



Uniwersytet Jagielloński

Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

praca doktorska

Symetrie Liego równań opisujących relatywistyczne obiekty astrofizyczne

Wiesław Zajiczek

Praca wykonana pod kierunkiem
prof. dr hab. Marka Kutschery

2011

*Pracę tę dedykuję mojemu nauczycielowi matematyki,
śp. Zbigniewowi Góreckiemu, który pokazał mi piękno nauk przyrodniczych.*

W. Z.

Spis treści

Wstęp	1
Rozdział 1. Symetrie Liego równań różniczkowych	3
1.1. Lokalne grupy transformacji Liego i ich generatory	3
1.2. Równania dopuszczające	5
Rozdział 2. Wybrane przykłady symetrii Liego w równaniach astrofizyki	7
2.1. Równanie w zagadnieniu ugięcia promienia świetlnego w metryce Schwarzschilda	7
2.2. Równanie Lane-Emdena	8
2.3. Równanie na czynnik skali w kosmologii FLRW z $p = 0$	9
2.4. Homologie i quasi-homologie w Newtonowskich równaniach struktury gwiazd	9
Rozdział 3. Symetrie Liego relatywistycznych równań struktury gwiazd z promienistym transportem energii	11
3.1. Motywacja	11
3.2. Relatywistyczne gwiazdy z promienistym transportem energii	11
3.3. Quasi-homologiczne symetrie	13
3.4. Niezmienniki grupowe i generowanie nowych rozwiązań	14
Rozdział 4. Symetrie Liego relatywistycznych równań struktury gwiazd z konwektywnym transportem energii	16
4.1. Relatywistyczne gwiazdy z konwektywnym transportem energii	16
4.2. Quasi-homologiczne symetrie	17
4.3. Przykłady zastosowania symetrii	17
Rozdział 5. Symetrie Liego Newtonowskich sferycznie symetrycznych konfiguracji płynu z prędkościami skierowanymi radialnie	21
5.1. Równania opisujące samograwitujące płyny Newtonowskie	21
5.2. Symetrie	22
Rozdział 6. Uniwersalność symetrii Liego równań struktury gwiazd	24
6.1. Wpływ uwzględnienia zależności od składu chemicznego gwiazdy na istnienie symetrii	24
6.2. Rola symetrii w równaniach opisujących obiekty astrofizyczne	25
Bibliografia	27

Wstęp

Istnienie symetrii jest powszechnie wykorzystywane w rozwiązywaniu wielu zagadnień fizycznych. W standardowym podejściu, gdy teorie i modele fizyczne formułowane są w języku Lagrangeowskim bądź Hamiltonowskim, grupy symetrii pociągają za sobą istnienie praw zachowania, które ułatwiają rozwiązywanie równań dynamicznych. Istotne jest, iż często przestrzeniom symetrii można w naturalny sposób nadać strukturę grup Liego, a w wielu przypadkach - strukturę tzw. lokalnych grup Liego transformacji. Grupy Liego symetrii są użytecznym narzędziem np. w ogólnej teorii względności, natomiast lokalne grupy transformacji będące symetriasami pozwalają na zdefiniowanie np. w mechanice klasycznej i kwantowej pojęć tak fundamentalnych jak energia czy pęd. Mimo że podstawowe struktury matematyczne odpowiedzialne za dynamikę znacznie różnią się w mechanice klasycznej i kwantowej, to związek symetrii z całkami ruchu zbudowany jest na bazie tej samej struktury matematycznej. Ponadto w mechanice kwantowej jawnie uwidacznia się nieprzemienność niektórych symetrii, która nie jest konsekwencją kwantyzacji, lecz fundamentalną własnością grup symetrii. Grupom tym w naturalny sposób można nadać strukturę algebr Liego, czego przykładem jest algebra momentu pędu generującego symetrie obrotowe. Algebry te są dobrze zdefiniowane w oderwaniu od jakiegokolwiek dynamiki. Zatem naturalne jest pytanie o ich zastosowanie poza obszarem mechaniki kwantowej czy teorii pola. Mało znanym faktem jest, że Sophus Lie opracował teorię grup i algebr Liego przy okazji badań nad nieliniowymi równaniami różniczkowymi. Opracował metody wykorzystywania grup symetrii do upraszczania tychże równań, w szczególności do obniżania ich rzędu bądź sprowadzania do kwadratur. Fizykom dziedzina ta częściowo znana jest za pośrednictwem twierdzeń Emmy Noether. Metody te mają jednak również ciekawe zastosowania w zagadnieniach fizycznych, w których:

- pojawiają się nieliniowe równania różniczkowe nie uzyskane bezpośrednio z lagrangianu czy hamiltonianu
- symetrie równań nie są symetriasami czasoprzestrzeni
- symetrie są trudne do wykrycia ze względu na poziom komplikacji równań

W astrofizyce teoretycznej bardzo często pojawiają się nieliniowe równania różniczkowe (a zwłaszcza układy równań), dla których trudno jest znaleźć rozwiązania tradycyjnymi metodami analitycznymi. Zachodzi potrzeba korzystania z metod numerycznych pochłaniających olbrzymie moce obliczeniowe maszyn cyfrowych. Jako przykład warto wspomnieć o układach równań opisujących strukturę i ewolucję gwiazd.

Naturalnym jest pytanie, czy przed przystąpieniem do przybliżonych obliczeń numerycznych zostają wyczerpane wszystkie narzędzia analityczne mogące uprościć dany problem?

Zasadniczym celem tejże pracy jest znalezienie i analiza grup symetrii Liego układów równań struktury relatywistycznych gwiazd. Motywacją do poszukiwań jest to, że dla przypadku Newtonowskiego równania struktury gwiazd dopuszczają tzw. quasi-homologiczne grupy symetrii - por. Biesiada et al. [1]

W rozdziale 1. przedstawiony jest szkic znanych metod matematycznych wykorzystywanych w poszukiwaniach symetrii Liego i ich zastosowaniach do redukcji równań różniczkowych. W metodologii poszukiwań symetrii podstawową rolę odgrywa rozwiązywanie tzw. równań dopuszczających.

W rozdziale 2. omówione są niektóre znane rezultaty w zakresie istnienia grup symetrii Liego w równaniach różniczkowych astrofizyki teoretycznej.

W rozdziale 3. przedstawione są rezultaty moich poszukiwań grup symetrii dla relatywistycznych równań struktury gwiazd w przypadku promienistego transportu energii.

W rozdziale 4. przedstawione są rezultaty moich poszukiwań grup symetrii dla relatywistycznych równań struktury gwiazd w przypadku konwektywnego transportu energii.

W rozdziale 5. zawarta jest analiza grupowa Newtonowskich sferycznie symetrycznych gwiazd w przypadku hydrodynamicznym, w którym prędkości płynu skierowane są radialnie.

W rozdziale 6. podjęta jest dyskusja uniwersalności znalezionych przeze mnie grup symetrii oraz analiza związków symetrii z funkcjami opisującymi mikroskopowe własności fizyczne materii w gwiazdach

Symetrie Liego równań różniczkowych

1.1. Lokalne grupy transformacji Liego i ich generatory

Poszukiwanie symetrii Liego równań różniczkowych i ich zastosowanie w poszukiwaniu rozwiązań jest obszerną dziedziną, którą zapoczątkował w IX wieku matematyk norweski, Marius Sophus Lie [2]. Opracował on systematyczne metody odnajdywania symetrii, które są szczególnie przydatne w rozwiązywaniu nieliniowych równań (i układów równań) różniczkowych. Symetrie pozwalają bowiem na konstruowanie przy pomocy niezmienników różniczkowych - współrzędnych, w których równania różniczkowe przybierają najprostszą postać. W pracy tej nie sposób przedstawić z dowodami wszystkich twierdzeń matematycznych będących podstawą teorii grup, symetrii i algebr Liego w odniesieniu do równań różniczkowych. Dlatego w rozdziale tym omówię tylko najważniejsze definicje i kluczowe (z punktu widzenia zastosowań) elementy teorii grup symetrii Liego. Warto jednak wskazać monografie, w których teoria ta jest wyłożona w sposób systematyczny: [3], [4].

W fizyce teoretycznej powszechnie znanymi obiektami są **grupy Liego**, czyli grupy, które są gładkimi rozmaitościami różniczkowymi. Grupa G , która jest rozmaitością o wymiarze r , nazywana jest **r-parametrową grupą Liego**. W literaturze taki obiekt często nazywa się również globalną grupą Liego. Na etapie poszukiwań symetrii równań różniczkowych często wygodniejsze rachunkowo jest szukanie niezmienniczych transformacji infinitezymalnych, tzn. elementów grupowych, które są bliskie elementowi neutralnemu. Wtedy nie jest konieczne korzystanie z pełnej rozmaitościowej struktury globalnej grupy Liego, wystarczy zdefiniowanie działania operacji grupowych w pewnej mapie. W tym celu użyteczne są następujące dwie definicje [4]:

r-parametrową lokalną grupą Liego nazywamy obiekt złożony z dwóch spójnych otwartych podzbiorów $V_0 \subset V \subset \mathbb{R}^r$ zawierających 0 oraz z dwóch gładkich odwzorowań:

- definiującego operacje grupowe $m : V \times V \rightarrow \mathbb{R}^r$,

- definiującego elementy odwrotne $i : V_0 \rightarrow V$,
które to odwzorowania mają następujące własności:
- Jeśli $x, y, z \in V$ oraz $m(x, y), m(y, z) \in V$, to $m(x, m(y, z)) = m(m(x, y), z)$
- $\forall x \in V, m(0, x) = x = m(x, 0)$
- $\forall x \in V_0, m(x, i(x)) = m(i(x), x) = 0$.

