Warszawa, 25.04.2022 r.

Dr hab. Jarosław Mederski, prof. IMPAN

Recenzja rozprawy doktorskiej
mgra Filipa Ficka
zatytułowanej
Nonlinear Schrödinger equations with trapping potentials in higher dimensions

Niniejsza recenzja dotyczy rozprawy doktorskiej mgr. Filipa Ficka zatytułowanej *Nonlinear Schrödinger equations with trapping potentials in higher dimensions* przygotowanej na Wydziale Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej Uniwersytetu Jagiellońskiego w Krakowie pod kierunkiem prof. dr. hab. Piotra Bizonia.

Rozprawa została napisana w języku angielskim i składa się z sześciu przejrzystych rozdziałów oraz czterech dodatków. Zawiera bibliografię liczącą 121 pozycji.

Rozprawa bazuje na wynikach uzyskanych w następujących trzech pracach:

- [$F1$] P. Bizoń, O. Evnin, F. Ficek: *A nonrelativistic limit for AdS perturbations*, Journal of High Energy Physics 12, 112 (2018),
- [$F2$] P. Bizoń, F. Ficek, D. E. Pelinovsky, S. Sobieszek: *Ground state in the energy super-critical Gross-Pitaevskii equation with a harmonic potential*, Nonlinear Analysis 210, 112358 (2021),
- [$F3$] F. Ficek, *Schrödinger-Newton-Hooke system in higher dimensions: Stationary states*, Physical Review D 103, 104062 (2021).

Pan Filip Ficek opublikował również 4 inne współautorskie prace, jedna w Physical Review Letters (2018), jedna w Annalen der Physik (2019) oraz dwie w Physical Review A (2019 oraz 2022), które nie są uwzględnione w rozprawie doktorskiej. Prace opublikowane są w bardzo dobrych czasopismach dotyczących fizyki i matematyki. Biorąc pod uwagę, że jest to rozprawa doktorska, to liczba opublikowanych prac zasługuje niewątpliwie na uznanie na tym etapie kariery naukowej.

Tematyka rozprawy dotyczy dynamicznie rozwijanego obszaru nielokalnych nieliniowych równań Schrödingera, które są istotne z punktu widzenia fizyki i trudne pod względem matematycznym. Rozprawa skupia się na równaniu

$$i\partial_t\psi = -\Delta\psi + |x|^2\psi - \Big(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\psi(t,y)|^2}{|x-y|^{d-2}}\,dy\Big)\psi, \tag{1}$$

które można znaleźć w literaturze pod różnymi nazwami, takimi jak równanie Schrödingera-Newtona, Schrödingera-Poissona, Hartree lub Choquarda. W rozprawie zagadnienie (1) jest nazywane równaniem Schrödingera-Newtona-Hooke'a, w skrócie SNH. Istotną cechą tego zagadnienia jest koercytywny potencjał harmoniczny $|x|^2$. Główną trudnością, która kryje się w tym równaniu jest *nielokalność* w nielinowej ostatniej składowej (1), która zależy od wartości ψ w całej przestrzeni $\mathbb{R}^d$. W świetle nierówności Hardy'ego-Littelwooda-Sobolewa, składnik nielokalny jest całkowalna w funkcjonale energii, gdy $\psi(t,\cdot)$ jest całkowalne z wykładnikiem $\frac{4d}{d+2}$. Jeśli $d \leq 5$, to nieliniowość jest podkrytyczna względem wykładnika Sobolewa, gdy $d = 6$, to wzrost jest krytyczny ($\frac{4d}{d+2} = \frac{2d}{d-2}$), zaś $d \geq 5$ powoduje wzrost nadkrytyczny. Ogólnie mówiąc, gdy $d \geq 6$, to problem jest najtrudniejszy do rozwiązania pod względem analitycznym, np. metody wariacyjne nie są na ogól dostępne w przypadku nadkrytycznym ze względu na brak zanurzeń przestrzeni Sobolewa $H^1(\mathbb{R}^d)$ w $L^{\frac{4d}{d+2}}(\mathbb{R}^d)$ dla $d > 6$. Rozprawa doktorska w głównej mierze dotyczy najtrudniejszej sytuacji w wymiarach $d \geq 6$.

Opis rozprawy doktorskiej oraz głównych wyników.

Rozdział 1 zawiera krótkie wprowadzenie do zagadnienia SNH, motywację fizyczną oraz cele rozprawy, które są ambitne, dobrze przedstawione i zachęcają czytelnika do dalszej lektury.

Rozdział 2 prezentuje motywację fizyczną dla zagadnienia (1) w wymiarach $d \geq 4$. Autor wyprowadza równanie SNH jako nierelatywistyczną granicę niewielkich zaburzeń czasoprzestrzeni anty-de Sittera (AdS). Startując od równania Kleina-Gordona i równania Einsteina, w granicy $c \to \infty$, autor otrzymuje po przeskalowaniu układ dwóch równań postaci

$$\begin{cases} i\partial_t \psi = -\Delta\psi + |x|^2\psi + v\psi, \\ \Delta v = |\psi|^2. \end{cases} \tag{2}$$

Rozwiązując drugie równanie i wstawiając do pierwszego równania otrzymujemy nielokalny problem (1). Ten rozdział bazuje na pracy [F1]. Jest to kawałek ciekawej fizyki teoretycznej, który został zaprezentowany w przejrzystym i ścisłym formalizmie matematycznym.

