są jednocześnie jednostajnie ograniczone. Zakładamy, że zostało to zrobione.

Wygodnie jest wprowadzić funkcję  $f_i(r) = rF_i(r)$ , gdzie  $r$  jest współrzędną radialną. Bez dodatkowych założeń można pokazać, że funkcje  $f_i$  tworzą ciąg funkcji ograniczonych i jednostajnie zbieżnych. Najpierw zauważmy, że

$$I[F_i] = 4\pi \int_0^\infty dr f_i^2$$

oraz

$$\int_0^\infty dr \left( \frac{df_i}{dr} \right)^2 = \int_0^\infty dr (rF'(r) + F(r))^2 = \int_0^\infty dr (rF'(r))^2 + rF^2(r) \Big|_0^\infty,$$

czyli

$$K[F_i] = 4\pi \int_0^\infty dr \left( \frac{df_i}{dr} \right)^2.$$

Nierówność Schwarz'a pozwala pokazać ograniczoność funkcji  $f_i$

$$f_i^2(r) = -\frac{1}{2} \int_r^\infty dr' f_i \frac{df_i}{dr'} \leq \frac{1}{8\pi} \sqrt{I[F_i]K[I_i]} \quad (4.13)$$

i fakt, że są one równocześnie

$$|f_i(r_1) - f_i(r_2)| = \left| \int_{r_1}^{r_2} dr \frac{df_i}{dr} \right| \leq \sqrt{\frac{[K[F_i]]|r_1 - r_2|}{8\pi}}. \quad (4.14)$$

Tak więc, na mocy twierdzenia Ascoliego, istnieje podciąg  $\{f_i\}$  punktowo zbieżny wszędzie i jednostajnie zbieżny na dowolnym odcinku. Stąd wynika to samo dla funkcji  $\{F_i\}$ , z wyjątkiem  $r = 0$ . Granicę funkcji  $F_i$  oznaczamy przez  $\tilde{F}$ . Teraz trzeba pokazać, że  $E_Q[\tilde{F}] = \tilde{E}$ .

$K$  definiuje przestrzeń Hilberta, w której  $F_i$  tworzą ograniczoną rodzinę wektorów. Taka rodzina ma zawsze podciąg zbieżny słabo do pewnego elementu tej przestrzeni. Norma granicy zbieżnego słabo ciągu jest mniejsza lub równa granicy norm, czyli

$$K[\tilde{F}] \leq \tilde{K}. \quad (4.15)$$

Podobnie,

$$I[\tilde{F}] \leq \tilde{I}. \quad (4.16)$$

Rozważmy wartość  $W$  na odcinku  $(r_-, r_+)$ , gdzie  $0 < r_- < r_+$ . Biorąc pod uwagę definicję  $W$ , relacje (4.11) i (4.13) oraz oszacowanie  $0 \leq U(F) \leq |F|$  (por. wyprowadzenie nierówności 3.15) zauważamy, że

$$\frac{2\pi\mu^2}{\lambda^2} \int_0^{r_-} dr r^2 U^2(F_i) \leq \frac{2\pi\mu^2}{\lambda^2} \int_0^{r_-} dr f_i^2(r) \leq \frac{\mu^2}{4\lambda^2} \sqrt{K[F_i]I[F_i]} r_-$$

tudzież

$$\frac{2\pi\mu^2}{\lambda^2} \int_{r_+}^{\infty} dr r^2 U^2(F_i) \leq \frac{2\pi\mu^2}{\lambda} \int_{r_+}^{\infty} dr r^2 F_i U(F_i) \leq \frac{\mu^2 \sup f_i}{2\lambda r_+} V[F_i].$$

Tak więc przez odpowiedni dobór  $r_-$  i  $r_+$  można zmniejszyć wkład spoza odcinka  $(r_-, r_+)$  do dowolnie małej wielkości. Na tym odcinku  $F_i$  są jednostajnie zbieżne do  $\tilde{F}$ , skąd wynika, że

$$\lim_{i \rightarrow \infty} W[F_i] = W[\tilde{F}].$$

Na koniec pokażemy, że  $\tilde{I} = I[\tilde{F}]$ . Przypuśćmy, że  $I[\tilde{F}] < \tilde{I}$ . Wówczas poprzez dodanie mezonu w nieskończoności możemy skonstruować nową funkcję  $F'$  taką, że  $W[F'] = W[\tilde{F}]$ ,  $K[F'] = K[\tilde{F}]$  i  $I[F']$  gdziekolwiek pomiędzy  $I[\tilde{F}]$  a  $\tilde{I}$ . Z (2.16) wynika, że

$$\tilde{I} > I[F'] > \frac{\sqrt{2}Q}{\mu}.$$

To oznacza, że

$$\frac{Q^2}{I[F']} + \frac{\mu^2}{2} I[F'] < \frac{Q^2}{I[\tilde{F}]} + \frac{\mu^2}{2} I[\tilde{F}].$$

Porównanie z relacją (4.12) pokazuje, że jest to sprzeczność z  $E_Q[F'] < \tilde{E}$ . W takim razie istotnie  $\tilde{I} = I[\tilde{F}]$ .

Zbierając wzory (4.12) oraz (4.15) i dodając do tego ostatni wynik, możemy napisać  $E_Q[\tilde{F}] \leq \tilde{E}$ . Z definicji infimum nierówność ostra jest niemożliwa. Tak więc  $E[\tilde{F}] = \tilde{E}$ . Mając pewność co do istnienia globalnego minimum funkcjonału, możemy go szukać rozwiązując równanie

$$\frac{\delta E_Q[F]}{\delta F} = 0,$$

odpowiadające równaniu profilu dla Q-balli.

## Rozdział 5

# Nieliniowa skalarna elektrodynamika

W poprzednich rozdziałach przedstawiono rozwiązania typu Q-ball w dowolnej liczbie wymiarów. Dla  $n = 3$  wykazano ich stabilność. Naturalnym uogólnieniem przedstawionego modelu jest zastąpienie globalnej symetrii przez symetrię lokalną

$$\Phi \rightarrow \Phi e^{i\alpha(x)},$$

gdzie  $\alpha$  jest funkcją rzeczywistą. Zażądanie takiej symetrii wymaga wprowadzenia pola cechowania  $A_\mu$ . Wówczas, jak zobaczymy, globalne Q-balle są dla małych wartości ładunku dobrym przybliżonym rozwiązaniem. Pojawienie się pola cechowania umożliwia również istnienie jakościowo nowych rozwiązań.

Po raz pierwszy poniżej zaprezentowany *Ansatz* (5.5) – punkt wyjścia do dalszej analizy – został przedyskutowany w pracy [21]. W literaturze można znaleźć analogiczne *Ansätze* również dla teorii z nieabelowymi polami cechowania [13], [22].

### 5.1 Model, *Ansatz*, równania

W tym rozdziale omówimy pewne rozwiązania w teorii zadanej przez lagranżian

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \overline{D_\mu\Phi}D^\mu\Phi - \lambda|\Phi|^2, \quad (5.1)$$

gdzie  $D^\mu = \partial^\mu + iqA^\mu$  jest pochodną kowariantną,  $\overline{D^\mu}$  jej zespolonym sprzężeniem,  $A^\mu$  polem cechowania a  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  tensorem antysymetrycznym,  $q$  jest ładunkiem elektrycznym,  $\lambda > 0$ . Skoncentrujemy się na modelu w trzech wymiarach przestrzennych ( $n = 3$ ).

Swoboda w doborze fazy pola prowadzi do wielkości zachowanej

$$Q = iq \int (\overline{\Phi}\partial_0\Phi - \partial_0\overline{\Phi}\Phi) - 2q^2 A_0 \overline{\Phi}\Phi. \quad (5.2)$$

W tym wypadku nie znamy tak eleganckiego rozumowania, jak w przypadku symetrii globalnej, które pozwalałoby *ab initio* wyprowadzić *Ansatz* na rozwiązania typu Q-ball. Niemniej można przyjąć założenia, które fizycznie wydają się sensowne. Tak więc szukamy rozwiązania sferycznie symetrycznego z gęstością ładunku niezależną od czasu. Dzięki temu zawężamy poszukiwania do elektrostatyki.

Ogólne równania dla pola cechowania wyrażają prawo zachowania ładunku

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = iq (\bar{\Phi} \partial^\nu \Phi - \partial^\nu \bar{\Phi} \Phi) - 2q^2 A^\nu \Phi \bar{\Phi}, \quad (5.3)$$

zaś równania Eulera-Lagrange'a dla pola skalarnego mają postać

$$D_\mu D^\mu \Phi = -\frac{\lambda}{2} faza(\Phi), \quad (5.4)$$

gdzie funkcja *faza*( $\cdot$ ) dana jest wzorem (1.15). Do tych równań wstawiamy *Ansatz*

$$\Phi(t, \mathbf{x}) = F(r)e^{i\omega t}, \quad \vec{A} = 0, \quad A_0 = A(r), \quad (5.5)$$

przy czym  $F$  i  $A_0$  to funkcje rzeczywiste,  $\omega \in \mathbb{R}$  jest stałą. Powyższe podstawienie prowadzi do układu równań

$$\Delta A_0 = 2q(\omega + qA_0)F^2 \quad (5.6)$$

oraz

$$\Delta F + (\omega + qA_0)^2 F = \frac{\lambda}{2} sign(F). \quad (5.7)$$

Analiza tych równań różniczkowych jest trudna, nie udało się znaleźć fizycznie znaczących rozwiązań analitycznych. Dla jej ułatwienia przepisujemy powyższy układ w nowych zmiennych:

$$\beta = \frac{\lambda q}{\sqrt{2}}, \quad G = \sqrt{2}qF, \quad B = \omega + qA_0.$$

Równania pola przybierają teraz postać

$$B'' = -\frac{2}{r}B' + BG^2 \quad (5.8)$$

oraz

$$G'' + \frac{2}{r}G' = -GB^2 + \beta sign(G). \quad (5.9)$$

Parametr  $\beta$  również można wyrugować z równań za pomocą przeskalowania

$$B(r) \rightarrow \beta^{1/3}B(\beta^{1/3}r), \quad G(r) \rightarrow \beta^{1/3}G(\beta^{1/3}r), \quad r \rightarrow \beta^{1/3}r.$$

Z tego względu kładziemy  $\beta = 1$ . W kontekście teorii pola istotne są rozwiązania ciągłe, więc  $G'(0) = B'(0) = 0$ . Powyższe równania mają symetrię zamiany  $B \rightarrow -B$

i (niezależnie)  $G \rightarrow -G$ . Dlatego możemy założyć, że  $B(0) \geq 0$  i  $G(0) \geq 0$ . W tej notacji wzory na ładunek  $Q$  i energię  $E$  przyjmują postać

$$Q = \frac{4\pi}{q} \int_0^\infty dr r^2 B^2 G = \frac{4\pi}{q} \underline{Q}, \quad (5.10)$$

$$E = \int_0^\infty d^3x \left[ \frac{1}{2} (\nabla A_0)^2 + \nabla\Phi\nabla\bar{\Phi} + |D_0\Phi|^2 + \lambda|\Phi| \right] = \frac{2\pi}{q^2} \underline{E}, \quad (5.11)$$

gdzie

$$\underline{E} = \int_0^\infty dr r^2 [B'^2 + G'^2 + B^2 G^2 + \beta|G|]; \quad (5.12)$$

zgodnie z podanymi powyżej argumentami przyjmujemy dalej, że  $\beta = 1$ . Fizyczne rozwiązania równań (5.9) i (5.8) mają skończoną energię i ładunek.

