

Uniwersytet Jagielloński w Krakowie



**Soczewkowanie grawitacyjne  
jako metoda poszukiwania niewidocznych składników materii**

Szymon Sikora

*praca doktorska*  
*promotor: prof. dr hab. Marek Kutschera*



*Jestem szczególnie wdzięczny  
Joannie Jałosze i Łukaszowi Bratkowi  
za dobrą współpracę i okazane wsparcie.*



# Spis treści

<b>Wstęp</b>	<b>7</b>
0.1 Niewidoczne składniki materii . . . . .	7
0.2 Motywacja stojąca za modelem globalnego dysku . . . . .	10
0.3 Cel pracy . . . . .	12
<b>1 Model globalnego dysku</b>	<b>15</b>
1.1 Formalizm matematyczny . . . . .	15
1.2 Problem obciążenia . . . . .	17
1.3 Zastosowanie dla Drogi Mlecznej . . . . .	18
<b>2 Soczewkowanie grawitacyjne</b>	<b>21</b>
2.1 Mikrosoczewkowanie . . . . .	21
2.2 Pomiar głębokości optycznej . . . . .	25
2.3 Mikrosoczewkowanie w kierunku centrum Galaktyki. Odnie- sienie do literatury. . . . .	28
2.4 Silne soczewkowanie - plany na przyszłość . . . . .	29
<b>3 Mikrosoczewkowanie w kierunku centrum Galaktyki w mo- delu globalnego dysku</b>	<b>31</b>
3.1 Model podstawowy . . . . .	31
3.2 Analiza niepewności. . . . .	34
3.2.1 Wybór krzywej rotacji . . . . .	34
3.2.2 Niepewność wyznaczenia położenia Słońca . . . . .	35
3.2.3 Struktura bulge'u . . . . .	36
3.2.4 Wertykalny profil gęstości . . . . .	38
3.3 Symulacja Monte Carlo . . . . .	39
3.4 Oszacowanie ilości niewidocznych składników materii . . . . .	41
3.5 Test statystyczny . . . . .	42
3.6 Podsumowanie . . . . .	44



# Wstęp

## 0.1 Niewidoczne składniki materii

We współczesnej astrofizyce problem niewidocznych składników materii pojawia się w kilku odrębnych, aczkolwiek powiązanych ze sobą zagadnieniach. Można je podzielić ze względu na skalę obiektów astrofizycznych, których dotyczą. Rozpoczynając od kosmologii, która zajmuje się Wszechświatem jako całością, poprzez zagadnienia dotyczące największych struktur we Wszechświecie jakimi są gromady galaktyk, do mniejszych skal grup galaktyk, a kończąc na pojedynczych galaktykach. W świetle obecnej wiedzy, na wszystkich wyżej wymienionych skalach potrzeba znacznie więcej materii, niż wynika to z oszacowania ilości znanych nam form materii, które emitują promieniowanie elektromagnetyczne obserwowane przez nas na różnych długościach fali.

Standardowy model kosmologiczny jest oparty na założeniu, że Wszechświat jest w dużej skali jednorodny i izotropowy, co pozwala przypisać mu stosunkowo prostą metrykę Friedmanna-Lemaître'a-Robertsona-Walkera, spełniającą te symetrie. Funkcyjna zależność od czasu występującego w tej metryce parametru skali  $a(t)$  jest powiązana na mocy równań Friedmanna z ilością materii we Wszechświecie, opisaną przez parametr gęstości materii  $\Omega_m$ , oraz z parametrem gęstości  $\Omega_\Lambda$ , stowarzyszonym ze stałą kosmologiczną  $\Lambda$ . Obecnie istnieje możliwość pośredniego pomiaru zależności  $a(t)$  przy wykorzystaniu odpowiednio skalibrowanych krzywych blasku supernowych typu Ia jako świec standardowych (możliwa do wyznaczenia jest wtedy tzw. odległość jasnościowa do poszczególnych supernowych) [1, 2]. Obserwacje te prowadzą do wniosku, że tempo ekspansji Wszechświata obecnie wzrasta. Za to odkrycie Saul Perlmutter, Brian P. Schmidt oraz Adam G. Riess otrzymali nagrodę Nobla w roku 2011. Wynik ten ogranicza w konsekwencji zakres dozwolonych wartości parametrów  $\Omega_m$ ,  $\Omega_\Lambda$ . Istnieją także inne wielkości obserwacyjne, które przy odpowiednich założeniach teoretycznych można powiązać z wartościami tych parametrów [3, 4, 5]. Ważną rolę odgrywa tutaj analiza mikrofalowego promieniowania tła oraz powiązana z nią analiza dwupunktowej funkcji korelacji dla rozmieszczenia galaktyk na niebie (baryon acoustic

oscillation). Wykonanie globalnego dopasowania do powyższych obserwacji, odpowiednio zinterpretowanych, prowadzi do ustalenia ścisłych wartości parametrów modelu, w tym  $\Omega_m = 0.246$  i  $\Omega_\Lambda = 0.757$  [6]. Ponieważ pierwotna nukleosynteza pierwiastków zadaje ograniczenie na ilość materii barionowej  $\Omega_b = 0.042$  [6], większość materii we Wszechświecie  $\Omega_m - \Omega_b = 0.204$  musi stanowić nowa, nieznana dotąd, niebarionowa forma materii zwana *ciemną materią*. Drugi składnik związany z parametrem  $\Omega_\Lambda$ , jakim jest ciemna energia, nie będzie przedmiotem tej rozprawy.

Na skali gromad galaktyk pierwsza ewidencja istnienia dużej ilości niewidocznych składników materii pochodzi z pracy Zwickiego z roku 1937 [7]. Przyjmując założenie, że gromada galaktyk jest układem w równowadze mechanicznej, umożliwiające skorzystanie z twierdzenia o wiriale, Zwicky wyznaczył masę gromady galaktyk Coma na podstawie zmierzonych dla galaktyk należących do tej gromady składowych prędkości wzdłuż kierunku patrzenia. Wyznaczona masa okazała się większa od szacunkowej wartości całkowitej masy poszczególnych galaktyk składowych gromady. Ta sama metoda zastosowana do mniejszych struktur, jakimi są grupy galaktyk, prowadzi do podobnego wniosku, że obiekty te są znacznie bardziej masywne niż przypuszczano. W przypadku bogatych gromad galaktyk istnieją jeszcze dwie dodatkowe metody oszacowania masy. Pierwsza z nich jest oparta o pomiary temperatury gorącego gazu, znajdującego się w przestrzeni międzygalaktycznej w centrum gromady galaktyk, emitującego promieniowanie X. Na podstawie tych obserwacji można oszacować głębokość grawitacyjnej studni potencjału, w której musi się znajdować gaz o zmierzonych parametrach, aby układ znajdował się w stanie równowagi hydrostatycznej [8]. Druga metoda wykorzystuje zjawisko ugięcia światła w polu grawitacyjnym gromady i nosi nazwę słabego soczewkowania grawitacyjnego [9]. Szersze pojęcie *soczewkowania grawitacyjnego* odnosi się do każdej metody, która ma na celu wyciągnięcie jak największej ilości informacji o obiekcie, w którego polu grawitacyjnym światło jest uginane, zwanym dalej soczewką, na podstawie analizy obrazu odpowiedniego dla danej metody źródła światła. Istnieje kilka metod soczewkowania grawitacyjnego, które różnią się między sobą skalą soczewki oraz źródła światła. W przypadku gromad galaktyk i metody słabego soczewkowania źródłami światła są odległe galaktyki. Zarówno słabe soczewkowanie, jak i oszacowanie masy na podstawie obserwacji gorącego gazu prowadzą do wniosku, że w gromadach galaktyk znajduje się więcej materii, niż wynika to z oszacowania masy zawartej w galaktykach składowych gromady oraz w gorącym gazie międzygalaktycznym.

Na skali pojedynczych galaktyk kluczową rolę dla problemu niewidocznych składników materii odgrywają badania galaktyk spiralnych. Na podstawie idei zawartej we wspomnianej już pracy Zwickiego [7] oraz prac Very



Rubin z lat siedemdziesiątych dwudziestego wieku [10], ukształtował się pogląd, że obserwacje charakterystycznego, płaskiego kształtu krzywych rotacji galaktyk spiralnych świadczą o istnieniu dużej ilości niewidocznych składników materii w tych galaktykach. Większość materii świecącej znajduje się bowiem w centralnym obszarze galaktyki i gdyby materia ta stanowiła dominujący składnik masy galaktyki, to badacze ci spodziewali się zaobserwować keplerowskie opadanie krzywej rotacji dla dużych odległości od centrum galaktycznego. Obecnie w strukturze galaktyki spiralnej wyróżniamy następujące komponenty: część centralną - bulgę, dysk galaktyczny oraz sferycznie symetryczne halo. Rozkład masy w każdej z tych komponentów opisuje się za pomocą analitycznych formuł z pewnymi wolnymi parametrami (przy czym dla bulgę'u oraz dysku profil gęstości jest często powiązany z rozkładem jasności). Następnie dokonuje się metodą najmniejszych kwadratów dopasowania wprowadzonych parametrów tak, aby odtworzyć zmierzoną krzywą rotacji. Okazuje się, że w wyniku takiego dopasowania najcięższym elementem jest sferycznie symetryczne halo, które zawiera około dziesięciokrotnie więcej masy niż materia zawarta w gwiazdach i gazie galaktycznym. Przykład takiego wieloparametrycznego, współczesnego dopasowania można znaleźć w pracy [11]. Równoległe do badań dynamiki galaktyk rozwijała się teoria ich powstawania. Pierwotny pogląd stwierdzający, że galaktyki powstają w wyniku grawitacyjnej ewolucji zaburzeń gęstości materii barionowej we wczesnym Wszechświecie musiał zostać zmodyfikowany. Zaburzenia gęstości materii barionowej w epoce rekombinacji można oszacować na podstawie analizy fluktuacji mikrofalowego promieniowania tła i amplituda tych zaburzeń ewoluuje zbyt wolno, aby mogły powstać struktury obserwowane obecnie. Idea ciemnej materii daje możliwość ominięcia tego problemu, ponieważ ciemna materia praktycznie nie oddziałuje pozagrawitacyjnie z materią barionową. Amplituda zaburzeń ciemnej materii w epoce rekombinacji mogła być w związku z tym większa od amplitudy zaburzeń materii barionowej. W tym modelu przyjmuje się, że sferycznie symetryczną składową galaktyki stanowi przede wszystkim halo ciemnej materii, które wytwarza odpowiednio głęboką studnię potencjału grawitacyjnego, aby materia barionowa mogła skolapsować tworząc struktury obserwowane obecnie. Powstawanie struktur w tym ujęciu jest badane głównie za pomocą dużych, wielociałowych symulacji komputerowych (np. symulacja Millenium [12]).

Według obecnie przyjętego paradygmatu uważa się, że niewidocznym składnikiem materii na każdej z wyżej opisanych skal jest ciemna materia niebarionowa. Warto jednak zwrócić uwagę, że jest to pewne założenie teoretyczne, które nie musi być prawdziwe. Przyjęcie istnienia ciemnej mate-

rii jako niezbędnego warunku wytłumaczenia obserwacji na wybranej skali obiektów może w żaden sposób nie wpływać na strukturę i dynamikę obiektów o mniejszej skali. Przykładowo przyjmowane standardowo halo ciemnej materii wokół Galaktyki nie wpływa w ogóle na ruch planet w Układzie Słonecznym. Analogicznie, jeżeli skala klasteryzacji ciemnej materii jest rzędu średnicy gromady galaktyk, to rozkład ciemnej materii w gromadzie nie będzie miał żadnego wpływu na rotację poszczególnych galaktyk. Metodologiczna zasada brzytwy Ockhama nakazuje poszukiwać takiej teorii, która tłumaczy obserwacje w sposób możliwie najprostszy, bez odwoływania się do bytów niekoniecznych i zbędnych założeń. Z tej perspektywy, przy braku przekonującej ewidencji oddziaływań cząstek ciemnej materii w eksperymentach laboratoryjnych, warto jeszcze raz postawić pytanie o konieczność istnienia ciężkiego halo ciemnej materii niebarionowej w galaktykach spiralnych i spróbować zamodelować dynamikę galaktyki bez wprowadzania tej idei. W tym duchu Kutschera M., Bratek Ł., Jałocha J. i Skindzier P. rozwinęli model globalnego dysku, który ma na celu sprostać temu wyzwaniu. Ponieważ główna część tej pracy poświęcona będzie weryfikacji tego modelu, przedstawimy pokrótce jego motywację.

## 0.2 Motywacja stojąca za modelem globalnego dysku

Model globalnego dysku jest rozwinięciem idei między innymi Alana Toomre [13], który rozważał infinitezymalnie cienki, osiowosymetryczny, samograwitujący dysk. Jest to idealizacja matematyczna, która jednak może posłużyć jako przybliżony model galaktyki spiralnej, dla której można przyjąć, że materia jest rozłożona przede wszystkim w pobliżu płaszczyzny galaktyki. Pierwszym powodem, dla którego warto rozważać ten model jest fakt, że w sposób naturalny pojawiają się w nim płaskie krzywe rotacji nawet w sytuacji, gdy większość materii znajduje się blisko osi symetrii, co może wskazywać, że pierwotna intuicja fizyczna dotycząca przewidywania keplerowskiego zachowania się krzywej rotacji może być w przypadku bardzo spłaszczonych obiektów zawodna [15]. Przyczyną tego stanu rzeczy jest globalność rozważanego układu, która wyraża się w sposób następujący. Aby wyznaczyć prędkość rotacji w pewnej odległości od centrum  $R$ , w modelu dyskowym należy znać globalny rozkład materii w dysku, również dla odległości większych niż  $R$ . Jest to cecha odróżniająca spłaszczone rozkłady materii od układów sferycznie symetrycznych, dla których prędkość rotacji w odległości  $R$  jest zdeterminowana wyłącznie przez rozkład materii wewnątrz sfery o

tym promieniu. Globalność modelu może również być przyczyną niepowodzenia przy próbie dopasowania parametrów rozkładu materii w dysku, zadanego analityczną funkcją powiązaną z rozkładem jasności (np. prosty spadek eksponencjalny). Warto także zwrócić uwagę, że przetłumaczenie rozkładu jasności na rozkład masy wymaga znajomości współczynnika masa-jasność  $M/L$ , który zmienia się w różnych obszarach galaktyki, ze względu na różnorodność występujących tam populacji gwiazd oraz różną zawartość gazu, co nie zawsze jest należycie brane pod uwagę. W modelu globalnego dysku rozkład materii jest odtwarzany bezpośrednio na podstawie krzywej rotacji, a zatem uwzględnienie pomiarów jasności umożliwia obliczenie współczynnika  $M/L$  jako przewidywania modelu (a nie parametru modelu). Porównanie wyznaczonych wartości  $M/L$  z przewidywaniami teoretycznymi wykonanymi w oparciu o informacje dotyczące populacji gwiazd i zawartości gazu wypada korzystnie dla modelu globalnego dysku, dla wielu rozważanych do tej pory galaktyk [16].

