

Autoreferat

1. Imię i nazwisko: **Sebastian J. Szybka**
2. Posiadane dyplomy i stopnie naukowe
 - **stopień doktora** nauk fizycznych w zakresie fizyki (wyróżnienie), Uniwersytet Jagielloński, 2005,
 - tytuł rozprawy: „Chaotic wave maps coupled to gravity”,
 - promotor: prof. dr hab. Piotr Bizoń.
 - **stopień magistra** fizyki (wyróżnienie), Uniwersytet Jagielloński, 2001,
 - tytuł rozprawy: „Struktura rozwiązań samopodobnych w modelu Einsteina–sigma”,
 - promotor: prof. dr hab. Piotr Bizoń.
3. Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych
 - od 2008 — **adiunkt**, Uniwersytet Jagielloński,
 - 2005—2008 — **asystent**, Uniwersytet Jagielloński,
 - 2001—2005 — **doktorant**, Uniwersytet Jagielloński.
4. Wskazanie osiągnięcia wynikającego z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. nr 65, poz. 595 ze zm.)
 - a) tytuł: *Stacjonarne osiowosymetryczne rozwiązania równań Einsteina*,
 - b) moim osiągnięciem naukowym, które przedstawiam jako podstawę postępowania habilitacyjnego jest monotematyczny cykl prac (autorzy są wymienieni w kolejności alfabetycznej):
 1. Piotr T. Chruściel, Gert–Martin Greuel, Reinhard Meinel, **Sebastian J. Szybka**, *The Ernst equation and ergosurfaces*, **Classical and Quantum Gravity** 23:4399–4414 (2006), **[H1]**,

2. Piotr T. Chruściel, **Sebastian J. Szybka**, *On the Ernst electro-vacuum equations and ergosurfaces*, **Acta Physica Polonica B** 39:59–74 (2008), [H2],
3. Piotr T. Chruściel, Michał Eckstein, **Sebastian J. Szybka**, *On smoothness of Black Saturns*, **Journal of High Energy Physics** 11(2010):048, [H3],
4. Piotr T. Chruściel, **Sebastian J. Szybka**, *Stable causality of the Pomeransky-Senkov black holes*, **Advances in Theoretical and Mathematical Physics** 15:175–178 (2011), [H4],
5. **Sebastian J. Szybka**, *Stable causality of Black Saturns*, **Journal of High Energy Physics** 05(2011):052, [H5],
6. Piotr T. Chruściel, Michał Eckstein, Luc Nguyen, **Sebastian J. Szybka**, *Existence of singularities in two-Kerr black holes*, **Classical and Quantum Gravity** 28:245017 (2011), [H6],
7. Piotr T. Chruściel, Christa R. Ölz, **Sebastian J. Szybka**, *Space-time diagrammatics*, **Physical Review D** 86:124041 (2012), [H7].

Stacjonarne osiowosymetryczne rozwiązania równań Einsteina

Wstęp

W tym roku obchodzimy setną rocznicę odkrycia ogólnej teorii względności. Pomimo, iż teoria Einsteina ma sto lat, to wiele jej fundamentalnych zagadnień pozostaje ciągle nierozwiązanych. Obecnie, dzięki rozwojowi metod matematycznych oraz wspierających je systemów algebry komputerowej, niektóre z tych zagadnień mogą być rozważane na nowo.

W przypadku symetrii sferycznej równania Einsteina redukują się do układu równań różniczkowych zwyczajnych. Równania takie stosunkowo łatwo jest rozwiązać, dlatego sferycznie symetryczne rozwiązania równań Einsteina są dosyć dobrze przebadane i zrozumiane. Twierdzenie Birkhoffa implikuje, iż asymptotycznie płaskie próżniowe rozwiązania o symetrii sferycznej należą do rodziny rozwiązań Schwarzschilda. W porównaniu do symetrii sferycznej, symetria osiowa charakteryzuje się znacznie większym bogactwem rozwiązań. Chociaż równania Einsteina stają się bardziej skomplikowane, to w przypadku stacjonarnym są jeszcze na tyle proste, iż można badać ich strukturę za pomocą wspomaganym komputerowo ścisłych metod [22, 26] bez odwoływania się do technik stricte numerycznych.

Jednym z fundamentalnych zagadnień, które można badać przy założeniu symetrii osiowej jest problem oddziaływania dwóch ciał. Zagadnienie to pośrednio stanowiło motywację do przeprowadzenia badań, których wyniki wchodziły w skład mojego dorobku habilitacyjnego.

W przypadku mechaniki klasycznej, problem oddziaływania dwóch ciał został rozwiązany przez Izaaka Newtona w *Principiach* [48]. W szczególności tzw. *Newton's shelling theorem*¹ opisuje oddziaływanie grawitacyjne dwóch sferycznie symetrycznych kul. Newton redukuje ten nietrywialny problem do zagadnienia oddziaływania mas punktowych — siła oddziaływania grawitacyjnego pomiędzy sferycznymi kulami dana jest przez prawo odwrotnych kwadratów. Siła ta nie zależy od krętów (momentów pędu) ciał.

W ogólnej teorii względności pojęcie *siły grawitacyjnej* nie występuje. Mimo to można mówić o efektywnej sile oddziaływania, wykorzystując ana-

¹*Principia*, księga III, twierdzenie VIII.

logię z teorią newtonowską. Teoria Einsteina wprowadza do tego pseudonewtonowskiego obrazu nowe elementy — w ogólnej teorii względności efektywna siła oddziaływania pomiędzy dwoma ciałami zależy od krętów (momentów pędu) rozważanych ciał. Do niedawna nie było wiadomo na ile kręty obu ciał mogą modyfikować naszą newtonowską intuicję. Czy związane z nimi efekty mogą zrównoważyć newtonowskie przyciąganie grawitacyjne? Cykl prac, stanowiący podstawę mojego osiągnięcia habilitacyjnego, przyczynił się do rozwiązania tego zagadnienia. Wyniki zawarte w większości tych prac są bardziej ogólne niż wymagałoby tego zagadnienie dwóch ciał, ale wszystkie z nich stosują się do tego problemu. Poniżej przedstawiam swoje osiągnięcia w kontekście zastanego stanu wiedzy. Kontekst historyczny przedstawiłem obszerniej w książce [55].

Pod koniec wieku XIX Olivier Heaviside zaproponował pomysłów uogólnienie teorii grawitacji Newtona. Heaviside zauważył [31, 32], że jeśli zapisać się równania teorii grawitacji Newtona w sposób analogiczny do równań Maxwella² i jeśli potraktuje się tę analogię bardziej dosłownie, to poruszająca masa powinna być źródłem pola grawitomagnetycznego, podobnie jak poruszający się ładunek elektryczny jest źródłem pola magnetycznego. Na przykład, dwie rotujące kule materii powinny wytwarzać pole grawitomagnetyczne. Oprócz standardowej siły newtonowskiego przyciągania pojawia się siła grawitomagnetyczna, która przy odpowiednio dobranych kierunkach krętów kul, może działać przeciwnie do przyciągania. Dzisiaj wiemy, że analogia zauważona przez Heaviside'a opisuje prawdziwe efekty fizyczne i może być rozumiana jako pewnego typu niskoenergetyczne przybliżenie teorii grawitacji Einsteina. Pomimo, iż zgodnie z przewidywaniami Heaviside'a, efekty grawitomagnetyczne są bardzo słabe w Układzie Słonecznym, to w roku 2006 zostały one zaobserwowane³ w eksperymencie Gravity Probe B [21]. Jest zadziwiające, że, te pozornie drobne, nic nieznaczące poprawki do grawitacji newtonowskiej daleko poza Układem Słonecznym są źródłem jednych z najbardziej energetycznych procesów zachodzących we Wszechświecie. Tak zwany proces Blandforda-Znajka przebiegający w sąsiedztwie rotujących czarnych dziur z dyskiem akrecyjnym może zostać zinterpretowany (np. Thorne [58]) jako oddziaływanie pola grawitomagnetycznego rotującej czarnej dziury z polem elektromagnetycznym. Proces ten może rozpędzić naładowane cząstki do energii o wiele rzędów wielkości większych niż te dostępne w Wielkim Zderzaczach Hadronów (Large Hadron Collider). Jest on kluczowy dla astrofizyki wysokich energii.

