KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Człowiek – najlepsza inwestycja

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

FENIKS

- długofalowy program odbudowy, popularyzacji i wspomagania fizyki w szkołach w celu rozwijania podstawowych kompetencji naukowo-technicznych, matematycznych i informatycznych uczniów

Pracownia Fizyczna

ćwiczenie PF-4:

Badanie mechanicznych układów drgających

dr Maria GORYL

dr Teresa JAWORSKA-GOŁĄB

Instytut Fizyki im. Mariana Smoluchowskiego
Uniwersytet Jagielloński

Wersja UJ/2.0, luty 2009

Zawarte w tym opracowaniu materiały przeznaczone są do wspomagania pracy nauczycieli i uczniów w czasie zajęć pozalekcyjnych w szkołach biorących udział w projekcie edukacyjnym FENIKS. Mają na celu ułatwienie przygotowania do zajęć laboratoryjnych w I Pracowni Fizycznej IF UJ.

http://feniks.ujk.kielce.pl/
feniks@th.if.uj.edu.pl

Projekt współfinansowany jest ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

CEL ĆWICZENIA

Celem ćwiczenia jest badanie ruchu harmonicznego na przykładzie wahadła fizycznego oraz przybliżenie pojęcia drgań własnych układu na modelowym przykładzie wahadeł sympatycznych (identyczne wahadła sprzężone; układ o dwóch stopniach swobody) badana jest zależność okresu drgań wahadła fizycznego od wartości momentu bezwładności oraz wyznaczane są okresy drgań normalnych i częstość dudnień w ruchu dwóch jednakowych wahadeł sprzężonych.

ZAGADNIENIA DO PRZYGOTOWANIA

- ruch harmoniczny, wielkości charakteryzujące ruch harmoniczny (okres, częstość, amplituda, wychylenie), opis ruchu wahadła matematycznego przy małych wychyleniach z położenia równowagi
- siła jako wektor, rozkład wektora na składowe
- definicja momentu bezwładności, dyskusja zależności momentu bezwładności od rozkładu masy względem osi obrotu
- opis ruchu wahadeł sprzężonych dla małych wychyleń z położenia równowagi: drgania normalne, dudnienia

WPROWADZENIE

PRZYŚPIESZENIE, PRZYŚPIESZENIE ZIEMSKIE

Gdy ciało porusza się z coraz większą prędkością mówimy, że ciało to przyśpiesza. Przyśpieszenie mówi nam jak zmienia się prędkość ruchu danego ciała w czasie. Przyśpieszenie średnie definiujemy jako stosunek różnicy prędkości początkowej i końcowej ($\Delta V = V_k - V_p$) do czasu t w jakim ciało się poruszało. Zależność tę można zapisać wzorem:

$$a = \frac{\Delta V}{\Delta t} \qquad [1]$$

gdzie: a to przyspieszenie, ΔV zmiana prędkości, Δt czas w jakim zaszła zmiana prędkości. Przyspieszenie przedmiotu poruszającego się zależy od wartości siły jaka wprawiła przedmiot w ruch, im większa wartość siły tym większe przyspieszenie (zakładając, że masa jest stała). Przyspieszenie zależy również od masy przedmiotu- im większa masa przedmiotu tym mniejsze przyspieszenie. Związek pomiędzy przyspieszeniem a siłą wyrazić można za pomocą wzoru:

$$a = \frac{F}{m} \qquad [2]$$

gdzie: F to siła a m to masa ciała. Jest to II zasada dynamiki Newtona.

Piłka rzucona pionowo do góry porusza się coraz wolniej, gdyż zwrot działającej na nią siły ciężkości jest przeciwny do zwrotu prędkości z jaką się porusza. Prędkość w ruchu do góry maleje do osiągnięcia wartości zero po czym piłka zaczyna spadać. W trakcie spadania porusza się coraz szybciej (przyśpiesza), ponieważ zwrot siły ciężkości (w dół; w kierunku ziemi) jest zgodny z kierunkiem prędkości spadającej piłki. Na Ziemi na danej szerokości geograficznej przyśpieszenie z jakim porusza się ciało w opisanym eksperymencie jest stałe i nazywane jest przyśpieszeniem ziemskim (g). W naszej szerokości geograficznej wynosi ono 9,81 m/s^2. Przyspieszenie ziemskie nie zależy od masy ciała.

