Piotr Zgliczyński
Instytut Informatyki i Matematyki Komputerowej UJ

Kraków, 25 sierpnia 2019

Recenzja rozprawy doktorskiej *Dominiki Hunik-Kostyry* zatytułowanej *On the cubic conformal flow on S^3 and other fully resonant systems*

1 Ocena pracy

Rozprawa jest interesująca i zaawansowana matematycznie, oceniam ją wysoko i uważam, że spełnia wszystkie wymagania stawiane pracom doktorskim.

2 Omówienie zawartości pracy

Tematyka pracy dotyczy nieskończenie-wymiarowych hamiltonowskich układów rezonansowych otrzymanych z pewnych równań cząstkowych. W szczególnosci omówiony został potok konforemny, który jest układem dynamicznym powstałym przez uśrednienie czasowe konforemnie niezmienniczego nieliniowego równania falowego na cylindrze Einsteina $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$. Dla tego układu wykazano istnienie 6-wymiarowej (parametryzowanej w pracy przez 3 zespolone współrzędne) rozmaitości niezmienniczej i podano komplentny opis dynamiki na niej. Główna część pracy poświecona jest klasyfikacji, stabilnosci oraz konstrukcji stanów stacjonarnych (faktycznie pewnych rozwiązań okresowych), bazującej na teorii bifurkacji oraz metodzie Lapunowa-Schmidta. Ponadto, w pracy omówione są inne przykłady układów rezonansowych. Cześć obliczeń przeprowadzonych dla potoku konforemnego została powtórzona dla równania LLL opisującego najniższy poziom Landaua dla kondensatu Bosego-Einsteina w harmonicznym potencjale.

Praca jest oparta na wspólnych pracach doktorantki z Piotrem Bizoniem (promotor) oraz kilkoma innymi współpracownikami. Większość rezultatów otrzymanych jest metodami analitycznymi. Chciałbym podkreślić, że pomysłowość i nakład pracy potrzebny do ich uzyskania robi na mnie wrażenie. Wydaje mi się, że uzyskane wyniki są poprawne (nie sprawdziłem wszystkich przeliczeń, jednak z punktu widzenia matematyki niektóre rozumowania są błędne (ale łatwo dają się poprawić). Pracę trudno się czyta miejscami ze względu na brak kluczowych definicji.

W dalszej części recenzji omówię pewne aspekty matematyczne rozprawy.

p. 2

3 Uwagi szczegółowe

3.1 Co to jest układ hamiltonowski

W pracy pojawiają się układy nazywane hamiltonowskimi. Naprzykład równanie (2) we wstępie

$$i\dot{\alpha}_n = \frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial \bar{\alpha}_n} \tag{1}$$

lub równanie (1.3) w rozdziale 1 (w pracy brakuje sprzężenia β_n w pochodnej cząstkowej)

$$i(n+1)\dot{\beta}_n = \frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial \bar{\beta}_n} \tag{2}$$

Pytanie jest w jakim sensie oba te układy są hamiltonowskie? Kluczem tutaj jest forma symplektyczna indukująca te równania. Wypisanie definicji układu hamiltonowskiego byłoby bardzo pożądane. Dla samego badania rozwiązań okresowych równań (1) czy (2) sam fakt ich hamiltonowskości niekoniecznie ma duże znaczenie, wystarczy znać formułę definiującą równanianie, ale w kwestii symetrii sprawa już wygląda trochę inaczej.

Tak więc w rozdziale o symetriach pojawia się nagle forma symplektyczna - formuła (1.43) i nawias Poissona (1.42) związane z postacią (2) równań hamiltonowskich. Aż prosi się o podanie precyzyjnej definicji tych obiektów która wytlumaczyła by szczególną postać formuły (1.42).

Patrz też rozdział 3.3 w recenzji.