Model globalnego dysku może być odpowiednim modelem dla galaktyk, w których dominacja sferycznie symetrycznej składowej potencjału grawitacyjnego jest wykluczona ze względu na następującą okoliczność. Dla cząstki próbnej, poruszającej się w sferycznie symetrycznym potencjale po kołowej orbicie (o środku w początku układu współrzędnych), można powiązać prędkość cząstki  $v(R)$  z masą  $M(R)$  zawartą wewnątrz sfery o promieniu  $R$ , zapisując równanie równowagi sił grawitacyjnej i odśrodkowej. Umożliwia to zdefiniowanie funkcji  $M(R) = G^{-1} R v^2(R)$ , którą nazywamy keplerowską funkcją masy. Dla galaktyki, w której sferycznie symetryczne halo ciemnej materii stanowi dominujący przyczynę potencjału grawitacyjnego, prawdziwa zależność funkcyjna masy galaktyki zawartej wewnątrz sfery o danym promieniu powinna zmierzać do keplerowskiej funkcji masy, przy czym zgodność powinna być tym większa, im większy promień  $R$  jest rozpatrywany. Można podać przykłady galaktyk, dla których keplerowska funkcja masy jest w pewnym obszarze funkcją malejącą, co jest własnością niedopuszczalną dla prawdziwej funkcji masy, ponieważ wiązało by się to z ujemną gęstością materii w tym obszarze [14, 15, 16]. Żądanie, aby keplerowska funkcja masy była funkcją niemalejącą dla dużych  $R$  nazywamy testem sferyczności. Dla galaktyk, które nie spełniają tego warunku dominacja sferycznie symetrycznej części potencjału grawitacyjnego jest wykluczona. W przypadku, gdy test sferyczności jest spełniony możliwy jest zarówno standardowy opis, w którym dominującym składnikiem jest sferycznie symetryczne halo ciemnej materii, jak i opis w ramach modelu globalnego dysku.

W pewnych przypadkach szczególnie ważnym argumentem za zastosowaniem modelu globalnego dysku jest wspomniana już zasada metodologiczna brzytwy Ockhama. Wiadomo na przykład, że w galaktykach spiralnych

występuje pole magnetyczne, które może być na tyle silne, aby znacząco wpływać na ruch obłoków zjonizowanego wodoru. Pole magnetyczne w galaktyce powinno być więc wzięte pod uwagę przy analizie krzywej rotacji w obszarze, w którym jest ona wyznaczona w oparciu o pomiary zjonizowanego gazu [18], na przykład na obrzeżach galaktyki, gdzie gęstość gwiazd mogących posłużyć do wyznaczenia krzywej rotacji gwałtownie spada, albo ponad dyskiem galaktycznym w odpowiedniej odległości od bulge'u. Efekt wpływu pola magnetycznego na kształt krzywej rotacji można wyznaczyć w oparciu o dostępne pomiary oraz znaną, chociaż trudną rachunkowo teorię - magnetohydrodynamikę. Paradoksalnie, wprowadzenie halo ciemnej materii powoduje, że efekt ten jest całkowicie zaniedbywalny, gdyż dynamika galaktyki dla dużych odległości od centrum jest w całości zdominowana przez ciemną materię. Rozsądnie jest, z metodologicznego punktu widzenia, rozpocząć próbę wytłumaczenia zgromadzonych obserwacji od uwzględnienia znanych i pewnych efektów, wprowadzając elementy hipotetyczne i mniej pewne założenia stopniowo, tylko wtedy, gdy wcześniejsze próby zawiodą. W pracy [19] przebadano galaktykę NGC891 zgodnie z tą zasadą i stwierdzono, że niestandardowe zachowanie się pola magnetycznego w tej galaktyce może mieć istotny wpływ na krzywą rotacji, a zgodny ze wszystkimi danymi obserwacyjnymi obraz jest możliwy do uzyskania w ramach modelu globalnego dysku przy uwzględnieniu powyższego efektu, bez wprowadzania hipotetycznego halo ciemnej materii.

### 0.3 Cel pracy

Model globalnego dysku z sukcesem odtwarza dynamikę wielu przebadanych do tej pory galaktyk spiralnych. Nie oznacza to jednak, że standardowy sposób modelowania galaktyk spiralnych, polegający na dopasowaniu parametrów rozkładu materii w bulge'u, dysku i sferycznie symetrycznym halo ciemnej materii na podstawie zmierzonej krzywej rotacji, jest niepoprawny. Standardowy model galaktyk spiralnych z powodzeniem opisuje krzywe rotacji galaktyk, które spełniają test sferyczności. Dlatego niezmiernie ważne jest poszukiwanie innych wielkości obserwacyjnych, poza krzywą rotacji, które mogą posłużyć do weryfikacji rozważanego modelu. Szczególnie interesujące wydaje się tutaj soczewkowanie grawitacyjne, które może dostarczyć pośredniej metody pomiaru masy galaktyki. Stąd bezpośrednim celem poniższej rozprawy jest *weryfikacja modelu globalnego dysku przy użyciu wybranej metody soczewkowania grawitacyjnego*.

Model globalnego dysku można z powodzeniem zastosować do opisu dynamiki Drogi Mlecznej i chociaż krzywa rotacji naszej Galaktyki spełnia test sfe-

ryczności, to istnieją argumenty przemawiające za tym, że materia w Galaktyce jest rozłożona blisko płaszczyzny dysku, a sferycznie symetryczna część potencjału grawitacyjnego nie jest dominująca. Model globalnego dysku jest najprostszym modelem, w którym w sposób naturalny uzyskuje się zgodność z pomiarami wertykalnego gradientu prędkości azymutalnej rotacji Galaktyki, które wskazują na dużą wartość gradientu (co jest szczególnie ważne blisko płaszczyzny Galaktyki) oraz niewielką zależność gradientu od odległości od centrum Galaktyki  $R$  [17]. W modelach, w których sferycznie symetryczne halo stanowi dominujący przyczynek do potencjału grawitacyjnego, uzyskanie takiej zgodności z danymi obserwacyjnymi jest niemożliwe i konieczne jest wprowadzenie skomplikowanych, pozagrawitacyjnych mechanizmów wpływających na pomiary rozważanego gradientu [20]. Zagadnienie to jest pośrednio związane z dyskusją, którą rozpoczął artykuł (Moni Bidin et al. [21]), w którym autorzy twierdzą, że na podstawie analizy kinematyki gwiazd w grubym dysku galaktycznym w otoczeniu Słońca, można wykluczyć istnienie ciężkiego, sferycznie symetrycznego halo. Przeciwno tej tezie wypowiedzieli się Bovy J. i Tremaine S. [22], a spór dotyczył założeń przyjmowanych dla zależności od odległości od centrum Galaktyki  $R$  oraz zależności od wysokości nad dyskiem  $z$  dla średniej prędkości azymutalnej obserwowanej grupy gwiazd. Wobec przytoczonych problemów weryfikacja modelu globalnego dysku dla Drogi Mlecznej przy użyciu metody soczewkowania grawitacyjnego wydaje się bardzo interesująca.

Metoda mikrosoczewkowania grawitacyjnego została zaproponowana przez Bohdana Paczyńskiego [23, 24] w celu sprawdzenia, czy masywne, sferycznie symetryczne halo wokół Galaktyki może składać się z niewidocznych, zwartych obiektów tzw. MACHO (Massive Astrophysical Compact Halo Object). Pomysł ten udało się zrealizować i pierwsze wyniki kolaboracji MACHO, oparte na podstawie obserwacji gwiazd znajdujących się w Wielkim Obłoku Magellana wskazywały, że zwarte obiekty o masie z zakresu  $0.15 - 0.9 M_{\odot}$  mogą stanowić maksymalnie 20% całkowitej masy sferycznie symetrycznego halo, przewidywanego w standardowym modelu Galaktyki [25]. Późniejsze pomiary kolaboracji OGLE wykonane w oparciu o źródła światła znajdujące się w Małym Obłoku Magellana wskazują, że udział MACHO w standardowym, sferycznie symetrycznym halo nie przekracza 2%, a mierzony efekt mikrosoczewkowania może być wywołany także przez gwiazdy znajdujące się w dysku galaktycznym [26].

Wykonywane są także pomiary mikrosoczewkowania w Galaktyce w przypadku, gdy źródłami światła są gwiazdy znajdujące się w bulge'u. W kontekście weryfikacji modelu globalnego dysku, pomiary te są najbardziej interesujące, ponieważ wielkość wyznaczona w metodzie mikrosoczewkowania, jaką jest głębokość optyczna, zależy w tym przypadku od rozkładu masy zwartych

obiektów (w tym niewidocznych MACHO, ale przede wszystkim gwiazd) w obszarze pomiędzy obserwatorem na Ziemi, a źródłami światła w centrum Galaktyki. W rozważanym obszarze rozkład masy może być odtworzony również na podstawie krzywej rotacji Galaktyki w ramach modelu globalnego dysku. Przy uwzględnieniu rozkładu gazu w Galaktyce (który nie wpływa w żaden sposób na efekt mikrosoczewkowania) możliwe jest sprawdzenie, czy rozkład masy odtworzony w modelu globalnego dysku jest konsystentny z pomiarami mikrosoczewkowania. Dlatego celem szczegółowym pracy jest *weryfikacja modelu globalnego dysku dla Drogi Mlecznej za pomocą metody mikrosoczewkowania grawitacyjnego w kierunku bulge'u galaktycznego*.

Plan pracy jest następujący. W Rozdziale 1 zostaną podane najważniejsze szczegóły modelu globalnego dysku. W Rozdziale 2 zostanie opisana metoda mikrosoczewkowania grawitacyjnego. Rozdział 3 stanowi główną część pracy, w której model globalnego dysku dla Galaktyki zostanie skonfrontowany z pomiarami mikrosoczewkowania.

# Rozdział 1

## Model globalnego dysku

### 1.1 Formalizm matematyczny

Rozpatrujemy próżniowy, osiowosymetryczny potencjał grawitacyjny, przyjmujący w układzie cylindrycznym  $(R, \phi, z)$  następującą formę:

$$\Phi(R, z) = -2\pi v_L^2 \int_0^\infty d\omega \hat{\sigma}(\omega) J_0\left(\omega \frac{\rho}{L}\right) \exp\left(-\omega \frac{|z|}{L}\right). \quad (1.1)$$

Jest to rozkład potencjału grawitacyjnego w bazie osiowosymetrycznych rozwiązań równania Laplace'a, zapisanych przy pomocy funkcji Bessel'a  $J_0$ . Wielkości  $L, v_L$  pełnią rolę stałych wymiarowych. Na podstawie prawa Gaussa można zinterpretować wyrażenie:

$$\sigma(R) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi G} \left[ \left. \frac{\partial \Phi(R, z)}{\partial z} \right|_{z=+\epsilon} - \left. \frac{\partial \Phi(R, z)}{\partial z} \right|_{z=-\epsilon} \right] \quad (1.2)$$

jako powierzchniową gęstość masy rozłożonej w płaszczyźnie  $z = 0$  i będącej źródłem rozważanego pola grawitacyjnego. Potencjał  $\Phi(R, z)$  można uznać za pierwsze przybliżenie dla potencjału grawitacyjnego galaktyki, w której większość materii jest rozłożona blisko płaszczyzny galaktycznej. Wtedy powierzchniową gęstość masy (1.2) można utożsamić z kolumnową gęstością masy, która jest powiązana z objętościową gęstością masy  $\rho(R, z)$  poprzez rzutowanie:

$$\sigma(R) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(R, z) dz. \quad (1.3)$$

Dla rozważanego potencjału (1.1) powierzchniowa gęstość masy, obliczona na podstawie definicji (1.2), jest następująca:

$$\sigma(R) = \frac{v_L^2}{GL} \int_0^\infty d\omega \omega \hat{\sigma}(\omega) J_0\left(\omega \frac{R}{L}\right). \quad (1.4)$$

Będziemy używać bezwymiarowej zmiennej radialnej  $x = R/L$ . Wielkości  $\sigma(R)$  i  $\hat{\sigma}(\omega)$  są powiązane poprzez transformatę Fouriera-Bessela, co pozwala napisać relację odwrotną:

$$\hat{\sigma}(\omega) = \frac{GL}{v_L^2} \int_0^\infty dx x \sigma(Lx) J_0(\omega x). \quad (1.5)$$

Przy wyznaczeniu krzywej rotacji galaktyki spiralnej  $v(R)$  przyjmuje się, że materia porusza się po orbitach kołowych o środku w początku układu współrzędnych. W tej sytuacji równanie równowagi sił odśrodkowej i grawitacyjnej  $v^2(R) |_{z=0} = R \partial_R \Phi(R, z)$ , zapisane przy użyciu bezwymiarowej zmiennej radialnej oraz bezwymiarowej prędkości rotacji  $u(x) = v(Lx)/v_L$ , przedstawia się następująco:

$$u^2(x) = 2\pi x \int_0^\infty d\omega \omega \hat{\sigma}(\omega) J_1(\omega x). \quad (1.6)$$

Podstawienie (1.5) do (1.6) prowadzi do wyrażenia<sup>1,2</sup>:

$$\begin{aligned} \frac{v^2(R)}{4GR} = \mathcal{P} \left[ \int_0^R d\chi \sigma(\chi) \frac{\chi E(\frac{\chi}{R})}{R^2 - \chi^2} - \dots \right. \\ \left. \dots - \int_R^\infty d\chi \sigma(\chi) \left( \frac{\chi^2 E(\frac{R}{\chi})}{R(\chi^2 - R^2)} - \frac{K(\frac{R}{\chi})}{R} \right) \right]. \quad (1.7) \end{aligned}$$

Powyższe całki należy rozumieć w znaczeniu wartości głównej, stąd symbol  $\mathcal{P}$ . Korzystając z właściwości funkcji Bessela:

$$\int_0^\infty d\omega \omega J_1(\omega x) J_1(\omega x') = \frac{1}{x} \delta(x - x')$$

można podać relację odwrotną do (1.6):

$$\hat{\sigma}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dx u^2(x) J_1(\omega x). \quad (1.8)$$

Z kolei podstawiając (1.8) do (1.4) można wyprowadzić wyrażenie<sup>3</sup>:

$$\begin{aligned} \sigma(R) = \frac{1}{G\pi^2} \mathcal{P} \left[ \int_0^R d\chi v^2(\chi) \left( \frac{K(\frac{\chi}{R})}{R\chi} - \frac{R}{\chi} \frac{E(\frac{\chi}{R})}{R^2 - \chi^2} \right) + \dots \right. \\ \left. \dots + \int_R^\infty d\chi v^2(\chi) \frac{E(\frac{R}{\chi})}{\chi^2 - R^2} \right]. \quad (1.9) \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Szczegóły tego rachunku można znaleźć w dodatku pracy [15]. Przekształcenie otrzymanego wyrażenia do jeszcze prostszej postaci zostało podane w dodatku pracy [27].

