

Kraków, dn. 22 września 2013 r.

Prof. dr hab. Stanisław Drożdż
Wydział Fizyki, Matematyki i Informatyki
Politechnika Krakowska

**Recenzja rozprawy doktorskiej
Pana mgr Jeremiego K. Ochaba pt.:
„Static and dynamic properties of selected stochastic processes on
complex networks ”**

Rozprawa doktorska Pana mgr Jeremiego Ochaba wpisuje się w jedno z centralnych zagadnień współczesnej nauki jakim jest modelowanie, opis i systematyka występujących w Naturze struktur przy użyciu koncepcji sieci czy grafów oraz badanie dynamiki procesów na nich zachodzących. O interdyscyplinarnym wymiarze tego typu aktywności naukowej świadczy choćby fakt, że termin ‘sieci złożone’ – obecny już w tytule rozprawy – pojawia się coraz częściej w różnych kontekstach naukowych w tak rozległych dziedzinach jak fizyka, geologia, ekonomia, nauki społeczne, biologia a nawet lingwistyka ilościowa. Rozważana tu rozprawa doktorska dotyczy własności wybranych procesów losowych zachodzących na sieciach złożonych oraz sposobów w jaki wpływa na nie struktura i zmienność sieci w czasie. Sieci takie charakteryzują się w szczególności tak zwanym efektem małego świata, potęgowym rozkładem krotności wierzchołków czy modułową i hierarchiczną strukturą. Używane w rozprawie matematyczne modele procesów zachodzących na sieciach to perkolacja i błędzenia przypadkowe.

Rozprawa przedstawiona jest w formie dopuszczonej do prezentacji w przewodzie doktorskim przez Art. 13 Ustawy z dn. 18 marca 2011. W jej skład wchodzi pięć tematycznie spójnych, już opublikowanych artykułów, których Pan Ochab jest autorem bądź wiodącym autorem w gronie dwóch współautorów. Przedmiotem badań tych artykułów jest zagadnienie progowego prawdopodobieństwa wybuchu perkolacyjnie modelowanej

epidemii na sieci dynamicznej, własności różnych błędzeń losowych na deterministycznych grafach o dużej symetrii, efekty lokalizacji i uwięzienia błędzenia przypadkowego w odseparowanych częściach sieci, analizę użyteczności błędzeń losowych w identyfikacji topologicznych cech sieci złożonych, własności tzw. miar centralności opartych o błędzenia losowe oraz opartych o błędzenie przypadkowe metod wykrywania w sieciach struktur modułowych.

Rozprawa zawiera także bardzo obszerny Wstęp, który daje wprowadzenie w tematykę procesów na sieciach złożonych, w szczególności przedstawia definicje podstawowych koncepcji i miar sieciowych. Wstęp ten zawiera również prezentację pewnych wyników wcześniej niepublikowanych.

Powyżej zasygnalizowane zagadnienia zostały systematycznie omówione w następujących artykułach włączonych do rozprawy:

1. Artykuł *J. Ochab, P. Góra, Eur. Phys. J B 81 373 (2011)* jako ogólny cel określa sprawdzenie jaki wpływ ma dynamika sieci na proces stochastyczny określający rozprzestrzenianie się epidemii. Do tych badań zaadaptowano sieci małego świata typu Watts-Strogatza na dwuwymiarowej sieci kwadratowej. Taka sieć ma stałą liczbę wierzchołków i krawędzi, lecz zezwala na przypadkowe przełączanie krawędzi, co daje efekt małego świata bez zmiany ogólnej topologii sieci. Przełączanie krawędzi w czasie trwania epidemii pozwoliło tu na rozszerzenie istniejących wyników dotyczących perkolacji na sieciach Watts-Strogatza. Skorzystano w tym celu ze znanych wyników Grassbergera pokazujących równoważność perkolacji krawędziowej i modelu SIR (Susceptible-Infected-Recovered, tj. podatny-zainfekowany-ozdrowiały) rozprzestrzeniania się epidemii. W teoretycznym opisie rozwoju epidemii na ruchomej sieci zasadniczą trudnością jest odwzorowanie dynamicznego procesu SIR na model perkolacji, w którym sieć jest z założenia nieruchoma. W omawianym artykule analitycznie obliczono obniżenie się progów perkolacji dla epidemii, które wynika wyłącznie z dynamiki sieci. Numerycznie zbadano też skalowanie się zasięgu epidemii w zależności od rozmiaru sieci. W porównaniu do efektów skończonych rozmiarów dla sieci regularnej na sieci małego świata, zarówno nieruchomej jak i ruchomej, okazały się one znacznie mniejsze, a samo przejście pomiędzy wystąpieniem epidemii a jej brakiem