Rozdział 3 wyjaśnia pojęcie podkrytyczności, krytyczności oraz nadkrytyczności. Autor przedstawia problem poszukiwania rozwiązań stacjonarnych $\psi(t,x) = e^{-i\omega t}u(x)$ dla SNH w ujęciu wariacyjnym. Autor definiuje funkcjonał energii dla rozwiązań stacjonarnych oraz wprowadza przestrzeń

$$\Sigma := \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^d) : |x||\psi| \in L^1(\mathbb{R}^d) \right\}.$$

Jeśli $d \geq 3$, to Σ zanurza się w sposób zwarty w $L^q(\mathbb{R}^N)$ dla $1 \leq q < \frac{2d}{d-2}$, a w szczególności w $L^{\frac{4d}{d+2}}(\mathbb{R}^d)$ dla $3 \leq d \leq 5$. Na str. 27, linia 18, wkradł się drobny błąd, tzn. nie istnieje zwarte zanurzenie dla $q = \frac{2d}{d-2}$.

W rozdziale 4, opartym na [F2] i [F3], zaprezentowane są główne wyniki rozprawy dotyczące istnienia stacjonarnych rozwiązań (1). W świetle twierdzenia Busca i Sirakowa każde klasyczne rozwiązanie (u, v) układu (2), takie, że $u > 0 > v$ oraz $u(x), v(x) \to 0$ dla $|x| \to \infty$ jest radialnie symetryczne względem jakiegoś punktu. Dlatego autor skupia się w pracy na poszukiwaniu radialnych rozwiązań i problem redukuje się do rozwiązania układu dwóch równań różniczkowych zwyczajnych. Stosując klasyczną technikę (ang. *shooting method*) dla każdego dodatniego warunku początkowego $u(0) = b$ istnieje dodatnie rozwiązanie radialne u (rozwiązanie w stanie podstawowym). Ponadto istnieje rozwiązanie o skończonej liczbie zer (rozwiązanie w stanie wzbudzonym). Technika *shooting method* była stosowana przez Berestyckiego, Lionsa, Peletiera, Serrina, Atkinsona, Kwonga w wielu półliniowych zagadnieniach eliptycznych w latach 80-tych, zaś w roku 2008 również przez Choquarda, Stubbe'a i Vuffraya do poszukiwania rozwiązań i jednoznaczności problemu Schrödingera-Poissona. Pan Filip Ficek z powodzeniem zastosował tę metodę dla zagadnienia z potencjałem $|x|^2$. W Rozdziałach 4.2.2 oraz 4.2.3 znajdziemy wyniki dot. istnienia stanu podstawowego i stanów wzburzonych. Dla mnie zaskakujący jest fakt, że istnienie stanów podstawowych w problemie SNP istotnie wykorzystuje przypadek krytyczny i nadkrytyczny, tzn. $d \geq 6$ i wydaje się, że podobne metody nie mogą być zastosowane dla $d < 6$. Ciekawa analiza jest w Rozdziale 4.2.4, gdzie mamy istnienie rozwiązań singularnych z warunkiem w nieskończoności $\lim_{t \to \infty} u(r) = \infty$. Tutaj istnienie otrzymuje się tylko w przypadku nadkrytycznym $d \geq 7$, gdyż dla $q = 6$ tracimy hiperboliczność odpowiedniego układu. Pan Filip Ficek otrzymał również jednoznaczność rozwiązań w stanie podstawowym dla $d \geq 7$ oraz ciągłość parametru ω względem b. Wyniki zilustrowane są obliczeniami numerycznymi. Autor zauważył, że zmieniają się własności jakościowe oscylacji ω stanów wzburzonych w wymiarach $7 \leq d \leq 15$ oraz $d \geq 16$. W pracy zostało postawione interesujące pytanie dotyczące jednoznaczności stanów wzbudzonych w duchu nowego wyniku Cohena, Li oraz Schlaga.

Stabilność stanów stacjonarnych równania (1) została opisana w Rozdziale 5. Za pomocą technik aproksymacyjnych i numerycznych badane są wartości własne operatora odpowiedniej aproksymacji $\mathcal{L}$, który nie jest samosprzężony. Badanie spektrum takich operatorów jest zagadnieniem trudnym i Rozdział 5 wprowadza czytelnika do tego zagadnienia i pozostawia go z szeregiem ciekawych pytań, które przedstawione są w kolejnym Rozdziale 6. Autor zamierza rozszerzyć wyniki Rozdziału 5.1 w kolejnej publikacji.

Konkluzja. Całą rozprawę oceniam bardzo wysoko. Moim zdaniem rozprawa doktorska jest bogata w metody matematyczne, problem rozwiązany w rozprawie ma silną motywację fizyczną i dotyczy intensywnie rozwijanego obszaru równań różniczkowych cząstkowych. Najciekwsze wyniki znajdziemy w Rozdziale 4. Jest to interesujący, przemyślany kawałek matematyki z mocną motywacją w fizyce i zastosowaniach. Pomimo szeregu trudnych i technicznych rozumowań z obszaru równań różniczkowych zwyczajnych oraz technik aproksymacyjnych, rozprawę czyta się bardzo dobrze, napisana jest z troską o czytelnika i znajdziemy tam szereg numerycznych ilustracji. Uzyskanie ciekawych i nietrywialnych wyników w tym obszarze wymaga wysokich umiejętności technicznych i wyobraźni geometrycznej motywowanej numerycznymi rozważaniami.

Uważam, że rozprawa istotnie przekracza wymagania ustawowe stawianym rozprawom doktorskim. Wnoszę o dopuszczenie mgr. Filipa Ficka do dalszych etapów przewodu doktorskiego. Ponadto biorąc pod uwagę wysoką ocenę pracy, rekomenduję wyróżnienie przedstawionej rozprawy.

Jarosław Mederski

Jarosław Mederski