Równanie (5.8) możemy przepisać w następującej formie

$$B'(r) = \frac{1}{r^2} \int_0^r dy y^2 B(y) G^2(y), \quad (5.13)$$

skąd wnioskujemy, że jeżeli  $B(0) > 0$ , wówczas  $B$  jest funkcją rosnącą na całej półosi  $r > 0$ , czyli  $B(r) > 0$  dla dowolnej wartości  $r$ . Równanie (5.9) sugeruje, że funkcja  $G$  ma zwarty nośnik. W takim razie dla argumentów  $r > R$  (gdzie  $R$  jest punktem zszycia nietrywialnego rozwiązania z rozwiązaniem próżniowym) mamy zerową gęstość materii i ładunku. W tym obszarze  $B$  wyraża się wzorem

$$B(r) = \omega - \frac{Q}{r}. \quad (5.14)$$

Jak widać, *Ansatz* (5.5) jest motywowany raczej przez intuicję fizyczną niż przez analizę struktury lagranżianu (5.1) czy wyrażenia na energię. Można wszakże stosunkowo prosto pokazać, że rozwiązania równań (5.6) i (5.7) są minimami funkcjonału energii w przestrzeni funkcji sferycznie symetrycznych. Aby się o tym przekonać, należy pamiętać, że zależność (5.6) nie jest równaniem dynamicznym, lecz więzem nałożonym na system. W takim razie dowolna zmiana pól  $B$  i  $G$  nie jest dopuszczalna. Sferycznie symetryczna deformacja rozkładu materii  $\delta G$  powoduje zmianę pola  $\delta B$  spełniającą równanie

$$\delta B'' = -\frac{2}{r} \delta B' + G^2 \delta B + 2BG \delta G.$$

Biorąc to pod uwagę dostajemy, że

$$\delta \underline{E} = 2\omega \delta \underline{Q} - 2 \int_0^\infty dr r^2 \left[ G'' + \frac{2}{r} G' + B^2 G - \text{sign}(G) \right] \delta G,$$

co oznacza, że przy ustalonym ładunku warunkiem na ekstremum energii jest w istocie równanie (5.9). Dla potencjału zregulowanego ( $|\Phi| \rightarrow \sqrt{\Phi\bar{\Phi} + \kappa^2} - \kappa$ ) jest to zawsze minimum energii, gdyż wielkość

$$\delta^2 \underline{E} = \int_0^\infty dr r^2 \left[ (\delta B')^2 + (\delta G')^2 + (G\delta B + B\delta G)^2 + \frac{\kappa^2 (\delta G)^2}{(G + \kappa^2)^{3/2}} \right]$$

jest dodatnia niezależnie od deformacji.

W ostatnich latach sporo uwagi poświęcono rozważaniom dotyczącym istnienia rozwiązań dla równań wynikających z *Ansatzu* (5.5) dla różnych potencjałów polowych (nie rozpatrywano modelu signum-Gordona). Dla pewnych klas potencjałów dowiedziono istnienia rozwiązań [25], dla innych – nieistnienia [26]. Warto wspomnieć, że w dowodach istnienia rozwiązań bierze się pod uwagę inną naturę równania (5.6) i równania (5.7). Otóż pokazano [27], że dla dowolnego układu materii można znaleźć odpowiadający jej rozkład pola  $A_0$  spełniający równanie (5.6). Stabilność uzyskanego rozwiązania jest zagadnieniem skomplikowanym, gdyż w jego analizie należy uwzględnić wszystkie stopnie swobody obecne w pełnej teorii. W tym kontekście na uwagę zasługuje praca [28] dowodząca stabilności pewnej klasy Q-balli. Praca ta jest ciekawa również z tego względu, że łączy Q-balle w teorii z cechowaniem z rozwiązaniami teorii z globalną symetrią. Jak pokazuje analiza (rachunek zaburzeń) zamieszczona w dodatku C, taka intuicja sprawdza się w modelu signum-Gordona.

## 5.2 Mechaniczna interpretacja równań

Przy omawianiu równania profilu Q-balli w modelu z globalną symetrią wspominaliśmy o mechanicznej interpretacji tego równania. Podobnie można spojrzeć na układ równań (5.8) i (5.9): traktujemy wówczas te równania jak równania cząstki w płaszczyźnie  $(B, G)$ , zmienna  $r$  odpowiada czasowi. Cząstka ta jest hamowana przez zależne od czasu tarcie (wyrazy z pierwszymi pochodnymi). Oprócz tego działa na nią siła zależna od położenia:  $(BG^2, \text{sign}(G) - B^2G)$ . Łatwo sprawdzić, że siła ta nie jest siłą potencjalną. Siła działająca w kierunku  $B$  jest zawsze dodatnia - cząstka jest więc popychana w kierunku coraz to większych wartości zmiennej  $B$ . W kierunku zmiennej  $G$  siła zeruje się wzdłuż hiperboli  $B^2G = 1$  oraz na prostej  $G = 0$ . Powyżej hiperboli siła jest ujemna, dodatnia zaś w obszarze  $0 < G < 1/B^2$ . Obrazowo rzecz ujmując, opisana sytuacja odpowiada ruchowi cząstki w dolinie unoszonej przez wiatr w kierunku coraz to większych wartości zmiennej  $B$ . Dla ułatwienia, w dalszej dyskusji będziemy mówić o północnym ( $GB^2 > 1$ ) i południowym ( $GB^2 < 1$ ) stoku.

Powyższa „wizualizacja” układu równań pozwala odgadnąć rozwiązanie opisujące cząstkę poruszającą się po dnie doliny pchaną przez wiatr w kierunku coraz to większych wartości  $B$ . Istotnie, funkcje

$$B = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}r}, \quad G = \frac{\sqrt{3}}{2r}$$

stanowią rozwiązanie układu równań (5.8) i (5.9). To rozwiązanie nie ma znaczenia fizycznego - energia i ładunek w tym przypadku nie są skończone. Podobnie ma się

---

rzecz z rozwiązaniem

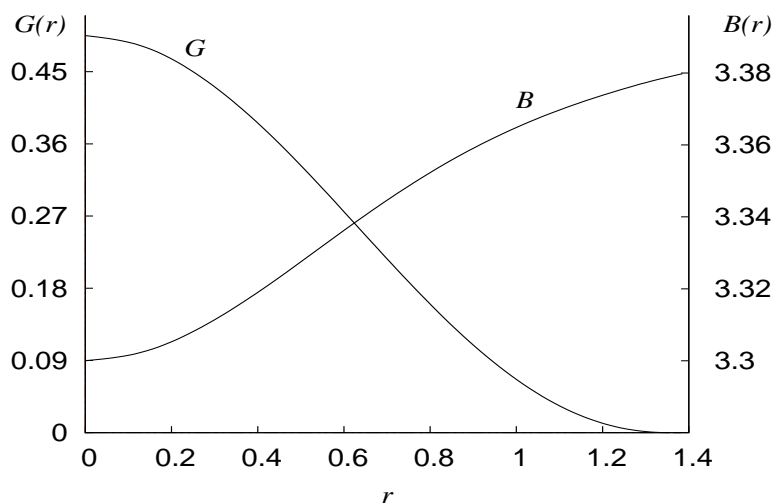
$$B = 0, \quad G = G(0) + \frac{r^2}{6}.$$

W tym wypadku energia jest nieskończona, ładunek zaś wynosi zero.

### 5.3 Elektrycznie naładowane Q-balle

Równania (5.8) i (5.9) można całkować numerycznie. Przedstawione wyniki uzyskane zostały metodą Rungego-Kutty czwartego rzędu. Dla ustalonego  $B(0)$  szukano wartości  $F(0)$ , dla której możliwe było gładkie sklejenie funkcji  $F$  z rozwiązaniem próżniowym. Miejsce sklejenia  $R$  jest więc również parametrem wyznaczanym z numeryki. Wiarygodność rozwiązań sprawdzana była przez różne testy konsystencji. Z równań wynika na przykład wspomniany już warunek:  $\underline{Q} = R^2 B'(R)$ . Ładunek można również wyznaczyć ze wzoru całkowego (5.10). Porównania takie dla przedstawionych wyników wypadały bardzo dobrze.

W tym i następnym paragrafie przedstawiamy wyniki numeryczne w powiązaniu z prostymi „fenomenologicznymi” rozważaniami pozwalającymi opisać otrzymane dane. Analiza równań (5.6) i (5.7) w ramach schematu perturbacyjnego jest zaprezentowana w dodatku C. Rozwiązanie typu Q-ball odpowiada trajektorii cząstki, która w „czasie”  $r = 0$  startuje z zerową prędkością ( $B'(0) = G'(0) = 0$ ) z pewnego punktu  $(B(0), G(0))$  znajdującego się na północnym stoku. Po skończonym „czasie”  $R$  cząstka osiada na osi  $B$ , czyli  $G(R) = 0$  i  $G'(R) = 0$ . Od tego czasu cząstka jest coraz słabiej pchana w kierunku coraz to większych wartości  $B$  do asymptotycznej wartości  $\omega$ . Przykładowe rozwiązanie tego typu przedstawione jest na rysunku 5.1. Dla małych ładunków pole  $B$  zmienia się znikomo na odcinku, gdzie  $G$  jest nietrywialne. To stanowi podstawę do przybliżenia, w którym  $B$  kładziemy stałe na tym odcinku i równe  $B(0)$ . W ramach mechanicznej analogii przybliżenie to wygląda wiarygodnie: gdy  $B$  jest duże, to zbocze  $GB^2 > 1$  jest bardzo strome a oś  $G = 0$  znajduje się bardzo blisko dna doliny. Oczekujemy więc, że cząstka startująca ze stosunkowo małą wartością  $G(0)$  (ale na tyle dużą, że  $G(0)B(0)^2 > 1$ ) szybko opadnie na dno doliny i wzniesie się na południowy stok, by w końcu stycznie osiąść na osi  $G = 0$ . Wiatr w tej okolicy jest stosunkowo słaby - proporcjonalny do  $G^2$ . W obszarze bliskim dna doliny (gdzie rozgrywa się akcja) wyraz  $BG^2$  jest rzędu  $B(0)^{-3}$ , czyli możemy go zaniedbać dla dużych wartości  $B$ . Wówczas równanie (5.9) staje się prostym równaniem liniowym, formalnie takim samym jak równanie Q-balla w modelu z globalną symetrią (3.1). Znamy więc rozwiązanie na odcinku  $0 < B(0)r < y_0$ , przy czym znaczenie  $y_0$  jest takie samo jak w rozdziale 3. Ma ono



Rysunek 5.1: Przykład rozwiązania dobrze opisanego przez omówione w tekście przybliżenie:  $B(0) = 3.3$ ,  $G(0) \approx 0.49$ ,  $B(R) \approx 3.37$ ,  $\underline{Q} \approx 0.05$ ,  $\underline{E} \approx 0.44$ ,  $\omega \approx 3.42$ .

następującą postać

$$G(r) = B(0)^{-2} \left( 1 - \frac{y_0 \sin(B(0)r)}{\sin y_0 B(0)r} \right). \quad (5.15)$$

Na odcinku  $B(0)r > y_0$  funkcja  $G(r)$  przyjmuje wartość próżniową. W tym przybliżeniu ładunek wyraża się wzorem

$$\underline{Q} = \frac{5}{6} y_0^3 B^{-6}(0).$$

Przyjmujemy, że dla  $r > R$  pole  $B$  opisane jest wzorem (5.14), skąd otrzymujemy przybliżony wynik

$$\omega = \left( \frac{5}{6} \right)^{1/6} \left[ \sqrt{y_0} \underline{Q}^{-1/6} + \frac{1}{\sqrt{y_0}} \underline{Q}^{5/6} \right];$$

energia (wzór (5.12)) wyraża się następująco

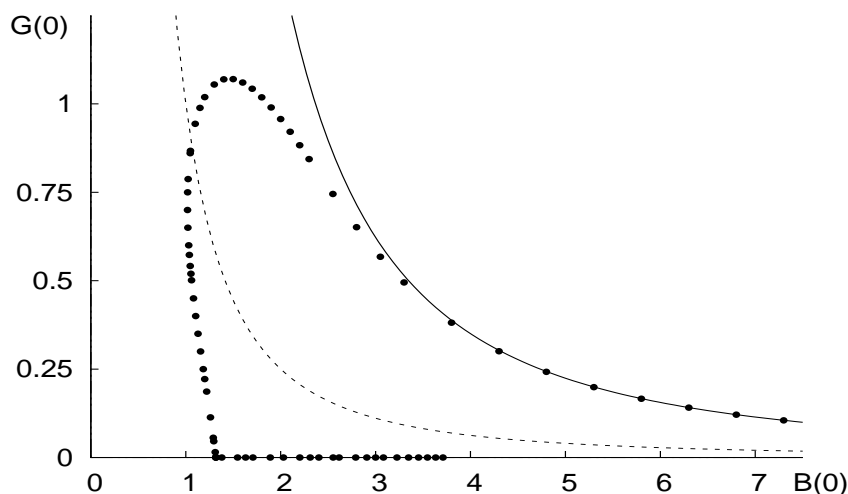
$$\underline{E} = \left( \frac{5}{6} \right)^{1/6} \left[ \frac{12\sqrt{y_0}}{5} \underline{Q}^{5/6} + \frac{1}{\sqrt{y_0}} \underline{Q}^{11/6} \right].$$

Jako prosty test powyższego przybliżenia porównujemy wartości  $(G(0), B(0))$ , dla których istnieją numeryczne rozwiązania typu Q-ball, z relacją

$$G(0)B^2(0) = 1 - \frac{1}{\cos y_0},$$

która wynika z przedstawionego przybliżenia (wzór (5.15)). Porównanie to (rysunek 5.2) wskazuje, że przybliżenie stosuje się bardzo dobrze dla  $B(0) \geq 4$ , co odpowiada  $\underline{Q} \leq 0.018$ . Jak wskazuje ten wykres, numerycznie znalezione rozwiązania dla



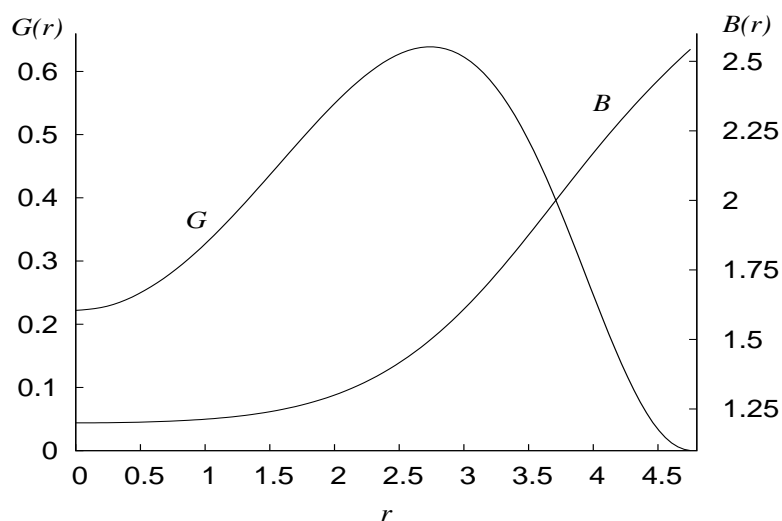


Rysunek 5.2: Na rysunku kropkami zostały oznaczone punkty  $(G(0), B(0))$ , dla których numerycznie znaleziono rozwiązania. Linia ciągła odpowiada relacji  $B^2(0)G(0) = 5.603$  wynikającej z przybliżenia. Linia przerywana pokazuje dno doliny. Kropki na osi  $G = 0$  odpowiadają Q-shellom.