<sup>2</sup>Przyjmujemy definicje zupełnych funkcji eliptycznych w następującej konwencji:

$$K(k) := \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} \quad E(k) := \int_0^{\pi/2} d\phi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}$$

<sup>3</sup>Patrz przypis 1.



Za pomocą powyższej formuły można odtworzyć gęstość kolumnową  $\sigma(R)$  na podstawie krzywej rotacji galaktyki. Należy jednak zaznaczyć, że do tego celu wymagana jest znajomość globalnej krzywej rotacji  $v(R)$ , zadanej dla pełnego zakresu promieni  $R \in (0, \infty)$ . Podobnie, aby wyznaczyć krzywą rotacji  $v(R)$  według wzoru (1.7), potrzebny jest globalny rozkład gęstości kolumnowej  $\sigma(R)$ , zadany dla  $R \in (0, \infty)$ . W praktyce krzywa rotacji dowolnej galaktyki spiralnej jest zmierzona tylko w pewnym, ograniczonym zakresie promieni, co powoduje, że przy braku dodatkowych założeń, obserwacyjna krzywa rotacji nie jest wystarczająca do odtworzenia rozkładu masy w dysku galaktycznym.

## 1.2 Problem obcięcia

Założmy, że obserwacyjna krzywa rotacji  $v(R)$  jest zmierzona tylko w zakresie  $R \in (0, L)$ . Ostatni punkt pomiarowy  $L$  nazywamy promieniem obcięcia oraz przyjmujemy  $v(L)$  za występującą w paragrafie 1.1 stałą wymiarową  $v_L$ . Wykonując całkowanie (1.9) po zawężonym przedziale  $\chi \in (0, L)$  otrzymuje się gęstość kolumnową  $\sigma_L(R)$  obarczoną pewnym błędem  $\Delta\sigma_L(R)$ . Gdy brak jest ograniczeń na zachowanie się krzywej rotacji poza zmierzonym obszarem  $v(R > L)$ , błąd ten może być arbitralnie duży. W literaturze spotykane jest równoważne do (1.9) przedstawienie całkowe gęstości kolumnowej [28]<sup>4</sup>:

$$\sigma(R) = \frac{1}{G\pi^2} \mathcal{P} \left[ \int_0^R d\chi \frac{dv^2(\chi)}{d\chi} \frac{K(\frac{\chi}{R})}{R} + \int_R^\infty d\chi \frac{dv^2(\chi)}{d\chi} \frac{K(\frac{R}{\chi})}{\chi} \right]. \quad (1.10)$$

Błąd  $\Delta\tilde{\sigma}_L(R)$ , powstały w wyniku zawężenia w powyższym wzorze obszaru całkowania do  $\chi \in (0, L)$ , nie jest równy błędowi  $\Delta\sigma_L(R)$ . Wybór reprezentacji całkowej dla gęstości kolumnowej również wpływa na wartość błędu związanego z zawężeniem obszaru całkowania.

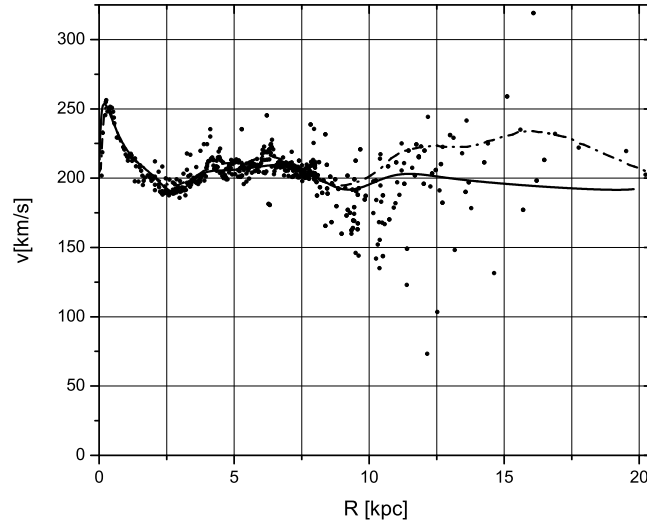
Możliwym rozwiązaniem problemu obcięcia jest wykorzystanie dodatkowej informacji dotyczącej rozkładu wodoru na obrzeżach galaktyki. Dla wielu galaktyk dostępne są pomiary rozmieszczenia neutralnego wodoru również poza promieniem obcięcia, wykonane na długości fali 21cm. W obszarze  $R > L$  gęstość gwiazd mogących posłużyć do wyznaczenia krzywej rotacji szybko maleje i można przyjąć, że obserwowany gaz (z uwzględnieniem poprawki związanej z zawartością helu) wnosi dominujący wkład do gęstości kolumnowej  $\sigma(R)$ . W pracy [14] została przedstawiona szybko zbieżna metoda iteracyjna, wykorzystująca zależności (1.7,1.9), która prowadzi do odtworzenia globalnego rozkładu gęstości kolumnowej  $\sigma(R)$ , który pokrywa

<sup>4</sup>Warto także zwrócić uwagę na fakt, że pochodna  $dv^2(\chi)/d\chi$  jest obarczona większymi błędami obserwacyjnymi niż kwadrat prędkości rotacji  $v^2(\chi)$  występujący we wzorze (1.9).

się ze zmierzonym rozkładem gazu dla  $R > L$ , oraz równoczesnego odtworzenia globalnej krzywej rotacji  $v(R)$ , która pokrywa się z obserwacyjną krzywą rotacji w obszarze  $R < L$ . Można więc przyjąć, że odtworzona w ten sposób gęstość kolumnowa  $\sigma(R)$  rozsądnie przybliży prawdziwy rozkład materii w galaktyce spiralnej.

### 1.3 Zastosowanie dla Drogi Mlecznej

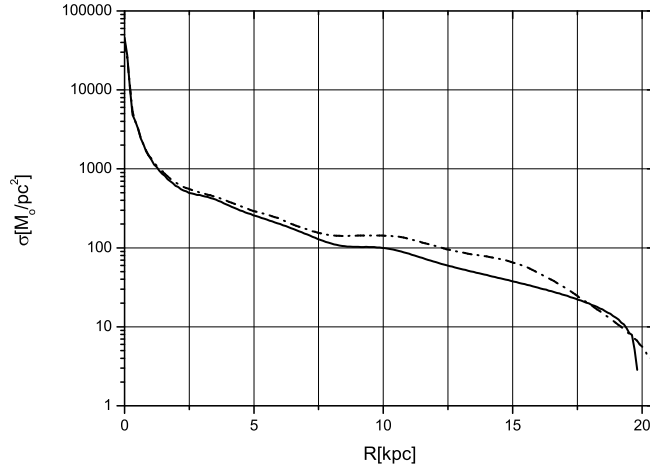
Na wykresie 1.1 zostały przedstawione dwie krzywe rotacji Drogi Mlecznej (z pracy Sofue et al. [29, 30]), które będziemy odpowiednio nazywać krzywą A i krzywą B, będące wynikiem interpolacji wykonanej dla wielu różnych danych obserwacyjnych [31]-[36]. Przy wyznaczaniu krzywej A założono wartość prędkości Słońca na orbicie wokół centrum Galaktyki  $\Theta_0 = 200\text{km s}^{-1}$ , dla krzywej B wartość  $\Theta_0 = 220\text{km s}^{-1}$ . Gęstość kolumnowa  $\sigma(R)$  odtworzo-



Rysunek 1.1: Krzywe rotacji Drogi Mlecznej A [*gruba, ciągła krzywa*] i B [*krzywa przerywana*]. Naniesiono także punkty pochodzące z różnych obserwacji (referencje w tekście).

na dla każdej z rozważanych krzywych rotacji za pomocą metody iteracyjnej [14] jest przedstawiona na wykresie 1.2.

W pracy [15] zostało wykazane, że błąd  $\Delta\sigma_L(R)$  można uznać za nieistotny w obszarze  $R < 0.6L$ . Przy wyprowadzeniu tego kryterium zakładane jest, że krzywa rotacji poza promieniem obcięcia  $R > L$  zmierza do krzywej keplerowskiej. Założenie to jest rozsądne, gdy w obszarze  $R \gg L$ , w którym



Rysunek 1.2: Gęstość kolumnowa wyznaczona odpowiednio dla krzywej rotacji A [*gruba, ciągła krzywa*] i krzywej rotacji B [*krzywa przerywana*].

gęstość gazu i gwiazd znacząco spada, nie ma innych składników materii wnoszących istotny wkład do gęstości kolumnowej. Rozważane krzywe rotacji są wyznaczone do odległości  $L \approx 20\text{kpc}$ . Można powiedzieć, że błąd  $\Delta\sigma_L(R)$  jest do zaniedbania przy wyznaczeniu gęstości kolumnowej pomiędzy centrum Galaktyki a położeniem Słońca  $R_\odot = 8\text{kpc}$ , czyli w obszarze istotnym z punktu widzenia mikrosoczewkowania. Sposób rozwiązania problemu obcięcia (w tym przypadku metoda iteracyjna [14]) nie wpływa więc na przedstawione w rozdziale 3 mikrosoczewkowanie w kierunku centrum Galaktyki, przewidywane w ramach modelu globalnego dysku.

Przed przystąpieniem do szczegółowej analizy, w następnym rozdziale zostaną podane podstawowe informacje dotyczące soczewkowania grawitacyjnego.

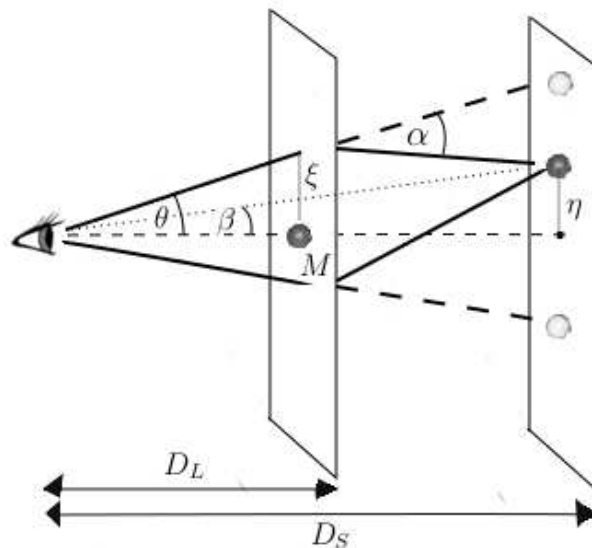


## Rozdział 2

# Soczewkowanie grawitacyjne

### 2.1 Mikrosoczewkowanie

Rozpatrzmy sytuację przedstawioną na Rysunku 2.1, w której światło pochodzące z punkowego źródła jest uginane w polu grawitacyjnym masy punktowej  $M$ , zwanej dalej soczewką. Obserwator i soczewka znajdują się na prostej



Rysunek 2.1: Schemat soczewkowania.

wyznaczającej oś optyczną oraz kierunek na niebie, względem którego mierzone będzie położenie katowe źródła światła  $\vec{\beta}$  oraz jego obrazu  $\vec{\theta}$ . Określenie położenia katowego na sferze niebieskiej wymaga podania dwóch kątów,

jednak ponieważ kąt ugięcia światła  $\bar{\alpha}$  ma niezerową składową wyłącznie w kierunku osi optycznej (oś optyczna jest osią symetrii w tym problemie), wystarczy rozważać odległość kątową źródła światła i jego obrazu od osi optycznej, oznaczoną odpowiednio  $\beta$  i  $\theta$ . Ponieważ kąty te są bardzo małe, to sferę niebieską o promieniu równym odległości od obserwatora do źródła światła  $D_S$  można przybliżyć płaszczyzną prostopadłą do osi optycznej, znajdującą się w odległości  $D_S$  od obserwatora, zwaną płaszczyzną źródeł. Relacja  $\eta = \beta D_S$  wyznacza odległość źródła od osi optycznej w tej płaszczyźnie. Podobnie definiujemy płaszczyznę soczewki jako płaszczyznę zawierającą soczewkę, prostopadłą do osi optycznej, znajdującą się w odległości  $D_L$  od obserwatora. Relacja  $\xi = \theta D_L$  zadaje odległość od osi optycznej punktu przecięcia trajektorii światła z płaszczyzną soczewki. Podane informacje wystarczają do napisania tzw. *równania soczewki*:

$$\eta + \alpha(D_S - D_L) = \xi \frac{D_S}{D_L}. \quad (2.1)$$

Po podzieleniu obustronnie przez  $D_S$  i podstawieniu wartości kąta ugięcia światła  $\alpha = 4GM/(c^2 \xi)$  można zapisać to równanie w innej formie:

$$\beta + \frac{4GM}{c^2 \theta} \frac{D_S - D_L}{D_L D_S} = \theta. \quad (2.2)$$

Równanie to pozwala obliczyć odległość kątową obrazu  $\theta$  dla źródła o odległości kątowej  $\beta$ . Szczególnie ważny jest przypadek, w którym obserwator, soczewka i źródło światła znajdują się w jednej linii, czyli  $\beta = 0$ . Obrazem źródła będzie wtedy okrąg o promieniu kątowym zwanym *promieniem Einsteina*:

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_S - D_L}{D_L D_S}}. \quad (2.3)$$