3.2 Symetrie i prawa zachowania

Na początku rozdziału 1.3 , formuły (1.31), (1.32), (1.33) opisują trzy jednoparametrowe symetrie potoku konforemnego (1.1) (w formule (1.31) brak indeksu n po prawej stronie formuły). Przytoczę tutaj formuły (1.32), (1.33)

$$\text{Global phase shift:} \quad \beta_n(t) \;\mapsto\; e^{i\theta}\beta_n(t), \tag{3}$$

$$\text{Mode-dependent phase shift:} \quad \beta_n(t) \;\mapsto\; e^{in\theta}\beta_n(t). \tag{4}$$

Następnie autorka pisze (bez dowodu): *By Noether's theorem the last two symmetries give rise to two conserved quantities:*

$$Q = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)|\beta_n|^2, \tag{5}$$

$$E = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2|\beta_n|^2, \tag{6}$$

Trudno mi się z tym zdaniem zgodzić, choć jak się okaże później rzeczywiście te wielkości związane z powyższymi symetriami. Tw. Noether dotyczy układów otrzymanych z Lagrangianow, a symetrie mają nie zmieniać funkcji Lagrange. Natomiast w pracy mamy do czynienia z układem Hamiltonowskim otrzymanym z układu z funkcją Lagrange'a za pomocą pewnej procedury uśrednienia.

P. J.

W pracy autorka pokazuje za pomocą bezpośrednich obliczeń, Q i E zdefiniowane przez (5) i (6) są zachowywane przez potok konforemny. Co więcej w Proposition 2 jest wykazane, że

$$\{Q,E\} = \{Q,H\} = \{E,H\} = 0. \tag{7}$$

Te własności pozwaliły wyliczyć recenzentowi jakie są symetrie związane z wielkościami Q i E.

Wyliczenia poniżej są analogiczne na rozważań z początku rozdziału 1.6.4 *Generation of stationary states by the Z symmetry*.

W tym celu musimy najpierw znaleźć pola wektorowe indukowane przez funkcję Hamiltona Q i E. Potok indukowany w ten sposób komutuje z potokiem indukowanym przez (2) i będzie własnie symetrią związaną z daną wielkością. Dla E te równania to

$$i(n+1)\dot{\beta}_n = \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial \bar{\beta}_n} = (n+1)^2\beta_n \tag{8}$$

które da się rozwiązać jawnie

$$\beta_n(\theta) = e^{-i\theta(n+1)/2}\beta_n(0), \tag{9}$$

więc symetria związana z E ma postać (θ jest dowolnym rzeczywistym parametrem)

$$\beta_n \mapsto e^{i\theta(n+1)}\beta_n. \tag{10}$$

Postępując analogicznie dla Q otrzymujemy potok

$$i(n+1)\dot{\beta}_n = \frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial \bar{\beta}_n} = (n+1)\beta_n \tag{11}$$

$$\beta_n(\theta) = e^{-i\theta/2}\beta_n(0). \tag{12}$$

Tak więc symetria związana z Q ma postać (θ jest dowolnym rzeczywistym parametrem)

$$\beta_n \mapsto e^{i\theta}\beta_n. \tag{13}$$

Zawuważmy, że (13) pokrywa się z (3) - więc symetria globalnej zmiany fazy jest związana z zachowywaną wielkością Q. Natomiast symetria otrzymana z zachowywania E dana przez (10) da nam symetrię *zależnej od modu zmiany fazy* (4) dopiero jeśli złożymy ją z symetrią globalnej zmiany fazy przez $e^{-i\theta}$.

3.3 Zachowywana wielkość Z

W pracy pojawia się jeszcze inna zachowywana wielkość (formuła (1.36) w rozprawie)

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)\bar{\beta}_{n+1}\beta_n. \tag{14}$$

Jest ona wiekością zespoloną, więc faktycznie mamy dwie zachowywane wielkości, część rzeczywistą i część urojoną funkcji Z (i funkcje od nich).

P. Z

W rozdziale 1.6.4 *Generation of stationary states by the Z symmetry* mamy próbę znalezienia transformacji symetrii powiązanej z Z.

