

PRACA DOKTORSKA



Uniwersytet Jagielloński
Wydział Fizyki, Astronomii
i Informatyki Stosowanej

CAŁKOWALNOŚĆ
W KORESPONDENCJI ADS/CFT

Autor:

TOMASZ ŁUKOWSKI

Promotor pracy: dr hab. Romuald Janik

Recenzenci: dr hab. Leszek Hadasz
 dr hab. Jacek Pawełczyk

Dla moich Rodziców

Podziękowania

Na początku i w największym stopniu dziękuję Romualdowi Janikowi, mojemu promotorowi. Bez jego pomocy oraz wsparcia nie byłbym dzisiaj tym człowiekiem, którym się stałem. Naukowo, bo to on wprowadził mnie w tajniki współczesnej fizyki, a w szczególności otworzył mi drogę do zrozumienia korespondencji AdS/CFT. Umożliwiło mi to, między innymi, napisanie tej rozprawy doktorskiej. Poświęcił także mnóstwo czasu, aby odpowiadać na wszystkie moje (nie zawsze mądre) pytania. Prywatnie, gdyż jego spokój i wyrozumiałość stanowiły (i będą stanowić) dla mnie zawsze wzór do naśladowania. Jestem wdzięczny losowi, że postawił na mojej drodze takiego nauczyciela, jak on.

W drugiej kolejności chciałbym okazać wdzięczność trzem osobom, z którymi zetknąłem się w czasie moich studiów, a które były mi towarzyszami w czasie mojego naukowego dorastania. Są to Adam Rej, Michał Heller oraz Paweł Caputa. Z Adamem poznałem się na pierwszej zagranicznej konferencji, w której brałem udział i od tamtego czasu jest dla mnie, jak starszy brat. Zawsze mogłem liczyć na jego radę w sprawach, które przekraczały moje zdolności odnalezienia się w świecie naukowym. Michał, jako drugi z doktorantów Romualda Janika, przechodził dokładnie tę samą ścieżkę naukowego wtajemniczenia w tym samym czasie, co ja. Dawało to nam możliwość wzajemnego wspierania się, ale i konkurencji ze sobą. Najbardziej dawało jednak satysfakcję wspólne pokonywanie trudności w drodze, którą jednocześnie pokonywaliśmy. Z kolei Paweł, którego poznałem gdy kończył swoje studia magisterskie w Amsterdamie, a następnie byłem przez niego ugoszczony w Kopenhadze, zawsze imponował mi swoim entuzjazmem. Jego chęć zrozumienia zagadnień fizyki, ale także świata dookoła, była zawsze bardzo zaraźliwa.

Poza tym, chciałbym podziękować wszystkim ludziom, z którymi przyszło mi pracować w czasie mojego doktoratu. Poza osobami już wymienionymi byli to Zoltan Bajnok, Stefan Zieme, Valentina Forini, Árpád Hededi, Vitaly Velizhanin, Olof Ohlsson Sax, Matteo Beccaria, a także Charlotte Kristjansen, Carlo Meneghelli oraz Matthias Staudacher. Współpraca z nimi była dla mnie bardzo pozytywnym doświadczeniem i jednocześnie stymulowała mnie do dalszego rozwoju. Dodatkowo, jestem wdzięczny Instytutowi Nielsa Bohra w Kopenhadze oraz Instytutowi Alberta Einsteina w Poczdamie za gościnność, z jaką mnie przyjęły.

Podziękowania należą się także osobom, które były zawsze przy mnie, choć nie brały czynnego udziału w procesie eksplorowania przeze mnie świata fizyki teoretycznej. Należą do nich moi przyjaciele i znajomi, a w szczególności Karolina Kiryjczuk oraz moja siostra Marta. Na samym końcu chciałbym podziękować moim rodzicom. Umożliwili mi oni podjęcie studiów na kierunku, który sobie wybrałem, a także wspierali w ich trakcie. Choć nie za każdym razem zgadzali się z moimi decyzjami i poczynaniami, byli zawsze wyrozumiali i pomocni i to im chciałbym zadedykować tę pracę.

Spis treści

Podziękowania	i
I Wprowadzenie	1
1 Wstęp	3
2 Ogólne wprowadzenie	9
2.1 Korespondencja AdS/CFT	9
2.1.1 $\mathcal{N} = 4$ SYM	9
2.1.2 Teoria strun na $AdS_5 \times S^5$	13
2.1.3 Sformułowanie korespondencji	14
2.2 Kwantowa całkowalność	15
2.2.1 Własności dwuwymiarowych całkowalnych teorii pola	15
2.2.2 Macierz rozpraszania $2 \rightarrow 2$	20
2.2.3 Macierz rozpraszania dla teorii nierelatywistycznych	23
2.3 Całkowalne łańcuchy spinowe	23
2.3.1 Łańcuch spinowy Heisenberga	24
2.3.2 Łańcuch spinowy w $\mathcal{N} = 4$ SYM	27
II Całkowalność w korespondencji AdS/CFT	31
3 Uogólnione formuły Lüschera	33
3.1 Poprawki Lüschera dla pojedynczego wzbudzenia	35
3.1.1 Funkcje Greena	36
3.1.2 Wiodące diagramy Feynmana	38
3.1.3 Zależność między funkcją Greena a macierzą \mathcal{S}	44
3.1.4 Ostateczne wzory na poprawkę	45
3.1.5 Przypadek teorii relatywistycznej	46
3.2 Poprawki Lüschera dla wielu wzbudzeń	47
3.2.1 TBA dla stanu podstawowego	48
3.2.2 TBA dla stanów wzbudzonych	50
3.2.3 Wzory na poprawki Lüschera	51
3.2.4 Teoria z niediagonalnym rozpraszaniem	53
3.2.5 Porównanie z wyprowadzeniem diagramatycznym	54
3.2.6 Wzory końcowe	55

4	Silne sprzężenie	57
4.1	Wielkie magnony	57
4.2	μ -term	59
4.3	F -term	63
4.3.1	Kwadratowe fluktuacje	63
4.3.2	Obliczenie F -termu	66
5	Słabe sprzężenie	69
5.1	Własności wymiaru anomalnego w słabym sprzężeniu	71
5.1.1	Zasada maksymalnej transcendentalności	72
5.1.2	Zasada parzystości	73
5.1.3	Ograniczenia na asymptotykę	74
5.1.4	Równanie BFKL	75
5.2	Asymptotyczny Ansatz Bethego	76
5.2.1	Operatory twist-2	76
5.2.2	Operatory twist-3	80
5.3	Efekty skończonego rozmiaru	82
5.3.1	Operatory twist-2	83
5.3.2	Operatory twist-3	92
III	Podsumowanie	95
6	Podsumowanie oraz problemy otwarte	97
IV	Dodatki	99
A	Krzywe algebraiczne zmiennej rapidity	101
A.1	Teorie relatywistyczne	101
A.2	Teoria superstrun w $AdS_5 \times S^5$	102
B	Struktura macierzy \mathcal{S}	103
B.1	Rozpraszanie $1 + 1 \rightarrow 1 + 1$	103
B.1.1	Dressing factor jako szereg	103
B.1.2	Dressing factor jako całka	105
B.2	Rozpraszanie $Q + 1 \rightarrow Q + 1$	105
C	Asymptotyka sum harmoniczych	107
C.1	"Wrapping" dla operatorów twist-2 – 4 pętle	107
D	Przedłużanie sum harmoniczych	109
D.1	Przedłużanie sum z dodatnimi indeksami	109
D.2	Sumy z co najmniej jednym ujemnym indeksem	110

Część I
Wprowadzenie

Rozdział 1

Wstęp

Zagadnienie korespondencji AdS/CFT cieszy się niesłabnącym zainteresowaniem od kiedy w 1998 roku Juan Maldacena opublikował pierwszą pracę na ten temat [1]. Idea połączenia dwóch zasadniczo różnych teorii, jakimi są teoria strun oraz teoria pól Yanga-Millsa, stała się jedną z centralnych myśli współczesnej fizyki teoretycznej i wiele pracy zostało włożone w celu jej dokładnego zrozumienia. Korespondencja AdS/CFT mówi o istnieniu szerokiej klasy teorii dualnych, tzn. będących równoważnym opisem tego samego zagadnienia. W swej oryginalnej pracy Maldacena zaproponował dualność pomiędzy teorią superstrun w przestrzeni $AdS_5 \times S^5$ a maksymalnie supersymetryczną teorią Yanga-Millsa w czterech wymiarach ($\mathcal{N} = 4$ SYM¹). Późniejsze prace pokazały, że można tę korespondencję uogólnić także na inne teorie cechowania oraz na inne geometrie przestrzeni, na których zdefiniowana jest teoria strun.