Równanie soczewki zapisane przy pomocy promienia Einsteina przedstawia się następująco:

$$\beta + \frac{\theta_E^2}{\theta} = \theta. \quad (2.4)$$

Wygodnie jest wyrazić odległościątowe w jednostkach promienia Einsteina  $r_S = \beta/\theta_E$  oraz  $r = \theta/\theta_E$ . W tym zapisie:

$$r^2 - r r_S - 1 = 0. \quad (2.5)$$

Dwa rozwiązania powyższego równania kwadratowego odpowiadają dwóm obrazom punktowego źródła, zaznaczonym schematycznie na Rysunku 2.1:

$$r_{\pm} = \frac{1}{2} \left( r_S \pm \sqrt{r_S^2 + 4} \right). \quad (2.6)$$

Założmy teraz, że źródło światła jest tylko w przybliżeniu źródłem punktowym i w rzeczywistości zajmuje na niebie niewielki element powierzchni  $r_S dr_S d\phi$ , gdzie  $\phi$  jest kątem biegunowym na płaszczyźnie źródeł. Element powierzchni obrazu można zapisać analogicznie  $r dr d\phi$ . Ze względu na fakt, że soczewkowanie zachowuje jasność powierzchniową, powiększenie obrazu przedstawia się w prosty sposób jako iloraz powierzchni obrazu i powierzchni źródła:

$$\mu = \frac{r dr d\phi}{r_S dr_S d\phi} = \frac{r dr}{r_S dr_S}. \quad (2.7)$$

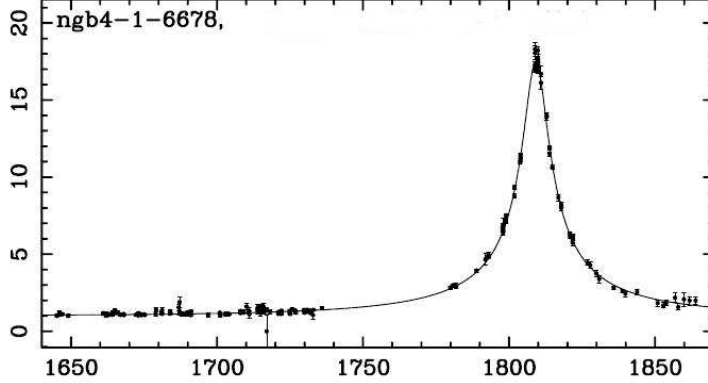
Podstawiając (2.6) łatwo obliczyć powiększenie każdego z obrazów:

$$\mu_+ = \frac{(r_S + \sqrt{r_S^2 + 4})^2}{4r_S \sqrt{r_S^2 + 4}} \quad \mu_- = -\frac{(r_S - \sqrt{r_S^2 + 4})^2}{4r_S \sqrt{r_S^2 + 4}}. \quad (2.8)$$

Gdy źródłem światła jest gwiazda znajdująca się w centrum Drogi Mlecznej, w odległości  $D_S = 8 \text{ kpc}$ , natomiast soczewką jest gwiazda o masie Słońca, znajdująca się pomiędzy obserwatorem na Ziemi a centrum Galaktyki, promień Einsteina będzie rzędu  $\theta_E \approx 10^{-3} \text{ arcsec}$ . W tym przypadku różnica kątowa pomiędzy obrazami  $\theta_E(r_+ - r_-) = \theta_E \sqrt{r_S^2 + 4}$  będzie tego samego rzędu, co jest poniżej zdolności rozdzielczej używanych teleskopów. Sytuacja, w której niemożliwe jest rozseparowanie wielokrotnych obrazów badanego źródła nosi nazwę *mikrosoczewkowania*. Obserwuje się wtedy jedynie całkowite powiększenie źródła:

$$\mu = |\mu_+| + |\mu_-| = \frac{r_S^2 + 2}{r_S \sqrt{r_S^2 + 4}}. \quad (2.9)$$

Przyjmijmy teraz, że teleskop obserwuje nieruchome źródło światła. Wybierzmy za oś optyczną prostą przechodzącą przez położenie obserwatora i źródło światła. Założmy także, że masa punktowa  $M$  może się poruszać w płaszczyźnie soczewki. Powiększenie obrazu źródła  $\mu(r_S)$  zależy od chwilowej odległości soczewki od osi optycznej  $\xi$ . Parametr  $r_S$  jest bowiem wyznaczony poprzez relację  $\xi = r_S \theta_E D_L$ . Gdy soczewka znajduje się na płaszczyźnie soczewki wewnątrz promienia Einsteina  $\xi < \xi_E$ , gdzie  $\xi_E := \theta_E D_L$ , parametr  $r_S$  jest mniejszy od  $r_S = 1$ . Korzystając ze wzoru (2.9) można stwierdzić, że powiększenie jest wtedy większe od granicznej wartości  $\mu \approx 1.34$ . Na tej podstawie, obserwując przez dłuższy czas powiększenie źródła światła można ustalić, w jakim okresie czasu soczewka poruszająca się w płaszczyźnie prostopadłej do osi optycznej znajdowała się wewnątrz promienia Einsteina. Przykład obserwacji takiego zdarzenia jest podany na wykresie 2.2.



Rysunek 2.2: Przykład rejestracji zdarzenia mikrosoczewkowania. Wykres przedstawia pomiar powiększenia  $\mu$  źródła w zależności od czasu [w dniach]. Gdy powiększenie jest większe od 1.34 soczewka znajduje się wewnątrz promienia Einsteina. Źródło: Sumi T. et al. [41].

Kluczowym pojęciem niezbędnym do dalszej analizy jest *głębokość optyczna*  $\tau$ , która jest zdefiniowana jako prawdopodobieństwo zaistnienia w danym momencie zdarzenia polegającego na znalezieniu się soczewki wewnątrz promienia Einsteina  $\xi_E$ . Idea pomiaru tej wielkości zostanie przedstawiona w następnym punkcie. Niezwykle ważny jest związek głębokości optycznej z rozkładem masy pomiędzy obserwatorem a źródłem światła. Dla wybranego elementu objętości  $dS dD_L$ , na tyle dużego, aby zawierał wiele soczewek o różnych masach, jego wkład do głębokości optycznej jest następujący:

$$d\tau = \sum_i \nu_i \pi \xi_{E_i}^2 dD_L. \quad (2.10)$$

Suma wykonana jest po wszystkich możliwych masach soczewek  $\{M_i\}$ . Współczynnik  $\nu_i$  wyraża liczbową gęstość soczewek o masie  $M_i$ , a  $\xi_{E_i}^2$  jest kwadratem promienia Einsteina dla masy  $M_i$ . Wprowadzając gęstość masy soczewek  $\rho_L = \sum_i \nu_i M_i$  i wykonując całkowanie po odległości  $D_L$  od położenia obserwatora do położenia źródła otrzymuje się całkowitą głębokość optyczną związaną z wybranym kierunkiem obserwacji (wybraną osią optyczną):

$$\tau = \frac{4\pi G}{c^2} \int_0^{D_S} \frac{(D_S - D_L) D_L}{D_S} \rho_L(\vec{x}(D_L)) dD_L. \quad (2.11)$$

Głębokość optyczna dla wybranego kierunku obserwacji zależy od przestrzennego rozkładu masy zwartych obiektów mogących pełnić rolę soczewki  $\rho_L(\vec{x})$ , wzdłuż osi optycznej od położenia obserwatora do położenia źródła światła. Powyższe wyrażenie całkowite będzie przez nas użyte w celu weryfikacji modelu globalnego dysku dla naszej Galaktyki.



## 2.2 Pomiar głębokości optycznej

Rozważmy soczewki o masie  $M_i$ , których składowa prędkości zawarta w płaszczyźnie soczewki wynosi  $v_{i\perp}$ . Ponieważ soczewki są w ruchu, można oczekiwać, że obserwowane powiększenie źródła światła będzie funkcją czasu  $\mu(t)$ , na podstawie której można stwierdzić, w którym momencie pewna soczewka znalazła się wewnątrz promienia Einsteina. Jak już wspomniano, soczewka znajduje się wewnątrz promienia Einsteina, gdy  $\mu > 1.34$ . Obliczymy prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że w trakcie niewielkiego okresu obserwacji  $dt$ , pewna soczewka przekroczy granicę  $\xi_{E_i}$  i znajdzie się wewnątrz promienia Einsteina. Dla elementu objętości  $dS dD_L$ , zawierającego soczewki o różnych masach, jego wkład do powyższego prawdopodobieństwa jest następujący:

$$dp = \sum_i \nu_i dA dD_L. \quad (2.12)$$

Tak jak w poprzednim punkcie,  $\nu_i$  oznacza liczbową gęstość soczewek o masie  $M_i$ . Wielkość  $dA$  wyraża pole powierzchni zakreślone na płaszczyźnie soczewki przez okrąg o promieniu  $\xi_{E_i}$ , współporuszający się z wybraną soczewką w czasie  $dt$ :

$$dA = 2 \xi_{E_i} v_{i\perp} dt. \quad (2.13)$$

Wygodnie jest przedstawić prędkość  $v_{i\perp}$  przy pomocy charakterystycznego czasu  $t_{E_i}$ , w którym poruszająca się soczewka pokonuje na płaszczyźnie soczewki dystans równy promieniowi Einsteina, czyli  $v_{i\perp} = \xi_{E_i}/t_{E_i}$ . Rozważane prawdopodobieństwo zaobserwowania w czasie  $dt$  nowego zdarzenia mikro-soczewkowania, dla elementu objętości  $dS dD_L$  wynosi:

$$dp = \sum_i \nu_i \frac{2 \xi_{E_i}^2}{t_{E_i}} dt dD_L. \quad (2.14)$$

Ważną wielkością jest częstość zdarzeń  $\Gamma$  (*event rate*), określająca liczbę nowych zdarzeń mikro-soczewkowania przypadającą na jednostkę czasu. Wkład do częstości zdarzeń pochodzący od elementu objętości  $dS dD_L$  to:

$$d\Gamma = \sum_i \nu_i \frac{2 \pi \xi_{E_i}^2}{\pi t_{E_i}} dD_L. \quad (2.15)$$

Aby obliczyć całkowitą częstość zdarzeń  $\Gamma$  należy wykonać sumowanie po wszystkich masach soczewek  $\{M_i\}$  oraz wyciąkać po  $D_L$  wzdłuż osi optycznej od położenia obserwatora do położenia źródła światła. W tym celu przyjmuje się zwykle upraszczające założenie mówiące, że charakterystyczny czas

$t_{E_i}$  nie zależy od masy soczewek, a także nie zmienia się wzdłuż osi optycznej. Wtedy  $t_E \equiv t_{E_i}$  można wyciągnąć zarówno przed znak sumy, jak i przed znak całki, otrzymując:

$$\Gamma = \frac{2\tau}{\pi t_E}. \quad (2.16)$$

Obserwując  $N_\otimes$  źródeł światła przez okres  $\Delta t$ , można na tej podstawie oczekiwać następującej liczby zdarzeń mikrosoczewkowania:

$$\mathcal{N} = \frac{2 N_\otimes \Delta t}{\pi t_E} \tau. \quad (2.17)$$

Czas przelotu soczewki soczewki wewnątrz promienia Einsteina  $t_E$  jest wielkością dostępną obserwacyjnie, na podstawie analizy czasowej zmienności powiększenia źródła  $\mu(t)$ , jaka jest podana na wykresie 2.2 dla przykładowego zdarzenia mikrosoczewkowania. Powiększenie  $\mu$  jest powiązane z parametrem  $r_S$  poprzez relację (2.9), natomiast  $r_S(t) = \sqrt{r_0^2 + ((t - t_0)/t_E)^2}$ . W związku z tym, kształt krzywej  $\mu(t)$  zależy od trzech parametrów: od parametru zderzenia  $r_0$  (czyli najmniejszej odległości  $r_S$  wzdłuż trajektorii soczewki), chwili  $t_0$  odpowiadającej maksimum powiększenia oraz od czasu charakterystycznego  $t_E$ . Jeżeli przebieg punktów obserwacyjnych  $\{\mu(t_i)\}$  odpowiada rejestracji pojedynczego zjawiska mikrosoczewkowania, to parametry  $(r_0, t_0, t_E)$  można łatwo dopasować. Przyjmując we wzorze (2.17) za  $t_E$  wielkość średnią  $\langle t_E \rangle$ , obliczoną na podstawie wszystkich zarejestrowanych zdarzeń mikrosoczewkowania, otrzymuje się estymator głębokości optycznej postaci:

$$\tau = \frac{\pi}{2 N_\otimes \Delta t} \sum_j t_{Ej}, \quad (2.18)$$

gdzie suma po  $j$  przebiega wszystkie zarejestrowane zdarzenia.

Aby wyznaczyć głębokość optyczną w kierunku centrum Galaktyki, należy obserwować dużą liczbę źródeł światła rozrzuconych blisko centrum (rzędu  $N_\otimes \approx 10^6$ ), przez okres  $\Delta t$  rzędu kilku lat. Umożliwia to rejestrację kilkudziesięciu zdarzeń mikrosoczewkowania, takich jak przedstawione na wykresie 2.2. Wiodące kolaboracje wykorzystywały do przeprowadzenia obserwacji teleskopów naziemnych. Kolaboracja EROS korzystała w latach 1996-2002 z 1-metrowego teleskopu w La Silla Observatory w Chile. Projekt MACHO wykorzystywał w okresie 1992-1999 teleskop o średnicy 1.34 m znajdujący się w Mount Stromlo w Australii. Kolaboracja OGLE (w fazie od OGLE I do OGLE III, w latach 1992-2009) używała 1-metrowego i 1.3-metrowego teleskopu, znajdujących się w Las Campanas w Chile.