Oddziaływania grawitomagnetyczne można studiować używając różnego rodzaju przybliżeń i metod efektywnych. Krakowska grupa fizyki relatywistycznej, reprezentowana przez Jana Weysenhoffa i Myrrona Mathissona,

²Równanie Poissona można zapisać wprowadzając pojęcie wektorowego pola grawitacyjnego.

³Istnienie oddziaływań grawitomagnetycznych zostało potwierdzone również przez inne grupy badawcze [37].

ma tutaj swoje zasługi. W roku 1937 Myrron Mathisson wyprowadził równania ruchu cząstki próbnej z krętem [41, 42].⁴ Równania te zostały później powtórnie odkryte przez Papapetrou [49]. W roku 1972 Robert Wald zauważył [59], że zakres stosowalności tego typu przybliżeń uniemożliwia znalezienie odpowiedzi na pytanie o konfiguracje równowagowe — jeśli siła grawitomagnetyczna ma być porównywalna do przyciągania grawitacyjnego, to przybliżenie cząstki próbnej nie jest uzasadnione. W takim przypadku należy odwołać się do pełnych równań Einsteina. Ze względu na symetrię konfiguracji równowagowej, poszukiwania rozwiązań można ograniczyć do asymptotycznie płaskich czasoprzestrzeni, które są stacjonarne i osiowosymetryczne. W ogólnej teorii względności odpowiednikami newtonowskich mas punktowych są czarne dziury. Dlatego problem istnienia konfiguracji równowagowych w swojej najbardziej podstawowej formie dotyczy rozwiązań próżniowych.

W roku 1981, Hauser i Ernst udowodnili [26] hipotezę zapostulowaną dziewięć lat wcześniej przez Gerocha [22]: wszystkie asymptotycznie płaskie stacjonarne osiowosymetryczne próżniowe rozwiązania równań Einsteina mogą zostać wyznaczone za pomocą odpowiednich metod generacji. Oznacza to, że jeśli siła grawitomagnetyczna może zrównoważyć przyciąganie grawitacyjne, to powinny istnieć ściśle rozwiązania równań Einsteina opisujące taki stacjonarny układ. W celu zrozumienia w jakim stopniu kręty (momenty pędu) ciał modyfikują oryginalny problem dwóch kul (rozwiązany przez Newtona w *Principiach*) należy rozwiązać następujące zagadnienie z ogólnej teorii względności: **czy istnieją stacjonarne próżniowe asymptotycznie płaskie rozwiązania równań Einsteina o symetrii osiowej inne niż rozwiązanie Kerra (bez nagich osobliwości)?**⁵ Jeśli takie rozwiązanie posiada horyzont zdarzeń i jeśli jest on spójny, to twierdzenie o jednoznaczności czarnych dziur [11] implikuje, iż wszystkie możliwe czasoprzestrzenie należą do rodziny rozwiązań Kerra. Jednak, jeśli oddziaływania grawitomagnetyczne miałyby doprowadzić do konfiguracji równowagowych, to horyzont zdarzeń nie może być spójny — wymagamy istnienia dwóch rozłącznych obiektów i takie czasoprzestrzenie wymykają się wnioskowi implikowanemu przez twierdzenie o jednoznaczności.⁶

Stephen Hawking na początku lat siedemdziesiątych przedstawił bardzo interesujące rozumowanie [28, 29], które sugeruje, iż czarne dziury Kerra w

⁴Różne sformułowania tego typu równań oraz krakowską historię studiów nad tym zagadnieniem można odnaleźć w pracach Bronisława Średniawy [51, 52].

⁵Rozwiązanie Minkowskiego i Schwarzschilda to szczególne przypadki rozwiązania Kerra.

⁶Zauważmy, iż twierdzenie o jednoznaczności czarnych dziur wyjaśniające sytuację w przypadku spójnego horyzontu nie jest trywialne — najbardziej ogólna wersja tego twierdzenia jest wynikiem pracy wielu znakomych fizyków (Israel, Carter, Hawking, Robinson, Mazur, Bunting, Masood-ul-Alam, Chruściel, i inni), pracy rozciągającej się na przestrzeni pięćdziesięciu lat.

trakcie zderzeń czołowych oddziałują pomiędzy sobą grawitomagnetycznie.⁷ Z rozważań Hawkinga wynikało, iż konfiguracje równowagowe są mało prawdopodobne, ale jego heurystyczna analiza nie była w stanie wykluczyć takich stanów. Wiele lat wcześniej, wkrótce po powstaniu ogólnej teorii względności, Hermann Weyl i Rudolf Bach [60, 61, 2] rozważali podobne zagadnienie — wyprowadzili oni próżniowe osiowosymetryczne statyczne rozwiązanie równań Einsteina będące superpozycją dwóch czarnych dziur Schwarzschilda. Ze względu na brak rotacji, a więc i brak oddziaływania grawitomagnetycznego, rozwiązanie to posiadało nagą osobliwość (tzw. osobliwy pręt), której właściwości określają siłę wzajemnego przyciągania czarnych dziur. Aby sprawdzić, czy oddziaływania grawitomagnetyczne mogłyby zregularyzować rozwiązanie Bacha i Weyla należało uogólnić to rozwiązanie na przypadek dwóch czarnych dziur z krętem. Takie uogólnienie odkryto dopiero sześćdziesiąt lat później.

W roku 1980, Kramer i Neugebauer wykorzystali nowe sformułowanie równań Einsteina (wykorzystując czasowe pole Killinga, równania Einsteina można zredukować do tzw. równania Ernsta) i znaleźli rozwiązanie opisujące stacjonarną superpozycję dwóch czarnych dziur Kerra [38]. Rozwiązanie to nazwano *podwójnym Kerrem*. Zależy ono od siedmiu parametrów i dla ich generycznych wartości posiada nagie osobliwości. Jeśli regularne konfiguracje równowagowe istnieją, to powinno tak dać się dobrać te siedem parametrów, aby patologiczne właściwości czasoprzestrzeni skryły się pod horyzontami zdarzeń czarnych dziur. Niestety, okazało się, że nie jest to zadanie łatwe. Po pierwsze, struktura algebraiczna *podwójnego Kerra* jest skomplikowana. Analiza właściwości rozwiązania na poziomie funkcji metrycznych często sprowadza się do manipulacji wielomianami zawierającymi dziesiątki tysięcy wyrazów. Po drugie, fizyczna interpretacja parametrów opisujących rozwiązanie nie jest oczywista. Zadania nie ułatwia również olbrzymia, bo aż siedmiowymiarowa przestrzeń parametrów. Wyjaśnienie tych problemów było przedmiotem wielu prac i zajęło prawie trzydzieści kolejnych lat.

Równanie Ernsta

Funkcje metryczne *podwójnego Kerra* są bardzo skomplikowane, natomiast wynikają one z prostego rozwiązania równania Ernsta. Niestety, nie jest oczywiste jak przetłumaczyć właściwości rozwiązań równań Ernsta na właściwości czasoprzestrzeni. Problemem tym zajmowałem się w pracach [H1] oraz [H2].

Czasoprzestrzenie stacjonarne o symetrii osiowej można zapisać w postaci Weyla–Lewisa–Papapetrou

$$g = f^{-1} [h (d\rho^2 + d\zeta^2) + \rho^2 d\phi^2] - f (dt + a d\phi)^2, \quad (1)$$

⁷Hawking i Wald używają nazwy *oddziaływania spin–spin*.

gdzie g oznacza metrykę, a funkcje metryczne f , h , a zależą od współrzędnych ρ , ζ (standardowo przyjmuje się, iż $f > 0$). Próżniowe równania Einsteina można zredukować do równania Ernsta [19]⁸

$$(\Re \mathcal{E}) \Delta \mathcal{E} = \nabla \mathcal{E} \cdot \nabla \mathcal{E}, \quad (2)$$

gdzie $\mathcal{E} = f + ib$ jest funkcją zespoloną (b , podobnie jak f , jest funkcją rzeczywistą ρ , ζ)⁹, symbole \cdot , ∇ , Δ (iloczyn skalarny, gradient, laplasjan) odnoszą się do dwuwymiarowej płaskiej przestrzeni, a operator \Re oznacza część rzeczywistą liczby, czy też funkcji na którą on działa. We współrzędnych ρ , ζ zachodzi $\Delta = \partial_\rho^2 + (1/\rho)\partial_\rho + \partial_\zeta^2$. Każde rozwiązanie równania Ernsta (2) odpowiada pewnej czasoprzestrzeni. Właściwości tej czasoprzestrzeni trudno przewidzieć tylko na podstawie znajomości \mathcal{E} . W celu znalezienia funkcji metrycznych należy scałkować następujące równania

$$a_{,\rho} = \rho f^{-2} b_{,\zeta}, \quad a_{,\zeta} = -\rho f^{-2} b_{,\rho}, \quad (3)$$

$$h_{,\rho} = \frac{\rho h}{2f^2} [f_{,\rho}^2 - f_{,\zeta}^2 + b_{,\rho}^2 - b_{,\zeta}^2], \quad h_{,\zeta} = \frac{\rho h}{f^2} [f_{,\rho} f_{,\zeta} + b_{,\rho} b_{,\zeta}]. \quad (4)$$

