

dr hab. Zbigniew Puchała
Instytut Informatyki
Teoretycznej i Stosowanej PAN
ul. Bałtycka 5, 44-100 Gliwice

Gliwice, 23 luty 2022 r.

Recenzja rozprawy doktorskiej mgra Wojciecha Bruzdy „Structured Unitary Matrices and Quantum Entanglement”

Uwagi wstępne

Forma drukowana recenzowanej rozprawy obejmuje 116 stron, dodatkowo znajduje się załącznik zawierający artykuły naukowe. Praca jest napisana w języku angielskim i zawiera: • 5 rozdziałów, • podsumowanie, • wykaz literatury, • załącznik **A**, zawierający artykuły naukowe na podstawie których rozprawa została przygotowana.

Tytuł pracy oddaje jej zawartość a przyjęty układ pracy jest właściwy. Zawartość kolejnych rozdziałów, stanowią wyniki wpisujące się w tematykę analizy operatorów unitarnych oraz splątania kwantowego, i są ze sobą tematycznie związane. Treść rozdziałów jest zgodna z nadanymi im tytułami. Praca zawiera wyniki opublikowane wcześniej przez Autora w formie artykułów naukowych:

- [1] W. Bruzda, D. Goyeneche, K. Życzkowski, Quantum Measurements with Prescribed Symmetry, *Phys. Rev. A* 96, 022105 (2017).
- [2] W. Bruzda, Extension of the Set of Complex Hadamard Matrices of Size 8, *Math. Comput. Sci.* 12(4), 459–464 (2018).

W formie artykułów naukowych złożonych do publikacji:

- [3] S. Ahmad Rather, A. Burchardt, W. Bruzda, G. Rajchel-Mieldzióć, A. Lakshmi-narayan, K. Życzkowski, Thirty-six Entangled Officers of Euler, arXiv:2104.05122 (2021).

- [4] D. Goyeneche, W. Bruzda, O. Turek, D. Alsina, K. Życzkowski, Local Hidden Variable Value Without Optimization Procedures, arXiv:2004.00695 (2021).

W formie artykułu naukowego będącego w przygotowaniu:

- [5] W. Bruzda, Isolated Complex Hadamard Matrices, in preparation, (2021).

Przedmiot rozprawy

Po wprowadzeniu, w rozdziale drugim Autor rozważa problem klasyfikacji macierzy zespolonych Hadamarda, przy pomocy niezmienników, takich jak *defekt* macierzy czy *zbiór Haagerupa*. Następnie przedstawia metody analityczne oraz numeryczne umożliwiające odkrycie nowych przykładów macierzy Hadamarda. Autor przedstawił nową rodzinę macierzy Hadamarda $T_8^{(1)}$ oraz zidentyfikował izolowany punkt $T_9^{(0)}$. Doktorant następnie stawia przypuszczenie, dotyczące istnienia ciągu izolowanych zespolonych macierzy Hadamarda w nieskończenie wielu wymiarach.

W rozdziale trzecim Doktorant omawia *ograniczony defekt* macierzy (ang. *restricted defect*), który jest analogiem defektu wprowadzonego wcześniej dla ogólnych macierzy unitarnych. Tym razem jednak Doktorant stosuje wprowadzone pojęcie do macierzy unitarnych, które dodatkowo są Hermitowskie oraz mają stałą diagonalę. Korzystając z tegoż narzędzia Autor bada możliwość wprowadzenia wolnych parametrów do zadanego pomiaru kwantowego i formułuje twierdzenia mówiące, że:

- maksymalne zestawy baz wzajemnie nieobciążonych w wymiarach 4, 8, 9 oraz 16 są izolowane,
- pomiary typu *SIC-POVM* w wymiarach 4, 5, 6, ..., 16 są izolowane.

W rozdziale czwartym Autor przedstawia twierdzenie o istnieniu stanów splątanych typu *AME*(4, 6) (ang. *absolutely maximally entangled state*), czyli czystych stanów łącznych na czterech sześciowymiarowych podsystemach, takich że redukcje dowolnych dwóch systemów pozostawiają układ w stanie maksymalnie mieszanym. Jest to rozwiązanie jednego z otwartych problemów w teorii informacji kwantowej, związanego z problemem 36 oficerów Eulera. Autor opisuje metodę numeryczną poszukiwania stanów typu *AME* oraz przedstawia znaleziony stan w postaci analitycznej.