Tutaj własnie jest miejsce, gdzie widać że dobre definicje sporo by wyjaśniły co się dzieje i dlaczego. Wcześniej w pracy wykazano, ale niepodkreślono tego w rozdziale 1.6.4, że $\{Z, H\} = \{\bar{Z}, H\} = 0$. Autorka próbuje znaleźć 'infinitezymalne' transformacje związane z Z. Czyli w języku który użyłem w rozdziale 3.2 recenzji, próbuje znaleźć hamiltonowskie pole wektorowe które ją generuje. W tym celu używa komutatorów z $2i(Z - \bar{Z})$. Dlaczego tak? Otóż wynika to z konieczności wymagania rzeczywistości funkcji 'hamiltonowskiej' generującej potok symetrii (to znalazłoby się w odpowiedniej definicji). Wielkość $2i(Z - \bar{Z})$ jest równa $-4\mathrm{Im}Z$, więc jest rzeczywista, stąd jej wybór. Jednak równie dobrze możnaby spróbować części rzeczywistej Z, autorka jednak nie komentuje tego.

Otrzymane pole wektorowe jest liniowe, ale niediagonalne. Nie jest oczywiste jak je scałkować w sposób ścisły, autorka generuje więc numerycznie tą symetrię. Trochę mnie zadziwia jak za pomocą numerycznych rozwinięć (1.128) obrazu pewnego stanu stacjonarnego przez tą symetrię była ona w stanie rozpoznać w tym rozwiązanie opisane wcześniej za pomocą ciągu geometrycznego formułą (1.102). Natomiast wydaje sie, że zgodnie z tym co pisze autorka rozwinięcia (1.130) dają nowe rozwiązania.

3.4 3D podprzestrzeń niezmiennicza czy 6D

Twierdzenie 1 dla potoku konforemnego i analogiczne twierdzenie dla równania LLL wskazują podprzestrzeń niezmienniczą opisaną przez trzy parametry zespolone, stąd sformułowanie o 3-wymiarowej przestrzeni niezmienniczej. Wydaje się z metamatycznego punktu widzenia należało byłoby mówić o przestrzeni 6-cio wymiarowej. Moim zdaniem własciwym ciałem współczynników dla struktur matematycznych rozważanych w pracy jest ciało liczb rzeczywistych, świadczy o tym pojawianie się operacji sprzeżenia w równaniach itp.

3.5 Redukcja Lapunowa-Schmidta i bifurkacje

Wyniki dotyczące bifurkacji ze stanów stacjonarnych wydają się poprawne, ale rozumowania zawarte w rozprawie zawierają łatwe do poprawienia usterki.

3.5.1 Rozwiązanie równania w 'części odwracalnej'

Wszystkie rozumowania opierają się na metodzie redukcji Lapunowa-Schmidta opisanej przez autorkę w Załaczniku B.2. Jednak sposób zastosowania tej metody przez doktorantkę w dowodzie Proposition 7 (ten sam problem dotyczy wszystkich dowodów w pracy opartych na redukcji Lapunowa-Schmidta) jest niepoprawny matematycznie. Funkcja $F(\epsilon, \Omega, b) : \mathbb{R}^2 \times l^2(\mathbb{N}) \to l^2(\mathbb{N})$ dana wzorem (3.13) przepisanym poniżej

$$F(\epsilon, \Omega, b) = [L(\omega_m)]_{nn} b_n + n(n+1)\Omega b_n + [N(\epsilon e_m + b)]_n = 0, \quad n \neq m \quad (15)$$

P. 2

nie spełnia założeń wypisanych w Załaczniku B.2, gdzie było wymagane aby F było funkcją klasy C^2 względem swoich argumentów. Mianowicie, $\frac{\partial F}{\partial b}(\epsilon, \Omega, b = 0)$ nie istnieje. Kandydatem na $\frac{\partial F}{\partial b}(\epsilon, \Omega, b = 0)$ jest diagonalny operator D, gdzie

$$D_{nn} = [L(\omega_m)]_{nn} + n(n+1)\Omega, \tag{16}$$

który jednak nie jest operatorem ograniczonym na $l^2(\mathbb{N})$. Wobec tego F nie jest C^1, faktycznie F nie jest nawet funkcją ciągła w punkcie $b = 0$.

