Warszawa 31.08.2020

Ocena rozprawy doktorskiej

mgr. Wojciecha Tarnowskiego

pt. *Eigenvectors of Random Matrices: Theory and Applications*

Rozprawa doktorska pana mgr. Wojciecha Tarnowskiego poświęcona jest analizie własności niehermitowskich macierzy stochastycznych. W typowych zastosowaniach w fizyce (głównie dynamice kwantowej i analizie własności widmowych układów kwantowych), macierze niehermitowskie nie pojawiają się w sposób naturalny, stąd też własności ich są rzadziej badane, na co ponadto ma wpływ fakt, iż z technicznego punktu widzenia są one trudniejsze do przeanalizowania niż macierze hermitowskie i wymagają nowych metod. Trzeba też już na początku recenzji zaznaczyć, że panu mgr. Tarnowskiemu udało się pokazać istotna rolę przypadkowych macierzy niehermitowskich w zastosowaniach, w szczególności dotyczy to zastosowań korelacji pomiędzy wektorami własnymi takich macierzy. Zastosowania te wykorzystują uzyskane przez pana mgr. Tarnowskiego wyniki czysto teoretyczne.

Bardziej szczegółowe omówienie otrzymanych wyników i ich proponowanych zastosowań poprzedzę krótkim opisem struktury pracy. Sama rozprawa powstała na podstawie siedmiu oryginalnych publikacji współautorstwa pana mgr. Tarnowskiego. Składa się z siedmiu rozdziałów, z których pierwszy, wstępny zawiera podstawowe definicje pojęć używanych w dalszych częściach rozprawy, ale przede wszystkim zwięzłą prezentację obszarów, gdzie otrzymane wyniki znajdują zastosowanie. Wszystkie rozdziały są bardzo przejrzyste, dobrze skoncentrowane na centralnym zagadnieniu każdego z nich i zakończone zwięzłym i jasnym podsumowaniem. Taka forma rozprawy jest nieco niekonwencjonalna, gdyż w poszczególnych rozdziałach przedstawiono jedynie krótki opis stosowanych metod. Dołączone w postaci Dodatku prace oryginalne pozwalają jednak na ich poznanie. Taki wybór okazał się być bardzo wygodny dla czytelnika rozprawy. Ponadto pozwala na konfrontacje alternatywnych metod przedstawionych w pracach oryginalnych (np. w wypadku jednopunktowej funkcji korelacji wektorów własnych, a w zasadzie diagonalnych elementów macierzy przekrywania tychże), co jest tematem rozdziału pierwszego rozprawy i prac oryginalnych [A1] i [A2]. Bez wahania więc stwierdzam, że konstrukcja każdego z rozdziałów, jak i całej rozprawy, jest znakomita. Dla porządku dodam jeszcze, że zamieszczona bibliografia zawiera wszystkie istotne pozycje dotyczące badanego obszaru. Nieco niedosytu pozostawia omówienie najważniejszych wyników dotyczących funkcji korelacji wektorów własnych otrzymanych przez innych badaczy, któremu poświęcone nieco mniej niż stronę w rozdziale wstępnym. Usprawiedliwieniem może być tu fakt, że wyników tych nie jest zbyt dużo (w większości koncentrują się one wokół rezultatów Chalkera i Mehliga z lat 1998 i 2000) i są proste do sformułowania. Pewne uzupełniające wiadomości na temat historii poruszanych problemów zawarte są w poszczególnych rozdziałach i pracach.

Rozprawa, w naturalny sposób, dzieli się na dwie części. Pierwszą (rozdziały 2.-5., prace oryginalne [A1]-[A5]), w której autor przedstawia wyniki dotyczące funkcji korelacji dla wektorów własnych macierzy niehermitowskich oraz drugą (rozdziały 6 i 7, prace oryginalne [A6] i [A7]) poświęcona zastosowaniom otrzymanych wyników.

Najbardziej doniosłym wynikiem prac [A1] i [A2], zaprezentowanym w rozdziale drugim rozprawy, jest wzór na jednopunktową funkcję korelacji dla macierzy niehermitowskich w zespołach nazywanych przez autora biunitarnymi, co oznacza, że funkcja rozkładu elementów macierzowych jest niezmiennicza ze względu na lewostronne i prawostronne mnożenie przez macierz unitarną. Taki wybór zespołu jest jak najbardziej uzasadniony, zarówno z uwagi na zastosowania, jak i „matematyczną naturalność". Zespoły takie są uogólnieniem zespołu Ginibre'a, od którego, w zasadzie, rozpoczyna się historia badań nad przypadkowymi macierzami niehermitowskimi. Otrzymany wynik (2.29) wiąże w elegancki sposób funkcję korelacji z kumulatywnym rozkładem modułu wartości własnych (rozkładem radialnym).

