Prof. dr hab. Jacek Jezierski
Katedra Metod Matematycznych Fizyki
Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski

Recenzja pracy doktorskiej mgr Dominiki Hunik-Kostyry

pt.

„On the cubic conformal flow on S^3 and other fully resonant systems"

Treść rozprawy doktorskiej mgr Dominiki Hunik-Kostyry jest zgodna z tytułem, dotyczy ograniczonych przestrzennie hamiltonowskich układów rezonansowych. W szczególności analizowany jest potok konforemny, który jest układem dynamicznym powstałym przez uśrednienie czasowe konforemnie niezmienniczego nieliniowego równania falowego na cylindrze Einsteina $\mathbb{R} \times S^3$, a praktycznie ze względu na dwuwymiarową symetrię sferyczną jest to zredukowany problem (1+1) na $\mathbb{R} \times S^1$. Jest on powiązany z badaniem stabilności czasoprzestrzeni Anty-de Sittera. Główna część pracy poświęcona jest klasyfikacji stanów stacjonarnych, której podstawą jest teoria bifurkacji oraz metoda Lapunowa-Schmidta.

Rozprawa składa się z wprowadzenia oraz pięciu rozdziałów, uzupełnionych krótkim podsumowaniem, pięcioma technicznymi dodatkami oraz spisem literatury.

Część pierwsza zawiera podstawowe definicje i własności układu hamiltonowskiego (1.4), którego ważnym przykładem jest nieliniowe równanie Kleina-Gordona (1.10). Dla stanów rezonansowych układ ten można przybliżać równaniem (1.20), które po odpowiednim przeskalowaniu przyjmuje kanoniczną postać (1). Okazuje się, że „kubiczny potok konforemny" posiada symetrie (1.31-33), wielkości zachowane (1.34-36) (dowody są przeprowadzone w pracy). Ponadto szczególne równanie Szegö posiada tzw. reprezentację zespoloną (1.62). Ciekawą własnością *kubicznego potoku* *konforemnego* jest występowanie trójwymiarowych niezmienniczych podrozmaitości tzn. nieskończenie wymiarowy układ hamiltonowski redukuje się do trójwymiarowego układu dynamicznego (1.64-66) poprzez ansatz (1.63). Na zakończenie rozdziału pierwszego omówione są stany stacjonarne.

Część druga skupia się na stanach stacjonarnych. Zaprezentowane są wyniki dotyczące stabilności wybranych stanów stacjonarnych. Do analizy wykorzystane są techniki operatorowe w ośrodkowej przestrzeni Hilberta $l^2(\mathbb{N})$.

Rozdział 3 zawiera próbę klasyfikacji stanów stacjonarnych dla kubicznego potoku konforemnego. Podane są konstrukcje stanów stacjonarnych, które pochodzą poprzez bifurkację od „stanów jednooscylatorowych" — *single-mode states*. Konkretnie zbadane są dokładnie otoczenia dwóch pierwszych stanów własnych.

W części czwartej analizowane są podobne zjawiska — symetrie, niezmiennicze podprzestrzenie, stabilność stanów stacjonarnych, bifurkacje, ale dla równania *Lowest Landau Level*, które jest związane z kondensacją Bosego-Einsteina. Równanie to mieści się w klasie (1) tylko ma inne współczynniki C (por. 4.2) w stosunku do kubicznego potoku konforemnego. Ma podobne własności jak równanie (1.1), posiada symetrie, wielkości zachowane i trójwymiarową podprzestrzeń niezmienniczą. Podobnie jak poprzednio zbadane są bifurkacje najniższego stanu własnego oraz stabilność stanów jednooscylatorowych (*single-mode states*).

W rozdziale piątym przedstawione są wyniki autorki dotyczące pięciowymiarowej czasoprzestrzeni Anty-de Sittera. Okazuje się, że grawitacyjne perturbacje czasoprzestrzeni AdS nie są już „kubiczne" i nawet dla prostej materii opisanej polem skalarnym mamy niestabilność tej czasoprzestrzeni. Tutaj analizowane są próżniowe rozwiązania typu Bianchi IX. Niestety ten rozdział jest bardzo techniczny i wyjątkowo trudny w czytaniu, a ponadto brakuje konkluzji. Może należało zrezygnować z prezentacji tych wyników, gdyż pozostałe rezultaty są wystarczające na doktorat. Moim zdaniem część poświęcona AdS jest sztucznie wpleciona w resztę pracy.

Rozprawa uzupełniona jest pięcioma dodatkami zawierającymi kubiczne równanie Szegö, twierdzenie o funkcji uwikłanej oraz tzw. metodę Lapunowa-Schmidta, numeryczne/symboliczne wyniki dla stanów podlegających bifurkacji, użyteczne wzory sumacyjne wykorzystane w pracy, niektóre bardzo techniczne obliczenia wykorzystane w rozdziale piątym.

Moim zdaniem zrobienie spisu oznaczeń znacznie ułatwiłoby czytanie tej rozprawy, a ponadto pomogłoby autorce ujednolicić te oznaczenia.

Na zakończenie mam kilka uwag i pytań szczegółowych.

- Brakuje sprzężenia zespolonego we wzorze (1.3).
- Wzór na $\bar{c}$ w (1.17) jest nieprawdziwy.

- Nawias Poissona (1.42) oraz struktura symplektyczna (1.43) pojawiają się bez komentarza. Brakuje wyjaśnienia skąd taki wybór.
- Wzór (1.12) i (1.14) to za mało. W jakiej przestrzeni funkcjonalnej pracujemy? Czy v jest funkcją czy dystrybucją, to potem wpływa na (1.63), bo ciąg β_n może „wystawać" z tej przestrzeni, prawdopodobnie tak jest dla $|p| \geqslant 1$. Generalnie w przypadku liniowych równań można pracować z dystrybucjami, natomiast człony nieliniowe burzą takie podejście, bo dystrybucji na ogół nie można mnożyć przez siebie.
- Skąd pomysł na (2.1)? Definicja nie jest poprawna, bo zamiast α_n powinny być współrzędne wektora β.
- Podrozdział 1.2 nie pasuje w tym miejscu, bo zaburza tok rozumowania.
- W lemacie 14 na str. 92 punkty bifurkacji (3.93) są *simple* nie *double* oprócz (3.94-96).
- W (3.126) brakuje znaku równości.
- Wzór (4.79) jest nieczytelny.
- W (5.42) zamiast t' lepiej użyć innej litery np. τ, bo $t' = \partial_x t = 0$
- Jaka jest interpretacja rozwiązania równań (5.56-57) postaci $A = 0$, B dowolne?

Uwagi te oczywiście nie podważają dorobku autorki, gdyż poprawnie stosuje ona wybrany przez siebie aparat matematyczny. Ponadto wykazała przy tym kompetencję i sprawność w posługiwaniu się wyrafinowanymi narzędziami numerycznymi.

W tej sytuacji stwierdzam, że doktorantka spełniła wymagania nałożone przez odpowiednie przepisy o stopniach naukowych. W moim przekonaniu jest to praca dobra i wnoszę o dopuszczenie mgr Dominiki Hunik-Kostyry do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Warszawa, 20 sierpnia 2019 roku

Jacek Jezierski