Przyjmując oznaczenie $m(x, y) = x \cdot y$.

Niech M będzie gładką rozmaitością różniczkową, a G - lokalną grupą Liego. Mówimy, że G działa na M jako **lokalna grupa transformacji Liego**, jeżeli na pewnym otwartym podzbiornie $\mathcal{U} : \{e\} \times M \subset \mathcal{U} \subset G \times M$ określone jest gładkie odwzorowanie $\Psi : \mathcal{U} \rightarrow M$ spełniające następujące warunki:

- Dla $(h, x), (g, \Psi(h, x)), (g \cdot h, x) \in \mathcal{U}$.

$$\Psi(g, \Psi(h, x)) = \Psi(g \cdot h, x)$$

- $\forall x \in M$

$$\Psi(e, x) = x.$$

- Jeśli $(g, x) \in \mathcal{U}$, to $(g^{-1}, \Psi(g, x)) \in \mathcal{U}$ i

$$\Psi(g^{-1}, \Psi(g, x)) = x$$

W teorii symetrii równań różniczkowych szczególną rolę odgrywają jednoparametrowe grupy transformacji Liego, dla których $G = (\mathbb{R}, +)$, bądź $G = (\mathbb{R}_+, \cdot)$. Dla układów \mathcal{N} równań różniczkowych zwyczajnych punktem wyjścia jest przyjęcie rozmaitości $M = \mathbb{R}^{\mathcal{N}+1}$. Na rozmaitości tej można wybrać naturalny układ współrzędnych $\{(x, q^1, \dots, q^{\mathcal{N}})\}$ z oznaczeniami zgodnymi z nazwami zmiennych zależnych $(x, q^1, \dots, q^{\mathcal{N}})$ i zmiennej niezależnej x układu równań różniczkowych. W tym układzie działanie jednoparametrowej grupy transformacji można symbolicznie zapisać jako:

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \tilde{x}(x, q^1, \dots, q^{\mathcal{N}}, \epsilon), \\ \tilde{q}^a &= \tilde{q}^a(x, q^1, \dots, q^{\mathcal{N}}, \epsilon), \quad a = 1, \dots, \mathcal{N}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Jak zaznaczyłem wcześniej, często użytecznym jest rozważanie infinitezymalnego działania danej grupy transformacji:

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x + \epsilon \xi(x, q^1, \dots, q^{\mathcal{N}}) + O(\epsilon^2), \\ \tilde{q}^j &= q^j + \epsilon \phi^j(x, q^1, \dots, q^{\mathcal{N}}) + O(\epsilon^2), \quad j = 1, \dots, \mathcal{N}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Jest ono opisane tzw. generatorem:

$$\mathbf{X} = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \phi^j \frac{\partial}{\partial q^j} \quad (1.3)$$

Operowanie generatorem infinitezymalnych transformacji zamiast pełnymi wyrażeniami na lokalne transformacje podyktowane jest tym, że bardzo często generator ma funkcyjnie prostszą postać. Prostym przykładem jest grupa $SO(2)$. Ponadto użycie generatora dostarcza systematycznych sposobów poszukiwania symetrii.

Jak wiadomo, rozwiązania równań różniczkowych mają naturalne interpretacje geometryczne w postaci rodzin krzywych bądź innych podrozmaitości \mathbb{R}^n . Z punktu

widzenia teorii symetrii istotnym przełomem było nadanie interpretacji geometrycznej także samym równaniom różniczkowym, które mogą być traktowane jako równania algebraiczne w pewnych abstrakcyjnych przestrzeniach dżetów. W tym celu konieczne jest zdefiniowanie tzw. n -tego przedłużenia generatora (1.3). Powstaje ono, gdy rozważy się kontynuację rozwinięć (1.2) dla kolejnych pochodnych $\tilde{q}^{j(p)} = \frac{d^p \tilde{q}^j}{dx^p}$, $p = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} \tilde{q}^j \iota &= q^j \iota + \epsilon \phi^{j1}(x, q^1, q^1 \iota, \dots, q^{\mathcal{N}}, q^{\mathcal{N}} \iota) + O(\epsilon^2), \quad j = 1, \dots, \mathcal{N}, \\ &\dots \\ \tilde{q}^{j(n)} &= q^{j(n)} + \epsilon \phi^{(n)j}(x, q^1, \dots, q^{1(n)}, \dots, q^{\mathcal{N}} \dots q^{\mathcal{N}(n)}) + O(\epsilon^2), \quad j = 1, \dots, \mathcal{N}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

W kontekście równań różniczkowych litera n oznaczała będzie rząd równania bądź układu równań. **n -te przedłużenie generatora \mathbf{X}** definiuje się, używając (1.4), jako:

$$\mathbf{pr}^{(n)} \mathbf{X} = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \phi^j \frac{\partial}{\partial q^j} + \phi^{j1} \frac{\partial}{\partial q^{j1}} + \dots + \phi^{(n)j} \frac{\partial}{\partial q^{j(n)}}, \quad (1.5)$$

gdzie n jest ustalone, zaś sumowanie następuje po wskaźniku $j = 1, \dots, \mathcal{N}$. Wskaźnik p w funkcjach $\phi^{(p)j}$ wyjątkowo nie oznacza różniczkowania, tylko numeruje kolejne współrzędne rozszerzonego generatora. Można wykazać [4], że kolejne współrzędne (1.5) można uzyskać ze współrzędnych generatora (1.3) za pomocą następujących zależności:

$$\phi^{(p)j} = \frac{d^p}{dx^p} (\phi^j - \xi q^{j1}) + \xi q^{j(p+1)}, \quad p = 1, \dots, n. \quad (1.6)$$

1.2. Równania dopuszczające

Wprowadzenie pojęcia przedłużenia generatora pozwala na traktowanie układów równań różniczkowych jako równań określających pewne hiperpowierzchnie w przestrzeniach dżetów $M^{(n)} = M \times U_1 \times \dots \times U_n$, w których układy niezależnych współrzędnych tworzą ciągi postaci $(x, q^1, \dots, q^{\mathcal{N}}, q^1 \iota, \dots, q^{\mathcal{N}} \iota, \dots, q^{1(n)}, \dots, q^{\mathcal{N}(n)})$. W tym ujęciu układ funkcji (odpowiedniej klasy) $(q_r^1, \dots, q_r^{\mathcal{N}})$ jest rozwiązaniem układu równań różniczkowych, jeżeli wraz z ciągiem odpowiednich pochodnych definiuje obiekt, który jest podzbiorem hiperpowierzchni zadanej układem równań różniczkowych.

Traktowanie układów równań różniczkowych jako obiektów geometrycznych pozwala na zdefiniowanie kluczowego dla tejże pracy pojęcia symetrii. Mówimy, że (przedłużona) grupa transformacji określonych generatorem infinitezymalnym (1.5) jest **symetrią Liego** (symetrią punktową) układu równań

$$\Omega^a(x, q^1, \dots, q^{\mathcal{N}}, \dots, \frac{d^k q^1}{dx^k}, \dots, \frac{d^k q^{\mathcal{N}}}{dx^k}) = 0, \quad a = 1, \dots, \mathcal{N}, \quad (1.7)$$

gdzie k numeruje pochodne aż do rzędu n , jeżeli **transformacje grupowe rozwiązania układu (1.7) przekształcają w rozwiązania tegoż układu**. Używając generatora infinitezymalnego, warunek na to, aby grupa transformacji (1.5) była symetrią układu (1.7), można zapisać jako [3], [4]:

$$\mathbf{pr}^{(n)} \mathbf{X} \Omega^a(x, q^1, \dots, q^{\mathcal{N}}, \dots, q^{1(k)}, \dots, q^{\mathcal{N}(k)}) \Big|_{\text{rozw.}} = 0, \quad a = 1, \dots, \mathcal{N}, \quad (1.8)$$

We wzorach (1.7) i (1.8) przyjąłem różne oznaczenia na pochodne funkcji q^i . Wynika to z faktu, że w równaniach (1.8) pochodne te traktowane są jako niezależne współrzędne

w abstrakcyjnej przestrzeni dżetów. Układ (1.8) cząstkowych równań różniczkowych zwany jest układem **równań dopuszczających** (*determining equations*) wyjściowego układu równań różniczkowych (1.7). W równaniach dopuszczających niewiadomymi funkcjami są współrzędne generatora symetrii \mathbf{X} . Działanie generatora $\mathbf{pr}^{(n)}\mathbf{X}$ na lewej stronie wyjściowego układu równań różniczkowych powinno odbywać się w przestrzeni jego rozwiązań, co najczęściej uzyskuje się przez wstawienie do równań dopuszczających wyrażeń na najwyższe pochodne uzyskanych z wyjściowego układu (1.7) - o ile te pochodne da się odwickłać w sposób jednoznaczny.