Idea dualności pomiędzy teorią strun oraz teorią cechowania bierze swój początek z rozważań 't Hoofta [2]. Zrozumiał on, że dla teorii cechowania, dla której grupą cechowania jest $U(N)$, w granicy dużych N rozwinięcie perturbacyjne w stałej sprzężenia może zostać zapisane alternatywnie, gdy jako parametr perturbacyjny weźmiemy wielkość $\frac{1}{N}$. Na rozwinięcie to składają się dwuwymiarowe powierzchnie, na których można narysować kolejne diagramy Feynmana, o rosnącym genusie. To drugie z kolei jest typowym rozwinięciem perturbacyjnym teorii strun. Analiza 't Hoofta dała teoretyczne przesłanki dla istnienia dualności pomiędzy teorią cechowania oraz teorią strun, lecz trzeba było czekać kolejne 25 lat, aby idea ta stała się teorią, którą dzisiaj nazywamy korespondencją AdS/CFT. W szczególności, odkrycie D -bran, będących rozciągniętymi obiektami masywnymi, na których można zadać warunki brzegowe dla otwartych strun [3, 4], pozwoliło zrobić krok naprzód i uczynić tę dualność bardziej precyzyjną. Otóż Witten w [5] zrozumiał, że jeśli rozpatrzemy N pokrywających się D -bran, to układ taki może posłużyć do opisu teorii cechowania w przestrzeni $(D + 1)$ -wymiarowej z grupą cechowania $U(N)$. Opierając się na tej idei, Maldacena badał granicę niskoenergetyczną teorii strun ($\alpha' \rightarrow 0$) w geometrii wygenerowanej przez N pokrywających się $D3$ -bran takich, że teorią cechowania na branach była dokładnie $\mathcal{N} = 4$ SYM. Geometria w tej granicy okazała się być dokładnie iloczynem pięciowymiarowej przestrzeni anty-de-Sittera oraz sfery pięciowymiarowej. Fizyczna przestrzeń czterowymiarowa może zostać w tym podejściu odtworzona na brzegu przestrzeni AdS_5 podczas, gdy sfera jest stowarzyszona z

¹Liczba 4 występująca w tej notacji odnosi się do ilości superładunków, a nie do wymiarowości przestrzeni, w której teoria jest rozpatrywana.

wewnętrzny stopniami swobody pól cechowania. Idea, że pięciowymiarowa teoria jest zdeterminowana przez czterowymiarową teorię na jej brzegu, była postulowana przez 't Hoofta dużo wcześniej w kontekście zagadnienia czarnych dziur i jest znana pod nazwą *zasady holograficznej* [6]. Podobna własność jest też obecna w topologicznych teoriach pola takich, jak teoria Cherna-Simonsa, używanych do opisu np. kwantowego efektu Halla.

W celu pokazania cech wspólnych teorii stojących po obu stronach korespondencji możemy w szczególności porównać ich symetrie globalne. Po pierwsze, teoria $\mathcal{N} = 4$ SYM okazuje się być teorią konforemną, a co za tym idzie posiada symetrię konforemną, która w czterech wymiarach dana jest poprzez $\mathfrak{so}(4, 2) = \mathfrak{su}(2, 2)$. Dodatkowo, posiada ona symetrię wewnętrzną opisującą transformacje w zbiorze czterech ładunków supersymetrycznych, tzw. R-symetrię, która dana jest poprzez $\mathfrak{su}(4) = \mathfrak{so}(6)$. Łącząc te dwie algebry dostaniemy symetrię bozonową teorii cechowania. Z drugiej strony, algebra $\mathfrak{so}(4, 2) \times \mathfrak{so}(6)$ opisuje dokładnie symetrię przestrzeni $AdS_5 \times S^5$. Mamy więc zgodność symetrii bozonowych obu teorii. Dodatkowo, Metsaev oraz Tseytlin pokazali [7], że teoria strun typu IIB zdefiniowana na przestrzeni $AdS_5 \times S^5$ może być sformułowana jako nieliniowy model σ na zbiorze ilorazowym $\frac{\mathfrak{psu}(2, 2|4)}{\mathfrak{so}(4, 1) \times \mathfrak{so}(5)}$. Z kolei algebra $\mathfrak{psu}(2, 2|4)$ odpowiada pełnej symetrii teorii $\mathcal{N} = 4$ SYM, co daje zgodność symetrii globalnych obu modeli.

Aby uczynić korespondencję bardziej precyzyjną zauważmy, że teoria cechowania posiada dwa parametry: stałą sprzężenia g_{YM} oraz ilość kolorów N . Te dwie wielkości pozwalają zdefiniować tzw. *stałą 't Hoofta* $\lambda = g_{\text{YM}}^2 N$. Parametry teorii cechowania, jak zostało pokazane w [1], mogą być powiązane z parametrami teorii strun w następujący sposób

$$4\pi g_s = g_{\text{YM}}^2 = \frac{\lambda}{N}, \quad \frac{R^4}{\alpha'^2} = \lambda, \quad (1.1)$$

gdzie g_s jest strunową stałą sprzężenia, α' jest naprężeniem struny, natomiast R oznacza promień zarówno przestrzeni AdS_5 jak i sfery pięciowymiarowej. Relacje (1.1) pozwalają nam przetłumaczyć wszystkie wyniki, które otrzymamy w teorii strun na język teorii cechowania i vice versa.

W momencie, w którym mamy już zarysowaną zależność pomiędzy obiema teoriami występującymi w korespondencji AdS/CFT, chcielibyśmy teraz przejść do zidentyfikowania obiektów oraz wielkości, którymi będziemy w nich zainteresowani. Po stronie teorii strun będziemy badać konfiguracje strunowe oraz wyznaczać energie tych konfiguracji. Z kolei po stronie teorii cechowania będziemy zainteresowani niezmienniczymi względem cechowania operatorami lokalnymi oraz ich wymiarami konforemnymi. Wymiary te są wartościami własnymi operatora dylatacji, który jest jednym z generatorów symetrii konforemnej. W świetle korespondencji, dla każdego operatora lokalnego istnieje odpowiadający mu stan strunowy, a wymiar konforemny operatora jest równy energii odpowiadającej mu struny. Korespondencja zaproponowana przez Maldacene w swej najsilniejszej formie mówi, że zgodność ta jest prawdziwa dla wszystkich wartości N . W praktyce jednak, ze względu na stopień skomplikowania, nie jesteśmy w stanie badać tej najbardziej ogólnej postaci korespondencji. Sytuacja jednak zasadniczo upraszcza się, jeśli rozważymy granicę, w której ilość kolorów N dąży do nieskończoności podczas, gdy stała 't Hoofta λ pozostaje ustalona. W takiej sytuacji, powołując się na relacje (1.1), strunowa stała sprzężenia znika, co oznacza, że mamy do czynienia ze strunami, które nie oddziałują ze sobą. Z kolei w teorii cechowania oznacza to wzięcie jedynie diagramów Feynmana, które możemy narysować na płaszczyźnie. Granicę tę nazywamy granicą pla-

narną. W rozważaniach prezentowanych w tej rozprawie będziemy zainteresowani jedynie przypadkiem planarnym.