ENERGIA KINETYCZNA, ENERGIA POTENCJALNA;ENERGIA MECHANICZNA

Każde poruszające się ciało posiada energię kinetyczną, która zależy od jego masy i kwadratu prędkości:

$$E_K = \frac{mV^2}{2} \qquad [3]$$

gdzie E_K to energia kinetyczna, m masa ciała a V to prędkość ciała.
Z kolei energia potencjalna charakteryzuje zdolność ciała do wykonywania pracy. Energia potencjalna ciała będącego pod działaniem siły grawitacji jest zależna od jego położenia. Wyrazić możemy to za pomocą wzoru

$$E_p = mgh \qquad [4]$$

gdzie E_p to energia potencjalna, m masa ciała, g przyśpieszenie ziemskie, h wysokość ciała nad położeniem przyjętym umownie za $h = 0$.
Energia mechaniczna jest sumą energii kinetycznej i energii potencjalnej ciała (lub układu ciał). Gdy siły zewnętrzne nie wykonują pracy nad rozważanym układem ciał to jego energia mechaniczna nie ulega zmianie (zasada zachowania energii mechanicznej).

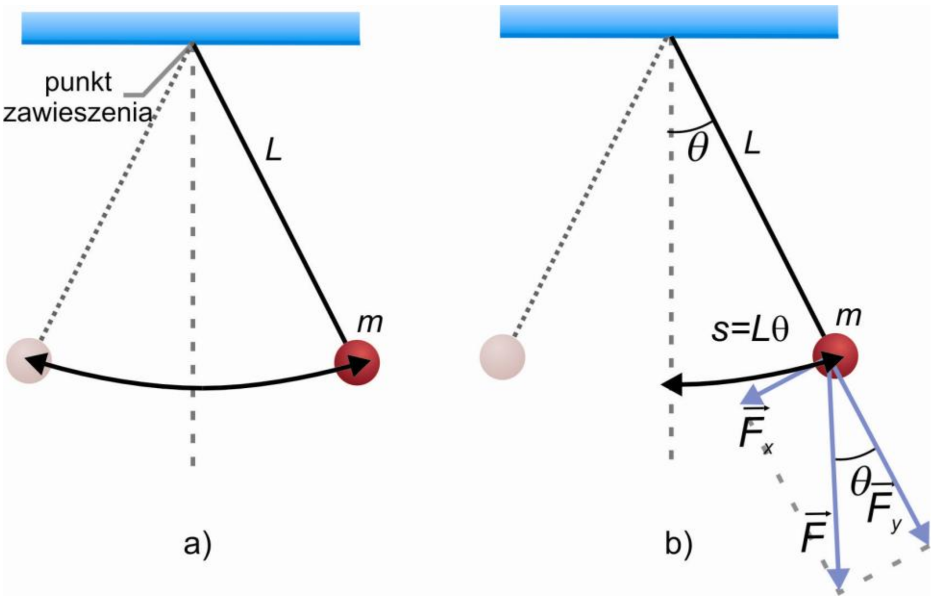
RUCH HARMONICZNY

ZASADA ZACHOWANIA ENERGII MECHANICZNEJ W RUCHU HARMONICZNYM

Każdy z nas zetknął się z rozhuśtaną huśtawką, poruszającym się dzwonem, drgającymi strunami gitary czy membraną bębna. Jeżeli ruch powtarza się w regularnych odstępach czasu nazywamy go ruchem okresowym. Ważną wielkością opisującą ruch drgający jest jego częstotliwość, czyli liczba pełnych drgań (cykli) wykonywanych w ciągu każdej sekundy. Częstotliwość oznaczamy zwykle symbolem f, jej jednostką w układzie SI jest **herc** (Hz) 1Hz= 1/s. Czas w jakim wykonywane jest jedno pełne drganie nazywamy okresem T. Związek pomiędzy częstotliwością a okresem ruch wyrażamy wzorem:

$$T = \frac{1}{f} \qquad [5].$$

Interesującym przykładem ruchu okresowego jest ruch harmoniczny, w którym siła powodująca ten ruch skierowana jest zawsze w kierunku położenia równowagi, a jej wartość jest proporcjonalna do wychylenia. Amplituda jest wartością bezwzględną maksymalnego wychylenia.



Rys. 1 Wahadło matematyczne.