Większość rozwiązań równań Ernsta prowadzi do czasoprzestrzeni o patologicznych właściwościach, dlatego kluczowe pytanie, jakie można sobie postawić brzmi: jakie właściwości potencjału \mathcal{E} są odpowiedzialne za osobliwości metryki? Jeśli znalazłbyśmy odpowiedź na to pytanie, to byłoby wiadomo, które z rozwiązań równań Ernsta prowadzi do regularnych czasoprzestrzeni. Na przykład, z równań (3), (4) oraz z postaci elementu liniowego (1) wynika, iż hiperpowierzchnie $\Re \mathcal{E} = f = 0$ mogą być źródłem problemów. Nie jest więc oczywiste, czy rozwiązanie można przedłużyć do obszaru $f < 0$. Hiperpowierzchnie $f = 0$ mają prostą interpretację fizyczną. Jeśli $f = \rho = 0$ to mamy do czynienia z horyzontami Killinga. Horyzonty Killinga są dosyć dobrze zrozumiane [9, 40], więc najbardziej interesujący jest przypadek $f = 0$, $\rho > 0$, który odpowiada ergopowierzchniom.¹⁰

Problem regularności ergopowierzchni został rozwiązany w pracy [H1]. Najważniejsze twierdzenie zawarte w tej pracy implikuje, iż wszystkie zera skończonego rzędu funkcji $\Re \mathcal{E}$ w punkcie P prowadzą do gładkiej i lorentzowskiej metryki w otoczeniu P . W pracy [H2] zbadaliśmy to samo zagadnienie w ogólniejszym przypadku czasoprzestrzeni zawierających pole elektromagnetyczne. W przypadku elektro-próżniowym udało się nam udowodnić twierdzenie analogiczne do głównego twierdzenia z pracy [H1]. Dowód

⁸W przypadku rozwiązań elektro-próżniowych istnieje odpowiednie uogólnienie równania Ernsta [20].

⁹Funkcja b nie pojawia się bezpośrednio w metryce (1) i służy jedynie do skonstruowania funkcji metrycznych a , h na podstawie równań (3), (4).

¹⁰Ergopowierzchnie są związane z rotacją i efektem wleczenia układów. Po przekroczeniu ergopowierzchni obserwator nie może pozostać stacjonarnym względem stacjonarnych obserwatorów w nieskończoności.

wymagał narzucenia dodatkowych warunków na zachowanie się pola elektromagnetycznego w sąsiedztwie rozważanego punktu.

Wyżej wymiarowe czarne dziury

Kramer i Neugebauer znaleźli rozwiązanie *podwójny Kerr* wykorzystując sformułowanie równań Einsteina za pomocą potencjału Ernsta [38]. W szczególności wykorzystali oni metodę generacji nowych rozwiązań równań Ernsta ze znanych rozwiązań za pomocą transformacji Bäcklunda [45, 46]. Poza sformulowaniem Ernsta, inną metodą, za pomocą której można wygenerować rozwiązanie *podwójny Kerr*, jest tzw. *inverse scattering method* [3]. Metoda ta zyskała ostatnio na popularności, ponieważ dzięki niej w ciągu ostatnich piętnastu lat odkryto szereg interesujących rozwiązań czarnodziurowych w czasoprzestrzeniach wyżej wymiarowych ($N + 1$ wymiarowych, gdzie $N > 3$) [18]. W dużym uproszczeniu sprowadza się ona do szeregu manipulacji algebraicznych, które na podstawie znanych rozwiązań Einsteina pozwalają konstruować nowe rozwiązania. Na przykład, rozwiązanie *podwójny Kerr* może zostać wygenerowane z rozwiązania będącego superpozycją dwóch czarnych dziur Schwarzschilda [35] (czyli rozwiązania rozważanego przez Hermanna Weyla i Rudolfa Bacha [60, 61, 2]).

W roku 2007 Henriette Elvang i Pau Figueras opublikowali artykuł [16], z którego wynikało, iż za pomocą *inverse scattering method* udało się im wygenerować $4 + 1$ wymiarową stacjonarną czarną dziurę o niespójnym horyzoncie. Czarna dziura tego typu została nazwana *Czarnym Saturnem*. Składa się ona z dwóch komponentów — centralnej czarnej dziury o topologii sferycznej otoczonej przez czarną dziurę o topologii torusa. Funkcje metryczne opisujące to rozwiązanie są bardzo skomplikowane, co w znacznym stopniu utrudniało weryfikację jego właściwości. Czy rozwiązanie *Czarny Saturn* rzeczywiście odpowiada $4 + 1$ wymiarowej czarnej dziurze (brak nagich osobliwości, brak patologii w strukturze przyczynowej)? Jeśli tak, to jest zastanawiające, iż ta sama procedura, tzn. *inverse scattering method*, w zależności od liczby wymiarów może prowadzić do całkowicie odmiennych wniosków. Dla niefizycznej liczby wymiarów $N = 4$ metoda ta pozwala generować regularne rozwiązania o niespójnym horyzoncie zdarzeń. Uzyskanie analogicznych rozwiązań za jej pomocą dla $N = 3$ wydaje się niemożliwe. Jak widać, *Czarny Saturn* i *inverse scattering method* są związane z zagadnieniem istnienia stacjonarnych czarnych dziur o niespójnym horyzoncie w $3 + 1$ wymiarach (regularność czasoprzestrzeni *podwójnego Kerr*). Rozważania te stanowiły motywację do przeprowadzenia badań, których wyniki (zawarte w pracach [H3], [H4], [H5]) stanowią część mojego dorobku habilitacyjnego.

Po pierwsze należało zweryfikować, czy *Czarny Saturn* to rzeczywiście rozwiązanie czarno-dziurowe. W pracy [H3] udało się udowodnić, iż obszar zewnętrznej komunikacji (*domain of outer communications*, czyli obszar na

zewnątrz horyzontu zdarzeń) jest gładki (brak nagich osobliwości) oraz, że rozwiązanie *Czarny Saturn* można lokalnie rozszerzyć¹¹ poprzez horyzonty.

W celu zbadania struktury przyczynowej *Czarnego Saturna* (pod kątem braku patologii) wykorzystano pojęcie *stabilnej przyczynowości*. Pojęcie to zostało wprowadzone przez Stephena Hawkinga w roku 1969 [27]. Hawking w swojej pracy wykazał, iż istnienie funkcji czasu (nazywanej również kosmicznym czasem) gwarantuje prawidłowość struktury przyczynowej (np. brak zamkniętych krzywych czasowych). Istnienie funkcji czasu zapewnia również, że struktura przyczynowa jest stabilna, tzn. zamknięte krzywe czasowe nie pojawiają się pod wpływem drobnych zaburzeń czasoprzestrzeni (stąd nazwa *stabilna przyczynowość*). Dowód *stabilnej przyczynowości* czasoprzestrzeni sprowadza się więc do wykazania, iż istnieje na niej pole skalarne f (funkcja czasu) spełniające następujący warunek: gradient f (tzn. wektor ∇f) jest wszędzie czasowy i skierowany w przeszłość.¹² Warunek ten gwarantuje, iż f rośnie wzdłuż dowolnej krzywej czasowej skierowanej w przyszłość, a to oznacza, że f może stanowić miarę czasu dla wszystkich obserwatorów.

Badanie *stabilnej przyczynowości Czarnego Saturna* w pracy [H3] zakończyło się częściowym sukcesem. Udowodniliśmy, iż *Czarny Saturn* jest *stabilnie przyczynowy* jeśli kręt centralnej czarnej dziury (spójnej składowej horyzontu o topologii sferycznej) znika. W pracy tej przedstawiono również wyniki numeryczne świadczące o *stabilnej przyczynowości* rozwiązania w ogólnym przypadku.