Zanim uczynimy kolejny krok, chcielibyśmy zwrócić uwagę na jeszcze jeden fakt, który powoduje, że korespondencja AdS/CFT jest ciekawa, a jednocześnie trudna do udowodnienia. Jeśli weźmiemy pod uwagę fakt, że działanie dla nieliniowego modelu σ jest proporcjonalne do stałej t Hoofta, to można zauważyć, że korespondencja AdS/CFT jest dualnością typu słabe/silne sprzężenie. Region teorii, w którym mamy do czynienia z rozwinięciem perturbacyjnym teorii cechowania, $\lambda \rightarrow 0$, odpowiada bowiem silnie sprzężonemu modelowi Metsaeva-Tseytlina. Z drugiej strony, rozważania klasyczne teorii strun, odpowiadające granicy $\lambda \rightarrow \infty$, oznaczają dużą wartość stałej sprzężenia teorii Yanga-Millsa. Jest to przyczyną trudności, z jakimi mamy do czynienia, gdy chcemy udowodnić dualność zaproponowaną przez Maldacene, gdyż dostępne perturbacyjne regiony obu teorii w korespondencji są całkowicie rozłączne. Jeśli jednak założymy poprawność korespondencji, to mamy niepowtarzalną możliwość eksplorowania efektów nieperturbacyjnych obu teorii, używając do tego rozwinięcia perturbacyjnego drugiej z nich.

Pomimo tego, że w ogólności nie jesteśmy w stanie porównać rachunków perturbacyjnych obu teorii występujących w korespondencji, to jednak istnieją obiekty, dla których jest to możliwe. Są to tzw. stany BPS (ang. BPS states), które, ze względu na supersymetrię, są chronione i ich liczby kwantowe nie są zależne od stałej sprzężenia. Stany te były głównym obiektem zainteresowania początkowej fazy pracy nad korespondencją. Sytuacja zmieniła się dopiero w 2002 roku, kiedy to Berenstein, Maldacena i Nastase (BMN) [8] znaleźli granicę, w której możliwe było badanie obiektów innych niż stany BPS. Badali oni konfiguracje strunowe, które wyglądają praktycznie jak cząstki punktowe, poruszające się po równiku sfery S^5 z bardzo dużym momentem pędu J . Geometrią widzianą przez te szybko poruszającą się struny jest tzw. geometria fali płaskiej (ang. plane-wave geometry) [9]. Okazuje się, że teoria strun w tym przypadku może zostać skwantowana dokładnie i wzbudzenia struny są masowymi bozonami lub fermionami.

Mniej więcej w tym samym czasie pierwsze struktury całkowalne zostały zauważone niemal jednocześnie w perturbacyjnej teorii cechowania oraz teorii strun. Po pierwsze, Minahan oraz Zarembo pokazali [10], że jednopętlowy operator dylatacji w pewnym podsektorze teorii może być utożsamiony z hamiltonianem pewnego całkowalnego łańcucha spinowego. Z drugiej strony, Bena, Polchinski i Roiban udowodnili w [11], że model σ Metsaeva-Tseytlina jest klasycznie całkowalny. Otworzyło to całkiem nowe pole zainteresowań w korespondencji i zaowocowało, między innymi, wynikami opisywanymi w tej rozprawie doktorskiej. Dalsze badania pokazały, że całkowalność da się rozszerzyć na wszystkie operatory w jednej pętli [12], jak również może ona zostać pokazana dla dwóch oraz trzech pętli [13]. Podobnie, jak dla jednopętlowego operatora dylatacji, również wyższe rozwinięcia mogą być utożsamione z hamiltonianem pewnego łańcucha spinowego. Jedyna różnica polega na tym, że w tym pierwszym przypadku oddziaływanie w łańcuchu jest lokalne, jak np. w łańcuchu spinowym Heisenberga podczas, gdy pełne rozwinięcie daje łańcuch spinowy z oddziaływaniem długi-zasięgowym. Zasięg rośnie tutaj wraz z liczbą rozpatrywanych pętli rozwinięcia. Wyniki dla wyższych pętli skłoniły autorów [13] do zaproponowania, że być może własność całkowalności jest prawdziwa także w dowolnym rzędzie w rozwinięciu perturbacyjnym teorii cechowania. Rezultaty te pozwoliły także zasugerować, że całkowalność w perturbacyjnej teorii cechowania oraz w semiklasycznej teorii strun są manifestacją struktury całkowalnej obecnej w pełnych wersjach tych teorii,

czyli dla dowolnej wartości stałej 't Hoofta λ . Jak do tej pory nie jest znany dowód tego faktu, lecz wszystkie poznane do tej pory wyniki potwierdzają poprawność tej tezy.

Obserwacja, że teoria cechowania występująca w korespondencji AdS/CFT może zostać opisana za pomocą całkowalnego łańcucha spinowego, otworzyła całkiem nowe możliwości eksploracji korespondencji. W szczególności, pozwoliła zastosować metody teorii całkowalnych do rozwiązania problemu spektralnego. Jako punkt startowy w procesie diagonalizacji hamiltonianu w teoriach całkowalnych możliwe jest zastosowanie tzw. Asymptotycznego Ansatzu Bethego (ABA) [14]. W tym celu należy zidentyfikować obszar asymptotyczny teorii i zdefiniować asymptotyczną macierz rozpraszania pomiędzy wzbudzeniami. Całkowalność mówi między innymi, że każde rozpraszanie może być sfaktoryzowane i jedyna informacja, jaką potrzebujemy, zawarta jest w macierzy rozpraszania pomiędzy dwoma wzbudzeniami. Znając tę macierz możliwe jest zapisanie równań Bethego, w których zawarta jest informacja na temat energii dowolnego stanu łańcucha spinowego. Dla przypadku teorii $\mathcal{N} = 4$ SYM obszar asymptotyczny może być zdefiniowany jedynie dla nieskończenie długich łańcuchów spinowych. Macierz rozpraszania pomiędzy dwoma wzbudzeniami takich łańcuchów została wyznaczona z dokładnością do pewnej funkcji skalarnej przez Beiserta w [15]. W celu jej wyznaczenia używał on reguł komutacji macierzy rozpraszania z generatorami symetrii łańcucha spinowego. Funkcja skalarowa, zwana dressing factorem, której Beisert nie był w stanie wyznaczyć w swojej pracy, może być zdeterminowana przez własności fizyczne - unitarność oraz tzw. symetrię crossing. Dla przypadku teorii $\mathcal{N} = 4$ SYM równanie crossing zostało wyznaczone przez Janika w [16], a następnie rozwiązane w serii prac [17, 18, 19, 20, 21], co zakończyło proces wyznaczania macierzy rozpraszania dla łańcucha spinowego w teorii $\mathcal{N} = 4$ SYM. Bazując na tych wynikach można wyprowadzić równania Bethego, które po raz pierwszy zostały wcześniej zaproponowane w [22].

Jak wspomnieliśmy powyżej, równania Bethego mogą być zapisane jedynie dla nieskończonego łańcucha spinowego w $\mathcal{N} = 4$ SYM. Nie są one jednak w stanie opisać spektrum dla łańcucha o skończonej długości. Wynika to z faktu, że oddziaływanie w łańcuchu jest długodystansowe i jego zasięg rośnie wraz z rzędem rachunku perturbacyjnego, który rozpatrujemy (jest więc nieskończony w pełnej teorii). Oznacza to w szczególności, że dla ustalonej długości łańcucha, istnieje wyraz w rozwinięciu perturbacyjnym, dla którego zasięg oddziaływania przekracza rozmiar łańcucha i mamy do czynienia z tzw. efektami wrapping. Wrapping odpowiada diagramom Feynmana teorii cechowania, w których istnieją pętle obiegających łańcuch dookoła. Powoduje to, że pojęcie asymptotycznej macierzy rozpraszania, będącej głównym składnikiem idei Asymptotycznego Ansatzu Bethego, traci sens. Jeśli jednak rozważymy rozwinięcie perturbacyjne operatora dylatacji dla nieskończonego długiego łańcucha, to zasięg oddziaływania pozostanie skończony w każdym rzędzie i będziemy w stanie znaleźć obszar asymptotyczny w tym przypadku. Tak więc równania ABA dla skończonego łańcucha spinowego są w stanie poprawnie opisywać jego spektrum jedynie dla skończonej ilości początkowych wyrazów w rozwinięciu perturbacyjnym. Jeśli chcemy jednak pójść krok dalej, to musimy uwzględnić poprawki wynikające ze skończonego rozmiaru układu.