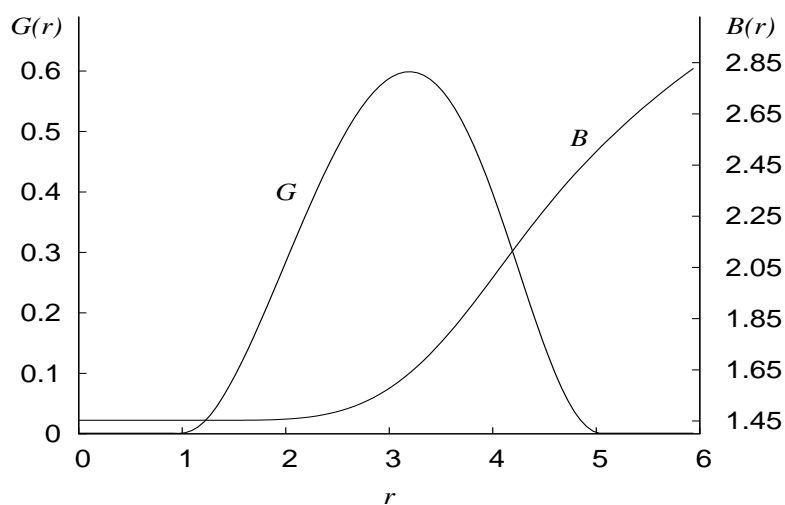
mniejszych wartości  $B(0)$  znacznie odchodzą od zaproponowanego przybliżenia. Dla  $B(0) \approx 1.5$  wartość  $G(0) \approx 1.07$  przyjmuje swoją maksymalną wartość, dla mniejszych  $B(0)$  wartość ta maleje. Podążając za krzywą wyznaczoną przez punkty odpowiadające numerycznym rozwiązaniom na wykresie 5.2 dochodzimy do miejsca, gdzie  $G(0)$  startuje z dna doliny, a nawet z południowego stoku. Przykładowe rozwiązanie tego typu przedstawione jest na rysunku 5.3. Krzywa wartości początkowych osiąga minimalną wartość  $B(0)$  bliską  $B(0) = 1$ . Jak widać z rysunku, istnieją rozwiązania o dowolnie małej wartości  $G(0)$ , a nawet dla  $B(0) \approx 1.317$  znaleziono rozwiązanie z „punktowo pustym wnętrzem” –  $G(0) = 0$ .

## 5.4 Elektrycznie naładowane Q-shelle

Mając rozwiązanie „puste” dla  $r = 0$  można zadać pytanie, czy to jest jeszcze Q-ball (z ang. Q-kula), czy może już Q-shell (z ang. Q-powłoka) z wewnętrznym promieniem równym zero. Taka gra słów suponuje istnienie rozwiązań nowego typu z niezerową gęstością ładunku na pewnym odcinku  $r \in (r_0, R)$ . Okazuje się, że numerycznie można znaleźć takie rozwiązania (przykład przedstawiony jest na rysunku 5.4). W obszarze asymptotycznym, gdzie  $B(0)$  jest duże można skonstruować przybliżone rozwiązania tego typu.



Rysunek 5.3: Przykładowe rozwiązanie startujące z południowego stoku:  $B(0) = 1.2$ ,  $G(0) \approx 0.221$ ,  $R \approx 4.76$ ,  $B(R) \approx 2.54$ ,  $\underline{Q} \approx 9.52$ ,  $\underline{E} \approx 71.2$ ,  $\omega \approx 4.54$ .



Rysunek 5.4: Przykładowy Q-shell:  $r_0 = 1$ ,  $B(0) = 1.452$ ,  $R \approx 5.06$ ,  $B(R) \approx 2.52$ ,  $\underline{Q} \approx 10.27$ ,  $\underline{E} \approx 78.0$ ,  $\omega \approx 4.55$ .

Ponownie zakładamy, że funkcja  $B$  ma stałą wartość na odcinku  $(0, R)$ . Na odcinku  $(0, r_0)$  para funkcji  $G = 0$  i  $B = \text{const}$  jest rozwiązaniem układu równań (5.8) i (5.9). Przybliżenie dotyczy odcinka  $(r_0, R)$ . Równanie (5.9) przybliżamy następująco

$$G''(r) = -B^2(r_0)G(r) + 1. \quad (5.16)$$

Wyraz z pierwszą pochodną zaniedbujemy zakładając, że  $r_0$  jest bardzo duże. Jest to równanie Q-balla w jednym wymiarze. Rozwiązanie na odcinku  $0 < B(0)(r - r_0) < 2\pi$

piszemy w formie

$$G(r) = \frac{1}{B^2(r_0)} [1 - \cos(B(r_0)(r - r_0))], \quad (5.17)$$

na pozostałym obszarze wartość funkcji  $G$  wynosi zero. Oczywistym wnioskiem z takiej postaci rozwiązania jest relacja

$$B(r_0)(R - r_0) = 2\pi,$$

która dobrze zgadza się z numeryką już dla  $B(r_0) \geq 3$  (dla  $B(r_0) = 3.083$  otrzymano  $B(r_0)(R - r_0) = 6.261$ ). W tym przybliżeniu wzór na ładunek w funkcji  $B(r_0)$  i  $r_0$  ma postać

$$\underline{Q} = 3\pi B^{-6}(r_0) \left( x_0^2 + 2\pi x_0 + \frac{4\pi^2}{3} - \frac{5}{2} \right), \quad (5.18)$$

gdzie  $x_0 = r_0 B(r_0)$ . Pozostaje powiązać ze sobą  $B(r_0)$  i  $r_0$ . W tym celu wykonujemy minimalizację energii przy stałym ładunku. Wygodnie jest wykorzystać relację

$$\underline{E} = \underline{Q}B(R) + \frac{\underline{Q}^2}{R} + \int_{r_0}^R dr r^2 (G'^2 + 2|G|). \quad (5.19)$$

Wynika ona ze wzoru (5.12) po uwzględnieniu równania (5.8). W granicy dużych wartości  $x_0$  całkowanie daje następujący rezultat

$$\underline{E} = (3\pi)^{1/6} \underline{Q}^{5/6} \left[ \frac{8}{3} x_0^{1/3} + \left( \underline{Q} + \frac{8\pi}{9} \right) x_0^{-2/3} \right],$$

przy czym zaniedbano wyrazy rzędu  $x_0^{-5/3}$  i mniejsze. Wyrażenie powyższe ma minimum dla

$$x_0 = \frac{3}{4} \underline{Q} + \frac{2\pi}{3};$$

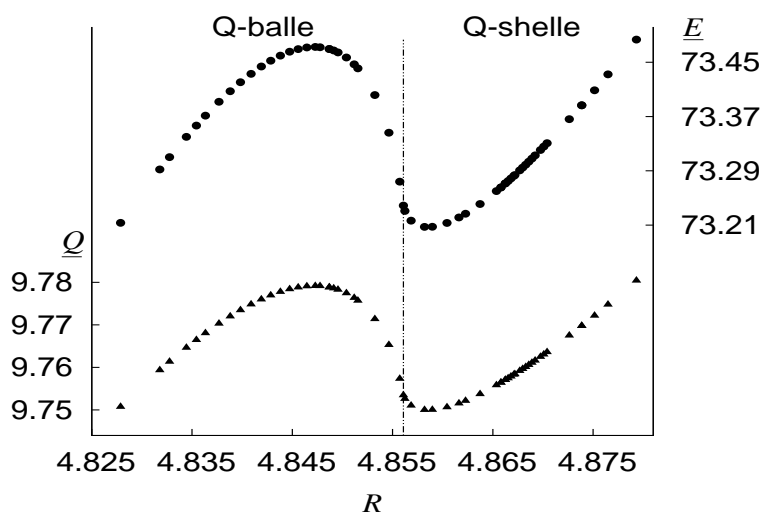
minimalna wartość energii wynosi

$$\underline{E} = \sqrt{3} 2^{4/3} \pi^{1/6} \underline{Q}^{7/6}.$$

Dla kompletności wyводу odnotowujemy, że w tym ujęciu  $B(r_0) = \left(\frac{27\pi}{16}\right)^{1/6} \underline{Q}^{1/6}$  i  $r_0 \sim \underline{Q}^{5/6}$ . Porównanie z danymi numerycznymi wskazuje, że przedstawione przybliżenie dobrze sprawdza się dla  $\underline{Q} > 150$ . Wówczas różnica w wyznaczeniu energii jest rzędu 1%,  $r_0$  wyznaczone jest z dokładnością do 7%. Dla większych wartości  $\underline{Q}$  jakość przybliżenia rośnie.

## 5.5 Przejście od Q-balli do Q-shellu

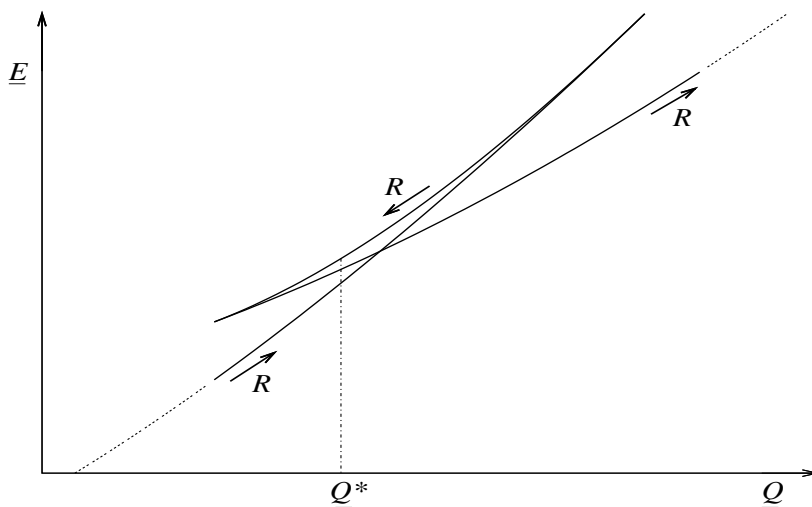
Potraktowanie Q-balla z  $G(0) = 0$  jako Q-shellu o wewnętrznym promieniu równym zero sugeruje, że przejście pomiędzy Q-ballami a Q-shellami ma charakter ciągły.



Rysunek 5.5: Przejście pomiędzy Q-ballami a Q-shellami jest ciągłe, w tym obszarze energia i ładunek nie identyfikują jednoznacznie rozwiązania. Energia oznaczona jest kropkami, ładunek – trójkątami.

