

Dr hab. Krzysztof Cichy, prof. UAM  
Wydział Fizyki  
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu  
ul. Uniwersytetu Poznańskiego 2  
61-614 Poznań

Poznań, 10 stycznia 2021 r.

## **Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Anny Francuz** **pt. *Determining topological order with tensor networks***

wykonanej w Instytucie Fizyki Teoretycznej Uniwersytetu Jagiellońskiego  
pod kierunkiem prof. Jacka Dziarmagi

Przedstawiona do recenzji rozprawa doktorska oparta jest na zbiorze trzech artykułów. Dwa z nich opublikowano w 2020 roku w renomowanym czasopiśmie Physical Review B (vol. 101 (2020) 041108(R), vol. 102 (2020) 235112), z czego jedną jako prestiżowe i selektywne Rapid Communication. Ostatnia praca opublikowana została w 2021 roku, również w Physical Review B (vol. 104 (2021) 195152). Doktorantka jest pierwszym autorem we wszystkich publikacjach. Współautorem w każdej z nich jest Promotor Doktorantki, a w dwóch pracach występuje dodatkowych dwóch współautorów z Perimeter Institute (G. Vidal), Los Alamos National Laboratory (Ł. Cincio) oraz Uniwersytetu w Ghent (L. Lootens i F. Verstraete). Podkreślić należy, że Physical Review B należy do najlepszych czasopism fizycznych z obszaru badawczego Autorów i fakt opublikowania artykułów w nim gwarantuje aktualność i ważność tematyki naukowej i wysoki poziom samych badań.

Wspomnianym wyżej publikacjom towarzyszy wprowadzenie, dwa rozdziały omawiające zwięźle tematykę fizyczną rozprawy oraz zastosowaną metodę badawczą, a także krótkie podsumowanie wyników z artykułów. Rozdziały wstępne odwołują się do spisu literatury obejmującego 119 pozycji. Pierwszy z nich wprowadza pojęcie porządku topologicznego i jego podstawowe przejawy w układach fizycznych, związane z długozasięgowym splątaniem i ułamkową statystyką kwantową. Przedstawione są też narzędzia matematyczne służące do charakteryzacji faz topologicznie uporządkowanych. Drugi rozdział wstępny omawia techniki sieci tensorowych, jako szczególnie nadające się do opisu porządku topologicznego. Wprowadzone są podstawowe algorytmy wykorzystane w badaniach wchodzących w skład rozprawy, a także sposób opisu w ramach sieci tensorowych dwóch kluczowych dla faz topologicznych obszarów, splątania i symetrii. Rozdział kończy krótki przegląd artykułów badających różne aspekty porządku topologicznego za pomocą

podejścia sieci tensorowych. Całe wprowadzenie jest napisane w bardzo przemyślany sposób, z licznymi przykładami ułatwiającymi zrozumienie niektórych kluczowych pojęć w intuicyjny sposób, tam gdzie jest to możliwe. Podkreślić warto dobry dobór materiału do tych rozdziałów, wskazujący na nieoczywistą umiejętność wskazania najważniejszych z punktu widzenia własnej pracy zagadnień z rozległego obszaru teorii i metodyki. Od strony formalno-redakcyjnej, wprowadzenie spełnia wszelkie standardy dla tego typu tekstów. Napisane jest prawidłowym naukowym językiem angielskim. Stylistyka jest bardzo dojrzała i porównywalna ze standardową stylistyką artykułów naukowych. Uważam, że warto to podkreślić, gdyż nie jest to oczywiste na tym etapie kariery naukowej. Bardzo nieliczne usterki językowe lub interpunkcyjne nie są nawet warte wymieniania i nie obniżają w żaden sposób oceny.