W celu obliczenia tych poprawek autorzy [23] zasugerowali, że oddziaływania typu wrapping mogą zostać utożsamione z poprawkami skończonego rozmiaru w całkowalnej teorii pola zdefiniowanej na cylindrze. Poprawki te pochodzą z oddziaływania fizycznych wzbudzeń z cząstkami wirtualnymi biegnącymi wokół cylindra. Co ciekawe, mogą być

one jednoznacznie wyznaczone używając jedynie informacji pochodzących z teorii zdefiniowanej w nieskończonej objętości! Problem znalezienia wiodących poprawek do energii pochodzących od wirtualnych wzbudzeń na cylindrze był badany w latach 80-tych XX wieku w kontekście teorii relatywistycznych przez Lüschera [24]. Aby móc zastosować ideę zaprezentowaną przez niego, w celu policzenia wielkości występujących w teorii $\mathcal{N} = 4$ SYM, potrzebne jest uogólnienie z teorii relatywistycznej na teorię z dowolną relacją dyspersji. Uogólnione wzory Lüschera zostały znalezione w [A1] i wykorzystane do policzenia wiodących poprawek eksponencjalnych do energii klasycznych konfiguracji strunowych w korespondencji AdS/CFT. Następnie zostały także użyte do policzenia poprawek do wymiaru anomalnego stanów łańcucha spinowego w słabym sprzężeniu [25], dając dokładną zgodność z obliczeniami perturbacyjnymi teorii cechowania [26, 27].

Zastosowanie uogólnionych wzorów Lüschera pozwala nam na znalezienie poprawnych wyników dla wyższych wyrazów w rozwinięciu perturbacyjnym teorii cechowania niż umożliwiały to równania ABA. Są one jednak jedynie wiodącym wkładem pochodzącym od skończonego rozmiaru i muszą być uzupełnione przez podwiodące poprawki. Z drugiej jednak strony, całkowalność naszych teorii powoduje, że możemy spróbować zrobić olbrzymi skok w naszych rozważaniach i od razu podjąć się zadania znalezienia pełnego spektrum teorii w skończonym rozmiarze. W literaturze istnieje kilka metod pozwalających na wykonanie tego zadania. Jednym z nich jest tzw. Termodynamiczny Ansatz Bethego (TBA) [28], który pozwala zakodować energie cząstek teorii całkowalnych w pewnych nieliniowych równaniach całkowych. Dla teorii $\mathcal{N} = 4$ SYM równania TBA zostały zaproponowane w [29] oraz niezależnie w [30, 31]. Pierwsze potwierdzenie poprawności zaproponowanych równań można znaleźć w pracach [32, 33], gdzie zostało pokazane, że rozwinięcie pięciopętłowe równań TBA dla operatorów twist-2 pokrywa się z wynikiem uzyskanym w [A2, A3], gdzie autorzy skorzystali z wzorów na poprawki Lüschera.

Mimo tego, że udało się znaleźć równania TBA dla teorii występujących w korespondencji, to wciąż istnieje wiele problemów technicznych, które nie pozwalają nam uznać znalezienie pełnego spektrum tych teorii za zamknięte. W szczególności, problemem jest fakt, że Termodynamiczny Ansatz Bethego dla korespondencji AdS/CFT prowadzi do układu *nieskończenie wielu* powiązanych ze sobą nieliniowych równań całkowych. W ogólności, rozwiązanie takiego układu jest niemożliwe nie tylko analitycznie, ale nawet obliczenia numeryczne są utrudnione. Dlatego też trwają nieprzerwane prace mające na celu zmniejszenie liczby tych równań do skończonej ilości. Bardzo obiecująca okazuje się metoda znaleziona przez Destriego i de Vegę (DdV), która daje nadzieję na pomyślne zakończenie poszukiwań.

O pracy

Poniższa rozprawa doktorska skonstruowana jest w następujący sposób. W dalsze części Rozdziału 2. znajduje się wprowadzenie do tematyki korespondencji AdS/CFT oraz jej aspektów całkowalnych. Wprowadzenie to zawiera tylko najbardziej istotne aspekty teorii, potrzebne do zrozumienia głównej części pracy. Bardziej dogłębna analiza podstaw korespondencji AdS/CFT została przeprowadzona w wielu artykułach przeglądowych, z których najbardziej wartymi polecenia są [34] oraz [35]. W szczególności, w dalszej części

rozdziału opisane są dokładnie teorie biorące udział w korespondencji wraz z ich podstawowymi własnościami. Następnie zdefiniowane jest pojęcie kwantowej całkowalności i pokazane, jakie konsekwencje ma całkowalność dla teorii dwuwymiarowych. W dalszej części wprowadzenia pokazane jest także, jak można otrzymać równania Asymptotycznego Ansatzu Bethego dla łańcucha spinowego oraz jak dla długozasięgowych łańcuchów spinowych może on być uzupełniony przez poprawki Lüschera. W Rozdziale 3. podane jest wyprowadzenie uogólnionych formuł Lüschera. Dla przypadku jednego wzbudzenia podane jest wyprowadzenie diagramatyczne podczas, gdy dla wielu wzbudzeń użyte są metody całkowalnych teorii pola na cylindrze (TBA). W Rozdziałach 4. oraz 5. znajduje się zastosowanie znalezionych wzorów Lüschera do obliczenia wymiaru anomalnego oraz energii różnych stanów teorii występujących w korespondencji. W Rozdziale 4. podane jest zastosowanie dla silnego sprzężenia² podczas, gdy w Rozdziale 5. można znaleźć wyniki dla małej wartości stałej sprzężenia. Rozprawę zakończymy podsumowaniem i wskazaniem głównym kierunków badań w tej tematyce. Na samym końcu pracy znajdują się Dodatki, w których można znaleźć szczegółowe informacje na temat niektórych pojęć i metod użytych w głównym tekście pracy.

²Przez silne (odp. słabe) sprzężenie rozumiemy w całej pracy bliską nieskończoności (odp. bliską zera) wartość stałej 't Hoofta.

Rozdział 2

Ogólne wprowadzenie

2.1 Korespondencja AdS/CFT

Nasze wprowadzenie rozpoczniemy od zdefiniowania teorii, o których mówi korespondencja AdS/CFT. Na początku opiszemy supersymetryczną teorię cechowania z maksymalną ilością superładunków w czterech wymiarach ($\mathcal{N} = 4$ SYM). Następnie zdefiniujemy teorię strun na przestrzeni $AdS_5 \times S^5$. Na końcu podamy jaki związek pomiędzy tymi teoriami został zaproponowany przez Maldacene w [1].

2.1.1 $\mathcal{N} = 4$ SYM

Działanie teorii cechowania $\mathcal{N} = 4$ SYM w czterech wymiarach można otrzymać przed redukcją wymiarową z dziesięciowymiarowej teorii supersymetrycznej ($\mathcal{N} = 1$), której działanie jest dane poprzez

$$S = \int d^{10}x \left(\frac{1}{4} \text{Tr} [F_{MN} F^{MN}] + \frac{1}{2} \text{Tr} [\psi \Gamma^M \mathcal{D}_M \psi] \right). \quad (2.1)$$

Tutaj pochodna kowariantna zdefiniowana jest jako

$$\mathcal{D}_M = \partial_M - ig_{\text{YM}} [A_M, \cdot], \quad (2.2)$$

natomiast ψ jest spinorem Majorany-Weyla o szesnastu komponentach. Jeśli teraz dokonamy redukcji wymiarowej, to sześć z pól cechowania stanie się polami skalarnymi podczas, gdy spinor zredukuje się do czterech kopii prawych oraz lewych dwukomponentowych spinorów w czterech wymiarach

$$\begin{aligned} A_M, \quad M = 1, \dots, 4 &\rightarrow A_\mu, \quad \mu = 0, \dots, 3, \\ A_M, \quad M = 5, \dots, 10 &\rightarrow \Phi_i, \quad i = 1, \dots, 6, \\ \psi_A, \quad A = 1, \dots, 16 &\rightarrow \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}^a, \psi_{a,\alpha}, \quad a = 1, \dots, 4, \quad \alpha, \dot{\alpha} = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Teraz działanie czterowymiarowej teorii cechowania dane jest poprzez

$$S = \int d^4x \left(\frac{1}{4} \text{Tr} [F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}] + \frac{1}{2} \text{Tr} [\mathcal{D}_\mu \Phi_i \mathcal{D}^\mu \Phi^i] - \frac{g_{\text{YM}}^2}{4} \text{Tr} [[\Phi_i, \Phi_j][\Phi^i, \Phi^j]] \right. \\ \left. \text{Tr} [\bar{\psi}^a \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi_a] - \frac{ig_{\text{YM}}}{2} \text{Tr} [\sigma_i^{ab} \psi_a [\Phi^i, \psi_b]] - \frac{ig_{\text{YM}}}{2} \text{Tr} [\sigma_{ab}^i \bar{\psi}^a [\Psi_i, \bar{\psi}^b]] \right), \quad (2.4)$$

gdzie przez σ^i oraz σ^μ oznaczyliśmy odpowiednio sześć- oraz czterowymiarowe macierze Diraca.