Wrażenie to jest potęgowane przez rysunek 5.2, gdzie krzywa wartości początkowych wygląda na krzywą ciągłą. Przejście to dla energii i ładunku w funkcji zewnętrznego promienia  $R$  wygląda gładko (rysunek 5.5). Promień zewnętrzny jest bardzo dobrym parametrem – zarówno dane numeryczne i analityczne przybliżenia sugerują, że jednoznacznie identyfikuje on rozwiązania (rośnie monotonicznie wzdłuż krzywej wyznaczającej  $(B(0), G(0))$  poczynając od małych Q-balli). Z rysunku 5.5 wynika niejednoznaczność relacji  $\underline{E}(\underline{Q})$ , ponieważ danej energii (ładunkowi) mogą odpowiadać nawet trzy rozwiązania. Energia i ładunek osiągają lokalne maksimum dla pewnego Q-balla z  $G(0) > 0$ . Począwszy od tej wartości, wraz ze zmniejszaniem  $G(0)$  zmniejsza się energia i ładunek rozwiązań. Również Q-shelle dla najmniejszych wartości  $r_0$  zachowują się podobnie - ich energia i ładunek maleją wraz ze wzrostem  $R$ . Dzieje się tak aż do osiągnięcia przez pewne rozwiązanie (lokalnie) minimalnej wartości energii i ładunku. Dla większych  $r_0$  ładunek i energia rosną monotonicznie. W tym przejściowym obszarze nie udało się znaleźć analitycznych rozwiązań ani opracować dobrego przybliżenia. Numeryka wskazuje, że maksymalne (minimalne) wartości energii i ładunku osiągnane są dla jednego rozwiązania. Niech  $R_E$  i  $R_Q$  oznaczają promienie zewnętrzne rozwiązań, dla których energia i ładunek mają maksimum (minimum). Wówczas rozwinięcie w otoczeniu maksimum (minimum) energii i ładunku ma postać

$$\frac{d\underline{E}}{dR} = (R - R_E) \left( \left. \frac{d^2 \underline{E}}{dR^2} \right|_{R=R_E} + \frac{1}{2} (R - R_E) \left. \frac{d^3 \underline{E}}{dR^3} \right|_{R=R_E} + \dots \right),$$



Rysunek 5.6: Schematyczne przedstawienie przejścia między Q-ballami a Q-shellami.  $\underline{Q}^*$  wskazuje przejście między Q-ballami a Q-shellami.

$$\frac{d\underline{Q}}{dR} = (R - R_Q) \left( \left. \frac{d^2\underline{Q}}{dR^2} \right|_{R=R_Q} + \frac{1}{2}(R - R_Q) \left. \frac{d^3\underline{Q}}{dR^3} \right|_{R=R_Q} + \dots \right),$$

przy czym zakładamy, że drugie pochodne istnieją i są niezerowe. Pochodna

$$\frac{d\underline{E}}{d\underline{Q}} = \frac{d\underline{E}/dR_Q}{d\underline{Q}/dR_Q}$$

wybucha przy  $R_Q$ , jeżeli  $R_E \neq R_Q$ . Jeżeli nie, wykres  $\underline{E}(\underline{Q})$  musi mieć postać jak na rysunku 5.6. Co ciekawe, jest to wykres pojawiający się w przypadku przejść fazowych pierwszego rodzaju, np. dla gazu van der Waalsa [33]. Powyższy argument z pewnością nie jest argumentem przesadzającym – może być tak, że ostre szczyty na rysunku 5.6 są w istocie zaokrąglone, co odpowiada wybuchaniu pierwszej pochodnej  $d\underline{E}/d\underline{Q}$ .

## 5.6 Uwagi

Kwestia stabilności otrzymanych rozwiązań jest dosyć skomplikowana. Przedstawione w paragrafie 5.1 rozumowanie sugeruje stabilność rozwiązań względem małych zaburzeń radialnych. Relacja  $\underline{E}(\underline{Q})$  dla małych wartości ma postać  $\underline{E} \sim |\underline{Q}|^{5/6}$ , dla dużych zaś  $\underline{E} \sim |\underline{Q}|^{7/6}$ . Na mocy argumentów podanych w paragrafie 3.1 wynika stąd, że dla dużych Q-shellów rozpad na mniejsze Q-balle lub Q-shelle może okazać się korzystny energetycznie. Jednoznaczne określenie kiedy rozpad jest korzystny energetycznie, jest trudne ze względu na długozasięgowy charakter oddziaływania elektrostatycznego. Nie wiadomo również, jak rozwiązania zachowują się pod wpływem zaburzeń łamiących symetrię sferyczną.

Ciekawe jest pytanie, czy opisane Q-shelle pojawiają się w bardziej standardowych teoriach. Nawet jeśli byłyby to rozwiązania niestabilne, włączenie oddziaływań z innymi polami mogłoby je stabilizować. W szczególności wprowadzenie innego pola materii, może prowadzić do powstania Q-shella, wewnątrz którego są spulapkowane cząstki o ładunku odwrotnym do ładunku Q-shella. Tego typu rozważania są spotykane w przypadku Q-balli, por. [18].

Podobnie jak w modelu z globalną symetrią możliwe jest znalezienie elektrycznie naładowanych wzbudzonych Q-balli i Q-shelli, to jest rozwiązań, które przy zadanym ładunku mają wyższą energię od opisanych. W omawianym modelu rodzina wzbudzonych rozwiązań wydaje się bardzo bogata: obok prostych uogólnień rozwiązań przedstawionych w rozdziale 3 występują rozwiązania, w których funkcja profilu posiada (przy ustalonym znaku) kilka ekstremów lokalnych zanim gładko łączy się z rozwiązaniem próżniowym. Jakościowo można ich istnienie zrozumieć odwołując się do analogii mechanicznej. Odpowiadają one cząstce, która kilka razy przechodzi przez dolinę zanim osiadnie na osi  $G = 0$ . Prawdopodobnie możliwe są również kombinacje obu tych typów rozwiązań.

Ciekawe uogólnienie zaproponowanego modelu zostało przedstawione w pracy [29]. Do lagranżianu (5.1) dodany został człon zawierający skalar krzywizny, metryka zaś uznana została za zmienną dynamiczną (tak zwany model gwiazdy bozonowej). Takie wzbogacenie teorii wprowadza parametr wiążący pole materii z krzywizną (stała grawitacyjna). W omawianym modelu jest to istotny parametr, którego zmiana wpływa na jakościowe charakterystyki rozwiązań. Teoria taka jest bardzo skomplikowana, dlatego wszystkie wyniki zostały uzyskane w symulacjach numerycznych. Pokazano, że rozwiązania typu Q-ball istnieją w szerokim zakresie stałej sprzężenia grawitacyjnego. Rozwiązania typu Q-shell znaleziono tylko dla dostatecznie małej stałej sprzężenia. Zbadano również *Ansatz*, który zakłada istnienie czarnej dziury we wnętrzu Q-shella. Jak pokazano, rozwiązania tego typu są również dopuszczalne.

# Rozdział 6

## Zakończenie

### 6.1 Bieżąca praca

Jak widać z poprzednich rozdziałów, na poziomie klasycznym model signum-Gordona łączy w sobie dwie cechy: z jednej strony jest to model na tyle prosty, że możliwe jest znalezienie ciekawych rozwiązań równań ruchu, z drugiej strony jest on interesujący – choćby z uwagi na symetrię skalowania. Te cechy modelu motywują poszukiwanie jego kwantowego odpowiednika. Niestety, poszukiwania te są trudne. Nie wiadomo, jak prawidłowo postawić problem w ujęciu operatorowym. W formalizmie całek funkcjonalnych wiele sposobów obliczeniowych bazuje na rozwijaniu wokół form kwadratowych. W naszym modelu takie rozwinięcie jest niemożliwe do wykonania w ogólności - wszystkie znane nam rozwiązania sklejają się z rozwiązaniem próżniowym. Rozwiązanie to, jak argumentowano w pierwszym rozdziale, nie jest analitycznym maksimum działania. Jak się okazuje, regularyzacja również nie jest pomocna: nie udało się znaleźć sensownego sposobu wykonania granicy  $\kappa \rightarrow 0$ . Nie jest to zaskakujące: nawet dla prostej całki  $\int_{\mathbb{R}} dx \exp(-\sqrt{x^2 + \kappa^2})$ , przybliżenie punktu siodłowego dla małego  $\kappa$  nie działa.

Od dosyć dawna znane jest przybliżenie w formalizmie całek po trajektoriach zwane z angielska *strong coupling*, por. [34]. Polega ono na wykonaniu całki funkcjonalnej z oddziaływania, człony z pochodnymi traktowane są jako zaburzenie. Rachunki w naszym modelu prowadzone są w podobny sposób. Niestety, w tym momencie nie są one jeszcze kompletne. Jediną konkluzją, która wydaje się pewna, jest fakt pojawienia się w teorii kwantowej parametru o wymiarze masy.

Alternatywnym sposobem zbadania kwantowego modelu signum-Gordona jest wykonanie „numerycznego doświadczenia”, czyli symulacji Monte Carlo. Związek tej techniki z teorią pola najłatwiej zobaczyć w formalizmie całek po trajektoriach [32]. Ujęcie to

pozwała wyliczać średnie kwantowe jako całki funkcjonalne, to jest

$$\langle 0 | \hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_2) \dots \hat{\phi}(x_m) | 0 \rangle = \int D[\phi] \phi(x_1) \phi(x_2) \dots \phi(x_m) e^{-i\mathcal{S}[\phi]},$$

gdzie  $|0\rangle$  jest stanem próżni w teorii,  $\mathcal{S}[\phi]$  jest działaniem pola  $\phi$  a  $D[\phi]$  oznacza całkowanie po wszystkich konfiguracjach polowych. Dolne indeksy numerują kolejne punkty w czasoprzestrzeni a nie składowe wektorów czasoprzestrzennych. Pierwszym krokiem w stronę numerycznych obliczeń jest wprowadzenie zespolonego czasu  $x_0 \rightarrow -i\tau$ . W ten sposób wyjściowa teoria jest przekształcana w statystyczną teorię pola (na temat tego przejścia więcej w [30], [31]). W wypadku jednowymiarowego (czasoprzestrzeń 1 + 1) rzeczywistego modelu signum-Gordona wzór na średnie przybiera postać

$$\int D[\phi] \phi(x_1) \phi(x_2) \dots \phi(x_m) e^{-i\mathcal{S}[\phi]} \rightarrow \int D[\phi] \phi(x_1), \phi(x_2) \dots \phi(x_m) \phi e^{-\mathcal{S}_E[\phi]}, \quad (6.1)$$

gdzie wielkość

$$\mathcal{S}_E = \int d\tau d\xi [(\partial_\tau \phi)^2 + (\partial_\xi \phi)^2 + \lambda|\phi|] \quad (6.2)$$

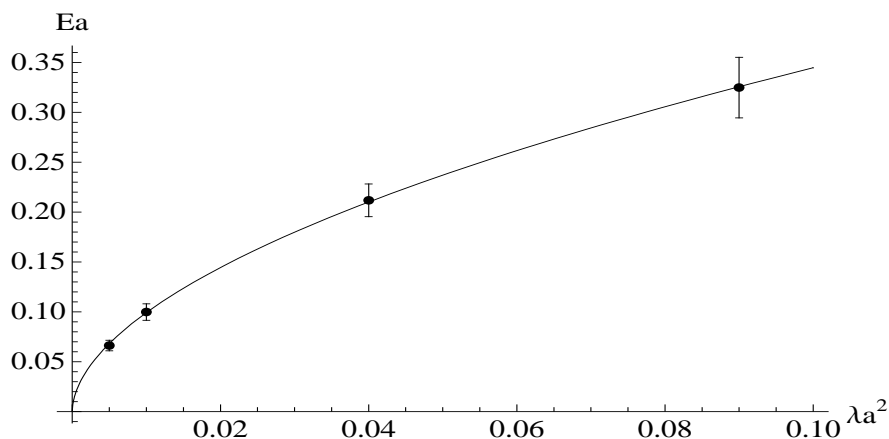
nazywana jest euklidesowym działaniem. Wzorowi (6.1) można nadać interpretację probabilistyczną: jest to średnia wartość wielkości  $\phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_m)$  na rozkładzie, w którym prawdopodobieństwo pojawienia się konfiguracji  $\phi$  (oznaczane przez  $P(\phi)$ ) jest proporcjonalne do  $e^{-\mathcal{S}_E[\phi]}$ . Powyższa interpretacja jest podstawą symulacji Monte Carlo. Przy pomocy komputera losuje się taki zbiór konfiguracji  $\{\phi\}$ , w którym spełniony jest warunek  $P(\phi) \sim e^{-\mathcal{S}_E[\phi]}$ . Procedury losowania pozwalające wybrać odpowiedni zbiór konfiguracji zostały wypracowane w ramach fizyki statystycznej [35]. W celu implementacji tej idei konieczna jest dyskretyzacja problemu. W przeprowadzonych symulacjach przyjęto dyskretyzację na regularnej prostokątnej siatce. Warunki brzegowe w symulacjach zostały ustalone następująco: w kierunku czasowym siatka ma  $M$  punktów, pole znika na końcach przedziału czasowego. W kierunku przestrzennym siatka składa się z  $N$  punktów z periodycznymi warunkami brzegowymi ( $N + 1 = 1$ ). W symulacjach funkcje  $\phi$  są próbkowane w obu kierunkach – czasowym i przestrzennym – z tą samą dokładnością, czyli stała siatki w obu kierunkach jest taka sama. We wszystkich wykonanych symulacjach przyjęto warunek  $M = 2N$ . Wprowadzamy oznaczenie  $\phi_{i,j} = \phi(ia, ja)$ , przy czym  $a$  to stała dyskretyzacji. W tym zapisie warunki brzegowe mają postać

$$\begin{aligned} \phi_{0,j} = \phi_{M,j} = 0 & \quad \text{dla } j = 0, 1, \dots, N, \\ \phi_{i,0} = \phi_{i,N} & \quad \text{dla } i = 0, 1, \dots, M. \end{aligned}$$

Działanie euklidesowe w modelu signum-Gordona (6.2) wyraża się po dyskretyzacji następująco

$$S_E = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M [2\phi_{i,j}^2 + \lambda a^2 |\phi_{i,j}| - \phi_{i,j} \phi_{i,j+1} - \phi_{i,j} \phi_{i+1,j}] - \sum_{j=0}^M (\phi_{0,j}^2 + \phi_{N,j}^2). \quad (6.3)$$





Rysunek 6.1: Pierwsze poziomy energetyczne dla różnych wartości  $\lambda a^2$ .