Przechodząc do zasadniczej części rozprawy, czyli trzech artykułów z *Physical Review B*, zacznę od uwag ogólnych. Wszystkie dotyczą bardzo nietrywialnego zagadnienia wyznaczenia porządku topologicznego w silnie skorelowanych układach dwuwymiarowych, z wykorzystaniem tensorowosieciowej metody PEPS (*Projected Entangled Pair States*) dla nieskończonych układów. Fazy topologicznie uporządkowane cieszą się sporym zainteresowaniem społeczności fizyków, w dużej mierze ze względu na fakt, że pojawiają się w nich wzbudzenia anyonowe niepodlegające ani statystyce Fermiego-Diraca, ani Bosego-Einsteina. Co istotne, anyony mogą być podstawą działania topologicznych komputerów kwantowych, w przeciwieństwie do „zwykłych” komputerów kwantowych odpornych na błędy. Nawiasem mówiąc, to bardzo ważne potencjalne zastosowanie, cytowane przez Doktorantkę i jej Współautorów jako jedna z motywacji ich prac, jest przedmiotem sporych kontrowersji w środowisku. Jest to związane z kilkoma niepotwierdzonymi pracami pretendującymi do bycia dowodami na stworzenie odpowiednich quasi-cząstek i doprowadziło nawet do wycofania jednej z nich z *Nature*. Oczywiście, nie ma to żadnych implikacji dla pracy Doktorantki, lecz raczej pokazuje jak trudna jest to dziedzina, szczególnie eksperymentalnie. Jeśli chodzi o metodę, PEPS jest naturalnym uogólnieniem metody MPS (*Matrix Product States*), która doprowadziła do najbardziej precyzyjnych wyników dla wielociałowych układów jednowymiarowych oraz (1+1)-wymiarowych kwantowych teorii pola. Mimo naturalności tego uogólnienia, jej zastosowanie jest dalece nietrywialne i technicznie bardzo wymagające. Już samo opanowanie tej metody jest bardzo wartościowym osiągnięciem, otwierającym szerokie perspektywy naukowe. Wyciągnięcie z jej pomocą ważnych rezultatów fizycznych podnosi dodatkowo wartość tego osiągnięcia.

W pierwszej pracy, napisanej wspólnie z Promotorem oraz G. Vidalem i Ł. Cincio, Doktorantka wprowadziła metodologię badania abelowego porządku topologicznego w silnie

skorelowanych układach dwuwymiarowych. Jest to związane z potrzebą określenia jakie mikroskopowe Hamiltoniany prowadzą do takiego porządku. Do problemu tego standardowo stosowano sieci tensorowe już wcześniej, ale w wariacie tradycyjnego MPS (czyli efektywnie znanej od początku lat 90. *Density Matrix Renormalization Group* (DMRG) S. White'a) na długich i cienkich cylindrach. Oczywiście, podejście takie narusza dwuwymiarowe *area law* i splątanie w kierunku poprzecznym prowadzi do wykładniczego wzrostu kosztu obliczeniowego wraz z rosnącą szerokością cylindra. W związku z tym, cylindry takie typowo mają szerokość tylko kilkunastu węzłów sieci, co pozwala na badanie długości korelacji rzędu tylko 1-2 węzłów. Doktorantka zastosowała więc prawidłowy dla dwóch wymiarów *ansatz* tensorowy, tzn. PEPS, co pozwala uniknąć kluczowych ograniczeń DMRG na cylindrach. Konkretnie, wykorzystano wariant PEPS w granicy nieskończonej wielkości układu (*infinite* PEPS, iPEPS). Wariacyjnie zoptymalizowany iPEPS opisuje naturalnie stany podstawowe z superpozycją strumieni anyonowych. Kluczowym elementem metody Doktorantki ze Współautorami jest sposób otrzymania sieci tensorowej dla każdego stanu podstawowego z dobrze zdefiniowanym strumieniem. Z takich sieci można wtedy wyznaczyć topologiczne macierze  $S$  i  $T$ , pozwalające na scharakteryzowanie porządku topologicznego. Pokazano, że metoda z tej pracy jest w stanie odtworzyć pewne wyniki analityczne dla tych macierzy, a następnie Autorzy skoncentrowali się na fazie *toric code* zaburzonego *string-net model* oraz modelu Kitaeva na sieci plastra miodu. W pierwszym przypadku wykazano, że metoda pozwala otrzymać dokładne wyniki nawet w okolicy kwantowego przejścia fazowego do fazy ferromagnetycznej – otrzymano wyraźny pik długości korelacji, dochodzącej do 25 węzłów sieci. Stanowi to demonstrację *explicit* przewagi metody Doktorantki i Współautorów nad DMRG na cienkich cylindrach. W przypadku drugiego modelu również uzyskano dobrą precyzję opisu, odpowiednią do prawidłowej charakteryzacji porządku topologicznego.