Klasyczne działanie (2.4) teorii $\mathcal{N} = 4$ SYM jest niezmiennicze względem transformacji Poincaré oraz transformacji skalowania, z czego wynika, że posiada symetrię konforemną. W czterech wymiarach symetria konforemna dana jest przez $\mathfrak{so}(4, 2)$. Co jednak odróżnia tę teorię od większości bezmasowych teorii pola, to fakt, że symetria konforemna jest obecna w niej także po skwantowaniu. Prostem wnioskiem stąd płynącym jest znikanie funkcji beta

$$\beta = \mu \frac{dg}{d\mu} = 0. \quad (2.5)$$

Wynika z tego, że ładunek nie podlega renormalizacji oraz że tensor energii-pędu pozostaje bezśladowy na poziomie kwantowym. Jedynymi rozbieżnymi obiektami pozostają więc funkcje falowe pól. Oznacza to w szczególności, że wymiar skalowania pól dostaje poprawek kwantowych.

Okazuje się, że symetria konforemna w sposób istotny upraszcza postać dwupunktowych funkcji korelacji. Dla dwóch dowolnych pól skalarnych symetria Poincaré ogranicza postać funkcji dwupunktowych do

$$\langle \hat{\mathcal{O}}_A(x) \hat{\mathcal{O}}_B(y) \rangle = \frac{\delta_{AB}}{|x - y|^{2\Delta_A}}. \quad (2.6)$$

Wielkość $\Delta(g)$ nazywana jest *wymiarem skalowania operatora* i w generycznym przypadku posiada pełne rozwinięcie w stałej sprzężenia pochodzące z poprawek kwantowych

$$\Delta(g) = \Delta_0 + \gamma(g). \quad (2.7)$$

Tutaj Δ_0 odpowiada wymiarowi klasycznemu podczas, gdy $\gamma(g)$ jest jego anomalną częścią. Klasyczne wymiary skalowania pól występujących w teorii dane są przez

$$[A_\mu] = [\Phi_i] = 1, \quad [\psi_a] = \frac{3}{2}. \quad (2.8)$$

Symetria konforemna ogranicza także postać trójpunktowych funkcji korelacji. Funkcje te mogą zostać zapisane przy użyciu jedynie wymiarów anomalnych pól oraz pewnych stałych zależnych od stałej sprzężenia w postaci

$$\langle \hat{\mathcal{O}}_A(x) \hat{\mathcal{O}}_B(y) \hat{\mathcal{O}}_C(z) \rangle = \frac{C_{ABC}(g)}{|x - y|^{\Delta_A + \Delta_B - \Delta_C} \cdot |y - z|^{\Delta_B + \Delta_C - \Delta_A} \cdot |x - z|^{\Delta_A + \Delta_C - \Delta_B}}. \quad (2.9)$$

Funkcje korelacji z większą ilością punktów mogą zostać wyznaczone całkowicie w języku funkcji dwu- i trójpunktowych.

W celu wyznaczenia wymiarów anomalnych można skorzystać z relacji (2.6) lub (2.9). Można jednak problem ich znalezienia sformułować jako zagadnienie własne dla pewnego operatora, będącego jednym z generatorów symetrii konforemnej. Generator ten nazywamy *operatorem dylatacji* \mathfrak{D} i zagadnienie własne przyjmuje postać

$$\mathfrak{D} \hat{\mathcal{O}}_A(x) = \Delta(g) \hat{\mathcal{O}}_A(x). \quad (2.10)$$

Poza symetrią konforemną, działanie (2.4) jest niezmiennicze także względem tzw. R-symetrii, na którą składają się obroty w przestrzeni wewnętrznej sześciu skalarów Φ_i . W naszym przypadku symetria ta dana jest poprzez $\mathfrak{so}(6)$. Razem z symetrią konforemną oraz supersymetrią daje to całkowitą symetrię naszej teorii w postaci $\mathfrak{psu}(2, 2|4)$.

Granica 't Hoofta

Jak już wspomnieliśmy we wstępie, w rozprawie tej będziemy zainteresowani jedynie granicą planarną teorii $\mathcal{N} = 4$ SYM. W tym miejscu uczynimy to pojęcie bardziej klarownym. W [2] 't Hooft rozważał granicę $N \rightarrow \infty$ dla teorii cechowania z grupą cechowania $U(N)$. Pozwoliło mu to znaleźć alternatywne rozwinięcie perturbacyjne w takich teoriach. Stnowiło to pierwszą przesłankę sygnalizującą dualność pomiędzy teoriami cechowania oraz teoriami strun. W tej części pracy postaramy się przybliżyć własności teorii Yanga-Millsa w tej granicy w kontekście późniejszych zastosowań do teorii $\mathcal{N} = 4$ SYM.

Rozważymy tutaj teorię Yanga-Millsa z grupą cechowania $U(N)$. Standardową normalizacją działania w teoriach Yanga-Millsa jest

$$S = \frac{2}{g_{\text{YM}}^2} \int d^4x \mathcal{L}_{\text{YM}}(x). \quad (2.11)$$

W celu rozważenia granicy $N \rightarrow \infty$ przydatnym okazuje się przeskalowanie wszystkich pól występujących w teorii przy pomocy parametru $g = \frac{1}{4\pi} g_{\text{YM}} \sqrt{N}$ w następujący sposób

$$\mathcal{W} \rightarrow g\mathcal{W}. \quad (2.12)$$

Prowadzi to do zmiany w działaniu, które po przeskalowaniu przyjmuje postać

$$S = \frac{N}{8\pi^2} \int d^4x \mathcal{L}_{\text{YM}}(x, g), \quad (2.13)$$

gdzie drugi argument gęstości lagranżianu \mathcal{L}_{YM} oznacza, że wszystkie pola w nim występujące zostały przeskalowane jak w (2.12). Wszystkie pola naszej teorii zapisane są w hermitowskiej reprezentacji dołączonej grupy $U(N)$, tak więc są macierzami hermitowskimi wymiaru $N \times N - \mathcal{W}_j^i$. Wprowadzimy tutaj notację, w której z każdą macierzą stowarzyszymy dwie strzałki leżące jedna nad drugą i wskazujące w przeciwnych kierunkach w następujący sposób

$$\mathcal{W}_j^i \quad \longleftrightarrow$$

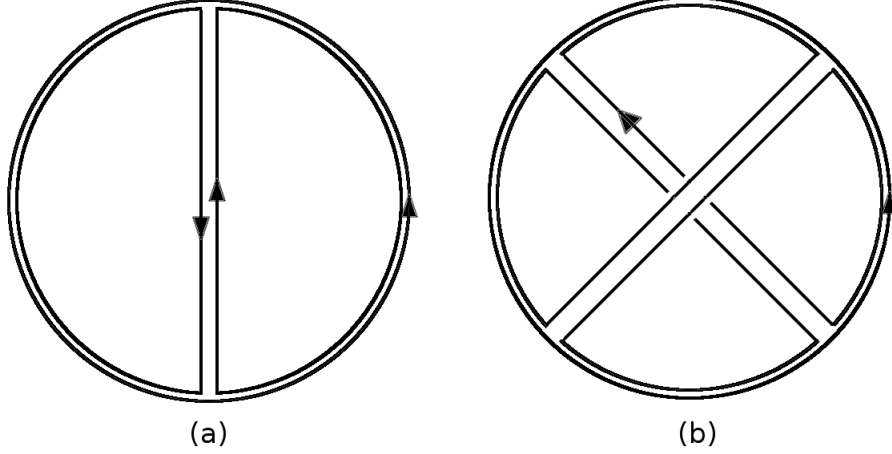
Dla niezmienniczych względem cechowania operatorów wszystkie indeksy powinny być zwięzione. Powoduje to, że w tej notacji wszystkie diagramy Feynmana będą analogiczne do standardowych, z tą różnicą, że będą "pogrubione". Zobrazowane jest to na rysunku 2.1.