W procesie badania symetrii układów równań różniczkowych podstawową rolę odgrywa rozwiązywanie cząstkowych równań dopuszczających. Dla układów równań drugiego i wyższych rzędów rozwiązywanie to często ma usystematyzowany charakter. Równania różniczkowe rzędu pierwszego są najtrudniejsze z punktu widzenia symetrii, gdyż zwykle nie ma dla nich systematycznych metod rozwiązywania równań dopuszczających.

Wybrane przykłady symetrii Liego w równaniach astrofizyki

W rozdziale tym przedstawię wybrane przykłady symetrii Liego równań i układów równań różniczkowych oraz ich zastosowań w szukaniu rozwiązań. Rozpatrywane będą nieliniowe równania, które w różnych kontekstach pojawiają się w astrofizyce, ze szczególnym naciskiem na równania, które nie zostały uzyskane bezpośrednio z zasady wariacyjnej. Rozpocznę od przykładów pojedynczych równań, dla których istnienie grup symetrii pozwala na obniżenie rzędu i w niektórych przypadkach - na sprowadzenie równań do kwadratur. Warto na tym miejscu wspomnieć, że badanie zastosowań symetrii Liego do równań fizyki matematycznej jest dynamicznie rozwijającą się dziedziną, przykładowe rezultaty można znaleźć w obszernym zbiorze prac N.H. Ibragimova [6]

2.1. Równanie w zagadnieniu ugięcia promienia świetlnego w metryce Schwarzschilda

W pierwszym prostym przykładzie (równanie to może być rozwiązane bez korzystania z symetrii) rozważam równanie:

$$y'' = -y + 3y^2. \quad (2.1)$$

Jego oczywistą symetrią, widoczną bez rozwiązywania równań dopuszczających, jest:

$$\mathbf{X} = \partial_x. \quad (2.2)$$

Przyjąłem tu oznaczenie $q^1 = y$ - por. rozdz. 1. Oczywistym niezmiennikiem generatora (2.2) jest $t = y$, który możemy wybrać za nową zmienną niezależną. Generator

translacji (2.2) jest już w postaci normalnej, zatem jako nową zmienną zależną możemy wybrać $s = x$. W tych nowych zmiennych podyktowanych symetrią równanie (2.1) przyjmuje postać:

$$-s'' = (s')^3(3t^2 - t),$$

co sprowadza je do kwadratur:

$$s'(t) = \pm \frac{1}{\sqrt{-t^2 + 2t^3 + C}}.$$

2.2. Równanie Lane-Emdena

Interesującym przykładem astrofizycznego nieliniowego równania różniczkowego jest równanie Lane-Emdena

$$y'' + 2\frac{y'}{x} + y^n = 0, \quad n - \text{indeks politropy}, \quad (2.3)$$

pojawiające się w politropowych modelach gwiazd newtonowskich. Równanie to jest ciekawe, gdyż ma symetrię skalowania, która pozwala obniżyć jego rząd, ale wprowadzenie współrzędnych normalnych nie sprowadza tego równania do kwadratur. Generator nieskończenie małej symetrii przyjmuje następującą postać:

$$\mathbf{X} = x\partial_x - \frac{2}{n-1}y\partial_y. \quad (2.4)$$

Korzystając z jego niezmiennika, współrzędnymi dopasowanymi do symetrii są:

$$t(x, y) = \frac{y}{x^{-\frac{2}{n-1}}}, \quad s(y, t) = \frac{n-1}{-2} \int \frac{dy}{y} = \ln(y^{\frac{n-1}{-2}}) = s(y).$$

Wtedy równanie (2.3) we współrzędnych t i s przyjmuje postać

$$\begin{aligned} & (16t^{3-n}n - 8t^{3-n} - 8t^{3-n}n^2) \frac{d^2}{dt^2} s(t) \\ & + (8t^3 + 8t^3n^2 + 48t^{4-n} - 16t^{4-n}n - 16t^3n) \left(\frac{d}{dt} s(t) \right)^3 \\ & + (-36t^2n^2 + 48t^{3-n}n + 36t^2n - 12t^2 - 16t^{3-n}n^2 - 32t^{3-n} + 12n^3t^2) \left(\frac{d}{dt} s(t) \right)^2 \\ & + (6t - 4t^{2-n} - 24n^3t + 4t^{2-n}n - 24tn + 4t^{2-n}n^2 + 6n^4t + 36tn^2 - 4n^3t^{2-n}) \frac{d}{dt} s(t) \\ & - 1 + 5n - 10n^2 + 10n^3 - 5n^4 + n^5 = 0, \end{aligned}$$

w której funkcja $s(t)$ nie występuje w sposób jawny, co pozwala na obniżenie rzędu. Uzyskane w ten sposób równanie pierwszego rzędu ma jednak zdecydowanie bardziej skomplikowaną postać.

Pokazuje to, że samo istnienie grupy symetrii nie zawsze wystarcza do uproszczenia danego równania. Przydatność symetrii związana jest z wymiarem algebry Liego odpowiadającej grupom symetrii oraz z tzw. rozwiązalnością tejże algebry. Algebra Liego jest rozwiązalna [7], jeżeli istnieje łańcuch (względem relacji inkluzji) kolejnych podalgebr o coraz to większych wymiarach, z których każda poprzednia jest ideałem następnej algebry w łańcuchu. Łańcuch ten powinien zaczynać się algebra jednowymiarową.

2.3. Równanie na czynnik skali w kosmologii FLRW z $p = 0$

W przypadku równań różniczkowych drugiego rzędu korzystną z punktu widzenia możliwości zastosowań symetrii sytuacją jest istnienie dwuparametrowej (lub wieloparametrowej) grupy symetrii. Przestrzeń wektorowa generatorów takiej grupy jest powłoką liniową generatorów grup jednoparametrowych. W przypadku, gdy algebra Liego grupy symetrii jest dwuwymiarowa, istotne jest twierdzenie, które mówi, że każda dwuwymiarowa algebra Liego jest rozwiązalna [7]. Tymczasem w teorii symetrii równań różniczkowych rozwiązalność danej algebry decyduje o powodzeniu w zastosowaniu danej grupy symetrii do rozwiązywania równania.

Jako prosty przykład, rozważmy równanie na czynnik skalujący w klasycznej kosmologii Friedmana–Lemaitre’a–Robertsona–Walkera:

$$2\frac{y''}{y} + \left(\frac{y'}{y}\right)^2 + \frac{k}{y^2} = 0. \quad (2.5)$$

Równanie to dopuszcza dwuparametrową grupę symetrii rozpiętą przez:

$$\mathbf{X}_1 = \partial_x, \quad \mathbf{X}_2 = x\partial_x + y\partial_y \quad . \quad (2.6)$$

Algebra Liego grupy (2.6) ma następującą postać:

$$[\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] = \mathbf{X}_1 \quad . \quad (2.7)$$

Z powyższego równania widać, iż podalgebra generowana przez \mathbf{X}_1 jest ideałem algebry generowanej przez \mathbf{X}_1 i \mathbf{X}_2 . W takim przypadku wprowadzając nowe zmienne w równaniu różniczkowym, dobieramy je tak, aby w tych nowych zmiennych ideał był w postaci normalnej: $x = s(t), y = t$. Wtedy wyjściowe równanie (2.5) można przepisać jako:

$$s'' = \frac{\frac{1}{2}s'(1 + k \cdot (s')^2)}{t}, \quad (2.8)$$

co sprowadza je do kwadratur.

2.4. Homologie i quasi-homologie w Newtonowskich równaniach struktury gwiazd

W astrofizyce konstruuje się modele gwiazd wyrażone w języku tzw. równań struktury, czyli równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu opisujących podstawowe parametry statycznych gwiazd takie jak: masa, jasność, temperatura, skład chemiczny oraz ciśnienie i gęstość materii. Równania te są nieliniowe, dlatego w praktyce najczęściej rozwiązywane są w przybliżony sposób numeryczny. Nie za każdym razem jednak dla danych, zmienionych warunków brzegowych konieczne jest powtarzanie procedury rozwiązywania, istnieją bowiem klasy modeli tzw. gwiazd homologicznych, w ramach których jedno rozwiązanie można uzyskiwać z drugich za pomocą odpowiednich transformacji skalowania [8], [9]. W 1977 r. Collins [10], analizując równanie równowagi hydrostatycznej i równanie ciągłości masy, podał związki istnienia symetrii homologicznych z postaciami równań stanu dla materii w gwiazdach Newtonowskich. Symetrie homologiczne wyraził w terminologii symetrii Liego. Jednak

pełne korzyści wynikające z zastosowania do gwiazd Newtonowskich aparatu symetrii Liego widoczne są dopiero w pracy [1]. Wykazane w niej zostało bowiem istnienie ogólniejszych, tzw. quasi-homologicznych symetrii w szerokiej klasie równań stanu. Symetrie te nie mogły być wcześniej odkryte na drodze analizy wymiarowej (jak to miało miejsce z homologiami), gdyż są bardziej wyrafinowane. Autorzy pracy [1], używając znalezionych symetrii quasi-homologicznych, skonstruowali niezmienniki grupowe, dzięki którym możliwe jest uzyskiwanie nowych rozwiązań - ze znanych rozwiązań równań struktury gwiazd.