- mniej ostre. Wyniki te mają także znaczenie praktyczne w kontekście społecznych i ekonomicznych kosztów epidemii.

2. Artykuł *J. Ochab, Z. Burda, Phys. Rev. E 85, 021145 (2012)* szuka odpowiedzi na pytanie o różnicę pomiędzy statycznymi i dynamicznymi własnościami zwykłego oraz maksymalnie entropicznego błędzenia przypadkowego na drzewie Cayleya. Drzewo takie konstruuje się przez podanie liczby gałęzi wychodzących z dowolnego wierzchołka (z wyłączeniem liści) oraz liczby generacji (tj. liczby wierzchołków na drodze od korzenia do liści). W granicy nieskończonej liczby wierzchołków lub generacji drzewo Cayleya staje się siatką Bethego. Pierwotnie graf ten posiada wiele symetrii. W omawianym artykule został jednak nieco uogólniony, tak że liczba gałęzi wychodzących z korzenia drzewa może zostać wybrana dowolnie. Pomimo faktu, iż jest to graf deterministyczny, z czym wiążą się jego symetrie, może być użyty jako lokalne przybliżenie grafów przypadkowych. Dla tak zdefiniowanych drzew Cayleya w artykule tym wyprowadzono analityczne wyrażenie na widmo wartości własnych macierzy sąsiedztwa. Wynik ten pozwolił wyznaczyć dokładny stan stacjonarny maksymalnie entropicznego błędzenia przypadkowego. Stan taki jest określony przez wektor własny do największej wartości własnej macierzy sąsiedztwa i w tym przypadku okazuje się być zlokalizowany lub nie w zależności od zadanych liczb gałęzi korzenia i pozostałych wierzchołków. Rozwiązanie problemu własnego macierzy sąsiedztwa pozwoliło również znaleźć różnice w dynamice obydwu badanych błędzeń przypadkowych w czasie relaksacji do stanu stacjonarnego, co określone jest przez drugą największą wartość własną macierzy stochastycznych odpowiadających tym błędzeniom. Wyniki te pokazują, że zwykłe błędzenie zmierza do stanu stacjonarnego w czasie proporcjonalnym do rozmiaru sieci, natomiast błędzenie o maksymalnej entropii w czasie proporcjonalnym do logarytmu tego rozmiaru. Dodatkowo pokazano, że w wyniku symetrii czasy te mogą być jeszcze szybsze przy odpowiednio dobranym stanie początkowym błędzenia.

3. Artykuł *J. Ochab, Acta Physica Polon. B 43 1143 (2012)* rozszerza tematykę powyższą na innego typu modelowy graf. Jest to graf w kształcie drabiny, złożony z dwu połączonych ze sobą jednowymiarowych okręgów tak, że każdy wierzchołek na jednym okręgu jest połączony z lustrzanym wierzchołkiem na drugim. Jest to więc graf 3-regularny, który dzięki

symetrii odbicia może być traktowany jako układ jednowymiarowy. Analizy numeryczne pokazują, że układ ten ma interesującą cechę pułapkowania błędzenia przypadkowego o maksymalnej entropii na długi czas w obszarach ograniczonych przez wprowadzanie defektów usuwając krawędzie. Dokładniej rzecz ujmując, w grafie, w którym istnieją dokładnie dwa równe obszary tego typu, czas relaksacji zwykłego błędzenia skaluje się z kwadratem rozmiaru sieci, czego należy się spodziewać w zwykłej dyfuzji, oraz nie zależy on od liczby usuniętych krawędzi pomiędzy tymi dwoma obszarami. Dla błędzenia maksymalnie entropicznego czas relaksacji zależy eksponencjalnie od liczby tych krawędzi. Zależność od rozmiaru sieci jest tu mniej znacząca, co powoduje, że możliwość komunikacji pomiędzy tymi obszarami poprzez proces błędzenia przypadkowego spada eksponencjalnie z odległością. Model wieloparametrowy, w którym względne rozmiary rozdzielonych obszarów i przerwy pomiędzy nimi różniły się, nie dał tak prostych wyników i pozostaje niewyjaśniony.