Otrzymane rezultaty dają się interpretować w standardowy sposób. Energię  $E$  najniższego wzbudzenia ustala się badając średnie

$$\langle \phi(\tau_0, \xi) \phi(\tau_0 + \tau, \xi) \rangle \sim e^{-E(\tau - \tau_0)}.$$

Z badania takich średnich nie otrzymujemy energii  $E$ , lecz wielkość  $Ea$ . Na podstawie analizy wymiarowej można oczekiwać, że w pierwszym przybliżeniu wielkość  $\sqrt{\lambda a^2}/Ea$  jest stała dla różnych wartości  $\lambda a^2$ . Jeżeli tak by było, teoria byłaby rozwiązywalna w zasadzie przez prostą analizę wymiarową ( $E \sim \sqrt{\lambda}$ ). Dane pokazują, że  $(\lambda a^2)^{0.54} \sim Ea$  (por. rysunek 6.1). Niepewność wyznaczenia tego wykładnika jest rzędu 0.01. Choćby ze względu na małą liczbę punktów wziętych pod uwagę wynik ten należy uważać za wstępny i dający jedynie orientacyjne pojęcie o modelu. Dotychczas wykonano również pobieżną analizę korelacji czteropunktowych  $\langle \phi^2(\tau_0, \xi_1) \phi^2(\tau_0 + \tau, \xi_2) \rangle$ , odpowiadających wzbudzeniom dwucząstkowym. Wyniki sugerują, że w zakresie małych energii mamy teorię cząstek oddziałujących słabo (małe przesunięcia fazowe przy rozpraszaniach). Zarówno szczegółowe opracowanie wyników, jak i ich interpretacja, pozostają wciąż otwartym problemem.

## 6.2 Podsumowanie

Niniejsza praca poświęcona jest w większości rozwiązaniom typu Q-ball w zespolonym modelu signum-Gordona. Podano konstrukcję tych rozwiązań oraz powiązano ich absolutną stabilność z absolutną stabilnością analogicznych rozwiązań w modelu zregulowanym. Wykazano, że Q-balle w zregulowanym modelu w trzech wymiarach przestrzennych są absolutnie stabilne. W takim razie, również w oryginalnym modelu nie istnieją rozwiązania, które mają mniejszą energię przy zadanym ładunku.

Rozwiązania te pozostają nadal istotne, gdy globalną symetrię (w trzech wymiarach przestrzennych) zastąpi się symetrią lokalną. W tym wypadku możliwe są również rozwiązania typu Q-shell, czyli konfiguracje, w których naładowana elektrycznie materia tworzy powłokę - kulę z wydrążonym, pustym wnętrzem.

Jak zasygnalizowano powyżej, trwa praca nad kwantowym modelem signum-Gordona. Obliczenia analityczne jak i numeryczne wymagają jeszcze sporo wysiłku, aby można było je zaprezentować szerszemu gronu czytelników. Na poziomie teorii klasycznej bardzo ciekawy wydaje się problem wypracowania jakiegoś schematu znajdowania rozwiązań bliskich znanym analitycznym rozwiązaniom, czegoś, co odpowiadałoby opisowi zaburzeń w liniowym reżimie w konwencjonalnych teoriach. Takie narzędzie byłoby istotne z punktu widzenia fizyki, gdyż możliwa stałaby się wówczas analiza stabilności znanych rozwiązań.

## Dodatek A

### Ograniczenie na zregulowany potencjał

Dla kompletności wyводу w rozdziale 4.1 należy wykazać, że istnieją takie dodatnie liczby  $a, b, \alpha, \beta$ , że dla  $0 < \delta < 1$  i wszystkich  $x$  spełniona jest nierówność

$$\left(\sqrt{x^2 + \delta^2} - \delta\right) - \frac{1}{2}x^2 \geq a|x|^\alpha - b|x|^\beta. \quad (\text{A.1})$$

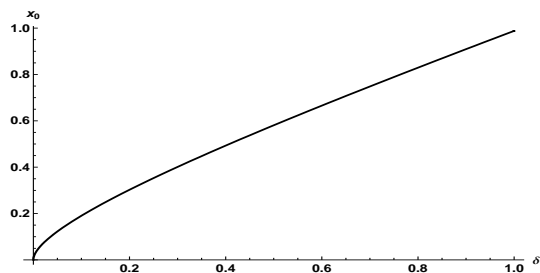
Przyjmując  $\alpha = 2, \beta = 3, a = (1 - \delta)/2$  i  $b = 3(2 - \sqrt{\delta})\delta^{-1}$  możemy zapewnić spełnienie tej nierówności – podane na stronie 27 ograniczenie na  $\alpha$  i  $\beta$  jest skomentowane poniżej. Aby się o tym przekonać zbadajmy pierwiastki równania

$$\sqrt{x^2 + \delta^2} = \delta + \frac{1}{2}x^2 + a|x|^2 - b|x|^3. \quad (\text{A.2})$$

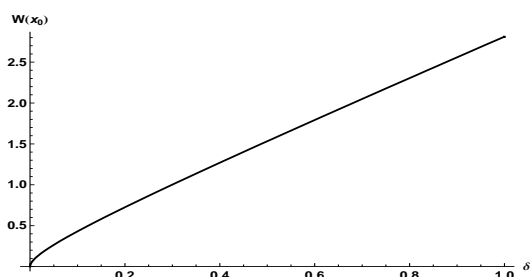
Wystarczy ograniczyć badanie do dodatnich wartości  $x$ . Podniesienie obu stron do kwadratu i wydzielenie przez  $x^2$  pozwala sprowadzić problem do szukania rozwiązań równania

$$-1 + 2\delta \left(a + \frac{1}{2}\right) - 2\delta bx + \left(a + \frac{1}{2}\right)x^2 - 2b \left(a + \frac{1}{2}\right)x^3 + b^2x^4 = 0. \quad (\text{A.3})$$

Należy zwrócić uwagę, że pierwiastki wyjściowego problemu (A.2) są również pierwiastkami powyższego wielomianu. W drugą stronę implikacji nie ma - przy podnoszeniu do kwadratu gubimy informację o względnym znaku obu stron równości. Otrzymany wielomian jest rozwiązywalny. Rozwiązania wyrażają się skomplikowanymi i długimi wzorami. Zamiast ich ścisłej analizy przedstawimy następujące uzasadnienie. Przy pomocy programu *Mathematica* zostały znalezione wzory na pierwiastki powyższego wielomianu czwartego rzędu. Wstawiając do tych rozwiązań zaproponowane wyrażenia na  $a$  i  $b$  wykonujemy wykresy pierwiastków w zależności od parametru  $\delta$ . Okazuje się, że dwa pierwiastki są zespolone (wzajemnie sprzężone) dla wszystkich interesujących wartości parametru. Z naszego punktu widzenia są one nieistotne. Pozostałe dwa pierwiastki są rzeczywiste: dodatni i ujemny. Ten ostatni również jest nieinteresujący.



Rysunek A.1: Nieujemny pierwiastek równania (A.3).



Rysunek A.2: Wartość wyrażenia  $W(x_0)$  dla różnych wartości  $\delta$ .

Pierwiastek dodatni (ściśle: nieujemny) oznaczamy przez  $x_0$ . Wykres A.1 prezentuje wartość  $x_0(\delta)$  dla  $0 < \delta < 1$ . Wartość wyrażenia

$$W(x) = \sqrt{x^2 + \delta^2} - \delta - \frac{1}{2}x^2 - a|x|^2 + b|x|^3$$

w punkcie  $x_0$  w zależności od parametru  $\delta$  przedstawiona jest na wykresie A.2. Jak wiadać wyrażenie to przyjmuje dodatnie wartości w  $x_0$ . Takiego znaku należy oczekiwać, jeżeli nierówność ma być spełniona.

Z warunku  $\alpha < \beta < 2n/(n - 2)$ , który łączy parametry  $\alpha$  i  $\beta$  z  $n$  (wymiarem przestrzennym) wynika, że powyższe dopasowanie jest dobre dla modelu w trzech, czterech i pięciu wymiarach. Wydaje się jednak, że odpowiedni dobór parametrów  $a$ ,  $b$ ,  $\alpha$  i  $\beta$  w większej liczbie wymiarów przestrzennych jest możliwy. Aby zapewnić spełnienie nierówności (A.1) dla  $x$  bliskiego zera, można przyjąć  $\alpha = 2$  i  $a$  odpowiednio małe. Aby zapewnić spełnienie nierówności dla dużych wartości  $x$  parametr  $\beta$  musi spełniać warunek  $\beta < 2 < 2n/(n - 2)$ . Jego spełnienie jest zawsze możliwe. Dobór konkretnej wartości  $a$ ,  $b$  i  $\beta$  tak, aby nierówność (A.1) była prawdziwa dla wszystkich  $x$  wydaje się więc możliwy.

## Dodatek B

# Relacja między Q-ballami w modelu z i bez regularyzacji

### B.1 Definicje i ogólne obserwacje

Jesteśmy zainteresowani oszacowaniem różnicy pomiędzy funkcjami  $f_+$  i  $f_\delta$ , którą oznaczamy przez

$$\eta(y) = f_+(y) - f_\delta(y). \quad (\text{B.1})$$

Funkcja  $f_+$  jest rozwiązaniem równania (3.2) i dana jest wzorem (3.5). Funkcja  $f_\delta$  jest rozwiązaniem równania różniczkowego (4.2). Funkcje te spełniają następujące warunki początkowe  $f_+(0) = f_\delta(0) > 1$  i  $f'_+(0) = f'_\delta(0) = 0$ . Jeżeli warunki te nie są spełnione, rozwiązania  $f_\delta$  i  $f_+$  nie są funkcjami profilu Q-balla: w przypadku pierwszego warunku wynika to choćby z analogii mechanicznej, drugi warunek został skomentowany w rozdziale 2.1. Jest to jedyne ograniczenie na funkcje  $f_+$  i  $f_\delta$ ; nie żądamy aby to były funkcje profilu. Badając rozwiązania z dowolnymi warunkami początkowymi chcemy się czegoś dowiedzieć na temat warunków początkowych funkcji profilu  $\hat{f}_\delta(0)$ . Skoro  $f_+ > 1$ , to na podstawie równań (3.2) i (4.2) otrzymujemy równanie różniczkowe

$$\eta'' + \frac{n-1}{y}\eta' + \eta = \frac{\delta^2}{\left(\sqrt{\delta^2 + f_\delta^2} + f_\delta\right)\sqrt{\delta^2 + f_\delta^2}}, \quad (\text{B.2})$$

przy czym  $\eta(0) = \eta'(0) = 0$ . Dla wygody oznaczamy prawą stronę występującą w tym równaniu przez  $\varphi(f_\delta(y))$  (w zależności od kontekstu będziemy się również posługiwać notacją  $\varphi(f_\delta)$ ). Funkcja  $\varphi(\cdot)$  dla dodatnich argumentów jest dodatnią i monotonicznie malejącą funkcją. W dalszej części wielokrotnie będziemy wykonywać szacowania korzystając ze związku

$$\varphi(f_\delta) < \frac{\delta^{2/3}}{g} \Leftrightarrow f_\delta > \delta^{2/3} \sqrt{\frac{g}{2} \frac{1 - \frac{\delta^{2/3}}{g}}{\sqrt{1 - \frac{\delta^{2/3}}{2g}}}}, \quad (\text{B.3})$$

gdzie  $g > 0$  jest dowolną liczbą rzeczywistą. Przy założeniu, że  $\delta$  jest dodatnią małą liczbą, szacowanie to ma postać

$$\varphi(f_\delta) < \frac{\delta^{2/3}}{g} \Leftrightarrow f_\delta > \delta^{2/3} \sqrt{\frac{g}{2}} + o(\delta^{2/3}). \quad (\text{B.4})$$