Symetrie Liego relatywistycznych równań struktury gwiazd z promienistym transportem energii

3.1. Motywacja

Istnienie gwiazd homologicznych i quasi-homologicznych w przypadku Newtonowskim sugeruje naturalne pytanie o analogiczne rodziny gwiazd w przypadku relatywistycznym. W 1977 r. Collins przeanalizował pod kątem symetrii Liego układ złożony z równania TOV i równania ciągłości masy. Odkrył, że układ ten dopuszcza grupę transformacji homologicznych jako symetrii wtedy i tylko wtedy, gdy równanie stanu jest postaci $p = (\gamma - 1)\rho$. Pozwoliło to na znalezienie współrzędnych, w których rozpatrywany układ równań ma postać autonomiczną oraz na wykreślenie diagramu przedstawiającego naturę rozwiązań ogólnych.

W rozdziale tym rozważam pełen układ równań struktury relatywistycznych gwiazd. Mimo że jest on silnie nieliniowy, udało się znaleźć jego grupę symetrii i sformułować twierdzenia dotyczące przestrzeni rozwiązań.

3.2. Relatywistyczne gwiazdy z promienistym transportem energii

Z ogólnej teorii względności wiadomo, iż nierotujące i będące w równowadze gwiazdy są sferycznie symetryczne. Metrykę czasoprzestrzeni opisującej takie konfiguracje możemy zapisać jako:

$$ds^2 = e^{2\Phi} dt^2 - (1 - 2m/r)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (3.1)$$

gdzie funkcje $\Phi(r)$ i $m(r)$ precyzują geometrię czasoprzestrzeni. Równania struktury gwiazd relatywistycznych analizowane są szeroko w pracy K. Thorne [11]. W przy-

padku promienistym przybierają one następującą postać (w jednostkach zgeometryzowanych):

$$\frac{dN}{dr} = 4\pi r^2 (1 - 2m/r)^{-1/2} n, \quad \text{równanie na liczbę barionów} \quad (3.2)$$

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho, \quad \text{równanie ciągłości masy} \quad (3.3)$$

$$\frac{dp}{dr} = \frac{-(\rho + p)(m + 4\pi r^3 p)}{r(r - 2m)}, \quad \text{równanie TOV równowagi hydrostatycznej,} \quad (3.4)$$

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{m + 4\pi r^3 p}{r(r - 2m)}, \quad \text{równanie źródłowe na } \Phi \quad (3.5)$$

oraz

$$\frac{dL e^{2\Phi}}{dr} = \frac{4\pi r^2 n e^{2\Phi}}{(1 - 2m/r)^{1/2}} q, \quad \text{równanie równowagi termicznej} \quad (3.6)$$

$$\frac{dT e^\Phi}{dr} = -\frac{3}{16\sigma} \frac{\kappa \rho L e^\Phi}{T^3 4\pi r^2} \left[1 - \frac{2m}{r}\right]^{-\frac{1}{2}}, \quad \text{równanie transportu energii.} \quad (3.7)$$

ρ oznacza tu gęstość całkowitej masy-energii (masy-energii spoczynkowej + energii wewnętrznej), n oznacza liczbową gęstość barionów - mierzone w układzie współporuszającym się z materią. σ to stała Stefana Boltzmanna. Układ (3.2)–(3.7) powinien być uzupełniony przez podanie równań mikroskopowych, które zakładam w następującej ogólnej postaci:

- równania stanu

$$p = p(n, T), \quad \rho = \rho(n, T), \quad (3.8)$$

- relacja nieprzezroczystości oraz równanie generacji energii termojądrowej w gwiazdzie

$$\kappa = \kappa(n, T), \quad q = q(n, T). \quad (3.9)$$

W powyższym układzie równań pominięte zostały zależności funkcyjne od składu chemicznego materii tworzącej gwiazdę. Zasadność takiego podejścia dyskutowana będzie w rozdziale ostatnim poświęconym uniwersalności znalezionych symetrii, w którym podjęty zostanie temat wpływu składu chemicznego gwiazdy na istnienie grup symetrii Liego. Po tych istotnych założeniach, mogę przepisać równanie TOV (3.4) w następującej - wygodniejszej dla dalszych analiz - postaci:

$$\frac{dp}{dr} = \frac{\partial p}{\partial n} \frac{dn}{dr} + \frac{\partial p}{\partial T} \frac{dT}{dr} = \frac{-(\rho + p)(m + 4\pi r^3 p)}{r(r - 2m)}. \quad (3.10)$$

Wtedy do poszukiwań symetrii Liego wybieram układ równań (3.3), (3.5)–(3.10) na nieznanne funkcje m, n, T, Φ, L zmiennej r . Równanie (3.2) na całkowitą liczbę barionów wewnątrz obszaru opisanego promieniem r mogę bez straty ogólności pominąć, gdyż funkcję $N(r)$ można uzyskać przez bezpośrednie scałkowanie wyrażenia zawierającego funkcję $n(r)$.

3.3. Quasi-homologiczne symetrie

Zgodnie z tym, co zostało przedstawione w rozdziale 1., poszukiwanie symetrii Liego polega na rozwiązywaniu układu cząstkowych równań dopuszczających (1.8). W przypadku równań struktury gwiazd (3.3), (3.5)–(3.10) niewiadomymi współrzędnymi generatora symetrii są funkcje $\xi(r, m, n, T, \Phi, L)$, $\phi^k(r, m, n, T, \Phi, L)$, $k = 1, \dots, 5$. Ponieważ badany układ jest rzędu pierwszego, nie istnieje ogólny schemat rozwiązywania jego równań określających. Skuteczną drogą okazało się zawężenie poszukiwań symetrii wśród transformacji quasi-homologicznych. Wieloparametrowa grupa transformacji jest nazywana **quasi-homologiczną** [1], jeśli $\xi = \xi(r)$, $\phi^k = \phi^k(q^k)$ (brak sumowania po k). Tak więc jej generator przyjmuje postać

$$\mathbf{X} = \xi(r) \frac{\partial}{\partial r} + \phi^1(m) \frac{\partial}{\partial m} + \phi^2(n) \frac{\partial}{\partial n} + \phi^3(T) \frac{\partial}{\partial T} + \phi^4(\Phi) \frac{\partial}{\partial \Phi} + \phi^5(L) \frac{\partial}{\partial L}. \quad (3.11)$$

Wykorzystując (3.11) jako ansatz na generator, można znaleźć wzór ogólny na jego pierwsze przedłużenie (korzystając z (1.6) dla $n = 1$) oraz wypisać jawnie równania dopuszczające (1.8). Ze względu jednak na wysoki poziom rozbudowania uzyskanych wyrażeń, użyłem w tym celu programu *Mathematica* oraz dodatkowego pakietu *YaLie* [12]. Pakiet ten był użyteczny do uzyskiwania równań dopuszczających (co jest czynnością algorytmiczną), jednakże – mimo ograniczenia się do transformacji quasi-homologicznych – rozwiązanie równań dopuszczających wymagało wieloetapowej pracy. Do niniejszej pracy załączyłem pliki komputerowe zawierające poszczególne kroki. Warto podkreślić, że moim celem nie było znalezienie jakiegokolwiek pojedynczej grupy symetrii, lecz znalezienie najogólniejszych grup symetrii Liego w klasie transformacji quasi-homologicznych.

Rzutowało to na wybraną przeze mnie metodologię rozwiązywania równań dopuszczających, która była następująca. Wpierw poszukiwałem równania dopuszczającego, które dawałoby jakieś jednoznaczne ograniczenie na postać funkcyjną jednej ze współrzędnych generatora. Następnie po zaktualizowaniu wszystkich pozostałych równań dopuszczających, szukałem kolejnych warunków na postać funkcyjną tej i pozostałych współrzędnych. Proces ten powtarzałem wieloetapowo, rozwiązując napotkane po drodze równania różniczkowe. W końcowym etapie okazało się, że układ równań dopuszczających ma niezerowe rozwiązanie ogólne pozostające w ściśle określonych relacjach funkcyjnych z funkcjami mikroskopowymi wyjściowego układu równań różniczkowych struktury gwiazd.