Podsumowując, wyniki zawarte w pracy [H3] pokazują, że *Czarny Saturn* jest istotnie rozwiązaniem czarno-dziurowym, a więc teoria grawitacji Einsteina dopuszcza istnienie dwukomponentowych stacjonarnych czarnych dziur jeśli liczba wymiarów to $4 + 1$.

Czarny Saturn składa się z centralnej czarnej dziury i czarnego pierścienia. W pewnym sensie jest to połączenie dwóch innych $4 + 1$ wymiarowych rozwiązań czarno-dziurowych: czarnej dziury Myersa–Perry’ego [44] oraz *Czarnego Pierścienia* [17] (rozwiązanie Emparana–Realla). Rozwiązanie Myersa–Perry’ego stanowi wyżej wymiarowe uogólnienie rozwiązania Kerra (dla $N + 1$, $N > 3$ wymiarów). Jest ono znane od roku 1986 i zostało dosyć dokładnie przebadane. Rozwiązanie *Czarny Pierścień* i jego uogólnienie na przypadek dwóch niezależnych krętów¹³, tzw. czarna dziura Pomeranskiego–Senkova [50], jest stosunkowo nowe (rozwiązania te odkryto w roku 2006). Struktura algebraiczna rozwiązania Pomeranskiego–Senkova jest skomplikowana, lecz znacznie prostsza od struktury algebraicznej *Czarnego Saturna*. Krokiem pośrednim prowadzącym do pełnego dowodu stabil-

¹¹To znaczy, że istnieje lokalny układ współrzędnych w których horyzonty zdarzeń są regularne.

¹²Przy założeniu, że sygnatura jest typu $(-, +, +, +)$.

¹³W czasoprzestrzeni $4+1$ wymiarowej kręt obiektu jest opisywany przez dwa parametry (ze względu na istnienie dodatkowego wymiaru przestrzennego).

nej przyczynowości *Czarnej Saturna* okazał się dowód stabilnej przyczynowości czarnej dziury Pomeranskiego–Senkova. Dowód ten przedstawiono w pracy [H4]. Jego szczegóły dobrze ilustrują trudności rachunkowe z jakimi przyszło się mierzyć w pracach [H3], [H4], [H5].

Aby udowodnić *stabilną przyczynowość* czarnej dziury Pomeranskiego–Senkova należy wykazać istnienie funkcji czasu w obszarze zewnętrznej komunikacji (*domain of outer communications*). W tym celu trzeba zaproponować funkcję skalarną f , a następnie sprawdzić, czy spełnia ona warunki definicyjne funkcji czasu. Warunki te sprowadzają się do pewnych nierówności, np. ∇f jest wektorem czasowym jeśli $g(\nabla f, \nabla f) < 0$, gdzie g oznacza metrykę czasoprzestrzeni.¹⁴ W przypadku metryki Pomeranskiego–Senkova odpowiednia zmiana współrzędnych oraz reparametryzacja pozwala zredukować nierówność $g(\nabla f, \nabla f) < 0$ do postaci wielomianowej. Dowód sprowadza się więc do wykazania, że pewien wielomian jest ujemny na zadanym zbiorze. Pozornie zadanie to wydaje się proste, lecz tak niestety nie jest.

W roku 1900 David Hilbert opublikował słynną listę 23 fundamentalnych nierozwiązanych problemów matematycznych [36]. Lista ta miała istotny wpływ na rozwój matematyki w XX i w początkach XXI wieku. Siedemnasty problem Hilberta można sformułować następująco: *czy każdy wielomian wielu zmiennych o wartościach nieujemnych na zbiorze liczb rzeczywistych można przedstawić za pomocą sumy kwadratów funkcji wymiernych?* Jeśli odpowiedź na to pytanie jest pozytywna i jeśli taka reprezentacja może zostać znaleziona za pomocą procedury algorytmicznej to można wykorzystać ją do dowodzenia nierówności wielomianowych. Siedemnasty problem Hilberta fascynuje, bo chociaż do jego sformułowania wystarcza szkolna matematyka, to rozwiązanie znaleźć jest niezmiernie trudno. Skalę trudności ukazuje następujący fakt historyczny: w roku 1888 Hilbert udowodnił, że nie wszystkie nieujemne wielomiany można przedstawić jako sumę kwadratów innych wielomianów. Hilbertowi nie udało się jednak znaleźć konkretnego przykładu takiego wielomianu. Pierwszy przykładowy wielomian o tej właściwości $f(x, y, z) = z^6 + x^4y^2 + x^2y^4 - 3x^2y^2z^2$ został odkryty dopiero 78 lat później. Odkrył go Theodore Samuel Motzkin¹⁵ w roku 1966 [43]. W roku 1927 Emil Artin udowodnił [1], iż odpowiedź na siedemnaste pytanie Hilberta jest pozytywna. Twierdzenie Artina nie mówi jak znaleźć odpowiednią reprezentację. Z tego względu nie można wykorzystać tego twierdzenia do zbadania *stabilnej przyczynowości* rozwiązania Pomeranskiego–Senkova. Rozwiązanie algorytmiczne siedemnastego problemu Hilberta zostało znalezione przez Charlesa Delzella [13] dopiero w roku 1984, czyli 84 lata po opublikowaniu listy problemów Hilberta. Niestety, algorytm Delzella oraz jego nowsze alternatywy nie są na tyle efektywne, aby umożliwić wyznacze-

¹⁴Przy założeniu, że metryka ma sygnaturę $(-, +, +, +, +)$.

¹⁵Wielomiany o tej właściwości noszą przeważnie nazwy pochodzące od nazwisk ich odkrywców: Motzkin, Choi–Lam, Robinson, Peyrl–Parrilo.

nie znaku wielomianu wysokiego rzędu zawierającego setki jednomianów, a właśnie z takim wielomianem ma się do czynienia przy badaniu stabilnej przyczynowości rozwiązania Pomeranskiego–Senkova. Okazuje się jednak, iż używając pewnych heurystycznych argumentów można odgadnąć właściwą parametryzację badanego wielomianu [H4] w której jego znak staje się oczywisty. W nowej parametryzacji współczynniki liczbowe jednomianów są ujemne i wahają się od -61382522306560 do -1 , co uwidacznia o ile bardziej skomplikowany jest ten wielomian od wielomianu Motzkina. Taka postać wielomianu pozwala udowodnić nierówność $g(\nabla f, \nabla f) < 0$ co z kolei implikuje *stabilną przyczynowość* rozwiązania Pomeranskiego–Senkova [H4].

Wiedza, którą zdobyłem przy dowodzeniu *stabilnej przyczynowości* rozwiązania Pomeranskiego–Senkova, umożliwiła mi przeprowadzenie dowodu stabilnej przyczynowości *Czarnej Saturna*. Tym razem kwadrat gradientu funkcji czasu, którego znak zbadałem, był sumą dziesiątków tysięcy wyrazów. Obliczenia wykonałem z użyciem zaawansowanych metod algebry komputerowej. Stabilną przyczynowość *Czarnej Saturna* udowodniłem w pracy [H5].

Struktura przyczynowa czasoprzestrzeni

Ścisłe próżniowe rozwiązania równań Einsteina rozważane w pracach [H3], [H4] i [H5] charakteryzują się symetrią osiową. Standardowym sposobem na przebadanie struktury przyczynowej czasoprzestrzeni jest zastosowanie tzw. *diagramów konforemnych Cartera–Penrose’a* [30]. W przypadku symetrii sferycznej diagramy te ściśle opisują strukturę przyczynową. Ich wprowadzenie zapoczątkowało w latach sześćdziesiątych „złoty wiek” ogólnej teorii względności. Dla czasoprzestrzeni, które nie są sferycznie symetryczne, np. dla czasoprzestrzeni osiowosymetrycznych, *diagramów konforemnych Cartera–Penrose’a* nie można stosować bezpośrednio. Dla rozwiązania Kerra diagram tego typu konstruuje się uwzględniając wyłącznie strukturę przyczynową osi symetrii [8, 9]. Powstaje więc pytanie, czy istnieje bardziej optymalny sposób na przedstawienie globalnej struktury czasoprzestrzeni, która nie jest sferycznie symetryczna?