Równanie (B.2) jest niejednorodnym równaniem liniowym. Część jednorodna jest taka sama jak dla równania (3.2). Rozwiązanie jest dane poprzez całkę

$$\eta(y) = \int_0^y G(y, s) s^{n-1} \varphi(f_\delta(s)) ds, \quad (\text{B.5})$$

gdzie  $G$  jest funkcją Greena. Przy oznaczeniach rozdziału 3.1 wyraża się ona następująco

$$G(y, s) = \frac{u_1(s)u_2(y) - u_2(s)u_1(y)}{y^{n-1} (u_2'(y)u_1(y) - u_1'(y)u_2(y))}.$$

Warto podkreślić fakt, że funkcja  $G$  nie zależy od parametru  $\delta$ . Dla przykładu podajemy jawną postać funkcji  $G$  w trzech wymiarach

$$G(y, s) = \frac{\sin(s - y)}{sy}.$$

*A priori* dowolna kombinacja rozwiązań równania jednorodnego może zostać dodana do rozwiązania (B.5). Warunki na  $\eta(0)$  i  $\eta'(0)$  eliminują wszakże takie wyrazy. Całkowanie jest dobrze określone, granica  $y \rightarrow 0$  istnieje i jest skończona. Dzięki temu możliwe jest oszacowanie

$$|\eta(y)| \leq \max_{s \in [0, y]} \{\varphi(f_\delta(s))\} \max_{t \in [0, y]} \int_0^t |G(t, s) s^{n-1}| ds. \quad (\text{B.6})$$

W dalszej części przyda się następujące oszacowanie na  $\eta(y)$  dla  $0 < y < y_0 + 1$

$$|\eta(y)| \leq \max_{s \in [0, y]} \{\varphi(f_\delta(s))\} \max_{y \in [0, y_0 + 1]} \int_0^y |G(y, s) s^{n-1}| ds = g_1 \max_{s \in [0, y]} \{\varphi(f_\delta(s))\}, \quad (\text{B.7})$$

gdzie ostatnia równość jest definicją stałej  $g_1$ . Równanie (B.2) można przekształcić do postaci

$$y^{n-1} \eta'(y) = \int_0^y s^{n-1} (\varphi(f_\delta(s)) - \eta(s)) ds,$$

co pozwala oszacować pochodną funkcji  $\eta$  na odcinku  $(0, y_0 + 1)$

$$|\eta'(y)| \leq y^{1-n} \int_0^y s^{n-1} (|\varphi(f_\delta(s))| + |\eta(s)|) ds \leq g_2 \max_{s \in [0, y]} \{\varphi(f_\delta(s))\}, \quad (\text{B.8})$$

gdzie  $g_2 = (y_0 + 1)(1 + g_1)/n$ .

## B.2 Granica $\lim_{\delta \rightarrow 0} \hat{f}_\delta(0)$

W tym podrozdziale wykażemy, że  $\hat{f}_\delta(0)$  jako funkcja parametru  $\delta$  ma granicę dla  $\delta \rightarrow 0$ , która jest równa  $f_0$ . Oddzielnie rozważymy sytuację, gdy wartości początkowe rozwiązań równania (4.2) spełniają nierówność  $f_\delta(0) < f_0$  lub  $f_\delta(0) > f_0$ . W pierwszym z tych przypadków oznaczamy  $f_\delta(0) = f(0) = f_0 - \xi$ , przy czym  $\xi > 0$ . Dla takich wartości początkowych, jeżeli  $\delta$  jest dostatecznie małe, funkcja  $f_\delta$  ma minimum na odcinku  $(0, y_0 + 1)$  a wartość funkcji w tym minimum jest większa od zera.

Z rozdziału 3.1 wiemy, że dla  $f_+(0) < f_0$  funkcja  $f_+$  jest dodatnia dla wszystkich wartości argumentu  $y$  i ma minimum w punkcie  $y_0$ . Wynika stąd, że równanie (B.2) pozwala wyliczyć różnicę  $\eta$  dla dowolnego  $y$ . Załóżmy, że w omawianej granicy  $\eta(y)$  nie dąży do zera dla pewnego argumentu  $0 < y < y_0 + 1$ . Wówczas, na mocy nierówności (B.7) stwierdzamy, że  $\varphi(f_\delta) > \delta^{2/3}/g_1$  na pewnym odcinku. Oznacza to (por. wzór (B.4)), że  $f_\delta < \delta^{2/3}\sqrt{g_1/2}$  na tym odcinku. Z ciągłości funkcji  $f_\delta$  mamy, że dla pewnego argumentu  $y_s$  zachodzi równość  $f_\delta(y_s) = \delta^{2/3}\sqrt{g_1/2}$ . W tym punkcie obowiązuje szacowanie

$$|f_+(y_s)| \leq |f_\delta(y_s)| + |\eta(y_s)| \leq \delta^{2/3}\sqrt{\frac{g_1}{2}} + \delta^{2/3}. \quad (\text{B.9})$$

Z konstrukcji funkcji  $f_+$  wiemy, że  $f_+(y_s) > f_+(y_0)$ . Łącząc tę relację z nierównością (B.9) dostajemy warunek na  $\xi$ ,

$$0 \leq \xi \leq \left| \frac{u_1(0)}{u_1(y_0)} \right| \delta^{2/3} \left( \sqrt{\frac{g_1}{2}} + 1 \right).$$

Nierówność ta wyznacza wartości początkowe, dla których  $\eta$  może być większe niż  $\delta^{2/3}$  na odcinku  $(0, y_0 + 1)$ . Jeżeli  $f_\delta(0)$  nie spełnia tego warunku, to ma minimum na odcinku  $0 < y < y_0 + 1$  (o ile  $\delta$  jest na tyle małe, że powyższe szacunki są prawdziwe). Jeśli zaś funkcja  $f_\delta$  ma minimum, to nie jest funkcją profilu Q-balla. Jako podsumowanie dotychczasowych rozważań zapisujemy warunek na  $\hat{f}_\delta(0)$ :

$$\hat{f}_\delta(0) > f_0 - \left| \frac{u_1(0)}{u_1(y_0)} \right| \delta^{2/3} \left( \sqrt{\frac{g_1}{2}} + 1 \right). \quad (\text{B.10})$$

Rozważymy teraz, jak zachowuje się funkcja  $f_\delta$ , gdy  $f_+(0) = f_\delta(0) = f_0 + \xi$ . W rozdziale 3.1 ustaliliśmy, że w tym wypadku istnieje argument  $y_1 < y_0$ , dla którego  $f_+(y_1) = 0$  i  $f'_+(y_1) < 0$ . Przyjmijmy, że istnieje punkt  $y_z$ , w którym  $f_\delta(y_z) = \delta^{2/3}g_1^{1/3}$ . Na mocy (B.7) możemy oszacować  $|\eta| < \delta^{2/3}g_1^{1/3}/2$ . Wówczas w sąsiedztwie  $y_z$  obowiązuje wciąż równanie (B.2), gdyż  $f_+(y_z) > 0$ . Aby przekonać się, że punkt  $y_z$  istnieje, przyjmijmy przeciwne założenie:  $f_\delta > \delta^{2/3}g_1^{1/3}$  dla każdego  $0 < y < y_0 + 1$ . Na mocy relacji (B.7) różnica  $\eta$  jest wtedy zbyt mała, aby równanie  $f_+(y_1) = 0$  miało rozwiązanie.

Wykażemy teraz, że dla dostatecznie małych wartości  $\delta$  funkcja  $f_\delta$  zmienia znak. W tym celu skorzystamy z rozwinięcia Taylora. Ze wzoru (B.8) wynika, że

$$f'_+(y_z) - \frac{g_2 g_1^{-2/3}}{2} \delta^{2/3} < f'_\delta(y_z) < f'_+(y_z) + \frac{g_2 g_1^{-2/3}}{2} \delta^{2/3}. \quad (\text{B.11})$$

Bez ograniczenia ogólności przyjmujemy, że  $|f'_+(y_z)| > \delta^{2/3} g_2 g_1^{-2/3} / 2$  (przy ustalonym  $f_+(0)$  zachodzi  $f'_+(y_z) \rightarrow f'_+(y_1)$  gdy  $\delta \rightarrow 0$ ). Równanie

$$f_\delta(y_2) = -\delta^{1/3} \quad (\text{B.12})$$

można teraz rozwiązać w sposób przybliżony rozwijając wokół  $y_z$ . W tym przybliżeniu

$$y_2 = y_z + \frac{\delta^{1/3} + \delta^{2/3} g_1^{1/3}}{|f'_\delta(y_z)|}.$$

Podstawienie  $f'_+(y_z)$  w miejscu  $f'_\delta(y_z)$  nie zmienia wyniku w wiodącym rzędzie (zmiana jest w rzędzie  $\sim \delta^1$ ). Powyższy wynik może być bez znaczenia, jeśli błąd w rozwinięciu Taylora

$$R = \frac{f''_\delta(s)}{2f'^2_\delta(y_z)} (y_2 - y_z)^2,$$

nie jest  $o(\delta^{1/3})$ ; w powyższym wzorze  $s \in (y_z, y_2)$ . Równanie (4.2) nie zmienia wielkości

$$E_{mech}(y_s, y) = (n-1) \int_{y_s}^y \frac{f'^2_\delta(r)}{r} dr + \frac{1}{2} \left( f'^2_\delta(y) + f^2_\delta(y) \right) - \sqrt{f'^2_\delta(y) + \delta^2},$$

którą w ramach analogii mechanicznej można interpretować jak energię cząstki z uwzględnieniem strat na tarcie na odcinku  $(y_s, y)$ . Stąd możemy dostać oszacowanie na  $f'_\delta(y)$  dla  $y > y_z$ :

$$|f'_\delta(y)| \leq \sqrt{2E_{mech}(y_z, y_z) + 2\sqrt{f'^2_\delta + \delta^2} - f^2_\delta}.$$

W interesującym nas przedziale wartości  $f_\delta \in (-\delta^{-1/3}, \delta^{2/3} g_1^{1/3})$  wiodący wkład (rzędu  $\delta^0$ ) pochodzi od  $f'_\delta(y_z)$ . Wstawiając to do równania na funkcję  $f_\delta$  i uwzględniając, że w badanym obszarze pochodna funkcji  $f_\delta$  jest ujemna, uzyskujemy oszacowanie drugiej pochodnej poprzez  $f_\delta$

$$|f''_\delta(y)| \leq \frac{n-1}{y} \sqrt{2E_{mech}(y_z, y_z) + 2\sqrt{f'^2_\delta + \delta^2} - f^2_\delta} + f_\delta + \left| \frac{f_\delta}{\sqrt{f_\delta + \delta^2}} \right| + |f_\delta|.$$

Stąd otrzymujemy górne ograniczenie  $|f''_\delta(s)| \leq \frac{n-1}{y_z} |f'_+(y_z)| + \dots$ , gdzie pierwsze pominięte wyrazy są rzędu  $\delta^{1/3}$ . Na tej podstawie stwierdzamy, że  $R$  jest nieistotne. To oznacza, że dla dostatecznie małych  $\delta$  funkcja  $f_\delta$  zmienia znak. Taka funkcja nie może zaś być funkcją profilu Q-balla. Tak więc trzeba przyjąć, że

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \hat{f}_\delta(0) = f_0. \quad (\text{B.13})$$



### B.3 Granica $\lim_{\delta \rightarrow 0} (\hat{f} - \hat{f}_\delta)$

Teraz przeanalizujemy różnicę  $\hat{\eta}(y) = \hat{f}(y) - \hat{f}_\delta(y)$ . Funkcja  $\hat{\eta}$  spełnia równanie analogiczne do równania na  $\eta$

$$\hat{\eta}'' + \frac{n-1}{y} \hat{\eta}' + \hat{\eta} = \varphi(\hat{f}_\delta). \quad (\text{B.14})$$