Jako rezultat mogę więc sformułować następujące **twierdzenie**. W klasie quasi-homologicznych symetrii jedyną wieloparametrową grupą symetrii (punktowych) Liego układu (3.3), (3.5)–(3.10) jest grupa zadana następującym generatorem

$$\mathbf{X} = ar \frac{\partial}{\partial r} + am \frac{\partial}{\partial m} + \phi^2(n) \frac{\partial}{\partial n} + cT \frac{\partial}{\partial T} + dL \frac{\partial}{\partial L}, \quad (3.12)$$

gdzie a, c, d są stałymi, zaś $\phi^2(n)$ jest dowolną gładką funkcją. Mikroskopowe funkcje zgodne z istnieniem symetrii przybierają postać:

- gdy $c \neq 0$

$$p(n, T) = T^{-2\frac{a}{c}} f \left(\int_{n_0}^n \frac{dn'}{\phi^2(n')} + \frac{1}{c} \ln \frac{T}{T_0} \right), \quad (3.13)$$

$$\rho(n, T) = T^{-2\frac{a}{c}} g \left(\int_{n_0}^n \frac{dn'}{\phi^2(n')} + \frac{1}{c} \ln \frac{T}{T_0} \right), \quad (3.14)$$

$$\kappa(n, T) = \exp \left[\int_{n_0}^n \frac{(3a + 4c - d)dn'}{\phi^2(n')} \right] f_\kappa \left(\exp \left[- \int_{n_0}^n \frac{cdn'}{\phi^2(n')} \right] T \right), \quad (3.15)$$

$$q(n, T) = \exp \left[\int_{n_0}^n - \frac{(3a n' - d n' + \phi^2(n'))dn'}{n' \phi^2(n')} \right] f_q \left(\exp \left[- \int_{n_0}^n \frac{c dn'}{\phi^2(n')} \right] T \right), \quad (3.16)$$

- gdy $c = 0$

$$p(n, T) = \exp \left[\int_{n_0}^n \frac{(-2a)dn'}{\phi^2(n')} \right] f(T), \quad (3.17)$$

$$\rho(n, T) = \exp \left[\int_{n_0}^n \frac{(-2a)dn'}{\phi^2(n')} \right] g(T), \quad (3.18)$$

$$\kappa(n, T) = \exp \left[\int_{n_0}^n \frac{(3a - d)dn'}{n' \phi^2(n')} \right] f_\kappa(T), \quad (3.19)$$

$$q(n, T) = \exp \left[\int_{n_0}^n \frac{(-3an' + dn' - \phi^2(n'))dn'}{n' \phi^2(n')} \right] f_q(T), \quad (3.20)$$

gdzie f, g, f_κ, f_q są dowolnymi gładkimi funkcjami.

Zastosowanie powyższego rezultatu do ustalenia konkretnej grupy symetrii w astrofizycznym kontekście może być następujące. W astrofizyce konstruuje się modele mikroskopowych zjawisk fizycznych zachodzących w relatywistycznych gwiazdach. Z tych modeli jako rezultat otrzymuje się równania stanu oraz konkretne funkcyjne postaci zależności mikroskopowych (3.9) (pomijam na razie zależność od składu chemicznego gwiazd). Można więc w danym przypadku sprawdzić, czy zależności te należą do rodziny funkcji (3.13)–(3.16) bądź (3.17)–(3.20). Pozwala to wyspecyfikować funkcję $\phi^2(n)$ i niektóre ze stałych a, c, d . To z kolei za pośrednictwem równania (3.12) określa szukaną grupę symetrii.

3.4. Niezmienniki grupowe i generowanie nowych rozwiązań

Dla grupy symetrii równań struktury gwiazd generowanej przez (3.12) istnieją maksymalnie cztery funkcyjnie niezależne niezmienniki C_i , czyli funkcje, dla których

$$\mathbf{X}C_i(r, m, n, T, L) = 0, \quad i = 1, \dots, 4.$$

Niezmienniki te są rozwiązaniami równań:

$$\frac{dr}{ar} = \frac{dm}{am} = \frac{dn}{\phi^2(n)} = \frac{dT}{cT} = \frac{dL}{dL}. \quad (3.21)$$

W jawnej formie przybierają postać:

$$C_1 = m/r, \quad (3.22)$$

$$C_2 = m \exp \left[-a \int_{n_0}^n \frac{dn'}{\phi^2(n')} \right], \quad (3.23)$$

$$C_3 = T \exp \left[-c \int_{n_0}^n \frac{dn'}{\phi^2(n')} \right], \quad (3.24)$$

$$C_4 = L \exp \left[-d \int_{n_0}^n \frac{dn'}{\phi^2(n')} \right]. \quad (3.25)$$

Aby sformułować twierdzenie dotyczące generowania nowych rozwiązań relatywistycznych równań struktury gwiazd, użyję skończonych transformacji grupowych, które są rozwiązaniami poniższego układu równań:

$$\frac{d\tilde{r}}{d\epsilon} = a\tilde{r}, \quad \frac{d\tilde{m}}{d\epsilon} = a\tilde{m}, \quad \frac{d\tilde{n}}{d\epsilon} = \phi^2(\tilde{n}), \quad \frac{d\tilde{T}}{d\epsilon} = c\tilde{T}, \quad \frac{d\tilde{L}}{d\epsilon} = d\tilde{L} \quad (3.26)$$

z warunkiem początkowym

$$\tilde{r}(0) = r, \quad \tilde{m}(0) = m, \quad \tilde{n}(0) = n, \quad \tilde{T}(0) = T, \quad \tilde{L}(0) = L. \quad (3.27)$$

Rezultatem jest następujące **twierdzenie**: jeśli

$$m = f_1(n), \quad T = f_2(n), \quad L = f_3(n) \quad (3.28)$$

jest rozwiązaniem relatywistycznych równań struktury gwiazd, to również

$$\begin{aligned} m &= f_1(F^{-1}(C + F(n))) \exp(-aC), \\ T &= f_2(F^{-1}(C + F(n))) \exp(-cC), \\ L &= f_3(F^{-1}(C + F(n))) \exp(-dC), \end{aligned} \quad (3.29)$$

jest rozwiązaniem, gdzie

$$F(n) = \int \frac{dn}{\phi^2(n)}, \quad C > 0 \text{ jest dowolną stałą.} \quad (3.30)$$

Powyższe twierdzenie pozwala na generowanie nowych rozwiązań przy użyciu znanych rozwiązań równań struktury gwiazd. W astrofizyce jako znane rozwiązania można przyjmować np. przybliżone generowane w sposób numeryczny. Istnienie quasi-homologicznych rodzin gwiazd może więc pozwolić na zaoszczędzenie mocy obliczeniowej komputerów.

Symetrie Liego relatywistycznych równań struktury gwiazd z konwektywnym transportem energii

4.1. Relatywistyczne gwiazdy z konwektywnym transportem energii

Dla obszarów gwiazd, w których dominującym mechanizmem transportu energii jest konwekcja, zmienia się równanie różniczkowe zawierające gradient temperatury. Funkcja temperatury występuje w pozostałych równaniach struktury gwiazd, naturalnym więc jest pytanie, jaki wpływ ma ta zmiana na istnienie symetrii Liego całego układu równań. Badany układ jest następującej postaci [11]:

$$\frac{dN}{dr} = 4\pi r^2 (1 - 2m/r)^{-1/2} n, \quad \text{równanie na liczbę barionów} \quad (4.1)$$

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho, \quad \text{równanie ciągłości masy} \quad (4.2)$$

$$\frac{dp}{dr} = \frac{-(\rho + p)(m + 4\pi r^3 p)}{r(r - 2m)}, \quad \text{równanie TOV równowagi hydrostatycznej,} \quad (4.3)$$

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{m + 4\pi r^3 p}{r(r - 2m)}, \quad \text{równanie źródłowe na } \Phi \quad (4.4)$$

$$\frac{dL e^{2\Phi}}{dr} = \frac{4\pi r^2 n e^{2\Phi}}{(1 - 2m/r)^{1/2}} q, \quad \text{równanie równowagi termicznej} \quad (4.5)$$

$$\frac{dT}{dr} = \frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2} \frac{T}{p} \frac{dp}{dr}, \quad \text{równanie transportu energii.} \quad (4.6)$$

Tak jak w przypadku promienistym, powyższy układ powinien być uzupełniony przez podanie funkcji mikroskopowych (3.8), (3.9). Ponadto do badania symetrii używam równania TOV w przekształconej postaci (3.10), w której dodatkowo za gradient temperatury przyjmuję prawą stronę równania (4.6).

4.2. Quasi-homologiczne symetrie

Podobnie jak w przypadku promienistym, symetrii równań struktury poszukiwałem w klasie transformacji quasi-homologicznych, stosując analogiczną procedurę wieloetapowego rozwiązywania równań dopuszczających. Okazało się, że konwektywny układ równań dopuszcza taką samą wieloparametrową grupę symetrii (3.12) dla tych samych rodzin równań stanu (3.13)–(3.20). Było to dla mnie zaskoczeniem, gdyż z matematycznego punktu widzenia badane układy równań różnią się. Zmiana równania transportu energii pociąga za sobą modyfikację równania TOV w przekształconej postaci (3.10), gdyż zawiera ono gradient temperatury. Ponadto funkcja temperatury występuje w postaci uwikłanej w pozostałych równaniach. O ile ktoś mógłby oczekiwać, że gwiazdy z promienistym i z konwektywnym transportem energii mają te same symetrie równań, jednak nietrywialnym rezultatem jest to, że symetrie te w obu przypadkach wymuszają istnienie tych samych rodzin funkcji mikroskopowych. Rezultat ten będzie jeszcze dyskutowany w rozdziale ostatnim.