Ze względu na fakt, że zjawisko mikrosoczewkowania nie zależy od długości fali, w celu uzyskania dużego strumienia promieniowania dokonuje się obserwacji w szerokim zakresie długości fali. Zwykle stosuje się dwa skrajne

filtry *red/blue* w celu potwierdzenia achromatyczności obserwowanych zdarzeń mikrosoczewkowania. Ze względu na fakt, iż źródła światła znajdują się w obszarze o dużym zagęszczeniu, właściwy pomiar jasności poszczególnych źródeł nie jest rzeczą trywialną. Istotne są tu także efekty związane z samą aparaturą pomiarową. Z obrazem powstającym w teleskopie związane jest zawsze pewne wewnętrzne rozmycie. Aby je skorygować próbuje się dopasować do próbki izolowanych gwiazd referencyjnych tzw. Point Spread Function (PSF), funkcję określającą rozmycie obserwowanego obrazu źródła punktowego. Znajomość PSF umożliwia następnie właściwe określenie powiększenia obserwowanego przez dłuższy czas źródła światła. Inną techniką jest Different Image Analysis (DIA). Polega ona na pomiarze powiększenia obserwowanego źródła na podstawie porównania aktualnego zdjęcia źródła z wykonanym wcześniej zdjęciem referencyjnym tego samego obszaru. Jako efekt zastosowania powyższych technik uzyskuje się krzywą  $\mu(t)$  dla każdego źródła z osobna. Na podstawie zebranych krzywych dokonuje się selekcji zdarzeń mikrosoczewkowania. Szereg algorytmów eliminuje zdarzenia nieporządane np. efekty atmosferyczne albo problemy aparaturowe. Należy także odrzucić efekty tła, jakimi są obiekty, które mogą naśladować oczekiwany efekt mikrosoczewkowania (przykładowo obserwacja pewnego rodzaju gwiazd zmiennych albo wybuch supernowej w monitorowanym obszarze nieba). Należy mieć świadomość, że wykorzystane algorytmy selekcji zdarzeń mikrosoczewkowania nie są doskonałe i w związku z tym należy dodatkowo oszacować tzw. wydajność detekcji  $\epsilon(t_E)$  (*detection efficiency*). Jest ona zdefiniowana jako iloraz liczby zdarzeń mikrosoczewkowania, które spełniają wymogi selekcji, do całkowitej liczby zdarzeń dla których  $r_S < 1$  oraz maksimum powiększenia wypada w okresie obserwacji  $\Delta t$ . Do wyznaczenia wydajności detekcji  $\epsilon(t_E)$  wykonuje się symulację komputerową modelowych zdarzeń mikrosoczewkowania, których parametry wybiegają poza zakres czułości aparatury, a następnie stosuje się do nich algorytmy selekcji. Wielkość  $\epsilon(t_E)$  jest uśredniona w przestrzeni parametrów  $r_0$ ,  $t_0$ , obserwowanej jasności i koloru. Powszechnie stosowany estymator głębokości optycznej, biorący pod uwagę wydajność detekcji jest następujący:

$$\tau = \frac{\pi}{2 N_{\otimes} \Delta t} \sum_j \frac{t_{Ej}}{\epsilon(t_{Ej})}. \quad (2.19)$$

Więcej informacji na temat pomiaru głębokości optycznej Czytelnik może znaleźć na przykład w monografii [37].

## 2.3 Mikrosoczewkowanie w kierunku centrum Galaktyki. Odniesienie do literatury.

Od ponad piętnastu lat wykonywane są dokładne pomiary głębokości optycznej w kierunku centrum Drogi Mlecznej. Wyniki otrzymane w oparciu o dane zbierane w ciągu kilku lat przez różne kolaboracje (MACHO [38], EROS [39], OGLE [40], MOA [41]) są zgodne ze sobą w granicach błędów, a metodologia zbierania i opracowania danych znacznie się rozwinęła. Pierwotne wyniki wskazywały bowiem na dużo wyższe wartości głębokości optycznej od przewidywanych przez standardowe modele Galaktyki. Na podstawie tych obserwacji, w roku 1997 Kuijken [42] wykonał oszacowanie, z którego wynikało, że sferycznie symetryczne halo ciemnej materii w Galaktyce jest całkowicie wykluczone. Wedle tej pracy duża głębokość optyczna pociąga za sobą konieczność istnienia na tyle ciężkiego dysku galaktycznego, że wpływ ciemnej materii na prędkość rotacji Galaktyki w położeniu Słońca jest znikomy. Na podstawie tych samych danych praca Binney et al. [43] dowodziła, że nie jest możliwe jednoczesne uzgodnienie krzywej rotacji Galaktyki, głębokości optycznej i gęstości masy w otoczeniu Słońca.

W wyniku dalszych prac, jako najbardziej prawdopodobną przyczynę zawyżenia głębokości optycznej wskazano niewłaściwy wybór źródeł światła. W centrum Galaktyki źródła światła znajdują się w obszarze o dużym zagęszczeniu. Może się więc zdarzyć, że światło pochodzące od kilku różnych gwiazd znajdujących się blisko siebie zostanie błędnie zinterpretowane jako światło pochodzące od źródła punktowego. Zjawisko to nazywane jest wymieszaniem (*ang. blending*). Brak pewności, czy źródło jest rzeczywiście punktowe wprowadza błąd systematyczny do analizy powiększenia źródła, a także dodatkową niepewność w oszacowaniu całkowitej liczby źródeł i w konsekwencji prowadzi do zwiększenia niepewności wyznaczonej głębokości optycznej. Najbardziej powszechną metodą ograniczenia tej niepewności jest zawężenie analizy do źródeł jasnych jakimi są czerwone olbrzymy. Uważa się, że dla tej grupy gwiazd wpływ wymieszania na głębokość optyczną jest zminimalizowany. Szczegółową analizę tego problemu można znaleźć w pracach [44, 45].

W oparciu o inną niż pierwotna próbkę źródeł i związaną z nią nieco niższą wartością głębokości optycznej Bissantz&Gerhard [46] przedstawili opis zgodny ze standardowym modelem Galaktyki. W tym modelu halo ciemnej materii było istotne jedynie w pewnej odległości od centrum Galaktyki. Dla odległości mniejszych od 5 kpc nie odgrywało ono większej roli.

Duże znaczenie odegrały także modele wykorzystujące zliczenia gwiazd (*ang. star counts*) oparte na pomiarach jasności, aby odtworzyć rozkład gę-

stości gwiazd w bulge'u oraz dysku galaktycznym [47, 48]. Ponieważ głębokość optyczna obliczona dla tak odtworzonego rozkładu gwiazd jest zgodna z obserwacyjną głębokością optyczną, należy przypuszczać, że gwiazdy jako soczewki wnoszą decydujący wkład do obserwowanego efektu mikrosoczewkowania. Dlatego zawartość niewidocznych składników materii w postaci nieświecących, zwartych obiektów musi być niewielka w centrum naszej Galaktyki.

Ostatnią grupą modeli są N-ciałowe symulacje dynamiki gwiazd, na przykład Bissantz et al. [49]. W tym modelu gwiazdy o rozkładzie zgodnym z obserwacjami głębokości optycznej poruszają się w zewnętrznym potencjale grawitacyjnym wytworzonym przez halo ciemnej materii. Rezultat symulacji jest zgodny z obserwacyjną krzywą rotacji w rozpatrywanym obszarze. Podobnie jak w wymienionych wcześniej pracach, sferycznie symetryczne halo ciemnej materii ma niewielki wpływ na dynamikę blisko centrum Galaktyki, a jego udział staje się coraz bardziej istotny wraz ze wzrostem odległości od centrum.

Model globalnego dysku różni się od powyższych modeli tym, że bez udziału halo ciemnej materii odtwarza dynamikę Galaktyki również na dużych odległościach od centrum. Jest to model globalny, w którym do obliczenia powierzchniowej gęstości masy w danej odległości od centrum  $R$  potrzebna jest znajomość krzywej rotacji również dla odległości większych od  $R$ . Nie jest zatem oczywiste, czy rozkład masy w wewnętrznej części Galaktyki, odtworzony na podstawie krzywej rotacji w modelu globalnego dysku będzie zgodny z pomiarami mikrosoczewkowania. Sprawdzenie tego faktu, przedstawione w następnym rozdziale, jest zagadnieniem nowym.

## 2.4 Silne soczewkowanie - plany na przyszłość

Soczewkowanie grawitacyjne jest tematem niezwykle szerokim. Przegląd najważniejszych faktów dotyczących wielu jego aspektów można znaleźć w obszernym podręczniku [9]. W tym punkcie wskażemy tylko jedno zagadnienie, które otwiera pole do przyszłych badań nad modelem globalnego dysku.

W sytuacji, w której źródłem światła jest kwazar, a soczewką centrum odległej galaktyki, może zaistnieć taka konfiguracja, w której obserwuje się wielokrotne obrazy punktowego źródła światła. Taki przypadek nosi nazwę *silnego soczewkowania*. Znakomitym przykładem jest galaktyka 2237+0305 i poczwórny obraz odległego kwazara zwany krzyżem Einsteina. Pewną komplikacją jest fakt, że soczewka jest w tym przypadku obiektem rozciągłym. Praca [50] opisująca wspomniany przypadek soczewkowania podaje, iż dla standardowego modelu galaktyki będącej soczewką w tym problemie, udział

ciemnej materii w całkowitej masie wewnątrz promienia 0.88 arcsec, obejmującego centralną część galaktyki, wynosi zaledwie 5%. Istnieje więc rozsądne przypuszczenie, że możliwe będzie odtworzenie wspomnianej obserwacji w ramach modelu globalnego dysku, bez wprowadzania halo ciemnej materii.

# Rozdział 3

## Mikrosoczewkowanie w kierunku centrum Galaktyki w modelu globalnego dysku

Na początku zostanie przedstawiony model podstawowy, będący pierwszym przybliżeniem rzeczywistej sytuacji, który będzie dalej przez nas traktowany jako model referencyjny. W kolejnych punktach zostaną podane możliwe źródła niepewności oraz poprawki do modelu podstawowego. Na końcu zostanie przedstawiony pełny model, w którym położenia źródeł zostały wylosowane przy pomocy symulacji Monte Carlo.

### 3.1 Model podstawowy

Na podstawie krzywej rotacji A została w modelu globalnego dysku wyznaczona gęstość kolumnowa  $\sigma(R)$  (szczegóły zostały podane w Rozdziale 1). Z punktu widzenia mikrosoczewkowania istotna jest gęstość objętościowa  $\rho(R, z)$ , która jest powiązana z gęstością kolumnową poprzez rzutowanie (1.3). Aby ją odtworzyć należy znać profil wertykalny gęstości. Postulujemy przyjęcie standardowego profilu eksponencjalnego  $\rho(R, z) = \rho(R, 0)e^{-|z|/h}$ . Wykonanie całki (1.3) prowadzi do relacji  $\rho(R, z) = \sigma(R)e^{-|z|/h}/(2h)$ .

Na podstawie wzoru (2.11) można obliczyć głębokość optyczną przewidywaną dla rozkładu masy  $\rho_L = \rho(R, z)$ . Całka (2.11) wykonywana jest wzdłuż kierunku patrzenia, od położenia obserwatora na Ziemi  $\vec{x}_\odot$ , zapisanego w kartezjańskim układzie współrzędnych jako  $\vec{x}_\odot = [R_\odot, 0, 0]$ , do położenia źródła światła  $\vec{x}_\otimes = \vec{x}_\odot + (1 + \chi)R_\odot [-\cos b \cos l, -\cos b \sin l, \sin b]$ . Kąty  $(l, b)$  określają współrzędne galaktyczne źródła (odpowiednio długość i szerokość galaktyczną), natomiast  $\chi$  jest bezwymiarowym parametrem odległości do źródła.

Drogę całkowania można sparametryzować jako  $\vec{x}(s) = \vec{x}_\odot + s(\vec{x}_\otimes - \vec{x}_\odot)$ . Odległość od obserwatora do źródła to  $D_S = (1 + \chi)R_\odot$ , a odległość od obserwatora do soczewki znajdującej się w położeniu  $\vec{x}(s)$  to  $D_L(s) = s(1 + \chi)R_\odot$ . Przy tych założeniach głębokość optyczną można wyrazić jako funkcję parametru skali  $h$  oraz położenia źródła  $(l, b, \chi)$ :

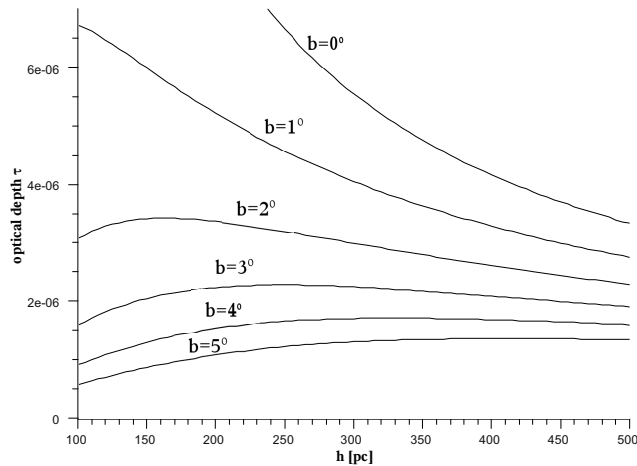
$$\tau_h(l, b, \chi) = \frac{2\pi GR_\odot^2}{c^2 h} \int_0^1 (1 + \chi)^2 e^{-s(1+\chi)|\sin b| R_\odot/h} \times \dots$$

$$\dots \times \sigma(R_\odot \sqrt{1 + (1 + \chi)s \cos b [(1 + \chi)s \cos b - 2 \cos l]}) s(1 - s) ds. \quad (3.1)$$

Źródła światła są rozrzucone wokół centrum Galaktyki. Dla żadnego z nich dokładna wartość parametru odległości  $\chi$  nie jest znana. Ponadto, dane obserwacyjne, z którymi będziemy porównywać przewidywania modelu, są uśrednione w przedziale  $\Delta l \in (-5^\circ, 5^\circ)$ . Dlatego rozrzut parametrów  $(l, \chi)$  źródeł musi zostać zasymulowany przy pomocy metody Monte Carlo, co zostanie wykonane w punkcie 3.3. Najpierw jednak można rozpatrzyć sytuację, w której źródła światła znajdują się dokładnie w centrum Galaktyki  $l = 0$ ,  $\chi = 0$ . Jest to często czynione pierwsze przybliżenie rzeczywistej sytuacji. Ponieważ interesują nas niewielkie szerokości galaktyczne  $b < 6^\circ$  można dokonać kolejnych przybliżeń  $\sin b \approx b$ ,  $\cos b \approx 1$ , otrzymując wzór uproszczony:

$$\tau_h(b) = \frac{2\pi GR_\odot^2}{c^2 h} \int_0^1 \sigma(R_\odot(1 - s)) e^{-s|b|R_\odot/h} s(1 - s) ds. \quad (3.2)$$

W modelu podstawowym głębokość optyczna będzie obliczona na podstawie powyższej formuły.

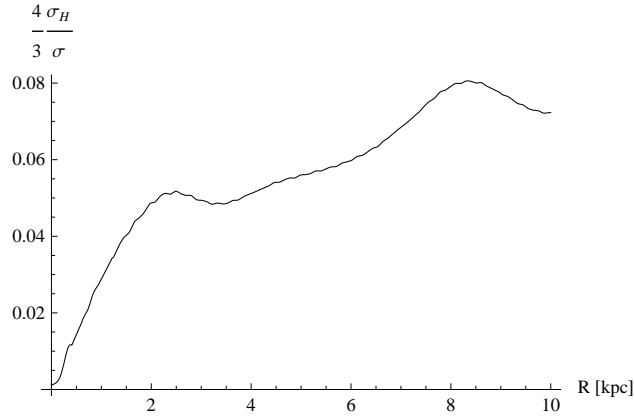


Rysunek 3.1: Zależność  $\tau_h(b)$  przedstawiona dla wybranych szerokości galaktycznych  $b$ .