W pracy [H7] zaproponowaliśmy¹⁶ nową klasę diagramów reprezentujących strukturę przyczynową czasoprzestrzeni. Diagramy te nazwano *diagramami projekcyjnymi* i z powodzeniem można stosować je do czasoprzestrzeni, które nie mają symetrii sferycznej. Uwidaczniają one takie właściwości rozwiązań równań Einsteina jak: stabilna przyczynowość, globalna hiperboliczność, istnienie horyzontów zdarzeń oraz horyzontów Cauchy’ego, przyczynowość brzegów, istnienie konforemnie gładkich nieskończoności.

¹⁶Chronologicznie, praca [H7] została napisana po pracy [H6], ale ze względu na zachowanie ciągu logicznego autoreferatu, wyniki zawarte w pracy [H6] opiszę dopiero na samym końcu.

W celu skonstruowania *diagramu projekcyjnego* dla danej czasoprzestrzeni (M, g) należy zdefiniować odwzorowanie $\pi : M \rightarrow W$, gdzie W jest podzbiorem dwuwymiarowej czasoprzestrzeni Minkowskiego. Odwzorowanie π powinno posiadać następujące cechy: a) wszystkie krzywe czasowe w W muszą być projekcjami pewnych krzywych czasowych w M , b) obrazem wszystkich krzywych czasowych w M muszą być krzywe czasowe w W . Z definicji tej wynika, iż *diagramy projekcyjne* nie są jednoznaczne — część informacji o oryginalnej metryce musi zostać utracona podczas rzutowania z oryginalnej czasoprzestrzeni na dwuwymiarową czasoprzestrzeń Minkowskiego. Różne *diagramy projekcyjne* reprezentujące tę samą czasoprzestrzeń mogą reprezentować różne właściwości oryginalnej czasoprzestrzeni.

W pracy [H7] skonstruowaliśmy szereg *diagramów projekcyjnych* dla czasoprzestrzeni, których $(N + 1)$ -wymiarową metrykę można zapisać w postaci

$$g = e^f(-Fdt^2 + F^{-1}dr^2) + h_{AB}dx^A dx^B, \quad A, B = 2, \dots, N,$$

gdzie $F = F(r)$ i $h = h_{AB}(t, r, x^C)dx^A dx^B$ jest co najwyżej dwuparametrową (t, r) rodziną metryk riemannowskich na $(N - 1)$ -wymiarowej rozmiarowości. Funkcja f może zależeć od wszystkich zmiennych. W szczególności przedstawiono diagramy dla następujących metryk: metryka Kerra, metryka Kerra–Newmana, metryka Kerra–de Sittera, metryka Kerra–Newmana–de Sittera, metryka Kerra–Newmana–anti de Sittera, *Czarny Pierścień* (rozwiązanie Emparana–Realla), metryka Pomeranskiego–Senkova, metryka Taub–NUT.

Podwójny Kerr

Pośrednią motywacją badań opisanych w poprzednich podrozdziałach była chęć lepszego zrozumienia zagadnienia dwóch ciał w ogólnej teorii względności. W szczególności interesował mnie problem istnienia konfiguracji równowagowych w symetrii osiowej, takich, w których oddziaływania grawitomagnetyczne mogłyby zneutralizować przyciągające właściwości grawitacji. Problem ten został zredukowany do kwestii istnienia regularnych rozwiązań w klasie *podwójny Kerr*. Prace [H1], [H2] dotyczą formalizmu Ernsta, który umożliwia generację tego typu rozwiązań. Prace [H3], [H5] opisują wyższe wymiarowe rozwiązania czarno-dziurowe, które tak, jak *podwójny Kerr*, posiadają dwuskładnikowy horyzont zdarzeń. Badania podjęte w artykule [H4] umożliwiły przeprowadzenie dowodu *stabilnej przyczynowości Czarnego Saturna*, czyli $4 + 1$ wymiarowej czarnej dziury o dwuskładnikowym horyzoncie [H5]. W artykule [H7] zostało opisane nowe narzędzie (*diagramy projekcyjne*) umożliwiające wizualizację fundamentalnych właściwości szerokiej klasy rozwiązań równań Einsteina, klasy, do której wliczają się wszystkie rozwiązania objęte badaniami w wymienionych pracach.

Moim zdaniem, wyniki zawarte w artykułach [H1], [H2], [H3], [H4], [H5] i [H7] w znacznym stopniu przyczyniły się do poszerzenia wiedzy o

ściśle stacjonarnych próżniowych rozwiązaniach równań Einsteina o symetrii osiowej. Jednak końcowe rozwiązanie problemu istnienia konfiguracji równowagowych zostało osiągnięte przy wykorzystaniu innego rodzaju rozumowania. Wynik ten zawarto w pracy [H6].

Z artykułu Gernota Neugebauera i Jörga Henniga [47] z roku 2009 (oraz referencji tam zawartych) wynika, że rozwiązanie *podwójny Kerr* jest jedynym kandydatem na konfigurację równowagową dwóch stacjonarnych czarnych dziur. Autorzy tej pracy wykazali również, że konfiguracja równowagowa spełniająca warunek *podekstremalności* nie istnieje. Dwa lata później, Neugebauer i Hennig rozszerzyli swój dowód na przypadek zawierający jedną lub dwie ekstremalne czarne dziury [34].

Warunek *podekstremalności* jest scharakteryzowany przez istnienie tzw. powierzchni złapanych (powierzchni dla których skalar ekspansji wychodzących zerowych geodezyjnych jest ujemny) w każdym dostatecznie małym wewnętrznym sąsiedztwie horyzontu zdarzeń. Warunek ten implikuje [33], iż dla czarnej dziury spełniona jest nierówność $8\pi|J| < A$, gdzie J oznacza kręt czarnej dziury, a A jest polem jej horyzontu zdarzeń. Dowód Neugebauera i Henniga [47] polegał na wykazaniu, iż składowe *podwójnego Kerr* nie spełniają tej nierówności. Warunek *podekstremalności* jest dobrze rozumiany dla zwykłej pojedynczej czarnej dziury Kerr. W przypadku rozwiązania *podwójny Kerr* założenie to ogranicza ogólność dowodu nieistnienia regularnych rozwiązań tego typu.

W pracy [H6] pokazaliśmy, że należy wykorzystać słabszą wersję nierówności pomiędzy krętem i polem horyzontu, mianowicie $8\pi|J| \leq A$. Nierówność ta została udowodniona przez Daina oraz Reirisa [12]. Jest ona spełniona w sposób naturalny dla horyzontów zdarzeń czarnych dziur, czyli dla znacznie większego zbioru obiektów niż nierówność silna. Z pomocą nierówności słabej, pozbyliśmy się założenia o *podekstremalności* obu składowych *podwójnego Kerr*. Tym samym udowodniliśmy, że oddziaływanie grawitomagnetyczne dwóch rotujących czarnych dziur nie może zrównoważyć przyciągającego działania grawitacji i konfiguracja równowagowa nie istnieje. Innymi słowy, jeśli odrzucić rozwiązania zawierające gołe osobliwości jako niefizyczne, to dwie rotujące czarne dziury tworzące układ o symetrii osiowej, albo połączą się w jedną czarną dziurę Kerr, albo, jeśli mają odpowiednie prędkości początkowe, rozbiegną się. Artykuł [H6] zawiera więc najbardziej ogólny dostępny w literaturze dowód nieistnienia konfiguracji równowagowych dwóch czarnych dziur. W ten sposób wnioski wynikające z twierdzenia o jednoznaczności czarnych dziur można rozszerzyć na obiekty o niespójnym dwuskładnikowym horyzoncie zdarzeń.

Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych

Prace wykonane po uzyskaniu stopnia doktora nauk fizycznych, nie wchodzące w skład cyklu zaprezentowanego w poprzednim rozdziale

Moje zainteresowania naukowe, po uzyskaniu stopnia doktora, skupiały się wokół trzech głównych tematów badawczych. Jedno z tych zagadnień jest związane ze ścisłymi osiowosymetrycznymi stacjonarnymi rozwiązaniami równań Einsteina. Zagadnienie to stanowiło motywację do podjęcia badań, których wyniki składają się na mój dorobek habilitacyjny opisany w poprzedniej części autoreferatu.¹⁷ Poza tym interesowałem się jeszcze dwoma innymi tematami badawczymi z zakresu kosmologii oraz matematycznej teorii względności.