W rozdziale piątym Autor omawia związek maksymalnej wartości pewnych nierówności Bella w modelu zmiennych ukrytych, z nadmiarem macierzy (ang. *excess of a matrix*). Powyższy związek może znaleźć zastosowania w badaniu wielu rodzin nierówności Bella. Dodatkowo Doktorant przedstawia serię przykładów

nowych ścisłych nierówności Bella i stawia przypuszczenie dotyczące możliwości tworzenia tego typu nierówności przy pomocy pewnych macierzy Hadamarda.

Uwagi techniczne nie wpływające na część merytoryczną

Przedstawiona rozprawa ma charakter matematyczny, jednakże pojawiają się miejsca, gdzie można znaleźć niedociągnięcia formalne, przykładowo:

- Na stronie 47, pojawia się kontrowersyjne stwierdzenie „... *tensor product* $\mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2}$ *is not equal to* $\mathbb{C}^{d_1 d_2}$...”.

Według obowiązującej konwencji napis $\mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2}$ należy interpretować jako przestrzeń liniową rozpiętą przez tensory elementarne, wówczas oczywiście mamy

$$\mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2} \simeq \mathbb{C}^{d_1 d_2}, \quad (1)$$

gdzie \simeq oznacza istnienie izometrycznego izomorfizmu pomiędzy lewą a prawą stroną. Z treści można się domyślić, iż Doktorant chciał przypomnieć czytelnikowi oczywisty fakt, że w przypadku gdy $d_1, d_2 > 1$ tensory elementarne nie tworzą całej przestrzeni.

- Na stronie 48, pojawia się stwierdzenie „... *operators* $\rho_{d_j, k}$ *belong to* \mathcal{H}_{d_j} ...”, ponieważ w pracy niejawnie założone jest, że elementy przestrzeni $\mathcal{H}_{d_j} = \mathbb{C}^{d_j}$ są wektorami (kolumnowymi), więc zacytowane stwierdzenie wydaje się sprzeczne. Można się domyślić, że Doktorant miał na myśli $\rho_{d_j, k} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{d_j})$, gdzie $\mathcal{L}(X)$ oznacza przestrzeń liniowych operatorów na działających z przestrzeni X w przestrzeń X .

Ocena końcowa i wnioski

Rozprawa doktorska mgra Wojciecha Bruzdy pt.: „*Structured Unitary Matrices and Quantum Entanglement*” dotyczy ważnego zarówno poznawczo jak i aplikacyjnie problemu oraz stanowi wartościowe osiągnięcie naukowe Autora. Uzyskane wyniki można rozpatrywać z punktu widzenia potencjalnych zastosowań w innych gałęziach teorii informacji kwantowej, takich jak kwantowa korekcja błędów czy analiza kwantowej nielokalności.

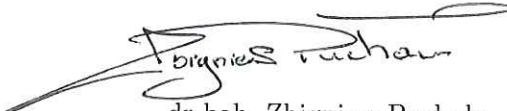
Doktorant do rozwiązania postawionych problemów użył właściwych metod. Oryginalnymi osiągnięciami badawczymi Autora są:

- Przedstawienie nowej rodziny macierzy Hadamarda $T_8^{(1)}$ oraz zidentyfikowanie izolowanego punktu $T_9^{(0)}$.

- Wykazanie, że maksymalne zestawy baz wzajemnie nieobciążonych w wymiarach 4, 8, 9 oraz 16 są izolowane,
- Wykazanie, że pomiary typu *SIC-POVM* w wymiarach 4, 5, 6, ..., 16 są izolowane.
- Przedstawienie analitycznej postaci stanu $AME(4, 6)$.

Jest to wkład mgra Wojciecha Bruzdy w rozwój dyscypliny naukowej – nauki fizyczne. Rozległość przeprowadzonej analizy uzasadniają stwierdzenie, że Autor posiada wiedzę teoretyczną, zdolności koncepcyjne oraz umiejętności do rozwiązywania naukowych problemów badawczych.

Uważam że przedstawiona rozprawa spełnia wymogi ustawowe stawiane pracom doktorskim w dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych w dyscyplinie nauki fizyczne i wnoszę o przyjęcie jej przez Radę Dyscypliny Nauki fizyczne Uniwersytetu Jagiellońskiego w Krakowie, oraz o dopuszczenie do publicznej obrony.



dr hab. Zbigniew Puchała