Obowiązuje ono na odcinku  $(0, y_0)$ , poza nim  $\hat{\eta} = -\hat{f}_\delta$ . Inne niż poprzednio są warunki początkowe:  $\hat{\eta}(0) \neq 0$  i  $\hat{\eta}'(0) = 0$ . Dlatego rozwiązanie ma formę następującą:

$$\hat{\eta}(y) = \int_0^y G(y, s) s^{n-1} \varphi(\hat{f}_\delta(s)) ds + \frac{f_0 - \hat{f}_\delta(0)}{u_1(0)} u_1(y). \quad (\text{B.15})$$

Ze względu na charakter funkcji  $u_1$  możemy oszacować wyraz proporcjonalny do niej przez  $f_0 - \hat{f}_\delta(0)$ . Dalsze szacowanie możemy wykonać podobnie jak powyżej: wybieramy punkt  $y_z < y_0$ , taki że  $\hat{f}_\delta(y_z) = \delta^{2/3} g_1^{1/3}$ . Wówczas wyraz pochodzący z całkowania w powyższym wzorze szacuje się przez  $\delta^{2/3} g_1^{1/3} / 2$ , por. (B.7). Stąd mamy, że

$$|f(y_z)| \leq \frac{3}{2} \delta^{2/3} g_1^{1/3} + |f_0 - \hat{f}_\delta(0)|.$$

Na obszarze  $(y_z, \infty)$  różnica  $\hat{\eta}$  jest szacowana przez  $\max\{\hat{f}_\delta(y_z), \hat{f}(y_z)\}$ . Wynika to z faktu, że obie funkcje są dodatnie i malejące na całej dodatniej półosi. Tak więc

$$\sup_y |\hat{\eta}(y)| \leq \frac{3}{2} \delta^{2/3} g_1^{1/3} + |f_0 - \hat{f}_\delta(0)|. \quad (\text{B.16})$$

Powyższe oszacowanie obowiązuje również, gdy pierwiastek równania  $\hat{f}_\delta(y_z) = \delta^{2/3} g_1^{1/3}$  spełnia nierówność  $y_z \geq y_0$ . Wówczas  $\hat{f}_\delta(y_0) > \delta^{2/3} g_1^{1/3}$ , czyli  $|\eta(y)| \leq \delta^{2/3} g_1^{1/3} / 2 + |f_0 - \hat{f}_\delta(0)|$ . Na półprostej  $y > y_0$  wartość  $|\eta|$  maleje do zera, czyli relacja (B.16) jest prawdziwa i w tym przypadku. To oznacza, że rodzina funkcji  $\hat{f}_\delta(y)$  jest jednostajnie zbieżna do  $\hat{f}$ , gdy  $\delta \rightarrow 0$ .

Podobne rozumowanie można przeprowadzić dla pochodnej funkcji  $\hat{f}_\delta$ . Daje się ono uzasadnić przy pomocy wzoru (B.8). Oprócz tego trzeba wykorzystać fakt, że na odcinku  $[0, y_0]$  funkcja  $u_1'$  jest ograniczona (niezależnie od  $\delta$ ) oraz pokazać monotoniczność funkcji  $\hat{f}_\delta'$  dla wszystkich argumentów  $y$  większych od pewnego  $y_1 < y_0$ . Monotoniczność pochodnej można uzasadnić następująco. Funkcja  $\hat{f}_\delta'$  zmienia się z malejącej w rosnącą (lub odwrotnie), gdy  $\hat{f}_\delta'' = 0$ . Wówczas równanie (4.2) ma postać

$$\frac{n-1}{y} \hat{f}_\delta' = \frac{\hat{f}_\delta(y)}{\sqrt{\hat{f}_\delta^2(y) + \delta^2}} - \hat{f}_\delta(y).$$

Z faktu, że  $\hat{f}'_\delta < 0$  wynika, że druga pochodna funkcji  $\hat{f}_\delta$  może mieć wartość zero tylko, gdy  $\hat{f}_\delta > \sqrt{1 - \delta^2}$ . Można więc wziąć  $y_1$  takie, że  $\hat{f}(y_1) = 0.5$ . Dla dostatecznie małej wartości  $\delta$  prawdą jest wówczas, że dla  $y > y_1$  pochodna funkcji  $\hat{f}_\delta$  monotonicznie rośnie do zera.

## B.4 Wnioski

Wyniki numeryczne zaprezentowane powyżej pokazują, że regularyzacja modelu signum-Gordona nie wpływa znacznie na relację  $E(Q)$  dla dużych ładunków i energii. Bazując na powyższych wynikach możemy pokazać, że nie jest to przypadek. Wykážemy najpierw, że całka  $\int d^n x \hat{f}_\delta^2$  dąży do wartości znanej z modelu signum-Gordona. W dowolnej skończonej objętości wynika to natychmiast z jednostajnej zbieżności funkcji  $\hat{f}_\delta$ . Wniosek taki w całej przestrzeni  $R^n$  nie jest uprawniony, o czym świadczy następujący przykład: rodzina funkcji  $\{h_m(x)\}_{m=1}^\infty$  określonych na prostej rzeczywistej, gdzie

$$h_m(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } 0 \leq x \\ 1/m & \text{gdy } 0 < x \leq m \\ 0 & \text{gdy } x > m. \end{cases}$$

Mając w pamięci asymptotyczne zachowanie funkcji profilu (zob. rozdział 4.1) wydaje się, że nie powinno być problemu ze zbieżnością energii i ładunku. Aby to pokazać, wykorzystajmy powyżej dowiedzioną zbieżność funkcji  $\hat{f}_\delta$ . Równanie (4.2) można zapisać w następującej formie

$$y^{n-1} \hat{f}'_\delta(y) = \int_0^y \left( \frac{\hat{f}_\delta(x)}{\sqrt{\hat{f}_\delta^2(x) + \delta^2}} - \hat{f}_\delta(x) \right) x^{n-1} dx. \quad (\text{B.17})$$

Korzystając z powyższego wzoru i asymptotyki funkcji  $\hat{f}_\delta$  (rozdział 4.1) wyrażamy granicę

$$\lim_{y \rightarrow \infty} y^{n-1} \hat{f}'_\delta(y) = 0$$

następująco

$$-y_0^{n-1} |\hat{f}'_\delta(y_0)| + \int_{y_0}^\infty \frac{\hat{f}_\delta(y)}{\sqrt{\hat{f}_\delta^2(y) + \delta^2}} y^{n-1} dy - \int_{y_0}^\infty \hat{f}_\delta(y) y^{n-1} dy = 0. \quad (\text{B.18})$$

Na podstawie monotoniczności funkcji  $\hat{f}_\delta$  szacujemy

$$\frac{\hat{f}_\delta(y)}{\sqrt{\hat{f}_\delta^2(y) + \delta^2}} \geq \frac{\hat{f}_\delta(y_0)}{\sqrt{\hat{f}_\delta^2(y_0) + \delta^2}}$$

dla  $y > y_0$ . Wstawiając to do równania (B.18) otrzymujemy szacowanie

$$\frac{y_0^{n-1} |\hat{f}'_\delta(y_0)| \sqrt{\hat{f}_\delta^2(y_0) + \delta^2}}{1 - \sqrt{\hat{f}_\delta^2(y_0) + \delta^2}} \geq \int_{y_0}^{\infty} \hat{f}_\delta(y) y^{n-1} dy \geq 0.$$

Lewa strona tej nierówności dąży do zera wraz z parametrem  $\delta$ . Stąd wnioskujemy, że całka pomiędzy dwoma nierównościami w tej granicy również znika. Można przyjąć, że  $\hat{f}_\delta > \hat{f}_\delta^2$  dla  $y > y_0$ , co pozwala stwierdzić, że istotnie wraz z usuwaniem regularyzacji, wkład do ładunku z obszaru  $y > y_0$  jest zaniedbywalny. Naturalne jest więc zapisać wynik tego całkowania w formie  $c_Q + q(\delta)$ , gdzie pierwszy wyraz jest wartością graniczną (oznaczenie z rozdziału 3.1), drugi zdaje sprawę z zależności od parametru  $\delta$  i dąży do zera dla małych wartości  $\kappa$ . Wstawiając tę wartość do oryginalnej formuły (4.5) otrzymujemy relację

$$Q = \frac{\lambda^2}{\omega^{n+3}} \left( c_Q + q \left( \frac{2\kappa\omega^2}{\lambda} \right) \right), \quad (\text{B.19})$$

która w wiodącym rzędzie jest taka sama jak w oryginalnym modelu.

Podobne rozumowanie można przeprowadzić dla energii. Odpowiedni funkcjonal ma postać

$$E = \frac{\lambda^2}{\omega^{n+2}} \int_0^\infty dr r^{n-1} \left[ \hat{f}'_\delta{}^2 + \hat{f}_\delta^2 + 2 \left( \sqrt{\hat{f}_\delta^2 + \delta^2} - \delta \right) \right]. \quad (\text{B.20})$$

Pochodną  $\hat{f}'_\delta$  dla  $y > y_0$  można zapisać w formie

$$|\hat{f}'_\delta(y)| = y^{-n+1} \left( y_0^{n-1} |\hat{f}'_\delta(y_0)| - \int_{y_0}^y \left[ \frac{\hat{f}_\delta(x)}{\sqrt{\hat{f}_\delta^2(x) + \delta^2}} - \hat{f}_\delta(x) \right] x^{n-1} dx \right),$$

która umożliwia oszacowanie

$$|\hat{f}'_\delta(y)| \leq \frac{y_0^{n+1} |\hat{f}'_\delta(y_0)|}{y^{n-1}}.$$

Oszacowanie to jest prawdziwe dla dostatecznie małego  $\delta$ , takiego że  $\hat{f}_\delta < \sqrt{1 - \delta^2}$ . Skąd wynika, że

$$\int_{y_0}^{\infty} \hat{f}'_\delta{}^2 y^{n-1} dy \leq \frac{\hat{f}'_\delta{}^2(y_0)}{n-2} y_0,$$

co dowodzi, że

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^\infty \hat{f}'_\delta{}^2 y^{n-1} dy = \int_0^\infty \hat{f}'^2 y^{n-1} dy$$

dla  $n > 2$ . W modelu dwuwymiarowym mamy identyczność

$$\int_{y_0}^{\infty} |\hat{f}'_\delta| y dy = |\hat{f}_\delta(y_0)| y_0 - \int_{y_0}^{\infty} |\hat{f}_\delta| dy.$$

Mając na uwadze, że  $y_0 > 1$  w tym przypadku (por. rozdział 3.1.2), prawdziwa jest nierówność

$$0 \leq \int_{y_0}^{\infty} |\hat{f}_\delta| dy \leq \int_{y_0}^{\infty} |\hat{f}_\delta| y dy,$$

skąd wnioskujemy, że

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{y_0}^{\infty} |\hat{f}'_\delta| y dy = 0.$$

Można przyjąć, że  $0 < \hat{f}'_\delta{}^2(y) < |\hat{f}'_\delta(y)|$  dla  $y > y_0$ , więc

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{y_0}^{\infty} \hat{f}'_\delta{}^2 y dy = 0,$$

czyli również dla  $n = 2$  całka z kwadratu pochodnej  $\hat{f}_\delta$  dąży do całki z kwadratu pochodnej funkcji  $\hat{f}$ .

Całkę z energii potencjalnej wykonamy w dwóch krokach: wyodrębniamy część niezależną jawnie od parametru  $\delta$  i poprawkę

$$\int_0^\infty dy y^{n-1} \left( \sqrt{\hat{f}_\delta^2 + \delta^2} - \delta \right) = \int_0^\infty dy y^{n-1} \hat{f}_\delta - 2\delta \int_0^\infty dy y^{n-1} \frac{\hat{f}_\delta}{\sqrt{\hat{f}_\delta^2 + \delta^2} + \delta + \hat{f}_\delta}.$$

Całkowanie części zależnej od parametru dzielimy na dwa obszary. Wkład do całki pochodzący z wnętrza kuli o promieniu  $y_0$  znika wraz ze zmniejszaniem wartości  $\delta$

$$2\delta \int_0^{y_0} dy y^{n-1} \frac{\hat{f}_\delta}{\sqrt{\hat{f}_\delta^2 + \delta^2} + \delta + \hat{f}_\delta} < 2\delta \int_0^{y_0} dy y^{n-1} \frac{1}{2} \rightarrow 0.$$

Całkowanie w pozostałym obszarze przestrzeni jest również zaniedbywalne, gdyż

$$0 \leq 2\delta \int_{y_0}^\infty dy y^{n-1} \frac{\hat{f}_\delta}{\sqrt{\hat{f}_\delta^2 + \delta^2} + \delta + \hat{f}_\delta} < 2\delta \int_{y_0}^\infty dy y^{n-1} \frac{\hat{f}_\delta}{2\delta} \rightarrow 0.$$

Zapisując wynik całkowania w analogicznej formie jak dla ładunku,  $c_E + \epsilon(\delta)$  otrzymujemy wyrażenie

$$E = \frac{\lambda^2}{\omega^{n+2}} \left( c_E + \epsilon \left( \frac{2\omega^2 \kappa}{\lambda} \right) \right), \quad (\text{B.21})$$

które odpowiada dla małych wartości  $\kappa$  wyrażeniu znanemu z oryginalnego modelu.