Pierwsze zagadnienie to jeden z najważniejszych problemów współczesnej kosmologii. Jest to tzw. problem *stałej kosmologicznej* zwany obecnie również problemem *ciemnej energii*. W roku 2011 Saul Perlmutter, Brian Schmidt i Adam Riess otrzymali Nagrodę Nobla za odkrycie przyspieszania ekspansji Wszechświata. Rzeczywiście, obserwacje supernowych zinterpretowane w ramach standardowego modelu kosmologicznego (Λ CDM) prowadzą właśnie do takiego wniosku — stała kosmologiczna jest dodatnia i ekspansja Wszechświata przyspiesza. Jednak, można postawić sobie pytanie: czy model Λ CDM dobrze opisuje rzeczywistość? Wiadomo, że Wszechświat jest jednorodny tylko w sensie statystycznym — drobnoskalowe niejednorodności w rozkładzie materii uśredniają się po uwzględnieniu odpowiednio dużych odległości. Kontrast gęstości takich niejednorodności jest na tyle duży, iż efekty związane z ich istnieniem nie dają się opisać za pomocą zwykłego rachunku perturbacyjnego. Niestety, w chwili obecnej nie istnieje dogodna rachunkowo i powszechnie akceptowana procedura umożliwiająca przeprowadzenie uśredniania w ogólnej teorii względności. Nie wiadomo więc jak uwzględnić efekt niejednorodności w obliczeniach (w odniesieniu do kosmologii jest to tzw. *fitting problem* [15]). Różne podejścia do tego zagadnienia zostały opisane w przeglądowej pracy George’a Ellisa [14]. Hipoteza jaką badałem w swoich pracach brzmi następująco: czy nasze wnioski dotyczące przyspieszonej ekspansji Wszechświata nie są artefaktem wynikającym ze zbyt uproszczonego modelu kosmologicznego?

Efekty związane z istnieniem drobnoskalowych niejednorodności w rozkładzie materii (czy też bardziej ogólnie: energii) mogą być dwojakie. Po pierwsze, drobnoskalowe niejednorodności mogą zmienić globalną dynamikę modelu poprzez efektywny wkład do uśrednionego tensora energii–pędu. Ten

¹⁷W książce [55] przedstawiłem (jestem autorem jednego z rozdziałów) kontekst historyczny problemu oddziaływania grawitacyjnego pomiędzy dwoma ciałami. Tego opracowania nie zaliczyłem do cyklu artykułów stanowiących mój dorobek habilitacyjny.

efekt znany jest jako *backreaction* (*reakcja zwrotna*).¹⁸ Po drugie, niejednorodności wpływają na propagację światła, a tym samym na interpretację danych obserwacyjnych, nawet jeśli globalna dynamika modelu pozostaje taka sama.¹⁹ Oczywiście, oba efekty związane z niejednorodnościami mogą występować równocześnie. Znalezienie odpowiedniej efektywnej czasoprzestrzeni uwzględniającej *backreaction* nie implikuje uwzględnienia drugiego z efektów. Dlatego oba te problemy trzeba, niejako, rozpatrywać niezależnie.

W celu oszacowania wpływu drobnoskalowych niejednorodności na propagację światła, skonstruowałem niejednorodny model kosmologiczny (model swiss-cheese oparty o rozwiązanie Lemaître’a-Tolmana-Bondiego) i przebadłem propagację światła w tym modelu [54]. W szczególności zbadałem relację *odległość jasnościowa* — *przesunięcie ku czerwieni*. W modelu Λ CDM porównanie tej relacji z danymi obserwacyjnymi pozwala oszacować wartości stałej kosmologicznej. Wnioski wynikające z moich badań są następujące: *w modelu swiss-cheese, który badałem, drobnoskalowe niejednorodności w rozkładzie materii wpływają na oszacowania wartości stałej kosmologicznej, ale efekty tego typu są niewielkie*. Kluczowe pytanie, które stanowiło motywację moich dalszych badań brzmi: czy modele typu swiss-cheese wystarczająco dobrze opisują efekty związane z niejednorodnościami? Jeśli tak, to wnioski wynikające z pracy [54] można uogólnić na fizyczny Wszechświat. W takim przypadku, dodatnia stała kosmologiczna lub inna forma *ciemnej energii* istnieje rzeczywiście — efekty związane z drobnoskalowymi niejednorodnościami wnoszą wyłącznie drobne poprawki do modelu Λ CDM.

Modele swiss-cheese stanowią wygodne narzędzie do badania wpływu niejednorodności na propagację światła, ale ze względu na ich konstrukcję, efekt *backreaction* (zmiana globalnej dynamiki modelu ze względu na drobnoskalowe niejednorodności) w tych modelach nie występuje. Dlatego w celu zrozumienia *backreaction* należy odwołać się do innych metod. W roku 2011 Stephen Green i Robert Wald zaproponowali [23] nowe podejście do problemu niejednorodności w kosmologii. Uogólnili oni pracę Burnetta z roku 1986 [7] na przypadek czasoprzestrzeni niepróżniowych. Z obliczeń Greena i Walda wynika, iż efektywny tensor energii-pędu, który można przypisać niejednorodnościom, jest bezśladowy. Oznacza to, że chociaż efekt *backreac-*

¹⁸Przykład: rozwiązanie próżniowe równań Einsteina zawierające wyłącznie fale grawitacyjne o wysokiej częstości można przybliżyć za pomocą rozwiązań niepróżniowych z efektywnym tensorem energii-pędu [7]. Powstaje więc pytanie, czy drobnoskalowe niejednorodności w rozkładzie materii w modelu kosmologicznym można efektywnie opisać za pomocą tensora energii pędu imitującego stałą kosmologiczną lub inną formę ciemnej energii?

¹⁹Przykład: chociaż rozwiązanie swiss-cheese jest lokalnie niejednorodne (co wpływa na propagację światła), to poza obszarami niejednorodnymi pokrywa się ono całkowicie z rozwiązaniem Einsteina-de Sittera. Model swiss-cheese umożliwia wprowadzenie drobnoskalowych niejednorodności do rozwiązania Einsteina-de Sittera, ale te niejednorodności nie zmieniają oryginalnej globalnej dynamiki rozwiązania.

tion istnieje²⁰ to nie może on imitować stałej kosmologicznej, czy też innych form ciemnej energii.

Głównym założeniem twierdzeń Greena i Walda jest istnienie jednoparametrowych rodzin rozwiązań równań Einsteina spełniających ściśle określone warunki.²¹ Czasoprzestrzenie efektywne²² stanowią swego rodzaju granice tych jednoparametrowych rodzin. Znajomość analitycznej postaci takich rozwiązań nie jest niezbędna — samo ich istnienie wystarcza, aby przewidzieć właściwości *backreaction*. Niestety, nie wiadomo na ile to założenie ogranicza zakres stosowalności twierdzeń Greena i Walda. W oryginalnej pracy [23] autorzy nie podali przykładu tego typu rodzin rozwiązań. Przykład próżniowy²³ został opublikowany przez Greena i Walda w roku 2013 [24]. Z punktu widzenia zastosowań kosmologicznych analiza *backreaction* w modelach próżniowych jest mniej interesująca. W pracy [57], wraz z zespołem²⁴ doktorantów z Uniwersytetu Jagiellońskiego, przedstawiliśmy pierwszy przykład niepróżniowej rodziny rozwiązań równań Einsteina spełniającej założenia Greena i Walda. Tym samym udowodniliśmy, iż zbiór niepróżniowych rozwiązań równań Einsteina do których stosują się twierdzenia Greena i Walda nie jest pusty. Analiza znalezionej przez nas rodziny rozwiązań potwierdziła matematyczną spójność podejścia Greena i Walda. Jeśli to podejście dobrze oddaje naturę *backreaction*, to nasz wynik znacząco sugeruje, iż *ciemna energia* nie jest artefaktem uproszczeń modelu Λ CDM. Wynik ten uwiarygadnia fizyczne znaczenie rezultatu osiągniętego przeze mnie za pomocą modelu swiss-cheese [54].

