

Kraków, 1 września 2021

Recenzja rozprawy doktorskiej pana mgr. Zbigniewa Drogosza zatytułowanej
New topological observables in a model of Causal Dynamical Triangulations
on a torus

Praca doktorska została wykonana pod opieką naukową promotora Prof. Jerzego Jurkiewicza i promotora pomocniczego Dr. hab. Jakuba Gizberta-Studnickiego. Przedstawione w niej wyniki oparte zostały na trzech artykułach naukowych opublikowanych w bardzo dobrych czasopismach naukowych,

1. Jan Ambjørn, Zbigniew Drogosz, Jakub Gizbert-Studnicki, Andrzej Görlich, and Jerzy Jurkiewicz, *Pseudo-Cartesian coordinates in a model of Causal Dynamical Triangulations*, Nucl. Phys. B **943** (2019) 114626.
2. Jan Ambjørn, Zbigniew Drogosz, Andrzej Görlich, and Jerzy Jurkiewicz, *Properties of dynamical fractal geometries in the model of Causal Dynamical Triangulations*, Phys. Rev. D **103** (2021) 086022.
3. Jan Ambjørn, Zbigniew Drogosz, Jakub Gizbert-Studnicki, Andrzej Görlich, Jerzy Jurkiewicz, and Daniel Németh, *CDT Quantum Toroidal Spacetimes: An Overview*, Universe **7**(4) (2021) 79.

trzech preprintach zamieszczonych w elektronicznym archiwum preprintów arXiv

1. Jan Ambjørn, Zbigniew Drogosz, Jakub Gizbert-Studnicki, Andrzej Görlich, Jerzy Jurkiewicz, and Daniel Németh, *Cosmic voids and filaments from quantum gravity*, arXiv:2101.08617.
2. Jan Ambjørn, Zbigniew Drogosz, Jakub Gizbert-Studnicki, Andrzej Görlich, Jerzy Jurkiewicz, and Daniel Németh, *Matter-driven phase transition in lattice quantum gravity*, arXiv:2103.00198.
3. Jan Ambjørn, Zbigniew Drogosz, Jakub Gizbert-Studnicki, Andrzej Görlich, Jerzy Jurkiewicz, and Daniel Németh, *Scalar fields in Causal Dynamical Triangulations*, arXiv:2105.10086.

oraz jednej pracy będącej w przygotowaniu. Z oświadczeń współautorów wynika, że pan Drogosz miał dominujący wkład w pierwszych dwóch pracach, oraz znaczący udział w pozostałych.

Rozprawa dotyczy kwantowania grawitacji przy użyciu dynamicznych kauzalnych triangulacji. To podejście nazywa się często akronimem CDT, od 'Causal Dynamical Triangulations'. Kwantowanie grawitacji jest jednym z najbardziej fundamentalnych, nierozwiązanych problemów fizyki teoretycznej, a podejście CDT uważane jest za obiecującą próbę sformułowania konsystentnej teorii kwantowej grawitacji.

Pod względem tematycznym badania przedstawione w pracy można podzielić na trzy kategorie.

Pierwsza obejmuje metody dotyczące wykorzystania periodycznych warunków brzegowych do zdefiniowania topologicznych obserwabli do próbkowania kwantowych fluktuacji czasoprzestrzeni. Temat ten został przedstawiony w rozdziałach 3,4 rozprawy.

W rozdziale 5 przedstawiono wyniki dotyczące pomiaru kwantowej krzywizny Ricciego w oparciu o metodę Klitgaard-Loll.

Trzeci blok tematyczny dotyczy oddziaływania materii z geometrią czasoprzestrzeni. Dyskusję przeprowadzono na przykładzie modelu sigma minimalnie sprzężonego z grawitacją. Wyniki przedstawiono w rozdziale 6.

Oprócz wymienionych powyżej rozdziałów praca zawiera wstęp - w rozdziale 1, opis niektórych elementów implementacji - w rozdziale 2, konkluzje - w rozdziale 7, spis treści i bibliografię. Ogólnie, praca jest bardzo dobrze zredagowana, a materiał jasno wyłożony. Poniżej przejdę do omówienia wyników.