Możemy teraz idąc za [2] napisać, że wkład pochodzący od dowolnego diagramu w naszej teorii będzie postaci

$$N^{2-2g_e} (g^2)^\ell, \quad (2.14)$$

gdzie ℓ oznacza ilość pętli w diagramie, z kolei g_e jest genusem powierzchni, na której nasz diagram może zostać narysowany. Jeśli wszystkie diagramy dają wkład postaci (2.14), to także wszystkie wielkości fizyczne η mogą zostać zapisane w analogicznej formie

$$\eta = \eta_0 + \sum_{\ell=1}^{\infty} g^{2\ell} \sum_{g_e=0}^{\infty} N^{2-2g_e} \cdot \eta_{\ell, g_e}, \quad (2.15)$$



Rysunek 2.1: Reprezentacja diagramów Feynmana w teorii cechowania z grupą cechowania $U(N)$. Diagram znajdujący się na rysunku (a) należy do rozwinięcia planarnego teorii podczas, gdy ten z rysunku (b) nie może być narysowany na płaszczyźnie bez przecinania się obecnych w nim linii. Może on zostać narysowany bez przecinania linii dopiero na torusie, będącym powierzchnią o genusie $g_e = 1$.

gdzie przez η_0 oznaczyliśmy wkład klasyczny. W szczególności, wymiar anomalny $\Delta(g, N)$ także może zostać zapisany w formie (2.15).

W naszych dalszych rozważaniach będziemy zainteresowani granicą, w której istotny będzie jedynie wiodący wyraz szeregu (2.15). Granica ta, zwana *granicą planarną*, dana jest przez $N \rightarrow \infty$, gdy jednocześnie $g^2 = \frac{g_{\text{YM}}^2 N}{16\pi^2} = \text{const}$. W granicy tej wkład dają jedynie diagramy planarne, tzn. takie, które można narysować na płaszczyźnie, co oznacza $g_e = 0$.

Operatory fizyczne

Na koniec części dotyczącej teorii $\mathcal{N} = 4$ SYM opiszemy przestrzeń operatorów fizycznych w niej występujących. Przestrzeń ta rozpięta jest przez wszystkie operatory będące iloczynami śladów postaci

$$\hat{\mathcal{O}} = \text{Tr} [\Omega_1 \Omega_2 \dots \Omega_{n_1}] \text{Tr} [\Omega_{n_1+1} \Omega_{n_1+2} \dots \Omega_{n_2}] \dots, \quad (2.16)$$

gdzie pola znajdujące się pod śladami należą do zbioru

$$\Omega_j \in \left\{ \mathcal{D}^k \mathcal{F}, \mathcal{D}^k \Psi, \mathcal{D}^k \Phi, \mathcal{D}^k \dot{\Psi}, \mathcal{D}^k \dot{\mathcal{F}} \right\}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.17)$$

Operatory we wzorze (2.16) są macierzami należącymi do $U(N)$ i ślad rozumiany jest jako suma elementów diagonalnych iloczynów tych macierzy. W przypadku, gdy jesteśmy zainteresowani jedynie granicą planarną, to wystarczy, jeśli z rodziny wszystkich operatorów (2.16) wybierzemy tylko te, które są jednośladowe

$$\hat{\mathcal{O}} = \text{Tr} [\Omega_1 \Omega_2 \dots \Omega_m]. \quad (2.18)$$

Wynika to z faktu, że oddziaływanie pomiędzy operatorami znajdującymi się w różnych śladach jest podwiodące w granicy $N \rightarrow \infty$.

2.1.2 Teoria strun na $AdS_5 \times S^5$

Teoria superstrun typu IIB określona na przestrzeni $AdS_5 \times S^5$ może być alternatywnie zdefiniowana, jak zostało pokazane przez Metsaeva i Tseytlina w [7], jako nieliniowy model σ na przestrzeni docelowej będącej zbiorem ilorazowym

$$\frac{\mathfrak{psu}(2, 2|4)}{\mathfrak{so}(4, 1) \times \mathfrak{so}(5)}. \quad (2.19)$$

Superalgebra $\mathfrak{psu}(2, 2|4)$ zawiera podalgebrę bozonową $\mathfrak{su}(2, 2) \times \mathfrak{su}(4)$, która jest lokalnie izomorficzna z $\mathfrak{so}(4, 2) \times \mathfrak{so}(6)$. Ta ostatnio z kolei, podzielona przez mianownik występujący w (2.19), zadaje model rozmaitości $AdS_5 \times S^5$, dla której $\mathfrak{so}(4, 1) \times \mathfrak{so}(5)$ opisuje lokalne transformacje Lorentza. Wynika stąd, że zbiór ilorazowy (2.19) może być postrzegany jako model superprzestrzeni $AdS_5 \times S^5$.

Należy zwrócić uwagę, że symetria konforemna wchodzi w skład symetrii opisującej przestrzeń $AdS_5 \times S^5$. W szczególności, również wszystkie generatory symetrii konforemnej mogą zostać odnalezione po stronie przestrzeni docelowej teorii strun. W przypadku teorii cechowania reprezentacje grupy konforemnej numerowaliśmy przy pomocy wymiaru konforemnego, będącego wartością własną operatora dylatacji. Istnieje jednak alternatywny sposób na ich klasyfikację – w języku jej maksymalnej podgrupy zwartej. W tym przypadku reprezentacje numerowane są poprzez wartości własne sumy generatorów

$$\hat{H}_{AdS_5 \times S^5} = \frac{1}{2}(\hat{P}_0 + \hat{K}_0), \quad (2.20)$$

gdzie \hat{P}_0 oznacza generator translacji, natomiast \hat{K}_0 generator specjalnych transformacji konforemnych. Z drugiej strony można pokazać, że operator (2.20) odpowiada generatorowi translacji względem globalnego czasu w przestrzeni AdS_5 , który możemy utożsamić z hamiltonianem struny w przestrzeni docelowej. Dostaliśmy więc tym sposobem zależność pomiędzy wielkościami w teorii cechowania oraz teorii strun, tzn. wymiar konforemny operatorów lokalnych może być utożsamiony z energią struny w przestrzeni docelowej.

Jeśli teraz chcemy z kolei zobaczyć, jak wygląda hamiltonian na wstędze świata, to musimy ustalić cechowanie, w którym będziemy pracować. W naszych rozważaniach skupimy się jedynie na cechowaniu na stożku świetlnym. W takim przypadku można pokazać, że hamiltonian na wstędze świata dany jest poprzez

$$\hat{H} = \hat{H}_{AdS_5 \times S^5} - \hat{J}, \quad (2.21)$$

gdzie $\hat{H}_{AdS_5 \times S^5}$ dane jest przez (2.20), natomiast \hat{J} oznacza generator momentu pędu struny w jej ruchu dookoła równika sfery pięciowymiarowej.

Zanim przejdziemy do problemu kwantowania modelu σ określonego na zbiorze (2.19) możliwe jest udowodnienie, jak zostało zrobione w [11], że klasycznie model σ Metsaeva-Tseytlina jest całkowny. Fakt ten dał przesłanki ku hipotezie, że struktury całkowne mogą być obecne także w pełnej teorii strun po skwantowaniu. Pozwoliło to w szczególności zastosować bogatą maszynierię dwuwymiarowych całkownych teorii pola, którą zaprezentujemy w dalszej części pracy, do rozwiązania problemu spektralnego struny.