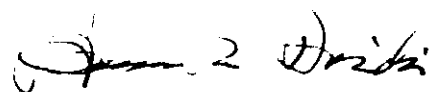
4. W artykule *J. Ochab, Phys. Rev. E 86, 066109 (2012)* przez porównanie zarówno numeryczne jak i analityczne kilku miar centralności oraz macierzy odmienności pokazano, że niektóre ze sposobów obliczania miar centralności dają bardzo zbliżone wyniki. Okazuje się ponadto, że macierze stochastyczne obu rozważanych błędzeń przypadkowych dają się w pewien szczególny sposób zsymetryzować. Dla takich błędzeń macierz fundamentalna, używana do konstrukcji macierzy średnich czasów pierwszego przejścia, może być uważana za niesymetryczną wersję propagatora cząstek związanego z danym błędzeniem przypadkowym. Miary oparte na błędzeniu maksymalnie entropicznym dają odmienne wyniki od reszty badanych miar, pozostając przy tym bardzo podobne do siebie nawzajem. Miary centralności związane ze zwykłym błędzeniem są nieco mniej podobne do siebie nawzajem i mogą zostać pomyłone z miarami definiowanymi na inne sposoby. Zwrócono też uwagę na związki pomiędzy własnościami spektralnymi macierzy sąsiedztwa, zliczaniem ścieżek, średnimi czasami pierwszego przejścia i innymi wielkościami związanymi z błędzeniem przypadkowym, co – zdaniem Autora – mogłoby świadczyć o istnieniu pewnej informacji strukturalnej o danej sieci, którą da się odczytać niezależnie od przyjętej metody.

5. Artykuł *J. Ochab, Z. Burda, Eur. Phys. J. Special Topics 216, 73 (2013)* bada metody wykrywania modułów w sieciach złożonych oparte na

błądzeniach przypadkowych. Metody te mogą dawać odmienne wyniki w zależności od zastosowanego błędzenia przypadkowego, co z jednej strony pozwala na dopasowanie błędzenia przypadkowego do badanego procesu, a z drugiej strony przeczy założeniu, że wszystkie metody powinny wykrywać pewien jedyny, najlepszy podział sieci na moduły. Założenie to towarzyszy jednak sprawdzaniu wydajności takich metod na grafach testowych, które mają pewną zadaną strukturę modułową. W artykule tym rozszerzono pewne istniejące metody wykrywania modułów oparte głównie na zwykłym błędzeniu przypadkowym, zastępując je błędzeniem maksymalnie entropicznym. Aby porównać wydajność tych metod w obu przypadkach użyto grafów testowych Lancichinetti-Fortunato-Radicchi (LFR). Wyniki generowane przez algorytmy wykrywania modułów były więc każdorazowo porównywane z zadanymi podziałami na moduły, które zdefiniowane były za pomocą wielkości typu lokalnego jak wewnątrz- i międzymodułowe krotności wierzchołków. Porównania dokonano dla kilku algorytmów, z których część nie była dotąd sprawdzana na grafach testowych. Jeden z algorytmów, Netwalk, okazał się działać wyraźnie gorzej niż pozostałe. W najlepiej działających algorytmach, oba błędzenia dawały porównywalne wyniki.