Podejście CDT jest uogólnieniem feynmanowskiego formalizmu całek po trajektoriach, w którym amplitudy kwantowe wyliczane są jako całki po pseudoriemannowskich rozmaitościach o zadanych warunkach brzegowych. Zaletą tego podejścia jest to, że nie odwołuje się ono do geometrii tła, dzięki czemu pozwala na nieperturbacyjne rachunki. Brak geometrii tła powoduje jednak, że w obliczeniach nie ma naturalnego układu współrzędnych.

W rozdziale 3 przedstawiono konstrukcję pseudokartezjańskich współrzędnych dla kwantowej geometrii czasoprzestrzeni CDT o toroidalnej topologii $T^4 = S^1 \times S^1 \times S^1 \times S^1$. Podstawowym elementem konstrukcji jest wyznaczenie czterech pomocniczych hiperścian o topologii T^3 , związanych z czterema kanonicznymi kierunkami torusa T^4 . Ściany można rozumieć jako przeciwległe brzegi czterowymiarowej hiperkostki z periodycznymi warunkami brzegowymi, a hiperkostkę można interpretować jako komórkę elementarną w układzie periodycznym. Przeciwległe brzegi komórki elementarnej odpowiadają dwóm stronom hiperściany na wyjściowym torusie. Konstrukcja tych pomocniczych hiperścian odgrywa ważną rolę w całej pracy doktorskiej. W szczególności posłużyły one do zdefiniowania pseudokartezjańskich współrzędnych na T^4 . Współrzędne danego punktu na

rozmaitości sympleksyjnej zdefiniowane są jako minimalne odległości do danej hiperściany. Dla każdego podstawowego kierunku na torusie są dwie takie współrzędne odpowiadające odległościom do przeciwległych brzegów ograniczających komórkę elementarną. Autor opracował metodę wyznaczania tych współrzędnych za pomocą czasu dotarcia frontu dyfuzji od brzegu komórki elementarnej do danego miejsca we wnętrzu tej komórki. Analiza współrzędnych pseudokartezjańskich, w tym przede wszystkim sum par współrzędnych do przeciwległych brzegów komórki elementarnej, pozwoliła poklasyfikować sympleksy na rozmaitości CDT ze względu na ich położenie na hierarchicznej strukturze tzw. baby-universów. Baby-universy wyrastają na sobie tworząc struktury drzewiaste. Pokazano, że sumy par współrzędnych do przeciwległych brzegów komórki elementarnej dla różnych kierunków są ze sobą skorelowane. Pozwoliło to wysnuć wniosek, że sumy par współrzędnych pseudokartezjańskich związane są z wysokością danego punktu na drzewie rozgałęzień baby-universów. Suma pary współrzędnych pseudokartezjańskich do przeciwległych brzegów komórki elementarnej dla danego kierunku na torusie praktycznie nie zależy od położenia pomocniczej hiperściany. Może jednak zależeć od jej kształtu, np. od stopnia pomarszczenia. Aby uniknąć tej niepożądanego zależności, konstrukcję pomocniczych hiperścian na torusie (czyli brzegów komórki elementarnej) oparto o zasadę minimalizowania ich objętości. Autor rozprawy opracował i zaimplementował stosowny algorytm oraz zintegrował go z generatorem Monte-Carlo konfiguracji CDT. Dzięki tej metodzie udało się wyznaczyć histogramy rozkładów współrzędnych pseudokartezjańskich i sum par współrzędnych w danym kierunku na torusie, oraz pokazać, że skalowanie tych histogramów w fazie semiklasycznej modelu CDT jest zgodne z wymiarem czasoprzestrzennym równym cztery.