Jeśli teraz przejdziemy do problemu kwantowania struny, to okaże się, że cechowanie na stożku świetlnym doskonale nadaje się do tego zadania. Proces kwantowania struny

przeprowadzimy w dwóch etapach. Po pierwsze, na początku należy rozpatrzeć granicę, w której pęd na stożku świetlnym (który może być utożsamiony z J) jest nieskończony podczas, gdy naprężenie struny pozostaje ustalone. W tej granicy model σ ulega znaczącym uproszczeniom, w szczególności, jest zdefiniowany na płaszczyźnie i posiada masywne wzbudzenia. Co za tym idzie pojęcie stanów asymptotycznych może być poprawnie zdefiniowane i jest możliwe zastosowanie teorii rozpraszania. W szczególności, jeśli założymy, że model jest kwantowo całkowalny, to dostaniemy brak produkcji cząstek oraz faktoryzację rozpraszania, jak zostanie opisane w kolejnym podrozdziale. Dodatkowo, można pokazać, że w rozpatrywanej granicy symetria modelu redukuje się do $\mathfrak{su}(2|2) \otimes \mathfrak{su}(2|2)$. Obserwacja ta pozwala w sposób jednoznaczny wyznaczyć relację dyspersji wzbudzeń oraz macierz rozpraszania między dwoma wzbudzenia na wstędze świata. W naszym przypadku dostaniemy nierelatywistyczną, choć wciąż pierwiastkową, relację dyspersji dla wzbudzeń na strunie w postaci

$$\varepsilon(p) = \sqrt{1 + 16g^2 \sin^2 \frac{p}{2}}. \quad (2.22)$$

Mając spektrum cząstek dla modelu σ na płaszczyźnie możemy uczynić krok drugi w procesie kwantowania struny i rozważyć teorię ze skończonym ładunkiem J . Oznacza to rozpatrzenie teorii na cylindrze, którego obwód wynosi dokładnie $L = J$. W takim przypadku dostaniemy pewne poprawki do nieskończonego spektrum pochodzące z faktu, że teoria zdefiniowana jest w skończonej objętości. Poprawki te (a przynajmniej ich wiodąca część) mogą być obliczone z użyciem wzorów Lüschera. Zagadnienie wyznaczenia poprawek Lüschera stanowi zasadniczą motywację tej pracy.

2.1.3 Sformułowanie korespondencji

Doszliśmy do momentu, w którym mamy zdefiniowane obydwie teorie, które powiązane są poprzez korespondencję AdS/CFT. Możemy więc teraz przejść do jej formalnego sformułowania. Chcielibyśmy w tym miejscu zaznaczyć, że jak do tej pory żadna z prezentowanych poniżej wersji korespondencji nie została formalnie udowodniona i pozostają one wciąż w sferze hipotez. Są to jednak hipotezy dobrze potwierdzone przez wyniki, które udało się do tej pory uzyskać. W literaturze można znaleźć trzy różne sformułowania korespondencji, różniące się zasięgiem swojej stosowalności.

- W swej najsilniejszej postaci korespondencja mówi, że zgodność pomiędzy teoriami $\mathcal{N} = 4$ SYM oraz teorią superstrun na przestrzeni $AdS_5 \times S^5$ jest prawdziwa dla dowolnej wartości N .
- Słabsza wersja korespondencji mówi, że odpowiedniość pomiędzy teorią strun oraz teorią cechowania zachodzi jedynie w rozwinięciu perturbacyjnym w parametrze $\frac{1}{N}$.
- W wersji najsłabszej korespondencja mówi wyłącznie o zgodności w granicy płanarnych, czyli dla przypadku $N \rightarrow \infty$ oraz $\lambda = \text{const}$. Odpowiada to dualności jedynie pomiędzy swobodnymi strunami a jednośladowymi operatorami w teorii cechowania.

Dla uzyskania wszystkich wyników prezentowanych w tej pracy wystarczy, jeśli założymy poprawność jedynie najsłabszej wersji korespondencji.

2.2 Kwantowa całkowalność

W tej części pracy przejdziemy do pojęcia całkowalności dla teorii kwantowych. Pokażemy w szczególności, jakie własności nakłada na dwuwymiarowe teorie pola fakt, że są one całkowalne. W przeciwieństwie do przypadku klasycznego, gdzie definicja całkowalności jest dobrze określona, w teoriach kwantowych problematyczne okazuje się poprawne i jednoznaczne zdefiniowanie całkowalności. W przypadku klasycznych teorii, całkowalność oznacza istnienie niezależnych całek ruchu, których liczba odpowiada ilości stopni swobody w układzie. Niestety definicja ta nie daje się prosto przenieść na grunt kwantowy. W literaturze można znaleźć kilka różnych podejść, lecz żadne z nich nie jest w stanie zakwalifikować poprawnie wszystkich teorii, które uważamy za całkowalne. Pełna dyskusja tego faktu może zostać znaleziona w [36]. Można jednak zauważyć pewne cechy wspólne, które są punktami wyjściowymi lub wnioskami płynącymi z tych definicji. Są to: brak produkcji cząstek, faktoryzacja rozpraszania, czy też istnienie wyższych ładunków zachowanych. W pracy tej nie będziemy podawać ścisłej definicji całkowalności. Skupimy się jedynie na pokazaniu, jak z faktu istnienia nieskończenie wielu lokalnych całek ruchu, wynikają podstawowe własności dwuwymiarowych modeli całkowalnych. Możliwość znalezienia takich ładunków przyjmiemy jako roboczą definicję, że model, który rozpatrujemy jest całkowalny. Obszerniejszą dyskusję przedstawionych tutaj faktów można znaleźć między innymi w pracy [37].

2.2.1 Własności dwuwymiarowych całkowalnych teorii pola

Zanim przejdziemy do pokazania własności modeli całkowalnych wynikających z istnienia nieskończenie wielu lokalnych ładunków zachowanych, spróbujmy najpierw wprowadzić poprawną notację algebraiczną, dzięki której będziemy w stanie zdefiniować stany asymptotyczne oraz macierz rozpraszania. W naszych rozważaniach ograniczymy się na razie do $(1+1)$ -wymiarowych teorii relatywistycznych. Do naszych celów potrzebne nam będą współrzędne na stożku świetlnym

$$(p, \bar{p}) = (p^0 + p^1, p^0 - p^1) . \quad (2.23)$$

Przy takich oznaczeniach rozwiązanie warunku powłoki masy $p\bar{p} = m^2$ dane jest poprzez

$$\mathbf{p}_a = (m_a e^{\theta_a}, m_a e^{-\theta_a}) , \quad (2.24)$$

gdzie wprowadziliśmy zmienną θ nazywaną *zmienną rapidity*. Tutaj e^θ jest dodatnie dla cząstek podróżując w przód w czasie, natomiast ujemne dla cząstek podróżujących w tył. Oznacza to, że cząstki poruszające się w przód w czasie są parametryzowane przez rzeczywiste wartości θ podczas, gdy aby sparametryzować te poruszające się w tył, musimy rozważyć prostą $\theta = x + i\pi$, dla x rzeczywistego.

Zdefiniujmy n -cząsteczkowy *stan asymptotyczny* jako

$$|A_{a_1}(\theta_1)A_{a_2}(\theta_2) \dots A_{a_n}(\theta_n)\rangle_{in,out} , \quad (2.25)$$

gdzie przez $A_{a_i}(\theta_i)$ oznaczyliśmy cząstkę rodzaju a_i , która posiada zmienną rapidity równą θ_i . W teorii, w której występują cząstki masowe, a takie właśnie będziemy tutaj rozważać,

wszystkie oddziaływania są krótkozasięgowe. Wtedy stany zachowują się jakby były zbiorem swobodnych cząstek z wyjątkiem sytuacji, w której dwie lub więcej z nich nachodzi na siebie, tym samym oddziałując ze sobą.