Na wykresie 3.1 została przedstawiona zależność  $\tau_h(b)$  dla różnych kątów  $b$ . Przewidywana głębokość optyczna jest odpowiedniego rzędu wielkości, a wybór parametru skali jest tym mniej istotny, im większe szerokości galaktyczne są rozpatrywane. Często przyjmowaną wartością jest  $h = 325$  pc, co jest konsyistentne z pomiarem parametru skali  $h = 320 \pm 50$  pc, wykonanym dla najliczniej występujących w dysku gwiazd typu M (Gould et al. [51]).

Przed porównaniem modelowej głębokości optycznej z danymi pomiarowymi należy jeszcze zauważyć, że odtworzona w modelu globalnego dysku gęstość dynamiczna  $\rho(R, z)$  różni się od występującej w całości (2.11) gęstości zwartych obiektów  $\rho_L(R, z)$  o gęstość występującego w Galaktyce gazu, który nie wnosi wkładu do mikrosoczewkowania. Przyjmujemy rozkład neutralnego i molekularnego wodoru w Galaktyce za pracą (Misiriotis et al. [52]), w której do wyznaczenia wspomnianego rozkładu wykorzystano pomiary wykonane przez satelitę COBE. Znacząca większość masy gazu w Galaktyce występuje w postaci wodoru i helu. Oznaczając gęstość powierzchniową wodoru przez  $\sigma_H$  oraz przyjmując standardową abundancję helu można przedstawić całkowitą gęstość powierzchniową gazu w Galaktyce jako  $(4/3)\sigma_H$ . Stosunek gęstości powierzchniowej gazu do gęstości powierzchniowej  $\sigma(R, z)$  wyznaczonej na podstawie krzywej rotacji jest podany na wykresie 3.2.

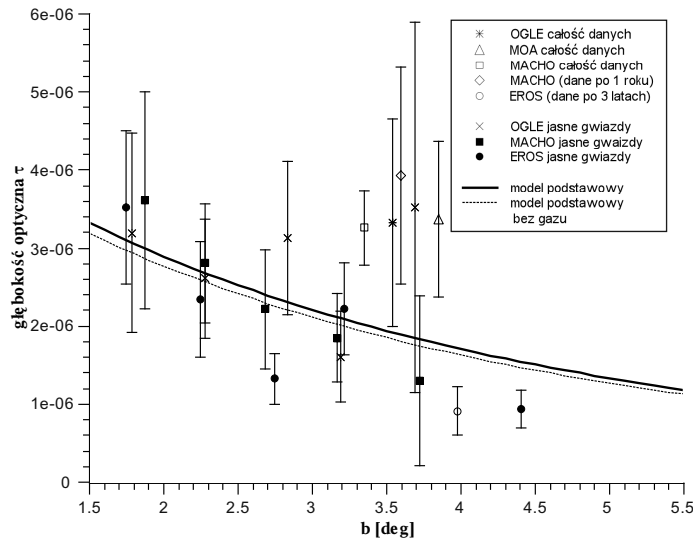


Rysunek 3.2: Stosunek gęstości powierzchniowej gazu do gęstości powierzchniowej całkowitej masy dynamicznej wyznaczonej w modelu globalnego dysku.

Porównanie modelowej głębokości optycznej z danymi obserwacyjnymi zebranymi przez różne kolaboracje (MACHO [38], EROS [39], OGLE [40], MOA [41]) przedstawia wykres 3.3. Głębokość optyczna  $\tau_h(b)$  została obliczona w modelu podstawowym z parametrem skali  $h = 325$  pc, dla odległości od położenia Słońca do centrum Galaktyki  $R_\odot = 8$  kpc. Krzywa ciągła odpowiada głębokości optycznej obliczonej dla całkowitej masy dynamicznej wyznaczonej w modelu globalnego dysku  $\sigma(R)$ , krzywa kropkowana przedstawia  $\tau_h(b)$

obliczone dla gęstości powierzchniowej  $\sigma(R) - (4/3)\sigma_H(R)$ , czyli po odjęciu rozkładu gazu. Podane dane obserwacyjne zostały zestawione razem i szczegółowo opisane w monografii [37]. Za najbardziej wiarygodną próbkę, z którą będziemy porównywać przewidywania modelu, uznajemy dane zgromadzone dla źródeł światła będących gwiazdami jasnymi, dla których zjawisko wymieszania (*blending*) jest zminimalizowane<sup>1</sup>.

Wstępnie można ocenić, że model globalnego dysku jest zgodny z pomiarami mikrosoczewkowania. Ścisły test statystyczny sprawdzający powyższą hipotezę zostanie podany w punkcie 3.5.



Rysunek 3.3: Porównanie głębokości optycznej przewidywanej w modelu podstawowym (*linia ciągła*) z danymi obserwacyjnymi. *Linia kropkowana* przedstawia przewidywaną głębokość optyczną po odjęciu rozkładu gazu, który nie wnosi wkładu do mikrosoczewkowania.

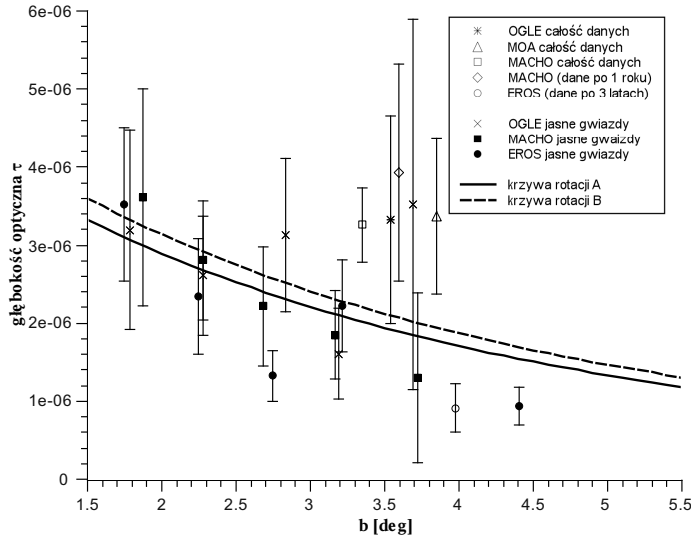
## 3.2 Analiza niepewności.

### 3.2.1 Wybór krzywej rotacji

Krzywa rotacji dla Drogi Mlecznej jest dobrze wyznaczona w obszarze od centrum Galaktyki do położenia Słońca. Dla  $R > R_\odot$  dopasowanie ciągłej krzywej rotacji do punktów obserwacyjnych jest obarczone dużo większą niepewnością. Aby oszacować jaki wpływ na głębokość optyczną ma wybór do-

<sup>1</sup>Więcej na ten temat zostało podane w punkcie 2.3.

pasowania krzywej rotacji w zewnętrznym obszarze Galaktyki porównujemy przewidywania głębokości optycznej w modelu podstawowym dla dwóch krzywych rotacji A i B, opisanych dokładnie w Rozdziale 1, w punkcie 1.3. Badane krzywe rotacji różnią się znacząco w obszarze  $R > R_{\odot}$ , ponieważ do ich wyznaczenia przyjęto różne wartości prędkości Słońca na orbicie wokół centrum Galaktyki ( $\Theta_0 = 200\text{km s}^{-1}$  dla krzywej A i  $\Theta_0 = 220\text{km s}^{-1}$  dla krzywej B). Dla krzywej B dysk galaktyczny jest nieco cięższy i należy się spodziewać większej wartości  $\tau$ . Rezultat wykonanego porównania jest przedstawiony na wykresie 3.4. Różnica głębokości optycznych obliczonych dla dwóch różnych krzywych rotacji nie przekracza  $\Delta\tau = 0.3 \times 10^{-6}$ , co jest wartością mniejszą od niepewności obserwacyjnych.



Rysunek 3.4: Porównanie głębokości optycznej przewidywanej w modelu podstawowym dla dwóch różnych krzywych rotacji A (*linia ciągła*) oraz B (*linia przerywana*). Referencje odnośnie krzywych rotacji podane są w Rozdziale 1.

### 3.2.2 Niepewność wyznaczenia położenia Słońca

W dotychczasowych rachunkach przyjęliśmy wartość odległości Słońca do centrum Galaktyki  $R_{\odot} = 8\text{kpc}$  [53]. W pracach dotyczących mikrosoczewkowania można znaleźć także inne wartości  $R_{\odot}$ . Przykładowo kolaboracja EROS przyjmuje wartość rekomendowaną przez IAU:  $R_{\odot} = 8.5\text{kpc}$  [54]. Ponieważ jednak wartość funkcji podcałkowej (3.2) jest niewielka blisko położenia Słońca, można przypuszczać, że dokładna wartość odległości Słońca do centrum Galaktyki nie ma decydującego wpływu na przewidywane mi-

krosoczekowanie. Zmiana wartości  $R_\odot = 8$  kpc na  $R_\odot = 8.5$  kpc w całce (3.2) powoduje zmianę głębokości optycznej o  $\Delta\tau = +0.1 \times 10^{-6}$  dla  $b = 1^\circ$  i tylko  $\Delta\tau = -0.04 \times 10^{-6}$  dla  $b = 5^\circ$ . W literaturze można spotkać także mniejszą wartość  $R_\odot = 7.62$  kpc [55]. Jeżeli w całce (3.2) dokonamy zmiany wartości  $R_\odot = 8$  kpc na  $R_\odot = 7.62$  kpc, głębokość optyczna ulegnie zmianie o  $\Delta\tau = -0.1 \times 10^{-6}$  dla  $b = 1^\circ$  i tylko  $\Delta\tau = +0.02 \times 10^{-6}$  dla  $b = 5^\circ$ . Precyzyjne ustalenie wartości odległości Słońca do centrum Galaktyki nie jest więc kluczowym czynnikiem w analizie mikrosoczekowania.

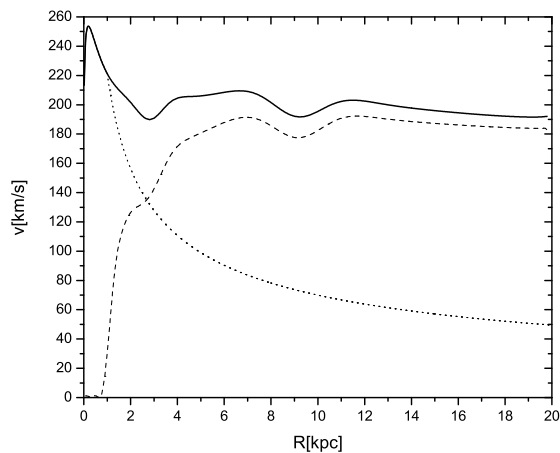
### 3.2.3 Struktura bulge'u

Dla znajdującego się w centralnej części Galaktyki zgrubienia, nazywanego bulgem, w modelu globalnego dysku przypisujemy gęstość powierzchniową  $\sigma(R)$  w taki sam sposób jak dla materii rozłożonej w dysku galaktycznym. Lepszym przybliżeniem rozkładu gęstości w bulge'u jest jednak rozkład sferycznie symetryczny. Ponieważ wkład do głębokości optycznej od soczewek znajdujących się w samym bulge'u jest istotny, należy sprawdzić jak zmienia się przewidywana w modelu głębokość optyczna, gdy centralna część Galaktyki (do 1 kpc) zostanie opisana przez sferycznie symetryczny rozkład masy. W tym przypadku można wydzielić wkład do głębokości optycznej pochodzący od materii rozłożonej w dysku galaktycznym oraz wkład pochodzący od materii znajdującej się w sferycznie symetrycznym bulge'u:

$$\tau_h(b) = \frac{4\pi GR_\odot^2}{c^2} \left[ \int_0^{s_b} s(1-s)\rho_{dysk}(\vec{x}(s))ds + \int_{s_b}^1 s(1-s)\rho_{bulge}(\vec{x}(s))ds \right] \quad (3.3)$$

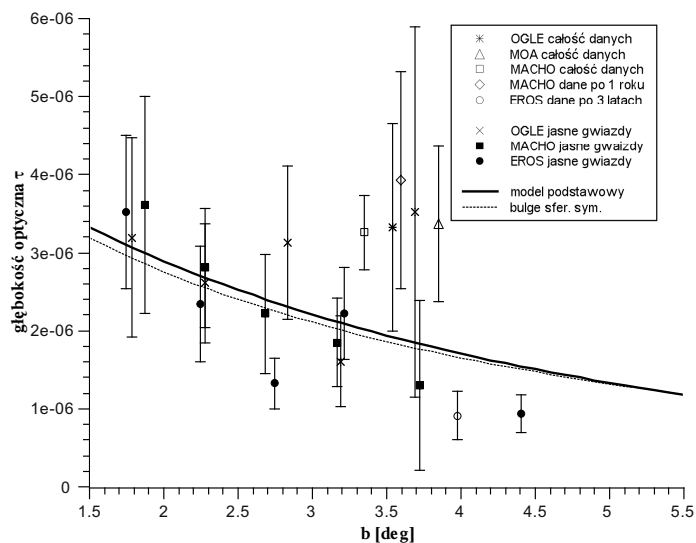
Granice całkowania wyznaczone są przez rozmiar bulge'u  $R_b = (1 - s_b)R_\odot = 1$  kpc. Droga całkowania  $\vec{x}(s) = \vec{x}_\odot + s(\vec{x}_\otimes - \vec{x}_\odot)$  łączy położenie obserwatora  $\vec{x}_\odot$  i położenie źródła światła  $\vec{x}_\otimes$ . Zakładamy, że dla  $R < R_b$  krzywa rotacji  $v(r)$  jest powiązana z masą zawartą wewnątrz promienia  $r = \sqrt{R^2 + z^2}$  poprzez standardową dla sferycznego rozkładu materii relację  $M(r) = r v^2(r)/G$ , natomiast dla  $R > R_b$  wkład do krzywej rotacji pochodzący od bulge'u opada keplerowsko  $v_b(R) = v(R_b)\sqrt{R_b/R}$ . Znając funkcję masy  $M(r)$  łatwo odtworzyć profil gęstości bulge'u  $\rho_{bulge}(r) = M'(r)/(4\pi r^2)$ . Pozostałą część krzywej rotacji, nie mającą związku z polem grawitacyjnym bulge'u, można wyznaczyć na podstawie standardowej dekompozycji<sup>2</sup>  $v_1^2(R) = v^2(R) - v_b^2(R)$ . Rozkład krzywej rotacji na część związaną z bulgem  $v_b$  i część związaną z dyskiem  $v_1$  jest przedstawiony na wykresie 3.5. Dla części  $v_1(R)$  można zastosować opisany w Rozdziale 1 model globalnego dysku, otrzymując gęstość

<sup>2</sup>Siła odśrodkowa związana z prędkością rotacji skaluje się jak  $v^2$ .