W rozdziale 4 przedstawiono inną oryginalną metodę próbkowania toroidalnej geometrii CDT za pomocą nieściągalnych pętli geodezyjnych o nietrywialnej homotopii. Pętla konstruowana jest na sieci dualnej, czyli pomiędzy środkami 5-sympleksów. Pętla geodezyjna o liczbie nawinięć równej jeden obiega torus po najkrótszej drodze. Jeżeli dana pętla przechodzi przez punkt (środek 5-sympleksu), który znajduje się wysoko na drzewie rozgałęzień baby-universów, jej długość jest duża, ponieważ obiegając torus dookoła pętla musi najpierw zejść z tego drzewa i na końcu ponownie na nie wejść. Ponieważ typowe kwantowe fluktuacje czasoprzestrzeni mają postać hierarchicznych drzew baby-universów, które wyrastają z semiklasycznego tła, długość tych pętli pozwala ocenić, ile sympleksów leży na drzewach, ile na części semiklasycznej. Na tej podstawie można odtworzyć też statystyki wysokości sympleksów, wysokości drzew baby-universów, długości dolin przebiegających po części semiklasycznej itd. Wyniki przedstawione w pracy pokazują, że długości pętli o liczbie nawinięć równej jeden w różnych kierunkach przestrzennych mają takie same rozkłady prawdopodobieństwa, i są silnie ze sobą skorelowane. Są również skorelowane z rozkładem sumy par pseudokartezjańskich współrzędnych do przeciwległych brzegów komórki elementarnej w danym kierunku. Długość pętli geodezyjnej o liczbie nawinięć równej jeden nazwano wysokością punktu (sympleksu). Każdy sympleks charakteryzowany jest przez cztery wysokości związane z podstawowymi kierunkami torusa T^4 . W badaniach rozważano również pętli geodezyjne o większej liczbie nawinięć. Przy

kolejnych obejściach torusa pętle takie omijają początkowy sympleks, a więc i drzewo baby-unwersów, na którym ten sympleks się znajduje. Penetrują w ten sposób obszary o mniejsze wysokości i wyszukują doliny idące dookoła torusa o jak najkrótszej długości. W pracy pokazano, że różnica długości pętli o $n + 1$ nawinięciach i n nawinięciach szybko zmierza do stałej, gdy n rośnie. Ta stała odpowiada długości najkrótszego pasażu idącego dookoła torusa w danym kierunku. W pracy przeanalizowano również ciekawe statystyki pętli o różnych liczbach nawinięć (n_x, n_y, n_z, n_t) w podstawowych kierunkach torusa.

Statystyki najkrótszych pętli zostały wykorzystane do opisanie fluktuacji kwantowej czasoprzestrzeni. W szczególności zaproponowano bardzo ciekawy pomysł na klasyfikację sympleksów na torusie ze względu na liczbę najkrótszych pętli o pojedynczym przestrzennym nawinięciu, które przez dany sympleks przechodzą. Wyniki pokazały, że częstość występowania sympleksów, przez które przechodzi N takich pętli maleje jak $N^{-\gamma}$, z wykładnikiem bliskim 2. Zbadano również korelację pomiędzy liczbą najkrótszych pętli przechodzących przez sympleks a jego wysokością, oraz geometryczne otoczenia sympleksów w zależności od ich wysokości.

W rozdziale 5 przeprowadzono badania kwantowej krzywizny Ricciego dla rozmaitości CDT o topologii T^4 w fazie semiklasycznej. Kwantowa krzywizna Ricciego została zdefiniowana przez Klitgaard i Loll poprzez geometryczne wyrażenie na średnią odległość pomiędzy punktami sfer umieszczonych w dwóch bliskich punktach. Zaletą tego wyrażenia jest to, że z jednej strony w granicy, gdy promień sfer zmierza do zera, wzór odtwarza krzywiznę Ricciego, a z drugiej strony, jego geometryczna postać pozwala na implementację dla przypadku zdyskretyzowanej rozmaitości. Wzór został wcześniej wykorzystany przez Klitgaard i Loll do wyznaczenia kwantowej krzywizny Ricciego w fazie semiklasycznej CDT dla topologii $S^1 \times S^3$. W pracy doktorskiej pana Drogosza zostały przedstawione obliczenia dla topologii T^4 . Dzięki wcześniej wprowadzonemu pojęciu wysokości sympleksu, udało się przeprowadzić oddzielnie pomiary krzywizny Ricciego dla sympleksów o dużej wysokości, które należą do drzew baby-universów, oraz dla sympleksów o małej wysokości, które leżą w dolinach przebiegających po części semiklasycznej. Wyniki pokazały, że zachowanie krzywizny dla tych dwóch klas sympleksów jest zupełnie inne. Dla sympleksów o małej wysokości krzywizna zachowuje się jak krzywizna Ricciego na sferze. Wynik ten prawdopodobnie oznacza, że pomiar krzywizny dla sympleksów leżących na semiklasycznym tle, które same mają zerową krzywiznę, uśrednia krzywiznę otaczających go fluktuacji kwantowych, które niezależnie od miejsca na torusie mają taką samą efektywną krzywiznę. Wynik jest niezwykle ciekawy, ale wymaga dalszej analizy i głębszego zrozumienia.