Oprócz omówionych powyżej opublikowanych wyników w części opisowej rozprawy Autor dodatkowo zawarł swoje dotąd niepublikowane obserwacje dotyczące własności macierzy średnich czasów przejść w odniesieniu do zagadnienia miar centralności i wykrywania modułów w sieciach złożonych. Pierwsza obserwacja dotyczy zwykłego błędzenia przypadkowego z tzw. teleportacją czyli przeniesieniem się błędzenia przypadkowego do dowolnego miejsca w sieci z pewnym ustalonym prawdopodobieństwem, którego stan stacjonarny znany jest jako PageRank używany w stworzonej przez Google wyszukiwarce stron. Autor wskazuje, że różnica pomiędzy stanem stacjonarnym zwykłego błędzenia przypadkowego a błędzeniem z teleportacją może być opisana jako liniowa poprawka zależna od powyższego prawdopodobieństwa i sumy średnich czasów pierwszego przejścia. Autor rozprawy pokazuje tu również, że dla grafów testowych LFR sumaryczne wartości rzędów macierzy średnich czasów pierwszego przejścia tworzą histogram o strukturze wielomodalnej. Kolejne mody okazują się w przybliżeniu odpowiadać kolejnym zadanym modułom lub grupom modułów sieci. Wierzchołki danego modułu charakteryzują się więc podobnym sumarycznym czasem przejścia do pozostałych miejsc w sieci.

Nie bardzo rozumiem, czemu Wstęp rozprawy jest napisany po angielsku (tym bardziej, że jest to znakomity Angielski) skoro prawie wszystkie znaczące wyniki rozprawy są już opublikowane w światowej literaturze angielskojęzycznej. W trosce o prawidłowy rozwój polskiej terminologii, szczególnie w tak nowej dziedzinie nauki, ja zalecałbym pisanie po polsku tego właśnie rozdziału rozprawy. Odnosnie strony merytorycznej to brakuje mi w rozprawie choćby wzmianki o możliwości zastosowania błędzeń przypadkowych typu lotów Levy'ego. Bazujące na nich algorytmy mogłyby być bardziej wydajne w identyfikacji struktur modularnych w sieciach. Tym niemniej stwierdzam, że rozprawa doktorska Pana mgr Jeremiego Ochaba dotyczy centralnych zagadnień fizycznych aspektów współczesnej nauki o złożoności i w tym kontekście zawiera kilka niezwykle interesujących propozycji i wyników. Z pełnym przekonaniem wnoszę więc o dopuszczenie Pana mgr Jeremiego Ochaba do dalszych etapów przewodu doktorskiego. Co więcej, zgodnie z załączonym dodatkowym uzasadnieniem, stawiam również wniosek o wyróżnienie tej rozprawy.



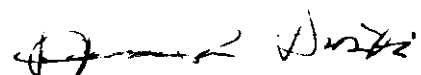
Stanisław Drożdż

Kraków, dn. 23 września 2013

Wniosek o wyróżnienie rozprawy doktorskiej
pt.: „Static and dynamic properties of selected stochastic processes on
complex networks”
Pana mgr Jeremiego K. Ochaba

Uzasadnienie wniosku:

1. Tematyka rozprawy dotyczy jednego z centralnych zagadnień współczesnej fizyki i ma równocześnie implikacje interdyscyplinarne, szczególnie w kontekście teorii układów złożonych.
2. Zawiera kilka bardzo wartościowych wyników, już opublikowanych w pięciu artykułach we wiodących periodykach literatury światowej, w tym dwu zupełnie jedno-autorskich. Szczególnymi z tych wyników są: stwierdzenie efektu obniżenia progu na epidemię w dynamicznych sieciach małego świata, określenie czasów relaksacji na drzewach Cayleya, oraz – dla błędzenia przypadkowego maksymalnej entropii – identyfikacja eksponencjalnej zależności czasu uwięzienia na sieci drabinowej z defektami.
3. Rozprawa ta jest inspirująca. Mnie na przykład pod jej wpływem rodzi się potrzeba przebadania struktury sieci lingwistycznych przy użyciu metodologii zastosowanej w rozprawie. W nieodległej przyszłości chętnie przedyskutowałbym z Autorem rozprawy to zagadnienie.
4. Rozprawa, a szczególnie jej obszerny Wstęp, jest tak zredagowana, że może także służyć jako bardzo użyteczne wprowadzenie do procesów stochastycznych na sieciach złożonych.



Stanisław Drożdż