Rysunek 3.5: Dekompozycja krzywej rotacji na składową związaną z bulgem (*krzywa kropkowana*) i składową związaną z dyskiem (*krzywa kreskowana*).

powierzchniową dysku  $\sigma_1(R)$ . Należy zwrócić uwagę, że obecność sferycznie symetrycznego bulge'u powoduje, że gęstość powierzchniowa  $\sigma_1(R)$  może się różnić od wyznaczonej wcześniej gęstości  $\sigma(R)$ . Tak jak w modelu podstawowym, gęstość objętościowa w dysku jest związana z gęstością powierzchniową następującą relacją  $\rho_{dysk}(R, z) = \sigma_1(R)e^{-|z|/h}/(2h)$ .



Rysunek 3.6: Głębokość optyczna w modelu ze sferycznie symetrycznym bulgem (*cienka krzywa kreskowana*) w porównaniu z modelem podstawowym (*linia ciągła*).

Wykres 3.6 przedstawia głębokość optyczną obliczoną przy uwzględnieniu sferycznie symetrycznego bulge'u, porównaną z modelem referencyjnym. Różnica jest mniejsza niż  $\Delta\tau = 0.2 \times 10^{-6}$ , co sugeruje, że wpływ struktury bulge'u na ostateczną głębokość optyczną jest niewielki.

Kolejną, wartą uwzględnienia poprawką jest zamodelowanie występującej w centralnej części naszej Galaktyki poprzeczki [46]. Należy jednak zauważyć, że użyta przez nas krzywa rotacji Galaktyki została wyznaczona przy założeniu symetrii osiowej, podczas gdy istnienie poprzeczki, której rozkład gęstości można przybliżyć za pomocą trójosiowej elipsoidy, łamie tę symetrię. Nie ma więc możliwości uwzględnienia poprzeczki w prostym modelu dynamicznym, jakim jest model globalnego dysku. Istnieje natomiast możliwość wylosowania położenia źródeł światła w metodzie Monte Carlo zgodnie z rozkładem prawdopodobieństwa proporcjonalnym do rozkładu emisyjności źródeł w poprzeczce, co zostanie wykonane w punkcie 3.3.

### 3.2.4 Wertykalny profil gęstości

Model globalnego dysku dostarcza informacji o gęstości kolumnowej  $\sigma(R)$ , podczas gdy do obliczenia głębokości optycznej  $\tau$  niezbędna jest gęstość objętościowa  $\rho(R, z)$ . W celu odtworzenia  $\rho(R, z)$  należy przyjąć konkretną postać wertykalnego profilu gęstości. Dotychczas przyjmowaliśmy najprostszy profil eksponencjalny  $\rho_{dysk}(R, z) = \rho(R, 0)e^{-|z|/h}$ , z parametrem skali  $h = 325$  pc. W tym punkcie obliczymy głębokość optyczną dla dwóch innych, często spotykanych profili.

W strukturze dysku galaktycznego można wyróżnić dwa komponenty: dysk cienki oraz dysk gruby. Odpowiednim profilem, biorącym pod uwagę to rozróżnienie jest podwójny profil eksponencjalny:

$$\rho_{dysk}(R, z) = \rho(R, 0) \left( (1 - \beta) e^{-|z|/h_1} + \beta e^{-|z|/h_2} \right) \quad (3.4)$$

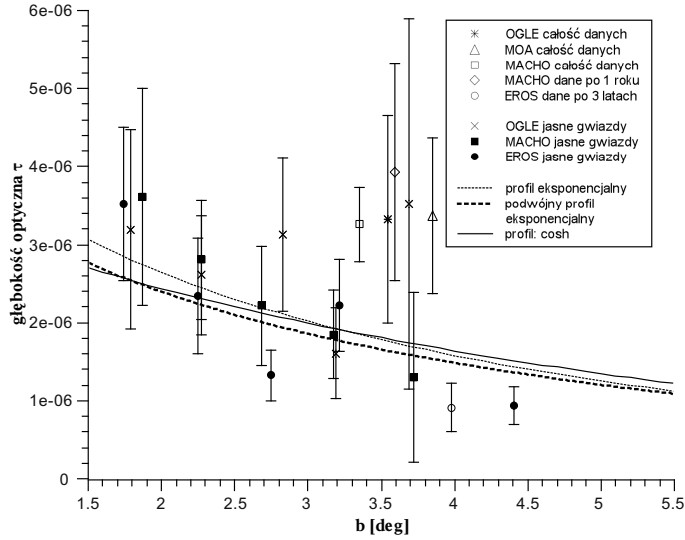
Parametry skali cienkiego dysku  $h_1 = 320$  pc, dysku grubego  $h_2 = 643$  pc oraz parametr  $\beta = 0.216$  są zaczerpnięte z pracy [51]. Cienki dysk, o parametrze skali zbliżonym do wartości  $h = 325$  pc występującej w pojedynczym profilu eksponencjalnym, jest składnikiem dominującym.

Innym profilem, który lepiej niż profil eksponencjalny opisuje rozkład gwiazd w otoczeniu Słońca, jest profil następujący:

$$\rho_{dysk}(R, z) = \rho(R, 0) \frac{1}{\cosh(z/h_3)} \quad (3.5)$$

Wartość  $h_3 = 330$  pc wybieramy za pracą [56].

Na wykresie 3.7 przedstawione jest porównanie głębokości optycznych obliczonych w modelu podstawowym ze sferycznie symetrycznym bulgem, po



Rysunek 3.7: Głębokość optyczna obliczona z uwzględnieniem sferycznie symetrycznego bulge'u, po odjęciu rozkładu gazu, dla trzech różnych wertykalnych profili gęstości opisanych w tekście: pojedynczego profilu eksponencjalnego (*cienka, kropkowana krzywa*), podwójnego profilu eksponencjalnego (*gruba, kreskowana krzywa*) oraz profilu zawierającego cosinus hiperboliczny (*krzywa ciągła*).

odjęciu rozkładu gazu, dla wymienionych wertykalnych rozkładów gęstości w dysku. Różnica głębokości optycznych odpowiadających wybranym profilom jest rzędu  $\Delta\tau = 0.2 \times 10^{-6}$ , co można uznać za wartość względnie małą.

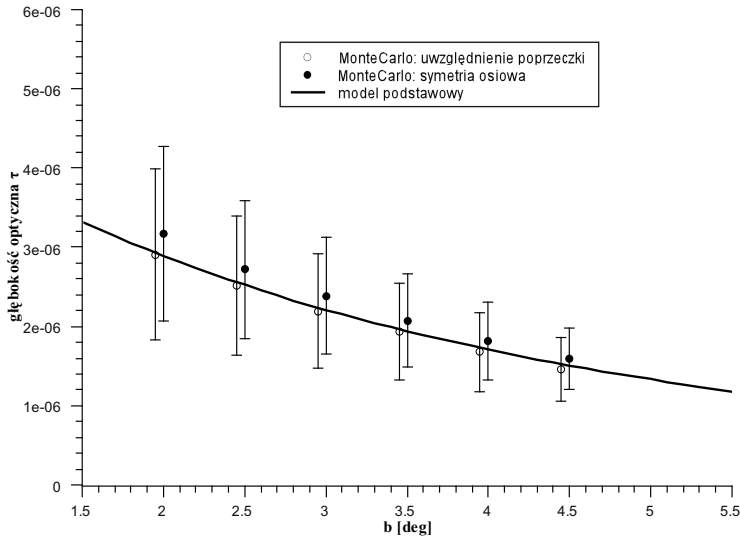
### 3.3 Symulacja Monte Carlo

Celem symulacji Monte Carlo jest wylosowanie parametrów  $(l, \chi)$  źródeł światła, dla ustalonej szerokości galaktycznej  $b$ . Do wykonania tego zadania stosujemy jednorodny rozkład  $|l| < 0.017$  (co odpowiada  $\pm 1^\circ$ ),  $|\chi| < 0.125$  (co odpowiada  $\pm 1$  kpc) oraz zewnętrzną zmienną o rozkładzie jednorodnym w przedziale  $\Sigma \in (0, \sigma(0))$ . Parametry  $(l, b, \chi)$  jednoznacznie wyznaczają położenie źródła  $\vec{x}_\otimes$ . Spośród wylosowanych trójek  $(l, \chi, \Sigma)$  wybieramy tylko te, dla których  $\Sigma < \sigma(R_\otimes)$ . W rezultacie położenie źródła  $\vec{x}_\otimes$  jest wylosowane z rozkładem prawdopodobieństwa proporcjonalnym do gęstości powierzchniowej  $\sigma(R)$ . Dla każdego źródła ze zbioru  $n = 10000$  źródeł wylosowanych tą metodą obliczamy głębokość optyczną za pomocą ogólnej formuły (3.1), a następnie wyznaczamy średnią głębokość optyczną próbki i jej odchylenie standardowe.

Powyższa procedura naśladuje sytuację, w której źródła są rozrzucone blisko centrum Galaktyki, a ich rozkład spełnia symetrię osiową. Dla pełnego zakresu długości galaktycznych  $l \in (-5^\circ, 5^\circ)$ , z którego pochodzą dane obserwacyjne, może być jednak ważne istnienie poprzeczki, która łamie symetrię osiową. Metoda Monte Carlo umożliwia wylosowanie położenia źródeł światła z rozkładem prawdopodobieństwa proporcjonalnym do objętościowej emisyjności źródeł  $\eta(\vec{x})$  (w jednostkach  $L_\odot \text{ pc}^{-3}$ ), w analogiczny sposób, jak dla funkcji  $\sigma(R)$ . Aby uwzględnić istnienie poprzeczki przyjmujemy za model centralnej części Galaktyki trójosiową elipsoidę G2 z pracy (Dwek et al. [57]), o objętościowej emisyjności źródeł zadanej funkcją:

$$\eta(x', y', z') = \eta_0 \exp \left[ -\frac{1}{2} \sqrt{\left[ \left( \frac{x'}{x_0} \right)^2 + \left( \frac{y'}{y_0} \right)^2 \right]^2 + \left( \frac{z'}{z_0} \right)^4} \right], \quad (3.6)$$

o parametrach  $x_0 = 2.01 \text{ kpc}$ ,  $y_0 = 0.62 \text{ kpc}$  i  $z_0 = 0.44 \text{ kpc}$ . Kartezjański układ współrzędnych  $[x', y', z']$  różni się od przyjętej przez nas w punkcie 3.1 konwencji  $[x, y, z]$ . Niezbędna transformacja współrzędnych jest następująca  $x' \rightarrow y$ ,  $y' \rightarrow -x$  oraz  $z' \rightarrow z$ .



Rysunek 3.8: Średnia głębokość optyczna oraz jej odchylenie standardowe dla próbek źródeł wylosowanych w metodzie Monte Carlo. *Pełne punkty* odnoszą się do próbki źródeł w zakresie  $|l| < 1^\circ$  wylosowanych z osiowosymetrycznym rozkładem prawdopodobieństwa proporcjonalnym do  $\sigma(R)$ . *Puste punkty* odpowiadają próbce w zakresie  $|l| < 5^\circ$  wylosowanej z rozkładem prawdopodobieństwa proporcjonalnym do  $\eta(\vec{x})$  z modelu G2 (Dwek et al.). Dla porównania przewidywanie modelu podstawowego przedstawia *krzywa ciągła*.



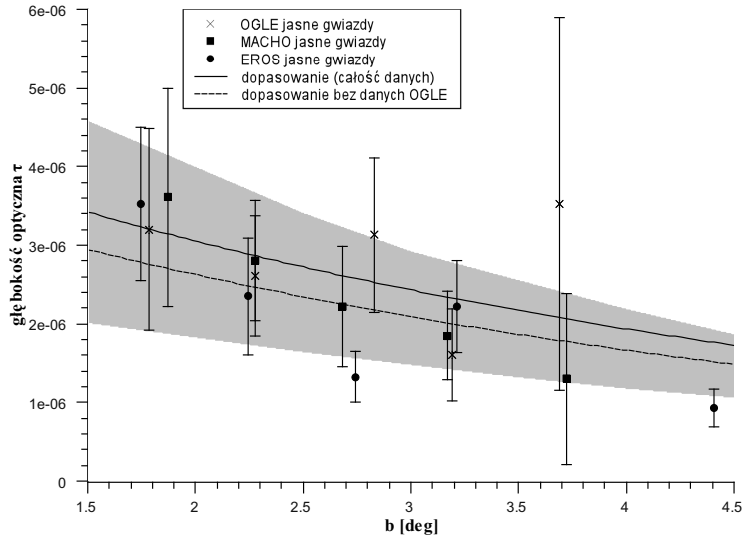
Rezultat przeprowadzonej symulacji jest przedstawiony na wykresie 3.8. Przewidywanie modelu podstawowego należy uznać za zgodne z wykonaną symulacją. Ponieważ opisana procedura Monte Carlo naśladuje rzeczywistą sytuację, w której źródła są rozrzucone wokół centrum Galaktyki, wartym podkreślenia jest fakt, że odchylenie standardowe wylosowanej próbki jest tego samego rzędu wielkości co obserwacyjne słupki błędów, które można znaleźć na poprzednich wykresach.