Aby potwierdzić fizyczne znaczenie wyniku uzyskanego przeze mnie w pracy [54], należy również zbadać na ile ostateczne wnioski (drobnoskalowe niejednorodności nie wpływają w sposób zasadniczy na propagację światła) zależą od szczegółów konstrukcji modelu swiss-cheese. Wraz z dwoma współpracownikami z Uniwersytetu Helsińskiego pokazałem [39], iż statystyczne właściwości modeli swiss-cheese nie odbiegają zasadniczo od właściwości rozwiązań jednorodnych (o tej samej globalnej dynamice), jeśli przy konstruowaniu modeli swiss-cheese spełnione są pewne, określone przez nas, naturalne warunki. W szczególności wykazaliśmy, iż jeśli jeden z tych warunków zostanie złamany, to można skonstruować model swiss-cheese, w którym niejednorodności w sposób istotny zmieniają statystyczne właściwości modelu i będą miały zasadniczy wpływ na propagację światła.

²⁰Bezśladowość efektywnego tensora energii pędu implikuje, iż w odniesieniu do kosmologii efekt *backreaction* jest zaniedbywalny.

²¹Interpretacja fizyczna tych matematycznych warunków nie jest oczywista.

²²Przez czasoprzestrzenie efektywną rozumiem czasoprzestrzeń, która nie zawiera drobnoskalowych niejednorodności, lecz uwzględnia ich efektywny wkład do tensora energii-pędu. Innymi słowy, jest to efektywna czasoprzestrzeń po uśrednieniu niejednorodności.

²³Praca Burnetta [7] zawiera przykład próżniowy, lecz jest on zapisany w osobliwym układzie współrzędnych.

²⁴Badania przeprowadzono w ramach grantu *Iuventus*, którego byłem kierownikiem.

Drugi temat badawczy, którym zajmowałem się po uzyskaniu stopnia doktora dotyczy zjawisk krytycznych w kolapsie grawitacyjnym. Motywacją do przeprowadzenia tego typu badań była chęć znalezienia odpowiedzi na bardzo proste pytanie: czy równania Einsteina dopuszczają powstanie dowolnie małych czarnych dziur? Badania, zapoczątkowane przez Matthewa Choptuika w latach dziewięćdziesiątych, ujawniły szereg ciekawych zjawisk związanych z tym zagadnieniem [25]. Choptuik rozważał problem Cauchy'ego dla równań Einsteina, w którym dane początkowe są sparymetryzowane za pomocą jednego parametru b [10]. Tzw. słabe dane początkowe $b < b_0$ ulegają dyspersji, a silne dane początkowe $b > b_0$ prowadzą do powstania czarnej dziury (b_0 to wartość parametru rozdzielające te dwa typy ewolucji). Rozwiązanie krytyczne $b = b_0$ charakteryzuje się pewnymi uniwersalnymi właściwościami (stąd nazwa: zjawiska krytyczne w kolapsie grawitacyjnym). Właściwości te są niezależne od wyboru rodziny danych początkowych, a nawet w pewnym stopniu, niezależne od wyboru modelu (próżnia, pole skalarne, ...). W pracy [56], razem z Tadeuszem Chmajem, podaliśmy pierwszy przykład zjawisk krytycznych, w których rozwiązanie krytyczne było chaotyczne, a granica $b = b_0$ miała charakter fraktalny.²⁵ W przebadanym przez nas próżniowym modelu, można stworzyć dowolnie małą czarną dziurę. Dla pewnej klasy danych początkowych, fale grawitacyjne wyemitowane w takim procesie są chaotyczne (chaos deterministyczny). Badania te nawiązują swoją tematyką do badań prowadzonych przeze mnie przed uzyskaniem stopnia doktora.

Prace wykonane przed otrzymaniem stopnia doktora nauk fizycznych


Zjawiska krytyczne pojawiają się nie tylko w kontekście małych czarnych dziur i równań Einsteina. Wiele innych równań różniczkowych ma rozwiązania o podobnych właściwościach. W celu zrozumienia zjawisk krytycznych w kolapsie grawitacyjnym dla równań Einsteina, rozważa się prostsze, niezwiązane z grawitacją modele, które wykazują analogiczne cechy i są równocześnie łatwiejsze do przeanalizowania. Podobnie, nawet w kontekście pełnych równań Einsteina, często wybiera się modele, których symetrie i tensory energii pędu nie są motywowane bezpośrednio przez konkretne zagadnienia fizyczne, lecz przez swoje właściwości matematyczne. Jednym z takich modeli jest tzw. model $SU(2)$ *sigma* (rozważany w czasoprzestrzeni Minkowskiego [4] lub w sprzężeniu z grawitacją [6]).

Rozwiązanie krytyczne często jest samopodobne [25]. Dlatego przeanalizowanie tej klasy rozwiązań przeważnie ułatwia zrozumienie zjawisk kry-

²⁵Rozwiązania krytyczne o tej właściwości w naszym modelu mają dwa mody niestabilne, a więc można je wygenerować wykorzystując dwuparametrową rodzinę danych początkowych.

tycznych w modelu. W pracach [5, 53] przebadalem sferycznie symetryczne samobodobne rozwiazania rownan Einsteina w modelu $SU(2)$ *sigma* sprzezonym z grawitacja. Struktura rozwiazan samopodobnych w tym modelu zalezy od stalej sprzezzenia. W pracy [5], wraz Piotrem Bizoniem i Arthurem Wassermanem, wykazalismy istnienie rozwiazan periodycznych. Dla wiekszych wartosci stalej sprzezzenia pojawily sie rozwiazania chaotyczne. Proces bifurkacji i mechanizmy prowadzace do powstania rozwiazan chaotycznych zostaly wyjasnione w mojej kolejnej pracy dotyczacej tego zagadnienia [53].²⁶

Pozostale informacje, ktore wiazu sie z moimi osiagnieciai naukowobadawczymi (nagrody, wyroznienia, referaty na konferencjach, ...) przedstawilem w dokumencie opisujacym moj dorobek naukowy.



Krakow, 5 maja 2015

²⁶Temat ten byl rowniez tematem mojej pracy doktorskiej.

Literatura

- [1] ARTIN, E. Über die Zerlegung definiter Funktionen in Quadra, Quadrate. Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg (1927).
- [2] BACH, R., AND WEYL, H. Neue lösungen der Einsteinschen Gravitationsgleichungen. B. Explicite Aufstellung statischer axialsymmetrischer Felder. mit einem Zusatz über das statische Zweikörperproblem von h. Weyl. Mathematische Zeitschrift **13** (1922), 134–145.
- [3] BELINSKI, V., AND VERDAGUER, E. Gravitational Solitons. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2001.
- [4] BIZOŃ, P. Equivariant Self-Similar Wave Maps from Minkowski Spacetime into 3-Sphere. Communications in Mathematical Physics **215** (2000), 45–56.
- [5] BIZOŃ, P., SZYBKA, S. J., AND WASSERMAN, A. Periodic selfsimilar wave maps coupled to gravity. Physical Review D **69** (2004), 064014.
- [6] BIZOŃ, P., AND WASSERMAN, A. Selfsimilar spherically symmetric wave maps coupled to gravity. Physical Review D **62** (2000), 084031.
- [7] BURNETT, G. A. The high-frequency limit in General Relativity. J. Math. Phys. **30** (1989), 90.
- [8] CARTER, B. Global structure of the Kerr family of gravitational fields. Physical Review **174** (1968), 1559–1571.
- [9] CARTER, B. Black hole equilibrium states. In Black Holes, C. de Witt and B. de Witt, Eds. Gordon & Breach, New York, London, Paris, 1973. Proceedings of the Les Houches Summer School.
- [10] CHOPTUIK, M. W. Universality and scaling in gravitational collapse of a massless scalar field. Physical Review Letters **70** (Jan 1993), 9–12.
- [11] CHRUSCIEL, P. T., COSTA, J. L., AND HEUSLER, M. Stationary black holes: uniqueness and beyond. Living Reviews in Relativity **15**, 7 (2012).
- [12] DAIN, S., AND REIRIS, M. Area–angular-momentum inequality for axisymmetric black holes. Physical Review Letters **107**, 5 (July 2011), 051101.
- [13] DELZELL, C. N. A continuous, constructive solution to Hilbert’s 17th problem. Inventiones mathematicae **76**, 3 (1984), 365–384.