Druga praca poświęcona jest uogólnieniu metody z pierwszej pracy na przypadek topologicznego porządku nieabelowego. Autorzy przeprowadzają czytelnika przez kolejne elementy składowe algorytmu i w pedagogiczny sposób pokazują różnice pomiędzy przypadkiem abelowego *toric code* i rozważanymi modelami nieabelowymi, *string-nets* Fibonacciego i Isinga. Metoda pozwala na wyznaczenie m.in. topologicznej entropii splątania Renyi'ego, jednej z ważnych charakterystyk porządku topologicznego. Ostatecznie, wszystkie elementy składowe algorytmu prowadzą do otrzymania macierzy  $S$  i  $T$  z bardzo dobrą precyzją numeryczną dla wszystkich rozważanych modeli.

Mimo że macierze  $S$  i  $T$ , kodujące względną i własną statystykę anyonów, determinują wraz z chiralnym ładunkiem centralnym  $c$  ważne charakterystyki porządku topo-

logicznego, wiadome jest, że w niektórych przypadkach nie określają go w pełni, tzn. mogą istnieć różne porządki topologiczne opisywane tym samym zbiorem  $(S, T, c)$ . W pracy Doktorantki dostarczyło to motywacji do rozważenia jeszcze jednego sposobu analizy porządku topologicznego w ramach teorii kategorii. Określenie tzw.  $F$ -symboli kategorii fuzji daje bezwzględnie jednoznaczny charakterystykę tego porządku. Algorytm prowadzący do ich wyznaczenia został przedstawiony i przetestowany w trzeciej pracy wchodzącej w skład rozprawy doktorskiej. Podobnie jak w dwóch pierwszych pracach, pierwszym krokiem jest wyznaczenie symetrii iMPO (*infinite Matrix Product Operators*). Iloczyny tych operatorów realizują reguły fuzji odpowiednich anyonów danej unitarnej kategorii fuzji. Zastosowanie podstawowego twierdzenia MPS pozwala dokonać klasyfikacji porządku topologicznego przez znalezienie odpowiednich transformacji cechowania (tzw. *zipperów*), kodujących informacje dotyczące własności fuzji anyonów i pozwalających na ich wyrażenie za pomocą  $F$ -symboli unitarnej kategorii fuzji. Z jednoznacznie charakteryzujących porządek topologiczny  $F$ -symboli można, jak pokazuje Doktorantka ze Współautorami, otrzymać także macierze  $S$  i  $T$  kodujące statystykę anyonów. Zaletą tej alternatywnej metody wyznaczania tych macierzy jest jednak potencjalnie większa stabilność numeryczna związana z wymiarowością sieci tensorowej – po znalezieniu symetrii wyrażonych przez operatory iMPO dalsza numeryka staje się jednowymiarowa i konsekwentnie mniej złożona obliczeniowo. Co istotne, Doktorantka zastosowała zaproponowany algorytm do wielu konkretnych modeli zarówno z abelowym, jak i nieabelowym porządkiem topologicznym i wykazała, że dokładność numeryczna jest porównywalna z metodami z pierwszych dwóch prac lub nawet o rząd wielkości lepsza w pewnych przypadkach.

Rozważając ostateczny wynik badań Doktorantki wyrażony w trzech pracach tworzących rozprawę nasuwają się następujące uwagi. Po pierwsze, postawiony problem badawczy był niewątpliwie ponadprzeciętnie trudny i podobnie ważny w tej dziedzinie badań. W mojej ocenie, trudność ta wyraża się zarówno na poziomie koncepcyjnym, jak i metodologicznym. Kluczem do sukcesu było więc zastosowanie odpowiedniej metody i Doktorantka słusznie poszła w kierunku technik sieci tensorowych. Najprostsze sieci tensorowe, MPS/DMRG, doprowadziły do ogromnych sukcesów w opisie układów jednowymiarowych i do pewnego stopnia dwuwymiarowych. Miały też istotny wkład w poprzedzających badania Doktorantki próbach określania porządku topologicznego, ale ich inherentna jednowymiarowość, wyrażająca się w odpowiednim skalowaniu entropii splątania, stanowiła naturalne i niemożliwe do obejścia w praktyce ograniczenie na jakość opisu układów dwuwymiarowych. Z tego względu, wybraną metodą stało się uogólnienie MPS na dowolną