Praca [A3] i rozdział 3. rozprawy poświęcone są następnemu krokowi w obliczeniach korelacji, tzn. dwupunktowej funkcji korelacji wektorów. W obliczeniach zastosowano odpowiednio zaadaptowaną (m.in. przez użycie zmiennych kwaternionowych) technikę diagramatyczną typu Schwingera-Dysona. Głównym rezultatem jest wyrażenie na dwupunktową funkcję korelacji wektorów własnych w terminach kumulatywnego rozkładu radialnego wartości własnych, co stanowi kompletne rozwiązanie postawionego problemu. Znane dotychczas rozwiązania (m.in. dla zespołu Ginibre'a i zespołu eliptycznego) stanowią szczególne przypadki otrzymanego wyniku.

Główny rezultat zaprezentowany w rozdziale 4. rozprawy i artykule [A4] dotyczy szczególnego przypadku rzeczywistego gaussowskiego zespołu eliptycznego, w szczególności rozkładu prawdopodobieństwa diagonalnych elementów macierzy przekrywania wektorów własnych. W odróżnieniu do wielu znanych wyników podana postać rozkładu stosuje się nie tylko asymptotycznie, ale dla dowolnego wymiaru macierzy. Jest to, niewątpliwie, osiągnięcie godne uwagi, ze względu na to, że obliczenia dla skończonych wymiarów są, z oczywistych względów, znacznie trudniejsze niż asymptotyczne.

Bardzo ciekawe z koncepcyjnego punktu widzenia są rezultaty zaprezentowane w rozdziale 5. i publikacji [A5], na podstawie której rozdział ten został napisany. Już wcześniej wykorzystywane narzędzie pozwalające na wyrażenie N-punktowych funkcji rozkładu w „klasycznych" zespołach macierzy przypadkowych przez korelacje dwupunktowe, które, z kolei, powiązane są z klasycznymi problemami Sturma-Liouville' (a przez to, w szczególnym przypadku, równaniem Schrödingera) oraz zastosowanie metody rzutowania na przestrzeń skończenie wymiarową, zostało tu rozszerzone na przypadek macierzy niehermitowskich. Jest to rezultat o tyle ważny, że stosowalność metody rzutowania ograniczona jest do wielomianów ortogonalnych (tzn. w języku macierzy przypadkowych, do macierzy hermitowskich). W pracy pokazano, jak ominąć tę trudność w wypadku zespołów biortogonalnych macierzy niehermitowskich.

Dwa ostatnie rozdziały pracy (jak i odpowiednie publikacje [A6] i [A7]) opisują zastosowania niehermitowskich macierzy przypadkowych do analizy sieci neuronowych. Piszący tę recenzję nie jest specjalistą w tej dziedzinie, niewątpliwie jednak można ocenić, iż wyniki dotyczące silnej zależności własności sieci modelujących oddziaływania synaptyczne w mózgu od parametrów modelu i związanej z tym nietrywialnej dynamiki (rozdział 6.), będące konsekwencjami silnej nieortogonalności wektorów własnych macierzy połączeń są ciekawymi wkładami w modelowanie procesów mózgowych za pomocą sieci neuronowych. Także rezultaty zawarte w rozdziale 7. dotyczące widm macierzy opisujących propagacje impulsów w sieciach powinny zainteresować specjalistów.

W podsumowaniu pragnę stwierdzić, że rozprawa doktorska pana mgr. Wojciecha Tarnowskiego jest osiągnięciem wysokiej próby. Otrzymane wyniki są nowe i oryginalne, rozszerzają w istotny sposób wiedzę na temat macierzy przypadkowych w obszarze ważnym ze względu na zastosowania, a jednocześnie ciągle słabo rozpoznanym w porównaniu z tym, co wiadomo na temat hermitowskich zespołów „klasycznych" tzn. gaussowskiego zespołu ortogonalnego, unitarnego i symplektycznego, czy dysonowskich zespołów macierzy unitarnych. W rozprawie doktorskiej pan mgr. Tarnowski wykazał bardzo dobrą znajomość szeregu różnych technik matematycznych: metod diagramatycznych, teorii wolnego prawdopodobieństwa i, oczywiście, specjalnych zagadnień algebry liniowej. Co więcej, w swojej rozprawie i opublikowanych pracach, pan mgr Tarnowski zawarł ciekawe przykłady zastosowań otrzymanych rezultatów.

Na duże uznanie zasługuje aktywność naukowa mgr. Tarnowskiego, którego imponujący, na tym etapie rozwoju naukowego, dorobek w postaci publikacji, nie ogranicza się do tematyki, którą podjął w swoim doktoracie.

Uważam, że rozprawa doktorska pana mgr. Wojciecha Tarnowskiego spełnia z naddatkiem wszelkie wymagania, merytoryczne, formalne i zwyczajowe stawiane w przewodzie doktorskim i wnioskuję o przyznanie panu mgr. Wojciechowi Tarnowskiemu stopnia doktora nauk fizycznych. Ponadto, wnioskuję o stosowne wyróżnienie rozprawy, co uzasadniłem w poprzednich akapitach mojej recenzji.

prof. dr hab. Marek Kuś

CFT PAN