4.3. Przykłady zastosowania symetrii

Znalezione przeze mnie symetrie mogą mieć zastosowanie do obniżenia liczby równań struktury gwiazd bądź do sprowadzenia ich do postaci autonomicznej. Przedstawię teraz przykładowy sposób postępowania w tym drugim przypadku.

Założmy, że gęstość masy-energii ρ może być rozłożona na sumę gęstości masy-energii spoczynkowej oraz gęstości energii wewnętrznej w następujący sposób:

$$\rho = \mu_B n + \epsilon, \quad (4.7)$$

gdzie μ_B jest średnią masą spoczynkową barionów. Z równań (3.17) i (3.18) wynika, że wtedy $\phi^2(n) = -2an$. Symetrie homologiczne istnieją w tym przypadku np. dla funkcji mikroskopowych: $p = n \cdot f(T)$, $\rho = n \cdot g(T)$, $q = n^{1/2}h(T)$. Dwuparametrowa grupa symetrii generowana jest przez:

$$\mathbf{X}_1 = r \frac{\partial}{\partial r} + m \frac{\partial}{\partial m} - 2n \frac{\partial}{\partial n}, \quad (4.8)$$

$$\mathbf{X}_2 = L \frac{\partial}{\partial L}. \quad (4.9)$$

Jak łatwo można się przekonać, algebra Liego tejże grupy symetrii jest abelowa. Okazuje się, że abelowość algebr Liego znalezionych przeze mnie grup jest ich własnością generyczną. Jest to konsekwencją quasi-homologicznej postaci generatora (3.12). Ponieważ rozważana algebra jest abelowa, do redukcji rozważanego układu równań różniczkowych mogą *a priori* użyć dowolnego z powyższych dwóch generatorów. Wybierając generator (4.8), kolejnym krokiem jest użycie jego dwóch niezmienników $C_1 = \frac{m}{r}$,

$C_2 = n r^2$ do sprowadzenia go do postaci normalnej $\mathbf{X}_1 = \frac{\partial}{\partial x}$. W zastosowaniu do układu równań struktury gwiazd, odpowiada to poszukiwanej zamianie zmiennych

$$x = \ln r, \quad y = \frac{m}{r}, \quad z = n r^2,$$

która sprowadza rozważany układ do postaci autonomicznej.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 4\pi z \cdot f - y, \\ \frac{dz}{dx} &= 2z + \frac{z(y + 4\pi z f)(f + g)(f - T\gamma f')}{(2y - 1)f^2}, \\ \frac{d\Phi}{dx} &= \frac{y + 4\pi z f}{1 - 2y}, \\ \frac{dL}{dx} &= -\frac{L(y + 4\pi z \cdot f)}{1 - 2y} + \frac{4\pi z^{3/2} h}{\sqrt{1 - 2y}}, \\ \frac{dT}{dx} &= -\frac{T\gamma(y + 4\pi z \cdot f)(f + g)}{(1 - 2y)f}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

gdzie funkcje f i g są brane w argumentcie T .

Z astrofizycznego punktu widzenia bardzo istotnym jest istnienie rodzin gwiazd homologicznych w rozpatrywanym w tej pracy przypadku relatywistycznym równań struktury. Pozwala ono na generowanie nowych rozwiązań z rozwiązań uzyskanych metodami numerycznymi. Przedstawię poniżej przykład wykorzystania symetrii do generowania nowych rozwiązań.

Założmy, że funkcja opisująca tempo generacji energii termojądrowej w gwieździe ma postać $q = C(X)n^2 f_q(T)$, gdzie $f_q(T)$ jest pewną funkcją temperatury. Z taką zależnością mamy do czynienia np. podczas spalania helu (3α) w gwieździe. Wtedy tempo generacji energii można w sposób przybliżony sparametryzować jako [13]:

$$q_{3\alpha} \approx 3 \cdot 10^{11} X_4^3 \rho_s^2 T_8^{-3} e^{-43.5 T_8^{-1}} \left[\frac{\text{erg}}{\text{s} \cdot \text{g}} \right], \quad (4.11)$$

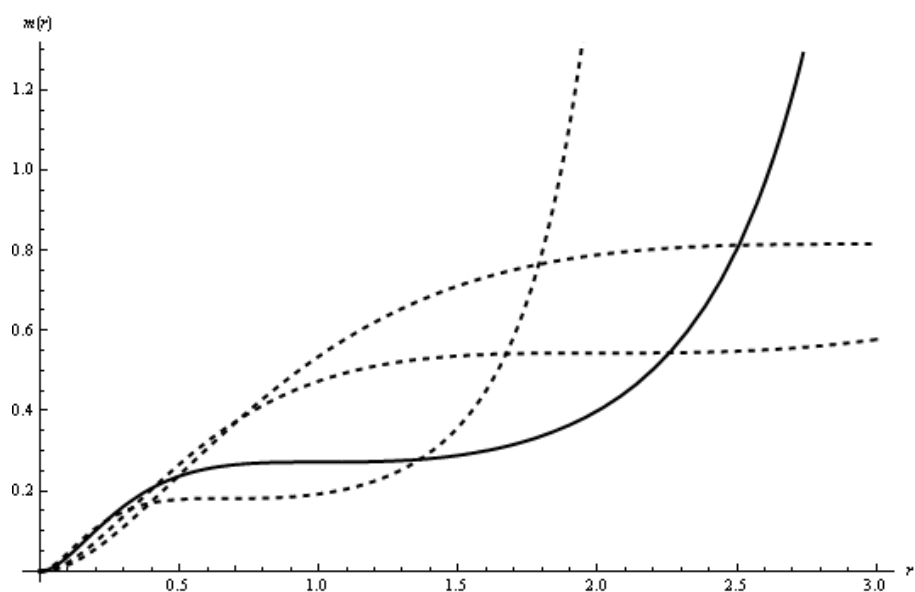
gdzie ρ_s oznacza gęstość masy spoczynkowej, którą zakładamy jako proporcjonalną do gęstości barionowej n . Przyjmijmy ponadto, że gęstość całkowitej masy-energii separuje się zgodnie z równaniem (4.7). Znajdując przyjęte funkcje mikroskopowe w teoretycznej rodzinie funkcji (3.17)-(3.20) zgodnych z istnieniem symetrii, otrzymujemy następującą postać generatora symetrii:

$$\mathbf{X}_1 = r \frac{\partial}{\partial r} + m \frac{\partial}{\partial m} - 2n \frac{\partial}{\partial n} - 3L \frac{\partial}{\partial L}. \quad (4.12)$$

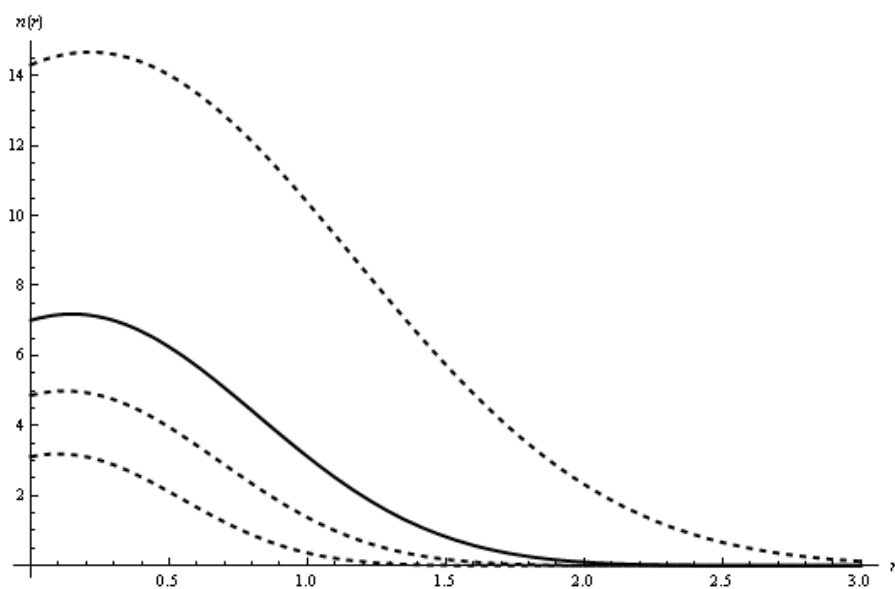
Generator ten ma trzy funkcyjnie niezależne niezmienniki, które można przyjąć jako nowe zmienne zależne. Wtedy zamiana zmiennych

$$x = \ln r, \quad y = n r^2, \quad z = r L^3, \quad v = \frac{m}{r}$$

sprowadza konwektywny układ równań struktury gwiazd do postaci autonomicznej, w której symetrie (4.12) stają się translacjami w zmiennej x . Używając niezmienn-



Rysunek 4.1. Generowanie nowych rozwiązań dla funkcji masy $m(r)$. Linia ciągła obrazuje przykładowe rozwiązanie bazowe, a linia przerywana - wygenerowane z niego rozwiązania homologiczne



Rysunek 4.2. Generowanie nowych rozwiązań dla funkcji gęstości barionowej $n(r)$. Linia ciągła obrazuje przykładowe rozwiązanie bazowe, a linia przerywana - wygenerowane z niego rozwiązania homologiczne

ników y, z, i, v , można łatwo znaleźć transformacje homologiczne, które nie zmieniają przestrzeni rozwiązań układu (4.2)-(4.6). Transformacje te mogą służyć do generowania nowych rozwiązań, bowiem

$$\text{jeśli } \begin{bmatrix} m(r) \\ n(r) \\ T(r) \\ \Phi(r) \\ L(r) \end{bmatrix} \text{ jest rozwiązaniem, to } \begin{bmatrix} C^{-1}m(Cr) \\ C^2n(Cr) \\ T(Cr) \\ \Phi(Cr) \\ C^3L(Cr) \end{bmatrix} \text{ też jest rozwiązaniem,} \quad (4.13)$$

gdzie C jest dowolną stałą różną od zera. Generowanie nowych rozwiązań można oczywiście przeprowadzać, biorąc jako rozwiązanie bazowe np. przybliżone rozwiązanie uzyskane drogą numeryczną. Rysunki (4.1) i (4.2) obrazują graficznie procedurę generowania rozwiązań przy użyciu transformacji symetrii (4.13).