## Dodatek C

### Rachunek zaburzeń

Omówione w rozdziale 5 wyniki można również uzyskać analizując wyjściowe równania (5.6) i (5.7). Chcąc sprawdzić, czy te równania mają coś wspólnego z równaniem Q-balla w modelu signum-Gordona przeskalowujemy:  $y = \omega r$ ,  $f = (\lambda/2\omega^2)F$ . Dodatkowo wprowadzamy funkcję  $a = 2\omega^5/\lambda^2 qA$  i oznaczenie  $\gamma = \lambda^2 q^2/2\omega^6$ . Wyjściowy układ równań ma teraz postać

$$f'' + \frac{2}{y}f' = -(1 + \gamma a)^2 f + \text{sign}(f), \quad a'' + \frac{2}{y}a' = (1 + \gamma a)f^2.$$

Parametr  $\gamma$  traktujemy jako parametr rozwinięcia perturbacyjnego, czyli zakładamy, że  $f = f_0 + \gamma f_1 + \gamma^2 f_2 + \dots$  i  $a = a_0 + \gamma a_1 + \gamma^2 a_2 + \dots$ . Biorąc  $\omega$  dostatecznie duże, możemy oczekiwać, że parametr  $\gamma$  będzie istotnie mniejszy od wszystkich charakterystycznych wielkości występujących w modelu. W rzędzie  $\gamma^0$  równania mają następującą postać

$$f_0'' + \frac{2}{y}f_0' = -f_0 + \text{sign}(f_0), \quad a_0'' + \frac{2}{y}a_0' = f_0^2.$$

W tej formie równania mają strukturę znaną z liniowej elektrostatyki: pierwsze równanie wyznacza rozkład ładunku (materii), drugie potencjał elektrostatyczny pochodzący od takiego (zadanego) rozkładu ładunku. Równanie na  $f_0$  jest równaniem Q-balla z globalną symetrią (3.2), posiada więc znane rozwiązanie (por. rozdział 3.1). Możemy również podać sposób wyliczania funkcji  $a_0$  w zerowym rzędzie:

$$a_0(y) = \int_{\infty}^y \frac{du}{u^2} \int_0^u dv v^2 f^2. \quad (\text{C.1})$$

Jak wynika ze wzoru (5.14), w oryginalnym układzie równań spełniony jest warunek  $A(r) \rightarrow 0$  dla  $r \rightarrow \infty$ . Warunek ten tłumaczy się teraz na żądanie  $a(y) \rightarrow 0$  dla  $y \rightarrow \infty$ , co uzasadnia granice całkowania. Stąd można wyznaczyć wartość  $a_0(0)$

$$a_0(0) = - \int_0^{\infty} \frac{du}{u^2} \int_0^u dv v^2 f^2. \quad (\text{C.2})$$

Niestety wynik całkowania w powyższym wzorze nie jest dany przez funkcje elementarne, numerycznie jest to proste zadanie. W ten sposób otrzymujemy, że  $a_0(0) = 50.08$ . Tak więc  $B(\infty) - B(0) \approx 50.08 \times \lambda^2 q \omega^{-5} / 2$ , co nieźle zgadza się z rozwiązaniami numerycznymi dla Q-balli, o ile  $B(0) \geq 3.3$ . W tym przypadku ( $B(0) = 3.3$ ) obliczenia numeryczne dają  $(B(\infty) - B(0))\omega^5 \approx 55.7$ .

Ciekawe jest policzenie pierwszych poprawek -  $f_1$  i  $a_1$ . Równanie na funkcję  $f_1$  zależy od funkcji  $a_1$  i ma postać

$$f_1'' + \frac{2}{y}f_1' + f_1 = -2f_0a_0. \quad (C.3)$$

Obowiązuje ono dla  $y < y_0$  o ile  $sign(f_0) = sign(f_0 + \gamma f_1)$ . Jest to równanie liniowe z dobrze znaną już częścią jednorodną. Stosując oznaczenia z dodatku B rozwiązanie tego równania ma postać

$$f_1(y) = -2 \int_0^y G(y, s) f_0(s) a_0(s) s^2 ds + \chi u_1(y) \quad (C.4)$$

w obszarze obowiązywania poprzedniego równania,  $\chi$  jest pewną liczbą rzeczywistą. Mając dane  $f_0$  i  $a_0$  można łatwo znaleźć  $f_1$ . Istotne są dwie liczby:  $f_1(y_0) = 55.63$  i  $f_1'(y_0) = -176.13$ . Informują one o warunkach zszywania: czy rozwiązanie w kolejnym rzędzie się poszerza, czy zwęża oraz pozwalają ustalić wartość stałej  $\chi$ . W obszarze, gdzie  $f_0 = 0$  obowiązuje równanie

$$\gamma f_1'' + \gamma \frac{2}{y} f_1' + \gamma f_1 = sign(\gamma f_1), \quad (C.5)$$

którego rozwiązanie ma postać

$$f_1(y) = \gamma^{-1} + \frac{\sigma \sin(y) + \xi \cos(y)}{y},$$

przy czym  $\sigma$  i  $\xi$  są pewnymi stałymi liczbowymi. Funkcja ta jest rozwiązaniem równania (C.5) o ile jest dodatnia. Warunki ciągłości na granicy pomiędzy oboma obszarami pozwalają wyprowadzić wzór na stałą  $\xi$

$$\xi = -2 \frac{y_0}{\cos(y_0)} \int_0^{y_0} \frac{d}{dy} G(y, s) f_0(s) a_0(s) s^2 ds.$$

Wartość  $\sigma$  i  $\chi$  są zależne od siebie w  $y_0$ . Wiemy jednak, że funkcja  $f_1$  musi sklejać się w pewnym punkcie  $y_1$  gładko z rozwiązaniem próżniowym. Z tych warunków można uzyskać zależność pomiędzy  $y_1$  a parametrem  $\gamma$ . Ma ona postać

$$\gamma \xi = y_1 \cos y_1 - \sin y_1. \quad (C.6)$$

Dane numeryczne całkiem dobrze zgadzają się z tą relacją o ile  $B(0) \geq 3.8$ . Relacja (C.6) jest niejednoznaczna, wybrana gałąź ma sens, o ile  $y_1 \leq 2\pi$  (czyli  $\gamma \lesssim 0.081$ ).

Można uznać, że jest to granica stosowalności zaproponowanego rozwinięcia. Z danych numerycznych wynika, że wszystkie znalezione rozwiązania mieszczą się w tym zakresie. Mając dane  $y_1$  można wyznaczyć parametry  $\sigma$  i  $\chi$ .

Jak widać, rachunek zaburzeń dla modelu signum-Gordona zawiera również część nieperturbacyjną – pojawia się ona w wyniku procedury sklejanania nietrywialnych rozwiązań z rozwiązaniem próżniowym. W wyższych rzędach tego rachunku, przy obliczaniu kolejnych poprawek, możliwe jest również skrócenie wyjściowego rozwiązania.

W ramach przedstawianego rachunku zaburzeń można zrozumieć, dlaczego prosty model opisujący duże Q-shelle (zob. rozdział 5.4) działa. Łatwo dostrzec, że przedstawiony tam opis rozwiązań to w istocie rozwiązanie oryginalnych równań w rzędzie  $\gamma^0$  z opuszczonym wyrazem zawierającym pierwszą pochodną. Dane numeryczne wskazują, że  $(\omega r_0)^{-1}$  jest rzędu  $\gamma$  dla dużych wartości  $r_0$ . Tak więc w tym rzędzie opuszczenie członu z pierwszą pochodną jest dozwolone. Ceną, jaką za to trzeba zapłacić, jest brak możliwości wyznaczenia związku  $r_0$  z innymi parametrami modelu. Dlatego trzeba było uciec się do procedury nieperturbacyjnej (minimalizacja energii). Alternatywnym sposobem byłoby wykonanie rachunków w kolejnym rzędzie rachunku zaburzeń.

## Bibliografia

- [1] H. Arodź, *Acta Phys.Polon.* **B33**, 1241 (2002).
- [2] H. Arodź, P. Klimas, T.Tyranowski, *Acta Phys.Polon.* **B36**, 3861 (2006).
- [3] H. Arodź, P. Klimas, T.Tyranowski, *Acta Phys.Polon.* **B38**, 3099 (2007).
- [4] H. Arodź, P. Klimas, T.Tyranowski, *Acta Phys.Polon.* **B38**, 2537 (2007).
- [5] H. Arodź, P. Klimas, T.Tyranowski, *Phys.Rev.* **D77**, 047701 (2008).
- [6] H. Arodź, J. Karkowski, Z. Świerczyński, *Phys.Rev.* **D80**, 067702 (2009).
- [7] H. Arodź, J. Lis, *Phys.Rev.* **D77**, 107702 (2008).
- [8] H. Arodź, J. Lis, *Phys.Rev.* **D79**, 045002 (2009).
- [9] J. Lis, *Acta Phys.Polon.* **B41**, 629 (2010).
- [10] P. Klimas, *J.Phys.A:Math.Theor.* **41**, 095403 (2008).
- [11] V. Koutvitsky, E. Maslov, *J.Math. Phys.* **47**, 022302 (2006).
- [12] S. Coleman, *Nucl.Phys.* **B262**, 263 (1985) [Erratum-ibid. **B269**, 744 (1986)].
- [13] S. Coleman, V.Glaser, A. Martin, *Commun. Math. Phys* **58**, 211 (1978).
- [14] R. Rajaraman, E. J. Weinberg, *Phys.Rev.* **D11**, 2950 (1975).
- [15] R. Rajaraman, *Solitons and Instantons*. North-Holland, Amsterdam, 1982.
- [16] M. Tsumagari, *The Physics of Q-balls* [arxiv:0910.3845].
- [17] T. D. Lee, Y. Pang, *Phys.Rept.* **221**, 251 (1992).
- [18] K. Enqvist, A. Mazumdar, *Phys.Rept.* **380**, 99 (2003).
- [19] A. M. Safian, S. Coleman, M.Axenides, *Nucl. Phys.* **B297**, 498 (1988);  
A. M. Safian, *Nucl. Phys.* **B304**, 392 (1988).



- [20] C. Adam *et al.*, *Phys.Rev* **D80**, 105013 (2009).
- [21] K. Lee, J. A. Stein-Shabes, R. Watkins, L.M. Widrow, *Phys. Rev.* **D39**, 1665 (1989).
- [22] M. Axenides, E. Floratos, A. Kehagias, *Phys. Lett.* **B444**, 190 (1998).
- [23] K. N. Anagnopoulos, M. Axenides, E. G. Floratos, N. Tetradis, *Phys. Rev.* **D64**, 125006 (2001).
- [24] V. Benci, D. Fortunato, *Commun. Math. Phys.* **295**, 639 (2010).
- [25] V. Benci, D. Fortunato, *Adv. Nonlinear Stud.* **8**, 327 (2008); D. Mugnai, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire: Solitary waves in Abelian Gauge Theories with strongly nonlinear potentials*, w druku.
- [26] T.D.'Aprile, D. Mugnai, *Adv. Nonlinear Stud.* **4**(3), 307 (2004).
- [27] V. Benci, D. Fortunato, *Rev. Math. Phys.* **14**, 409 (2002).
- [28] E. Long, *Rev. Math. Phys.* **18**, 747 (2006).
- [29] B. Kleihaus, J. Kunz, C. Lämmerzahl, M. List, *Phys.Lett* **B675**, 102 (2009).
- [30] F. Strocchi, *Selected Topics on the General Properties of Quantum Field Theory*. World Scientific Publishing 1993.
- [31] A. Schmidt, *Euclidean Reconstruction in Quantum Field Theory: Between tempered distributions and Fourier Hyperfunctions* [arxiv:math-ph 9811002].
- [32] C. Morningstar, *The Monte Carlo method in quantum field theory* [arxiv:hep-lat 0702020].
- [33] R.Kubo, *Thermodynamics – an advanced course with problems and solutions*. North-Holland Publ. Comp., Amsterdam, 1968, str.246.
- [34] C. M. Bender *et al.*, *Phys. Rev.* **D19**, 1865 (1979).
- [35] M. E. J. Newman, G. T. Barakema, *Monte Carlo Methods in Statistical Physics*. Clarendon Press, Oxford, 1999.