Szczególnym przypadkiem ruchu okresowego jest ruch wahadła matematycznego. Punkt materialny o masie *m* (czyli ciało o masie *m* i bardzo małych rozmiarach) zawieszony na nierozciągliwej nici o znikomej masie i długości L, który porusza się (drga) w jednej płaszczyźnie pod wpływem siły ciężkości nazywamy wahadłem matematycznym. Po wychyleniu o kąt θ masa *m* porusza się po łuku *s* (Rys. 1). W chwili, gdy wahadło jest odchylone od pionu o kąt θ, siłę ciężkości $\vec{F}$, działającą na masę *m* możemy rozłożyć na składową działającą wzdłuż nici $\vec{F}_y$ (jest ona równoważona przez naprężenie nici) i składową do niej prostopadłą $\vec{F}_x$. Przyczyną ruchu wahadła jest działanie składowej siły ciężkości $\vec{F}_x$ ($\vec{F}_x = mg\sin\theta$), która skierowana jest stycznie do toru ruchu. Jest ona zawsze skierowana w stronę położenia równowagi i można wykazać, że dla małych wychyleń jej wartość jest proporcjonalna do wychylenia.

Można pokazać, że w zakresie małych kątów okres drgań wahadła matematycznego nie zależy ani od masy *m* ani od wychylenia początkowego (amplitudy drgań) i wyraża się wzorem:

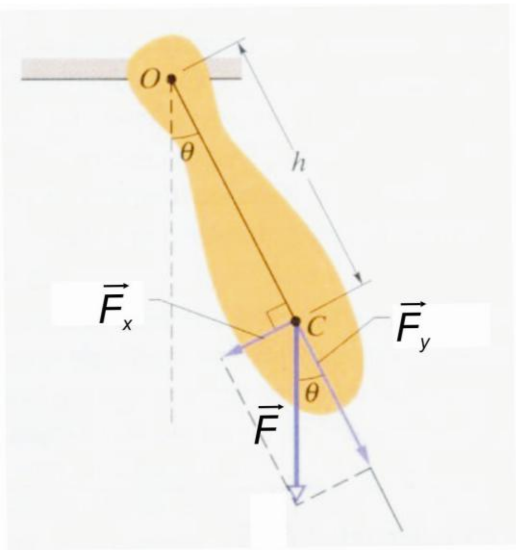
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\,. \qquad [6]$$

Drugą zasadę dynamiki Newtona (czyli $ma = F$) można dla oscylatora harmonicznego zapisać w trochę innej postaci. Wiemy, że prędkość v jest pierwszą pochodną położenia ciała ($v = dx/dt$), natomiast przyśpieszenie jest pierwszą pochodną prędkości (czyli $a = dv/dt$) . Z tego wynika, że przyśpieszenie jest drugą pochodną położenia: ($a = d^2x/dt^2$). Jednocześnie wiemy, że siła w ruchu harmonicznym jest proporcjonalna do wychylenia i przeciwnie do niego skierowana ($F = -kx$). Jeżeli połączymy te wyrażenia przy pomocy drugiej zasady dynamiki Newtona, otrzymamy:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx. \qquad [7]$$

Wyrażenie to, nazywane jest równaniem oscylatora harmonicznego. Spotkacie je jeszcze nie raz. Rozwiązaniem tego równania jest wyrażenie postaci: $x(t) = A\sin(\omega t)+B\cos(\omega t)$, gdzie amplitudy A, i B są pewnymi stałymi a $\omega^2 = k/m$ jest częstością własną wahadła. Alternatywnym i równie dobrym sposobem zapisania rozwiązania jest $x(t) = A\sin(\omega t + \mathrm{d})$, gdzie stałymi są amplituda A oraz faza d. Łatwo zobaczyć, że to są prawidłowe rozwiązania wstawiając je po prostu do równania i sprawdzając że lewa strona równania równa się prawej. Pewnie się zastanawiacie, jak to się dzieje, że raz piszemy że częstość oscylatora jest równa $\omega^2 = k/m$, czyli zależy od masy, natomiast wcześniej twierdziliśmy, że okres wahadła matematycznego od masy nie zależy. Bez podawania szczegółowego wyprowadzenia, możemy powiedzieć, że stała k w przypadku wahadła matematycznego wynosi: $k = mg/l$, a rolę wychylenia x pełni kąt wychylenia θ. Dlaczego tak jest, można przeczytać w większości podręczników do fizyki, np. w [1] i [2].

Rzeczywiste wahadło, nazywane zwykle wahadłem fizycznym, może mieć skomplikowany rozkład masy. Na Rys. 2 przedstawione zostało przykładowe wahadło fizyczne odchylone od pionu o kąt θ. Siła ciężkości $\vec{F}$ przyłożona jest w środku ciężkości C znajdujący się w odległości h od osi obrotu O.