Warto na tym miejscu zaznaczyć, że w astrofizyce w niektórych szczególnych przypadkach funkcji mikroskopowych przeprowadzana była analiza symetrii skalowania. Przykładem jest analiza wykonana dla politropowych równań stanu, która prowadzi do równań różniczkowych typu Lane-Emdena - por. np. [14], [15]. Tymczasem w mojej pracy uzyskałem ogólniejsze wyniki dostarczające systematycznego narzędzia służącego do sprawdzania istnienia symetrii w różnych klasach funkcji mikroskopowych.

Symetrie Liego Newtonowskich sferycznie symetrycznych konfiguracji płynu z prędkościami skierowanymi radialnie

Mimo iż zasadnicza część tej pracy dotyczy równań relatywistycznych, to jednak w rozdziale tym chcę przedstawić jeden hydrodynamiczny rezultat Newtonowski, który może być pomocny w nadaniu właściwej interpretacji wynikom dotyczącym relatywistycznych gwiazd.

5.1. Równania opisujące samograwitujące płyny Newtonowskie

Chcę rozważyć podstawowe prawa, które odpowiedzialne są za dynamikę Newtonowskich gwiazd, które mają radialny stopień swobody - mogą się np. rozszerzać czy kurczyć. Prawa te wyrażone są w równaniu źródłowym na potencjał grawitacyjny (równaniu Poissona) oraz w równaniach hydrodynamiki:

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho, \quad \text{równanie Poissona,} \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \circ (\rho\mathbf{v}) = 0, \quad \text{równanie ciągłości,} \quad (5.2)$$

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \circ \nabla \right) \mathbf{v} = -\nabla p - \rho\nabla\Phi, \quad \text{równanie ruchu płynu,} \quad (5.3)$$

gdzie \mathbf{v} jest prędkością elementu płynu, a Φ oznacza potencjał grawitacyjny. W przypadku sferycznie symetrycznym oraz gdy założymy, że pole prędkości elementów płynu

ma nieznikającą tylko składową radialną, równania te we współrzędnych sferycznych przybierają następującą postać:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2(r\Phi)}{\partial r^2} = 4\pi G\rho, \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{2}{r}\rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial r} = 0, \quad (5.5)$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{\partial(p(\rho))}{\partial r} - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad (5.6)$$

w której szukanymi funkcjami są $\Phi(r, t)$, $v(r, t)$, $\rho(r, t)$. Ponadto powyższy układ powinien być uzupełniony o równanie stanu, które zakładam postaci $p = p(\rho)$. Patrząc na równanie (5.4), wygodnie jest wprowadzić w powyższym układzie nową zmienną $f = r\Phi$

5.2. Symetrie

Interesujące jest zbadanie, czy i pod jakimi warunkami układ równań (5.4)–(5.6) dopuszcza istnienie symetrii Liego. Jako ansatz na generator symetrii przyjmę generator quasi-homologii, które są jednak quasi-homologiami w innej przestrzeni zmiennych niż to miało miejsce w przypadku równań struktury gwiazd:

$$\mathbf{X} = \xi^1(r) \frac{\partial}{\partial r} + \xi^2(t) \frac{\partial}{\partial t} + \phi^1(f) \frac{\partial}{\partial f} + \phi^2(v) \frac{\partial}{\partial v} + \phi^3(\rho) \frac{\partial}{\partial \rho}. \quad (5.7)$$

Po rozwiązaniu odpowiednich równań dopuszczających przy zastosowaniu procedury podobnej jak w przypadku relatywistycznych równań struktury gwiazd, otrzymałem rezultat mówiący, że w klasie quasi-homologii jedynymi punktowymi symetriami badanego układu są symetrie homologiczne generowane przez:

$$\mathbf{X} = ar \frac{\partial}{\partial r} + (a - b)t \frac{\partial}{\partial t} + 2bf \frac{\partial}{\partial f} + bv \frac{\partial}{\partial v} - a\rho \frac{\partial}{\partial \rho}, \quad (5.8)$$

gdzie a i b są dowolnymi stałymi. Ponadto jedynym równaniem stanu, dla którego istnieją homologie, jest równanie politropowe postaci:

$$p(\rho) = \frac{\rho^{1-\frac{2b}{a}} C}{1 - \frac{2b}{a}}, \quad C = \text{const} \quad (5.9)$$

pod warunkiem, że $a \neq 0$ oraz $a \neq 2b$.

Warto nadmienić, iż analogiczny rezultat otrzymał Collins [10], analizując Newtonowskie równania struktury gwiazd statycznych. Równania te również wyróżniały równanie politropowe. Takie wyróżnienia są przykładami potwierdzającymi pogląd z filozofii nauki [16] głoszący, iż niektóre makroskopowe prawa fizyczne za pośrednictwem symetrii równań różniczkowych, w których języku są wyrażone, dostarczają informacji o fizyce mikroskopowej, która w standardowym ujęciu jest implementowana do tych równań z zewnątrz. W astrofizyce jest to szczególnie istotne, gdyż dla gwiazd prawa fizyki mikroskopowej wyrażane w równaniach stanu nie są bezpośrednią obserwabłą. Ponadto istnieje wiele modeli materii gwiazdnej prowadzących do odmiennych równań

stanu - nawet w obrębie danych typów gwiazd (zwłaszcza dla gwiazd neutronowych). Związek symetrii z prawami mikroskopowymi będzie jeszcze dyskutowany w rozdziale 6.

Rozwiązując równania dopuszczające dla układu równań rozpatrywanego w tym rozdziale, napotkałem bardzo ciekawą i pożądaną własność łamania symetrii rozwiązań przez fale uderzeniowe. Otóż równania dopuszczające są wyrażeniami zawierającymi w wielu miejscach ułamki, w mianownikach których powtarza się wyrażenie postaci $v^2 - p'(\rho)$. Wynika z tego, że dla rozwiązań osiągających prędkość dźwięku w danym ośrodku $v = \sqrt{p'(\rho)}$ symetrie są łamane. Bez rozwiązywania więc równań hydrodynamicznych, mechanizm symetrii „odkrywa” własność rozwiązań, jaką jest istnienie fal uderzeniowych i ich związek z fizyką mikroskopową. Oczywiście moim celem nie jest tu ponowne odkrycie istnienia fal uderzeniowych, lecz wskazanie, że symetrie równań są nie tylko wyrazem elegancji matematycznej, lecz mogą być narzędziem poznawczym wydobywającym pewne cechy fizyczne rozwiązań.

Uniwersalność symetrii Liego równań struktury gwiazd

6.1. Wpływ uwzględnienia zależności od składu chemicznego gwiazdy na istnienie symetrii

Rozważając w rozdziałach 3 i 4 układy relatywistycznych równań struktury gwiazd, pominąłem zależność pojawiających się w tych układach funkcji od abundancji pierwiastków chemicznych. Podejście takie było dogodne na etapie poszukiwań symetrii Liego, natomiast z astrofizyki wiadomo, że własności fizyczne gwiazd zależą silnie od składu chemicznego materii na danym etapie ich ewolucji. Dlatego konieczne jest sprawdzenie, czy wprowadzenie abundancji do równań struktury nie zniszczy istnienia symetrii.