Rozdział 6 poświęcony jest analizie modelu sigma na torusie T^4 , o wartościach pola na przestrzeni o tej samej topologii. W pierwszej części analizowany jest model, w którym klasyczne wartości pola dla danej rozmaitości CDT używane są jako współrzędne kartezjańskie. Taki wybór jest możliwy ponieważ przestrzeń, na której zdefiniowane są wartości pola jak i przestrzeń rozmaitości sympleksyjnej mają tę samą topologię T^4 . Wyznaczenie klasycznego rozwiązania pola dla danej rozmaitości sprowadza się do rozwiązania zdyskre-

tyzowanego równania Poissona, z warunkami brzegowymi narzucającymi periodyczność pola. Warunki periodyczne wprowadza się w postaci skoków wartości pola na trójwymiarowych brzegach komórki elementarnej, o których była mowa wcześniej. Laplasjan w tym równaniu jest laplasjanem grafu dualnego do grafu rozmaitości CDT. Za pomocą tak zdefiniowanych współrzędnych można wyznaczyć rozkład czteroobjętości. Wyniki pokazują, że czteroobjętość skumulowana jest w wąskich włóknistych obszarach otoczonych pustkami. To niezwykle ciekawy wynik, sugerujący, że istnieje mechanizm przyciągania przez obszary o zwiększonej gęstości, który prowadzi do zagęszczania tych obszarów i pozostawia pustkę wokół nich.

Druga część tego rozdziału poświęcona jest problemowi oddziaływania geometrii czasoprzestrzeni z minimalnie sprzężonym modelem sigma. Pole sigma wpływa na geometrię, a geometria na pole. W rozdziale przeprowadzono semiklasyczną analizę szczególnych konfiguracji polowo-geometrycznych, dla których geometryczna i polowa część działania współzawodniczą ze sobą w minimalizacji całkowitego działania. Przy pewnej wartości parametru kontrolującego skok pola, działanie polowe i działanie geometryczne zamieniają się rolami, jeżeli chodzi o ich wkład do całkowitej wartości działania. W wyniku tej zmiany następuje gwałtowna zmiana geometrii. Aby się przekonać, czy przewidywany przez te rozważania efekt rzeczywiście występuje w pełnym modelu, przeprowadzono jego symulacje Monte-Carlo. Ich wynik potwierdził przewidywania, tzn. w fazie semiklasycznej CDT następuje przejście fazowe wywołane zmianą parametru skoku pola do fazy, w której czteroobjętość skupia się w wąskim przedziale czasowym. To jest nowy typ przejścia fazowego. Jest on tym ciekawszy, że teoria kwantowej grawitacji powinna uwzględniać oddziaływania pola materii z grawitacją. Jeżeli istnieje zatem nietrywialna granica ciągła modelu CDT, która prowadzi do kwantowej teorii grawitacji, to należy oczekiwać, że będzie ona związana z przejściem fazowym i punktem krytycznym modelu, w którym zarówno geometria czasoprzestrzeni jak i zdefiniowane na niej pole ogrywają istotną rolę. Omawiane przejście fazowe należy do tej kategorii.