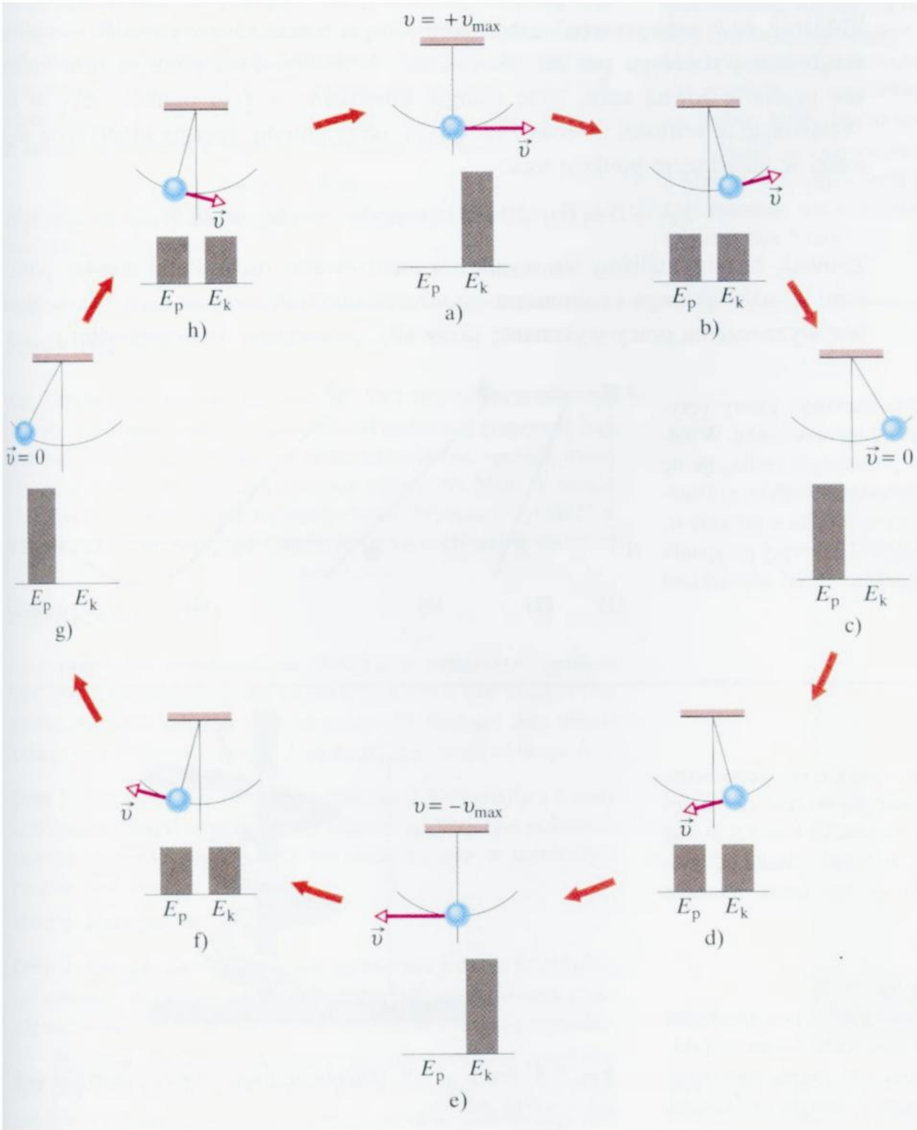


Rys. 2. Wahadło fizyczne

Można wykazać, że okres ruchu wahadła fizycznego wyraża się wzorem

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}} \qquad [7]$$

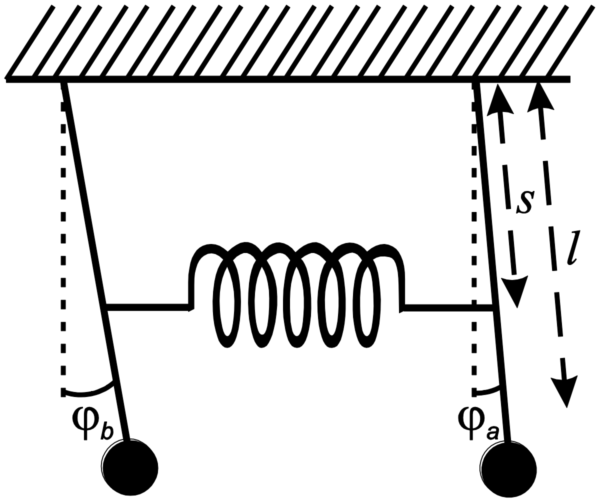
Energia oscylatora liniowego czyli wahadła matematycznego i fizycznego zmienia się wciąż z energii kinetycznej w potencjalną i z powrotem, podczas gdy ich suma- energia mechaniczna E oscylatora – pozostaje stała. Schematycznie przedstawia to Rys. 3.