Problem ten można bez trudu obejść rozważając zamiast równania $F(\epsilon, \Omega, b) = 0$ jego równoważną wersję

$$\begin{aligned} b_n &= -\frac{1}{[L(\omega_m)]_{nn} + n(n+1)\Omega}[N(\epsilon e_m + b)]_n \\ &= -D_{nn}^{-1}[N(\epsilon e_m + b)]_n, \quad n \neq m. \end{aligned}$$

Teraz możemy stosować zasadę odwzorowań zwężających Banacha. Zauważmy, że kwestia nieograniczonego operatora diagonalnego D, która pojawiła się w (15) tutaj nie występuje, gdyż D^{-1} jest ograniczony (ciągły).

Gdybyśmy chcieli przeformułować F z (15) tak aby dosłownie pasowało to do twierdzeń z załącznika B.2 wtedy

$$F(\epsilon, \Omega, b)_n = b_n + D_{nn}^{-1}[N(\epsilon e_m + b)]_n, \qquad n \neq m. \tag{17}$$

3.5.2 Rozwiązywanie równania bifurkacyjnego

W końcówce dowodu Proposition 7 nie widzę argumentu za tym, że $|\Omega| \lesssim \epsilon^2$.

Proposition 8 podaje dowód bifurkacji w którym dwie wartości własne przechodzą przez 0. Brakuje mi tutaj trochę geometrycznej dyskusji. Mamy układ dwóch równań (3.21) na trzy zmienne rzeczywiste (ϵ, μ, Ω). Czego oczekiwać w takiej sytutacji? W generycznym przypadku powinniśmy otrzymać krzywe jednowymiarowe. Tutaj dostajemy trzy krzywe. Czemu?

Aby przygotować równania bifurkacyjne (3.21) należy rozwiązać układ równań (3.120) na 'mody odwracalne' jako $b(\epsilon, \mu, \Omega)$. Do późniejszej analizy równań bifurkacyjnych (3.21) potrzeba rozwinięcia funkcji $b(\epsilon, \mu, \Omega)$ względem swoich argumentów. Autorka jednak nie rozwija b względem Ω uznając, że na końcu będziemy mieli $\Omega = O(\epsilon^2 + \mu^2)$. Wydaje mi się, że to powinno być częścią dowodu. Patrząc na wyliczenia w rozprawie wydaje się że korekty do formuł (3.23) dających rozwinięcie b powinny zawierać dodatkowe człony $\Omega O(\epsilon^2 + \mu^2)$. Dopiero poźniej wstawiając te formuły do równań bifurkacyjnych (3.21) możemy zrobić argument, że są one nieistotne.

3.6 Inne usterki i literówki

- pochodne we wzorach (1.49) powinny być pochodnymi cząstkowymi
- na stronie 37, w rozdziale 1.6.2 doktorantka pisze, że rozwiązanie trywialne postaci (1.97) jest rozwiązaniem *single mode state* danym przez (1.96). Jakoś tego nie widzę.

P2

- w rozdziale 1.6.2, na stronie 37 w 7-ej linii od dołu pojawia się γ_0, które powinno być a_0.
- w rozdziale 2.2 w formule (2.18) x i y powinny mieć indeksy, tzn. powinno być
$$\beta_n(t) = (B_n + x_n(t) + iy_n(t))e^{-\lambda t}.$$
podobnie jest w formule (3.35)
- w dowodzie Lematu 9 wszystkie wystąpienia a_j powinny być zastąpione przez d_j
- w Prop. 7 (ω, A) powinno być zastąpione przez (ω, B)
- str. 76 , w formule (3.13) brakowało b_n mnożącego $[L(\omega_m)]_{nn}$. Właściwa formułą jest (15) w recenzji,
- str. 76 w formule (3.14) trzeba usunąć czynnik $(n+1)$ z mianownika
- str. 76 w linii bezpośrednio pod formułą (3.15) w swoich dwóch wystąpieniach $L(\omega_m)$ powinno być zastąpione przez $L(\omega_m)_{nn}$
- str. 76 w formule (3.16) $l^{2,2}(\mathbb{N})$ powinno być zastąpione przez $l^2(\mathbb{N})$
- w Lemacie 14, pierwsze wystąpienie słowa *double* należy zastąpić przez *simple*
- strona 97, w (3.118) A_j powinny być zastąpione przez B_j.
- nie widzę, jak w (3.118) można się dopatrzyć (3.119) i (3.120)