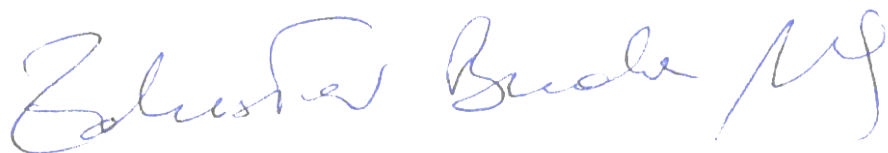
Zanim przejdę do podsumowania chciałbym poczynić kilka uwag i zadać kilka pytań Autorowi rozprawy:

- Jak już wspomniałem rozprawa została starannie zredagowana. Jedynie określenie 'loop distance', które Autor wymiennie używa z 'loop length', jest trochę mylące.
- Ważnym elementem badań było zaimplementowanie warunków brzegowych na torusie T^4 , które wyznaczają trójwymiarowe granice komórki elementarnej. Szkoda, że Autor nie opisał dokładnie implementacji tego algorytmu ponieważ, mimo, że jest to element techniczny, odgrywa ważną rolę w całej rozprawie. Nie wiadomo dokładnie jak przebiega proces utrzymywania minimalnej objętości tych ścian w trakcie uaktualniania geometrii. To jest ważne, ponieważ zbyt duże fluktuacje ścian mogą mieć wpływ na statystykę pseudokartezjańskich współrzędnych.
- Do wyznaczania współrzędnych kartezjańskich używano frontu dyfuzji (diffusion

wave), która zgodnie z opisem rozpoczyna się od przeciwległych brzegów komórki elementarnej. Dlaczego nie zastosowano algorytmu opartego o przeszukiwanie wszere, idącego w przeciwnym kierunku, tzn. od danego sympleksu do brzegów komórki elementarnej?

- Czy zastosowanie algorytmu A^* do wyznaczania pętli geodezyjnych o zadanych liczbach nawinięć zwiększyłoby wydajność przeszukiwań?
- Dlaczego rozkłady wysokości dla różnych kierunków przestrzennych przedstawione na rysunku 4.13 nie są identyczne? Co wyróżnia te kierunki? Czy dokonano uśrednienia po konfiguracjach?
- Rysunek 4.6 sugeruje, że można użyć kierunku czasowego do wyznaczenia wysokości sympleksu. Czy to prawda? A jeżeli tak, to być może dałoby się poklasyfikować sympleksy w modelu CDT o topologii $S^1 \times S^3$, dla której część przestrzenna ma topologię sfery S^3 , a następnie zastosować technikę przedstawioną w rozdziale 5 do pomiaru kwantowej krzywizny Ricciego oddzielnie dla sympleksów o małej i dużej wysokości. Czy Autor oczekuje, że w tym przypadku pojawi się różnica dla sympleksów o małej i dużej wysokości, podobna do tej z rysunku 5.1?
- Wydaje mi, że zamiast używać określenia model z polem skalarnym powinno używać się określenia 'model sigma' w stosunku do modelu omawianego w rozdziale 6, ze względu na nietrywialną topologię przestrzeni polowej. To właśnie ona decyduje o nietrywialnym zachowaniu modelu.
- Czy można oczekiwać, że w sympleksyjnej grawitacji euklidesowej (bez foliacji) zachodzi przejście fazowe w modelu sigma na torusie T^4 , podobne do tego opisanego w rozdziale 6? Czy rozkład czteroobjętości w tym przypadku będzie miał podobny charakter do tego dla CDT, pokazanego na rysunkach 6.1, 6.2? Innymi słowy, czy omawiane w tym rozdziale zachowanie jest bardziej związane z CDT, czy też z modelem sigma $T^4 \rightarrow T^4$?

Podsumowując, rozprawa doktorska dotyczy bardzo ważnej tematyki. Jest bardzo dobrze napisana. Zawiera wiele oryginalnych, ważnych wyników. Uważam, że spełnia z nadwyżką wymagania stawiane rozprawom doktorskim i w związku z tym wnoszę o dopuszczenie pana mgr. Zbigniewa Drogosza do dalszych etapów przewodu doktorskiego.



Zdzisław Burda