Rys. 3 Zmiana energii kinetycznej w potencjalną dla układu wahadło- Ziemia.

WAHADŁA SPRZĘŻONE
DRGANIA NORMALNE, DUDNIENIA

Rozważmy dwa identyczne wahadła fizyczne, połączone sprężyną, która umożliwi przekaz energii od jednego wahadła do drugiego (Rys. 4). Wahadła zawieszone są w takiej odległości, że dla położenia równowagi sprężyna nie jest rozciągnięta. Ograniczymy się tutaj do drgań o niewielkich wychyleniach z położenia równowagi, tak aby można je było rozważać jako drgania harmoniczne. Układ taki nazywamy wahadłami sprzężonymi.



Rys. 4 Wahadła sprzężone

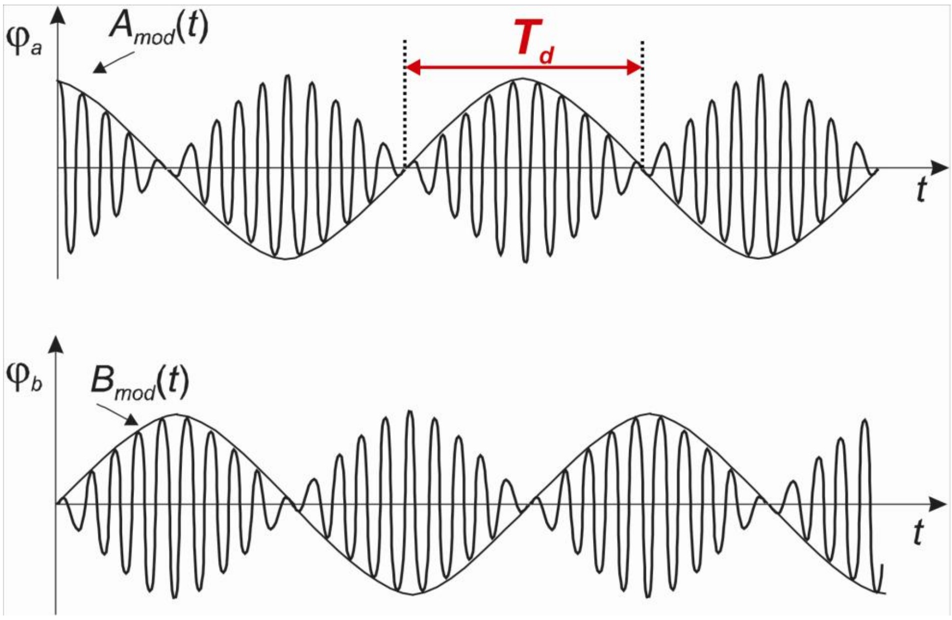
Dwa wahadła sprzężone są przykładem układu o dwóch stopniach swobody, które opisać możemy dwoma zmiennymi niezależnymi: najwygodniej kątem wychylenia każdego z wahadeł z położenia równowagi. Układ fizyczny ma tyle rodzajów drgań własnych (tj. drgań dla siebie charakterystycznych, nazywanych drganiami normalnymi), ile jest zmiennych niezależnych opisujących jego ruch. Dowolne drganie pojedynczego elementu układu można opisać jako pewną kombinację drgań normalnych, czyli ich superpozycję (złożenie).

Dla wahadeł sympatycznych (dwa identyczne wahadła sprzężone), które są układem o dwóch stopniach swobody, istnieją dwa rodzaje drgań normalnych. Nas interesuje, jak zobaczyć te drgania w ruchu naszych wahadeł, opisywanym przez kąty wychylenia wahadeł z położenia równowagi (zmienne φ_a i φ_b; Rys. 4). Innymi słowy, chcemy wiedzieć, jak wprawić w ruch dwa jednakowe wahadła sprzężone, aby wykonywały I-sze lub II-gie drganie normalne. Wahadła sprzężone wykonują I-sze drganie normalne, gdy każde z nich drga z częstością $\omega_1 = \omega_0$ (ω_0 jest częstością drgań swobodnych pojedynczego wahadła) , przy czym w dowolnej chwili $\varphi_a = \varphi_b$ (wahadła drgają w zgodnej fazie). Wahadła wykonują II-gie drganie normalne, gdy każde z nich drga z częstością ω_2 spełniającą równanie: $\omega_2^{\,2} = \omega_0^2 + 2k$ (k jest stałą charakteryzującą układ wahadeł) i w każdej chwili $\varphi_a = -\varphi_b$ (wahadła drgają w przeciwnych fazach).