liczbę wymiarów, w szczególności 2 wymiary, czyli PEPS. Nie bez powodu jednak problem wyznaczania porządku topologicznego był rozważany wcześniej jedynie w ramach DMRG na stosunkowo wąskich cylindrach. Zastosowanie PEPS komplikuje algorytmy bardzo znacząco i wymaga bardzo dobrych zdolności programistycznych na etapie implementacji. Ostatecznie więc, Doktorantka rozważała trudny koncepcyjnie problem badawczy z wykorzystaniem trudnej technicznie metody. Uzyskanie tak dobrych wyników dla wielu modeli należy uznać więc za duży sukces i ocenić zdecydowanie ponadprzeciętnie. Dodatkowo, traktując etap doktoratu jako wstęp do kariery naukowej, nie mam wątpliwości, że Doktorantka jest świetnie przygotowana do jej kontynuacji, zdobywszy dużą wiedzę fizyczną i biegłość w posługiwaniu się potężnym narzędziem numerycznym. Pozwala to myśleć o „zaatakowaniu” innych trudnych problemów fizycznych. Mimo że do rozprawy nie jest dołączona kompletna lista publikacji Pani mgr Francuz, sprawdzenie jej w internetowych bazach danych ujawnia, że istotnie Doktorantka jest zainteresowana również innymi tematami badawczymi i odnosi na ich polu dalsze sukcesy publikacyjne. Oprócz trzech publikacji w Physical Review B wchodzących w skład rozprawy, jest współautorką trzech kolejnych w tym samym czasopiśmie. Dwie z nich poświęcone są nierównowagowej dynamice modelu Isinga w polu poprzecznym, gdzie manifestuje się mechanizm typu Kibble’a-Żurka, a trzecia dotyczy analizy modelu Kitaeva-Heisenberga za pomocą sieci tensorowych. Ten ostatni artykuł wydaje się mieć znaczenie dla późniejszych badań w ramach rozprawy doktorskiej, jako że można podejrzewać, że dał on Doktorantce ważne doświadczenie w zastosowaniu metody iPEPS. Profil badawczy Pani mgr Francuz uzupełnia jej najwcześniejsza publikacja, dla odmiany w Physical Review D, poświęcona zagadnieniu saturacji gluonowej w nieelastycznych zderzeniach proton-proton w CERNowskim eksperymencie ALICE. Realizacja takiego całkowicie innego w porównaniu z pozostałymi tematami badawczego dowodzi szerokich horyzontów Doktorantki i umiejętności szybkiego i skutecznego opanowania podstaw koncepcyjnych i praktycznych różnorodnych zagadnień. Ostatecznie dorobek naukowy na tym etapie kariery jest zdecydowanie ponadprzeciętny, zarówno jak chodzi o ilość publikacji, jak i ich jakość. Z całokształtu działalności naukowej Doktorantki wyłania się ostatecznie obraz zdolnego, młodego naukowca o szerokich zainteresowaniach, wyposażonego w znajomość bardzo dobrych metod badawczych i zdolnego do konstruktywnej współpracy z wieloma fizykami należącymi do liderów ważnych i aktualnych trendów badawczych. W mojej opinii, osiągnięcie takiego statusu na finiszu pracy doktorskiej jest osiągnięciem bez wątpienia ponadstandardowym.

Rozprawa doktorska Pani mgr Anny Francuz z pewnością spełnia więc, w mojej ocenie z nadstatkiem, kryteria stawiane takim rozprawom przez ustawę „Prawo o szkolnictwie

wyższym i nauce” (Dz. U. z 2020 r., poz. 85 z późniejszymi zmianami). Wnoszę więc o dopuszczenie Doktorantki do dalszych etapów przewodu doktorskiego. Ze względu na poziom trudności tematyki badawczej i zastosowanych metod, a także bardzo przekonujące wyniki, mogące aspirować do najlepszych na świecie dla rozważanego obszaru badawczego, wnioskuję też o wyróżnienie rozprawy.



.....  
Krzysztof Cichy