W tym celu zakładam następujące uogólnienie równań mikroskopowych:

$$p = p(n, T, Z_1, \dots, Z_k) \quad (6.1)$$

$$\rho = \rho(n, T, Z_1, \dots, Z_k) \quad (6.2)$$

$$q = q(n, T, Z_1, \dots, Z_k) \quad (6.3)$$

$$\kappa = \kappa(n, T, Z_1, \dots, Z_k) \quad (6.4)$$

$$\frac{dZ_i}{dt} = f_i(t), \quad i = 1, \dots, k. \quad (6.5)$$

Modyfikując w powyższy sposób zależności funkcyjne w relatywistycznych układach równań struktury oraz uzupełniając te układy o ogólne równania (6.5) opisujące tempo zmian abundancji, przystąpiłem do analizy symetrii Liego (osobno dla przypadku promienistego i konwektywnego). Symetrii poszukiwałem w przestrzeni rozszerzonej o zmienne oznaczające abundancje:

$$\mathbf{X} = \xi(r) \frac{\partial}{\partial r} + \phi^1(m) \frac{\partial}{\partial m} + \phi^2(n) \frac{\partial}{\partial n} + \phi^3(T) \frac{\partial}{\partial T} + \phi^4(\Phi) \frac{\partial}{\partial \Phi} + \phi^5(L) \frac{\partial}{\partial L} + \phi^{5+i}(Z_i) \frac{\partial}{\partial Z_i}, \quad (6.6)$$

gdzie sumowanie następuje w zakresie indeksu $i = 1, \dots, k$. Podczas rozwiązywania równań dopuszczających okazało się, że w zmiennych r, m, n, T, Φ, L prowadzą one do warunków dających te same symetrie (3.12), co dla układów równań struktury nie zawierających abundancji. Tak więc dodanie zależności od abundancji nie zniszczyło grup symetrii, lecz sprawiło, że są one podgrupami ogólniejszych grup generowanych przez

$$\mathbf{X} = a r \frac{\partial}{\partial r} + a m \frac{\partial}{\partial m} + \phi^2(n) \frac{\partial}{\partial n} + c T \frac{\partial}{\partial T} + d L \frac{\partial}{\partial L} + \phi^{5+i}(Z_i) \frac{\partial}{\partial Z_i}, \quad (6.7)$$

przy czym funkcje $\phi^{5+i}(Z_i)$ zależą wyłącznie od postaci funkcji $f_i(t)$ występujących w (6.5), odzwierciedlając ewentualne symetrie równań opisujących zmiany abundancji.

Bardzo istotnym faktem jest, iż istnienie symetrii (6.7) prowadzi do bardzo podobnych warunków na funkcje mikroskopowe jak w przypadku bez uwzględnienia abundancji. Bowiem funkcje mikroskopowe zgodne z grupą symetrii (6.7) różnią się od (3.13)–(3.16) i (3.17)–(3.20) tylko tym, że są domnożone przez funkcje zawierające wyłącznie abundancje. Przykładowo równanie (3.17) w przypadku z abundancjami przechodzi w

$$p(n, T, Z_1, \dots, Z_k) = A(Z_1, \dots, Z_k) \exp \left[\int_{n_0}^n \frac{(-2a)dn'}{\phi^2(n')} \right] f(T) \quad (6.8)$$

Uważam, że powyższy rezultat jest kolejnym przykładem na uniwersalność symetrii Liego w relatywistycznych równaniach struktury gwiazd. Gdyby bowiem równania te w przypadku z abundancjami dopuszczały quasi-homologiczne grupy symetrii (6.7) dla całkowicie innych rodzin funkcji mikroskopowych, sugerowałoby to, że funkcje mikroskopowe stwarzają w równaniach struktury gwiazd „furtkę” do wprowadzenia arbitralnych symetrii. Tymczasem wyniki tejże pracy rozmiągają się z takim podejściem. Warto też zaznaczyć, że na wstępnym etapie pracy poszukiwałem również symetrii innych niż quasi-homologiczne. Rezultat negatywny tych poszukiwań wskazuje, że – mimo występowania dowolnych (z matematycznego punktu widzenia) funkcji w równaniach struktury – istnienie symetrii quasi-homologicznych jest faktem nietrywialnym.

6.2. Rola symetrii w równaniach opisujących obiekty astrofizyczne

W 1977 r. Collins napisał pracę [16], w której wskazywał na „podświadomą” rolę, jaką matematyka może pełnić w opisie fizycznych układów. Powołując się na różne przykłady, zwrócił uwagę, że prawa fizyki grawitacyjnej za pośrednictwem struktur matematycznych mogą dawać pewne „sugestie” dotyczące fizyki mikroskopowej danego układu. Wskazał w szczególności, powołując się na drugą pracę [10], iż Newtonowskie równania struktury gwiazd za pośrednictwem symetrii Liego preferują politropowe równanie stanu, gdyż dla tego równania stanu istnieją rodziny gwiazd homologicznych. W przypadku relatywistycznym Collins, bazując na swoich rezultatach dla układu złożonego z równania ciągłości i równania TOV, wskazał jako preferowane równanie stanu $p = (\gamma - 1)\rho$. Ponieważ w mojej pracy analizowałem pełne układy równań

struktury relatywistycznych gwiazd, chcę w tej końcowej części odnieść interpretację moich wyników do poglądów filozoficznych Collinsa.

W wyniku przeanalizowania pod kątem symetrii pełnych relatywistycznych układów równań otrzymałem zgodne z nimi nieskończenie-parametrowe rodziny funkcji mikroskopowych. Tak więc symetrie pełnych układów zostawiają dla fizyki mikroskopowej znacznie większy obszar niż w przypadku, który rozważał Collins. Pozostaje to w zgodzie z osiągnięciami współczesnej astrofizyki relatywistycznej, w ramach której rozważane są gwiazdy o całkiem odmiennych równaniach stanu. Naturalne jest więc, że matematyka - w swej „podświadomej” roli - w ogólnym przypadku jako jedyne nie wskazuje równania stanu $p = (\gamma - 1)\rho$. Warto jednak zaznaczyć, że Collins opierał swoje argumenty na równaniach wywodzących się wyłącznie z teorii grawitacji, tymczasem pełen układ równań struktury gwiazd zawiera funkcje zdefiniowane na gruncie termodynamiki i konstrukcje opierające się na fizyce mikroskopowej. Fizyka mikroskopowa w tym przypadku nie odgrywa więc tak zewnętrznej roli jak to miało miejsce w przypadku równań grawitacyjnych.

Chciałbym na koniec przedstawić jeszcze jedną obserwację, którą poczyniłem, rozwiązując równania dopuszczające dla równań struktury gwiazd. Otóż na jednym z etapów, po znalezieniu postaci funkcyjnych dwóch współrzędnych generatora symetrii, szukając w układzie równań dopuszczających warunków na kolejne funkcje, natrafiłem na dwa następujące równania na funkcje odpowiednio p i ρ :

$$\begin{aligned} 2ap(n, T) + \phi^3(T)\partial_T p(n, T) + \phi^2(n)\partial_n p(n, T) &= 0, \\ 2a\rho(n, T) + \phi^3(T)\partial_T \rho(n, T) + \phi^2(n)\partial_n \rho(n, T) &= 0. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Z matematycznego punktu widzenia równania te są identyczne – różnią się jedynie nazwami zmiennych zależnych. Jest to bardzo ciekawe z fizycznego punktu widzenia, gdyż matematycznie w układzie równań różniczkowych ciśnienie i gęstość pełni rolę dwóch niezależnych funkcji, podobnie jak q i κ . Tymczasem mechanizm symetrii za pośrednictwem równań (6.9) „sugeruje” powiązanie pomiędzy p i ρ . W astrofizyce znane są sytuacje, kiedy ciśnienie związane jest bezpośrednio z gęstością energii, dlatego mogę powyższy przykład uznać za kolejny argument na rzecz tezy o „podświadomej” roli matematyki w układach fizycznych.

Bibliografia

- [1] Biesiada, M., Golda Z. and Szydłowski M., *On some group properties of Newtonian static star structure equations*, J. Phys. A: Math. Gen., 1313–1321 (1987).
- [2] Lie, S., *Theorie der Transformationsgruppen I,II*, B. G. Teubner: Leipzig, (1888, 1890).
- [3] Stephani, H., *Differential equations. Their solution using symmetries*, Cambridge University Press: New York, (1989).
- [4] Olver, P. J., *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, Springer-Verlag: New York, (1993).
- [5] Steeb, W.-H., *Continuous Symmetries, Lie Algebras, Differential Equations and Computer Algebra*, World Scientific: Singapore (2007).
- [6] Ibragimov, N.H. *Selected works*, Vol. 1,2. BTH: Karlskrona, Sweden (2006)
- [7] Bluman G., Kumei S., *Symmetries and differential equations*, Springer: New York (1989).
- [8] Stromgren, B., *Ery. Exapt. Naturw.*, 465 (1937).
- [9] Chandrasekhar, S. *An Introduction to the Study of Stellar Structure*, Dover, New York, (1939).
- [10] Collins, C. B., *J. Math. Phys.*, 1374–1377 (1977).
- [11] Thorne, K. S., “The General-Relativistic Theory of Stellar Structure and Dynamics” *Proceedings of the International School of Physics, Enrico Fermi Course XXXV 12th–24th July 1965* ed L. Gratton, Academic Press: NY and London, pp. 166–280, (1966).
- [12] Diaz Moreno, J. M., <http://library.wolfram.com/infocenter/MathSource/4231/> (2003).
- [13] Paczyński, B., *Budowa i Ewolucja Gwiazd, Witryna Uranii – Postępów Astronomii*: <http://urania.pta.edu.pl/bieg.html> .
- [14] Schwarzschild, M., *Structure and Evolution of the Stars*, Princeton University Press: Princeton, (1958).
- [15] Kippenhahn, R., Weigert, A. *Stellar Structure and Evolution*, Springer-Verlag: Berlin, Heidelberg (1991).
- [16] Collins. C. B., *Gen. Rel. Grav.*, 717–721 (1977).