W przypadku, gdy dwa drgające jednakowe wahadła sprzężone nie wykonują drgań normalnych obserwujemy tzw. dudnienia, polegające na okresowym wzmacnianiu i wygaszaniu amplitudy drgania wyjściowego. Dudnienia są wynikiem złożenia (superpozycji) drgań normalnych tego układu. Ruch wahadeł jest opisany poniższym równaniem:

$$\varphi_a(t) = \frac{A}{2}\cos\omega_1 t + \frac{A}{2}\cos\omega_2 t = A\cos(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t)\cos(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t) = A_{\mathrm{mod}}(t)\cos\omega_d t$$
$$\varphi_b(t) = \frac{A}{2}\cos\omega_1 t - \frac{A}{2}\cos\omega_2 t = A\sin(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t)\sin(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t) = B_{\mathrm{mod}}(t)\sin\omega_d t \quad [8]$$

Powyższe zależności przedstawione są w postaci graficznej na Rys. 5.



Rysunek 5. Zależność wychylenia od czasu dla wahadeł sprzężonych wykonujących dudnienia (przy założeniu jednakowych amplitud drgań normalnych i faz początkowych równych zero).

Badając zachowanie wahadeł na podstawie powyższych równań, możemy powiedzieć, że każde z nich podlega zjawisku dudnień z taką samą częstością ω_d. Jednakże, gdy jedno z wahadeł ma maksymalne wychylenie, drugie w tym momencie jest nieruchome. Następnie amplituda pierwszego wahadła stopniowo maleje, a drugiego rośnie, aż sytuacja się odwróci. Potem wychylenie drugiego wahadła stopniowo maleje, a pierwszego rośnie… itd., przy czym zależności pomiędzy odpowiednimi okresami i częstościami są następujące:

$$\omega_d = \frac{2\pi}{T_d} \qquad \omega_d = \omega_2 - \omega_1 \qquad T_d = \frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2} \quad [9]$$

Zjawisko dudnień dwóch jednakowych wahadeł sprzężonych jest bardzo ładnym przykładem przekazu energii. W przypadku, gdy nie ma strat energii wahadła na zmianę przekazują sobie stopniowo całą energię i przekaz ten odbywa się z częstością dudnień.

PRZEBIEG ĆWICZENIA

UKŁAD POMIAROWY

W skład układu pomiarowego wchodzą:
- dwa wahadła fizyczne
- sprężyna (jako urządzenie sprzęgające wahadła)
- oraz przyrządy: przymiar metrowy, suwmiarka i stoper

PRZEBIEG POMIARÓW

Wykonaj pomiar okresu drgań swobodnych pojedynczego wahadła mocując masę obciążającą w kilku różnych odległościach od osi obrotu. Po zakończeniu tej serii pomiarów zamocuj masy obciążające tak, aby otrzymać dwa jednakowe wahadła (o takich samych okresach). Połącz wahadła za pomocą sprężyny zamocowanej w połowie długości wahadeł. Wykonaj pomiar czasu trwania okresów I-szego i II-giego drgania normalnego. Wykonaj pomiar czasu okresu dudnień.

WSKAZÓWKI DO OPRACOWANIA WYNIKÓW

Wyznacz okresy drgań wahadeł swobodnych oraz oszacuj ich niepewności. Zastanów się, co możesz powiedzieć o zależności okresu drgań od momentu bezwładności wahadła fizycznego? Wykaż, że wahadła używane w drugiej części doświadczenia możesz uważać za jednakowe. (Sprawdź czy okresy ich drgań są zgodne w granicach niepewności). Wyznacz częstości I-szego i II-giego drgania normalnego oraz częstość dudnień i oszacuj ich niepewności. Sprawdź, czy uzyskane wyniki są zgodne z przewidywaniami teoretycznymi.

LITERATURA:

[1] David Holliday, Robert Resnick: Podstawy *Fizyki tom II,* PWN Warszawa 2005;
[2] Henryk Szydłowski: *Pracownia fizyczna* , PWN, Warszawa 1999;
[3] Andrzej Magiera, *I Pracownia Fizyczna,* Instytut Fizyki Uniwersytet Jagielloński, Kraków 2006.