- [14] ELLIS, G. F. R. Inhomogeneity effects in cosmology. Classical and Quantum Gravity 28, 16 (2011), 164001.
- [15] ELLIS, G. F. R., AND STOEGER, W. The 'fitting problem' in cosmology. Classical and Quantum Gravity 4, 6 (1987), 1697.
- [16] ELVANG, H., AND FIGUERAS, P. Black Saturn. Journal of High Energy Physics 0705 (2007), 050.
- [17] EMPARAN, R., AND REALL, H. S. Black Rings. Classical and Quantum Gravity 23 (2006), R169.
- [18] EMPARAN, R., AND REALL, H. S. Black Holes in Higher Dimensions. Living Reviews in Relativity 11 (2008), 6.
- [19] ERNST, F. J. New formulation of the axially symmetric gravitational field problem. Physical Review 167 (1968), 1175–1179.
- [20] ERNST, F. J. New formulation of the axially symmetric gravitational field problem. ii. Physical Review 168 (1968), 1415–1417.
- [21] EVERITT, C., DEBRA, D., PARKINSON, B., TURNEAURE, J., CONKLIN, J., HEIFETZ, M., KEISER, G., SILBERGLEIT, A., HOLMES, T., KOLODZIEJCZAK, J., AL-MESHARI, M., MESTER, J., MUHLFELDER, B., SOLOMONIK, V., STAHL, K., WORDEN, P., BENCZE, W., BUCHMAN, S., CLARKE, B., AL-JADAAN, A., AL-JIBREEN, H., LI, J., LIPA, J., LOCKHART, J., AL-SUWAIDAN, B., TABER, M., AND WANG, S. Gravity Probe B: final results of a space experiment to test General Relativity. Physical Review Letters 106 (May 2011), 221101.
- [22] GEROCH, R. P. A method for generating new solutions of Einstein's equations. II. Journal of Mathematical Physics 13 (1972), 394–404.
- [23] GREEN, S. R., AND WALD, R. M. New framework for analyzing the effects of small scale inhomogeneities in cosmology. Physical Review D 83 (2011), 084020.
- [24] GREEN, S. R., AND WALD, R. M. Examples of backreaction of small-scale inhomogeneities in cosmology. Physical Review D 87 (2013), 124037.
- [25] GUNDLACH, C., AND MARTIN-GARCIA, J. M. Critical phenomena in gravitational collapse. Living Reviews in Relativity 10 (2007), 5.
- [26] HAUSER, J., AND ERNST, F. J. A proof of the Geroch Conjecture. Journal of Mathematical Physics 22 (1981), 1051–1063.
- [27] HAWKING, S. W. The existence of cosmic time functions. Royal Society of London Proceedings Series A 308 (1969), 433–435.

- [28] HAWKING, S. W. Gravitational radiation from colliding black holes. Physical Review Letters 26 (1971), 1344–1346.
- [29] HAWKING, S. W. Black holes in General Relativity. Communications in Mathematical Physics 25, 2 (1972), 152–166.
- [30] HAWKING, S. W., AND ELLIS, G. F. R. The large scale structure of space-time. Cambridge University Press, Cambridge, 1973. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, No. 1.
- [31] HEAVISIDE, O. A gravitational and electromagnetic analogy. The Electrician 31 (1893), 281–282.
- [32] HEAVISIDE, O. A gravitational and electromagnetic analogy. The Electrician 31 (1893), 359.
- [33] HENNIG, J., ANSORG, M., AND CEDERBAUM, C. A universal inequality between the angular momentum and horizon area for axisymmetric and stationary black holes with surrounding matter. Classical and Quantum Gravity 25, 16 (2008), 162002.
- [34] HENNIG, J., AND NEUGEBAUER, G. Non-existence of stationary two-black-hole configurations: the degenerate case. General Relativity and Gravitation 43 (2011), 3139–3162.
- [35] HERDEIRO, C. A. R., AND REBELO, C. On the interaction between two Kerr black holes. Journal of High Energy Physics 2008, 10 (2008), 017.
- [36] HILBERT, D. Mathematische probleme. Göttinger Nachrichten (1900), 253–297.
- [37] IORIO, L., Ed. The measurement of gravitomagnetism: a challenging enterprise. Nova Science Publishers, Inc., 2007.
- [38] KRAMER, D., AND NEUGEBAUER, G. The superposition of two Kerr solutions. Physical Letters A 75 (1980), 259–261.
- [39] LAVINTO, M., RÄSÄNEN, S., AND SZYBKA, S. J. Average expansion rate and light propagation in a cosmological Tardis spacetime. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics 1312 (2013), 051.
- [40] LEWANDOWSKI, J., AND PAWŁOWSKI, T. Extremal isolated horizons: a local uniqueness theorem. Classical and Quantum Gravity 20, 4 (2003), 587.
- [41] MATHISSON, M. Neue Mechanik materieller Systeme. Acta Physica Polonica 6 (1937), 163–200.

- [42] MATHISSON, M. Republication of: New mechanics of material systems. General Relativity and Gravitation 42, 4 (2010), 1011–1048.
- [43] MOTZKIN, T. S. Inequalities. Academic Press, New York, 1967.
- [44] MYERS, R. C., AND PERRY, M. J. Black holes in higher dimensional space-times. Annals of Physics 172 (1986), 304–347.
- [45] NEUGEBAUER, G. Bäcklund transformations of axially symmetric stationary gravitational fields. Journal of Physics A: Mathematical and General 12, 4 (1979), L67.
- [46] NEUGEBAUER, G. A general integral of the axially symmetric stationary Einstein equations. Journal of Physics A: Mathematical and General 13, 2 (1980), L19.
- [47] NEUGEBAUER, G., AND HENNIG, J. Non-existence of stationary two-black-hole configurations. General Relativity and Gravitation 41 (2009), 2113–2130.
- [48] NEWTON, I. Philosophiae Naturalis Principia Mathematica. 1687. Trans. A. Motte, 1846. *The Mathematical Principles of Natural Philosophy*. Published by Daniel Adee.
- [49] PAPAPETROU, A. Spinning test-particles in General Relativity. I. Royal Society of London Proceedings. Series A 209 (Oct. 1951), 248–258.
- [50] POMERANSKY, A., AND SEN'KOV, R. Black ring with two angular momenta. hep-th/0612005.
- [51] ŚREDNIAWA, B. Relativistic equations of motion of ‘spin particles’. In Cosmology and Gravitation, P. Bergmann and V. De Sabbata, Eds., vol. 58 of NATO Advanced Study Institutes Series. Springer, 1980, pp. 423–434.
- [52] ŚREDNIAWA, B. Myron Mathisson’s and Jan Weyssenhoff’s work on the problem of motion in General Relativity. In Studies in the History of General Relativity (1992), J. Eisenstaedt and A. Kox, Eds., vol. 3 of Einstein Studies., Birkhäuser, pp. 400–406.
- [53] SZYBKA, S. J. Chaotic selfsimilar wave maps coupled to gravity. Physical Review D 69 (2004), 084014.
- [54] SZYBKA, S. J. On light propagation in Swiss-Cheese cosmologies. Physical Review D 84 (2011), 044011.
- [55] SZYBKA, S. J. On gravitational interactions between two bodies. In Mathematical Structures of the Universe, M. Eckstein, M. Heller, and S. J. Szybka, Eds. CC Press, 2014, pp. 137–151.

- [56] SZYBKA, S. J., AND CHMAJ, T. Fractal Threshold Behavior in Vacuum Gravitational Collapse. Physical Review Letters 100 (2008), 101102.
- [57] SZYBKA, S. J., GŁÓD, K., WYRĘBOWSKI, M. J., AND KONIECZNY, A. Inhomogeneity effect in Wainwright-Marshman spacetimes. Physical Review D 89, 4 (2014), 044033.
- [58] THORNE, K. S. Gravitomagnetism, jets in quasars, and the Stanford Gyroscopes Experiment. In Near zero: new frontiers of physics, J. Fairbank, B. Deaver, W. Everitt, and P. Michelson, Eds. W.H. Freeman and Company, 1988, pp. 573–586.
- [59] WALD, R. M. Gravitational spin interaction. Physical Review D 6 (Jul 1972), 406–413.
- [60] WEYL, H. 3. Zur Gravitationstheorie. Annalen der Physik 54 (1917), 117–145.
- [61] WEYL, H. 5. Bemerkung über die axialsymmetrischen Lösungen der Einsteinschen Gravitationsgleichungen. Annalen der Physik 59 (1919), 185–188.