### 3.4 Oszacowanie ilości niewidocznych składników materii

W modelu globalnego dysku, dla krzywej rotacji  $B$ , masa zawarta w wewnętrznej części Galaktyki  $R < R_\odot$  wynosi  $M = 6.17 \times 10^{10} M_\odot$ . Nie można wykluczyć, że na część tej masy składają się także niewidoczne składniki materii, które podobnie jak wodór i hel nie wnoszą wkładu do głębokości optycznej. Aby oszacować ich ilość sparametryzujemy modelową głębokość optyczną jako  $\tau(b) = c_1 \exp(-c_2 |b|) \times 10^{-6}$ . Parametry  $c_1 = 4.23 \pm 0.65$  i  $c_2 = 0.228 \pm 0.056$  zostały wyznaczone w modelu podstawowym po odjęciu rozkładu gazu, z uwzględnieniem sferycznie symetrycznego bulge'u, podwójnego eksponencjalnego wertykalnego profilu gęstości dysku oraz przy użyciu krzywej rotacji  $B$ , której odpowiada cięższy dysk galaktyczny. Istnienie niewidocznych składników materii powoduje zawyżenie głębokości optycznej  $\tau(b)$  o czynnik  $\tau_{hidden}(b)$ , który można obliczyć podstawiając gęstość niewidocznych składników materii  $\rho_{hidden}(\vec{x})$  do całki (2.11). Dla uproszczenia przyjmujemy, że gęstość niewidocznych składników materii jest stałą frakcją gęstości odtworzonej w modelu globalnego dysku po odjęciu rozkładu gazu  $\rho_{hidden}(\vec{x}) = f \rho(\vec{x})$ . W tym przypadku  $\tau_{hidden}(b) = f \tau(b)$ . Współczynnik  $f$  można wyznaczyć metodą najmniejszych kwadratów, dokonując dopasowania do danych obserwacyjnych (podzbioru źródeł jasnych) następującego wyrażenia:

$$\tau = \tau(b) - \tau_{hidden}(b) = (1 - f) \tau(b) = (1 - f) \left( c_1 \exp(-c_2 |b|) \times 10^{-6} \right) \quad (3.7)$$

Wykonując dopasowanie dla danych otrzymanych przez kolaboracje OGLE, EROS i MACHO otrzymuje się  $f = -0.139 \pm 0.059$ . Wartość ujemna współczynnika  $f$  oznacza, że nie ma miejsca na niewidoczne składniki materii, a masa wyznaczona w modelu globalnego dysku jest niedoszacowana o wartość  $|fM| = (0.86 \pm 0.36) \times 10^{10} M_\odot$ . Wykonane dopasowanie jest przedstawione graficznie na wykresie 3.9. Punkty obserwacyjne pochodzące od kolaboracji OGLE mają dla niektórych szerokości galaktycznych większe



Rysunek 3.9: Dopasowanie funkcji  $(1 - f)$  ( $4.23 \exp(-0.228 |b|) \times 10^{-6}$ ) do danych obserwacyjnych OGLE, EROS i MACHO (*krzywa ciągła*) oraz do danych EROS i MACHO (*krzywa kreskowana*). Zaciemniony obszar przedstawia zakres jednego odchylenia standardowego obliczonego na podstawie symulacji Monte Carlo (z poprzeczką) opisanej w punkcie 3.3.

wartości i większe niepewności obserwacyjne od wyników pozostałych kolaboracji. Przy ograniczeniu się do danych EROS i MACHO otrzymuje się  $f = 0.018 \pm 0.067$ , co odpowiada masie niewidocznych składników materii  $|fM| = (0.11 \pm 0.41) \times 10^{10} M_{\odot}$ . Jest to wartość bardzo mała w porównaniu z masą  $M$ .

### 3.5 Test statystyczny

Otrzymane w poprzednim punkcie dopasowania dostarczają informacji o wartości oczekiwanej głębokości optycznej  $E[\tau(b)]$ , której można się spodziewać w modelu globalnego dysku po uwzględnieniu rozkładu gazu w Galaktyce, sferycznie symetrycznego bulge'u, podwójnego eksponencjalnego wertykalnego profilu gęstości w dysku i możliwości istnienia form materii, które podobnie jak wodór i hel mogą nie dawać wkładu do głębokości optycznej. Z drugiej strony symulacja Monte Carlo wykonana w punkcie 3.3 daje informację o wariancji modelu  $\text{var}[\tau(b)] = (\sigma_{\text{MonteCarlo}}(b))^2$ . W tym paragrafie dokonamy porównania modelowego rozkładu  $\{E[\tau(b)], \text{var}[\tau(b)]\}$  z rozkładem danych obserwacyjnych  $\{\bar{\tau}(b), \sigma^2(b)\}$ . Średnią  $\bar{\tau}(b)$  i odchylenie standardowe  $\sigma(b)$  dla danych pochodzących od różnych kolaboracji obliczamy w niewielkim zakre-

b [deg]	$E[\tau(b)]$ [ $10^{-6}$ ]	$\text{var}[\tau(b)]$ [ $10^{-12}$ ]	$\bar{\tau}(b)$ [ $10^{-6}$ ]	$\sigma^2(b)$ [ $10^{-12}$ ]	$z_b$
1.8	2.75	2.17	3.56	1.40	-0.97
2.2	2.49	1.44	2.57	0.56	-0.15
2.7	2.24	1.44	1.77	0.29	1.21
3.2	2.00	0.99	2.03	0.33	-0.07
3.7	1.78	0.66	1.30	1.18	0.44

Tabela 3.1: Wartość oczekiwana i odchylenie standardowe rozkładu modelowego oraz rozkładu danych obserwacyjnych EROS i MACHO, a także statystyka testowa  $z_b$ .

b [deg]	$E[\tau(b)]$ [ $10^{-6}$ ]	$\text{var}[\tau(b)]$ [ $10^{-12}$ ]	$\bar{\tau}(b)$ [ $10^{-6}$ ]	$\sigma^2(b)$ [ $10^{-12}$ ]	$z_b$
1.8	3.20	2.17	3.44	1.48	-0.35
2.2	2.92	1.44	2.59	0.57	0.76
2.7	2.60	1.44	2.22	0.47	0.94
3.2	2.33	0.99	1.89	0.33	1.30
3.7	2.07	0.66	2.41	2.98	-0.28

Tabela 3.2: Wartość oczekiwana i odchylenie standardowe rozkładu modelowego oraz rozkładu danych obserwacyjnych EROS, MACHO i OGLE, a także statystyka testowa  $z_b$ .

się szerokości  $b \pm 0.2$  deg.

Aby sprawdzić hipotezę zerową mówiącą, że wartości oczekiwane obydwu rozkładów są jednakowe  $E[\tau(b)] = \bar{\tau}(b)$ , należy obliczyć zmienną testową o rozkładzie normalnym  $N(0, 1)$ :

$$z_b = \frac{E[\tau(b)] - \bar{\tau}(b)}{\sqrt{\frac{\text{var}[\tau(b)]}{n} + \frac{\sigma^2(b)}{n_b}}}. \quad (3.8)$$

W powyższym wzorze  $n = 10000$  oznacza liczbę punktów wylosowanych w symulacji Monte Carlo, natomiast  $n_b$  to liczba punktów obserwacyjnych w zadanym obszarze  $b \pm 0.2$  deg. Wartości parametrów rozkładów oraz statystyki testowej są podane w tabelach 3.1 (bez danych OGLE) i 3.2 (wszystkie dane). Zarówno w jednym jak i w drugim przypadku, na rozsądnym poziomie istotności  $p = 0.01$  nie można odrzucić hipotezy zerowej o równości wartości oczekiwanych rozkładu modelowego i rozkładu danych obserwacyjnych. Dla największej wartości zmiennej testowej  $z_b = 1.3$  można odrzucić hipotezę zerową względem hipotezy alternatywnej  $E[\tau(b)] \neq \bar{\tau}(b)$  na poziomie istotności  $p = 0.19$ , jednakże w tym wypadku istnieje bardzo duże prawdopodobieństwo  $p = 0.19$  popełnienia błędu pierwszego rodzaju, czyli odrzucenia prawdziwej hipotezy zerowej. W związku z powyższym należy przyjąć, że model

globalnego dysku jest zgodny z pomiarami mikrosoczewkowania w kierunku centrum Galaktyki.

## 3.6 Podsumowanie

W rozdziale tym zjawisko mikrosoczewkowania w kierunku centrum Drogi Mlecznej zostało przedstawione w ramach modelu globalnego dysku. Początkowo rozważane było pierwsze przybliżenie, w którym źródła światła znajdują się dokładnie w centrum Galaktyki. Następnie rzeczywista sytuacja, w której źródła światła są rozrzucone wokół centrum Galaktyki została zasymulowana przy pomocy metody Monte Carlo, potwierdzając zasadność pierwszego przybliżenia. Zostały także wzięte pod uwagę takie czynniki jak istnienie sferycznie symetrycznego bulge'u oraz poprzeczki w centrum Galaktyki, a także wertykalna struktura dysku galaktycznego. Wykonane w punkcie 3.4 dopasowanie do danych obserwacyjnych wykazało, że masa dynamiczna, wyznaczona na podstawie krzywej rotacji w modelu globalnego dysku, po odjęciu wkładu pochodzącego od obłoków wodoru i helu niewiele odbiega od masy zwartych obiektów, potrzebnej do wytłumaczenia obserwowanej głębokości optycznej  $\tau(b)$ . Tym samym masa niewidocznych składników materii w obszarze  $0 < R < R_{\odot}$  jest zanedbywalna. Wreszcie test statystyczny wykonany w punkcie 3.5 dowodzi, że nie można odrzucić hipotezy o zgodności przewidywanej głębokości optycznej w modelu globalnego dysku z danymi obserwacyjnymi zebranymi przez kolaboracje EROS, MACHO oraz OGLE.

# Zakończenie

W pracy tej rozważano niestandardowy model galaktyki spiralnej jakim jest model globalnego dysku, w którym nie występuje sferycznie symetryczne halo ciemnej materii niebarionowej. Dokonano pozytywnej weryfikacji tego modelu dla Drogi Mlecznej, przy wykorzystaniu zjawiska mikrosoczewkowania grawitacyjnego w kierunku centrum Galaktyki. Tym samym cel pracy został osiągnięty. Zgodność przewidywań modelu z rozważanymi do tej pory danymi obserwacyjnymi zachęca do prowadzenia kolejnych badań nad modelem globalnego dysku.

# Bibliografia

- [1] Riess A. G. et al., (1998), AJ, 116, 1009
- [2] Perlmutter S. et al., (1999), ApJ, 517, 565
- [3] Lahav O., (2002), Class. Quant. Grav., 19, 3517
- [4] Frieman J., Turner M., Huterer D., (2008), Ann. Rev. Astron. Astrophys., 46, 385
- [5] Komatsu E. et al., (2011), ApJ Suppl., 192, 18
- [6] Tegmark M. et al., (2006), Phys. Rev. D, 74, 123507
- [7] Zwicky F., (1937), ApJ, 86, 217
- [8] Vikhlinin A., (2006), ApJ, 640, 691
- [9] Schneider P., Ehlers J., Falco E. E., *Gravitational lenses*, (1992), Springer-Verlag, ISBN 0-387-97070-3
- [10] Rubin V., Kent F. W., (1970), ApJ, 159, 379
- [11] McMillan P. J., (2011), MNRAS, 414, 2446
- [12] Springel V. et al., (2005), Nature, 435, 629
- [13] Toomre A., (1963), ApJ, 138, 385
- [14] Jałocha J., Bratek Ł., Kutschera M., (2008), ApJ, 679, 373
- [15] Bratek Ł., Jałocha J., Kutschera M., (2008), MNRAS, 391, 1373
- [16] Jałocha J., Bratek Ł., Kutschera M., Skindzier P., (2010), MNRAS, 406, 2805
- [17] Jałocha J., Bratek Ł., Kutschera M., Skindzier P., (2010), MNRAS, 407, 1689
- [18] Battaner E., Garrido J. L., Membrado M., Florido E., (1992), Nature, 360, 652
- [19] Jałocha J., Bratek Ł., Pękala J., Kutschera M., (2012), MNRAS, 421, 2155
- [20] Levine E. S., Heiles C., Blitz L., (2008), ApJ, 679, 1288
- [21] Moni Bidin C., Carraro G., Méndez R. A., Smith R., (2012), ApJ, 751, 30
- [22] Bovy J., Tremaine S., (2012), ApJ, 756, 89
- [23] Paczynski B., (1986), ApJ, 304, 1
- [24] Paczynski B., (1996), ARA&A, 34, 419

- [25] Alcock C. et al., (2000), ApJ, 542, 281
- [26] Wyrzykowski Ł. et al., (2011), MNRAS, 413, 493
- [27] Sikora S., Bratek Ł., Jałocha J., Kutschera M., (2012), A&A, 546, A126
- [28] Binney J., Tremaine S., *Galactic dynamics*, (1994), Princeton University Press
- [29] Sofue Y., Honma M., Omodaka T., (2009), PASJ, 61, 227
- [30] Sofue Y. et al., (1999), ApJ, 523, 136
- [31] Burton W. B., Gordon M. A., (1978), A&A, 63, 7
- [32] Clemens D. P., (1985), ApJ, 295, 422
- [33] Fich M., Blitz L., Stark A. A., (1989), ApJ, 342, 272
- [34] Demers S., Battinelli P., (2007), A&A, 473, 143
- [35] Blitz L., Fich M., Stark A. A., (1982), ApJS, 49, 183
- [36] Honma M., Sofue Y., (1997), PASJ, 49, 453
- [37] Moniez M., (2010), Gen. Relat. Gravit., 42, 2047
- [38] Popowski P., Griest K., Thomas C. L., et al. (MACHO Collaboration), (2005), ApJ, 631, 879
- [39] Hamadache C., Le Guillou L., Tisserand P., et al. (EROS Collaboration), (2006), A&A, 454, 185
- [40] Sumi T., Woźniak P. R., Udalski A., et al. (OGLE Collaboration), (2006), ApJ, 636, 240
- [41] Sumi T., Abe F., Bond I. A., et al. (MOA Collaboration), (2003), ApJ, 591, 204
- [42] Kuijken K., (1997), ApJ, 486, L19
- [43] Binney J., Bissantz N., Gerhard O., (2000), ApJ, 537, L99
- [44] Alard C. (1997), A&A, 321, 424
- [45] Smith M. C., Woźniak P., Mao S., Sumi T., (2007), MNRAS, 380, 805
- [46] Bissantz N., Gerhard O., (2002), MNRAS, 330, 591
- [47] Han C., Gould A., (2003), ApJ, 592, 172
- [48] Yoon-Hyun Ryu et al., (2008), ApJ, 689, 1078
- [49] Bissantz N., Debattista V. P., Gerhard O., (2004), ApJ, 601, L155
- [50] Trott C. M. et al., (2010), MNRAS, 401, 1540
- [51] Gould A., Bahcall J. N., Flynn C., (1997), ApJ, 482, 913
- [52] Misiriotis A., Xilouris E. M., Papamastorakis J., Boumis P, Goudis C. D., (2006), A&A, 459, 113
- [53] Avedisova V. S., (2005), Astron. Rep., 49, 435
- [54] Derue F., Afonso C., Alard C. et al., (1999), A&A, 473, 143
- [55] Eisenhauer F., Genzel R., Alexander T. et al., (2005), ApJ, 628, 246
- [56] vanAltena W. F. et al., *Dark Matter in Galaxies*, (2004), IAU Symp., 220, 201
- [57] Dwek E. et al., (1995), ApJ, 445, 716