W definicji (2.25) stan początkowy (*in*) charakteryzowany jest przez fakt, że nie występują w nim oddziaływania między cząstkami dla wszystkich wcześniejszych czasów aż do $t \rightarrow -\infty$. Oznacza to, że najszybsza cząstka znajduje się całkowicie po lewej stronie na linii prostej, najwolniejsza po prawej stronie podczas, gdy pozostałe znajdują się pomiędzy i są uporządkowane według malejących zmiennych rapidity. Stan wejściowy może więc być zapisany jako

$$A_{a_1}(\theta_1)A_{a_2}(\theta_2)\dots A_{a_n}(\theta_n), \quad (2.26)$$

gdzie

$$\theta_1 > \theta_2 > \dots > \theta_n. \quad (2.27)$$

Podobnie stan końcowy (*out*) jest stanem, w którym nie ma więcej oddziaływań dla czasów późniejszych aż do $t \rightarrow \infty$. Oznacza to, że każda cząstka musi być na prawo od wszystkich wolniejszych od niej cząstek i na lewo od tych szybszych. Możemy to zapisać jako

$$A_{b_1}(\theta_1)A_{b_2}(\theta_2)\dots A_{b_n}(\theta_n), \quad (2.28)$$

gdzie w tym przypadku mamy

$$\theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n. \quad (2.29)$$

Macierz rozpraszania może teraz zostać zapisana jako odwzorowanie ze stanów początkowych na stany końcowe w następujący sposób

$$\begin{aligned} A_{a_1}(\theta_1)A_{a_2}(\theta_2)\dots A_{a_n}(\theta_n) &= \sum_{\theta'_1 < \theta'_2 < \dots < \theta'_n} \mathcal{S}_{a_1, a_2, \dots, a_n}^{b_1, b_2, \dots, b_n}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n | \theta'_1, \theta'_2, \dots, \theta'_n) \times \\ &\times A_{b_1}(\theta'_1)A_{b_2}(\theta'_2)\dots A_{b_n}(\theta'_n), \end{aligned} \quad (2.30)$$

gdzie $\theta_1 > \theta_2 > \dots > \theta_n$.

Przejdźmy teraz do ładunków zachowanych. Należą do nich w szczególności energia oraz pęd, które tworzą wspólnie wektor Q_μ , będący operatorem o spinie 1 względem transformacji Lorentza. Działanie tego operatora na stany jednocząsteczkowe może zostać zapisane we współrzędnych na stożku świetlnym jako

$$Q_1|A_a(\theta)\rangle = m_a e^\theta |A_a(\theta)\rangle, \quad \bar{Q}_1|A_a(\theta)\rangle = m_a e^{-\theta} |A_a(\theta)\rangle. \quad (2.31)$$

Poza tym w modelu mogą istnieć także dodatkowe ładunki zachowane, które transformują się względem wyższych reprezentacji grupy Lorentza – tensory rzędu drugiego $Q_2 = Q_{\mu\nu}$, tensory rzędu trzeciego $Q_3 = Q_{\mu\nu\alpha}$, itd. We współrzędnych na stożku świetlnym ich działanie jest postaci

$$Q_s|A_a(\theta)\rangle = q_a^{(s)} e^{s\theta} |A_a(\theta)\rangle, \quad (2.32)$$

czyli jest analogiczne do działania s kopii ładunku Q_1 lub \bar{Q}_1 , będących energią i pędem na stożku świetlnym. W dalszych rozważaniach będziemy wykorzystywali tę obserwację do pokazania faktoryzacji rozpraszania w modelach całkowych.

W centrum naszych zainteresowań będą jedynie te ładunki zachowane, które da się zapisać jako całki z lokalnych gęstości. Oznacza to w szczególności, że działają one na stany asymptotyczne w sposób addytywny

$$Q_s |A_{a_1}(\theta_1) \dots A_{a_n}(\theta_n)\rangle = (q_{a_1}^{(s)} e^{s\theta_1} + \dots + q_{a_n}^{(s)} e^{s\theta_n}) |A_{a_1}(\theta_1) \dots A_{a_n}(\theta_n)\rangle. \quad (2.33)$$

W dalszej części rozważań założymy, że w rozpatrywanym przez nas dwuwymiarowym modelu udało nam się znaleźć nieskończenie wiele lokalnych ładunków zachowanych. Będzie to pociągało za sobą znaczące konsekwencje dotyczące postaci amplitud rozpraszania¹.

Zacznijmy od obserwacji, że w teoriach, w których mamy jeden wymiar przestrzenny oraz jeden czasowy, jeśli rozpatrzemy zderzenia pomiędzy dwoma cząstkami o tej samej masie, to końcowy zbiór pędów (zmiennych rapidity) jest dokładnie taki sam jak zbiór wyjściowych pędów (zmiennych rapidity):

$$\{\theta'_1, \theta'_2\} = \{\theta_1, \theta_2\}. \quad (2.34)$$

Nie musimy w tym celu zakładać żadnych dodatkowych własności modelu. Wynika to z faktu, że w rozpraszaniu dwóch cząstek zachowane są zarówno pęd jak i energia, a co za tym łądunki Q_1 oraz \bar{Q}_1 . Wynika stąd, że możemy zapisać równości

$$e^{\theta_1} + e^{\theta_2} = e^{\theta'_1} + e^{\theta'_2}, \quad (2.35)$$

$$e^{-\theta_1} + e^{-\theta_2} = e^{-\theta'_1} + e^{-\theta'_2}. \quad (2.36)$$

Jedynymi dwoma rozwiązaniami tego układu równań są $(\theta'_1, \theta'_2) = (\theta_1, \theta_2)$ lub $(\theta'_1, \theta'_2) = (\theta_2, \theta_1)$, które prowadzą do wyniku (2.34). W ogólnym przypadku, dla trzech i większej ilości cząstek nie jest to już prawdą, tzn. końcowy zbiór pędów niekoniecznie musi być permutacją początkowego zbioru.

Jeśli jednak założymy, że mamy dodatkowy ładunek zachowany, np. Q_2 , i rozpatrywać będziemy proces, w którym biorą udział trzy cząstki, to w takim wypadku musimy rozwiązać układ trzech równań, analogiczny do (2.35). Ponownie jedynym rozwiązaniem będzie permutacja początkowych zmiennych rapidity (a co za tym idzie także pędy i energie końcowe cząstek będą permutacjami początkowych wartości)

$$\{\theta'_1, \theta'_2, \theta'_3\} = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}. \quad (2.37)$$

W ten sam sposób możemy pokazać, że istnienie N niezależnych ładunków Q_j będzie implikowało, że efektem końcowym rozpraszania N cząstek o pędach $\{p_j\}$ jest jedynie permutacja początkowego zbioru pędów!

Dodatkowo, jeśli zauważymy, że układ równań

$$e^{n\theta_1} + e^{n\theta_2} + e^{n\theta_3} = e^{n\theta'_1} + e^{n\theta'_2}, \quad n = -1, 1, 2, \quad (2.38)$$

jak również

$$e^{n\theta_1} + e^{n\theta_2} = e^{n\theta'_1} + e^{n\theta'_2} + e^{n\theta'_3}, \quad n = -1, 1, 2. \quad (2.39)$$

¹Dla teorii z większą niż dwa ilością wymiarów, konsekwencje istnienia wyższych ładunków zachowanych są jeszcze większe. Wystarczy, jeśli istnieje dowolny ładunek zachowany będący tensorem rzędu drugiego lub wyższego, aby macierz rozpraszania musiała być trywialna.

nie posiadają rozwiązań, możemy argumentować, że w teorii z przynajmniej trzema ładunkami zachowanymi nie mogą zaistnieć procesy $2 \rightarrow 3$ ani $3 \rightarrow 2$. Oznacza to brak kreacji oraz anihilacji cząstek. Podobne rozważania można przeprowadzić dla rozpraszania większej ilości cząstek w teorii z większą ilością ładunków zachowanych i dojść do identycznych wniosków. W teoriach całkowalnych (z nieskończoną ilością ładunków) możemy więc udowodnić, że nie są możliwe jakiegokolwiek procesy, w których liczba cząstek ulega zmianie w ich trakcie!

Istnienie wyższych niż pęd i energia ładunków zachowanych implikuje jeszcze jedną kluczową własność procesów rozpraszania – faktoryzację dowolnego rozpraszania na procesy dwucząsteczkowe. Argument, który tutaj przedstawimy, został zaproponowany przez Shankara i Wittena w [38]. W celu uproszczenia dyskusji, będziemy badać tutaj jedynie czysto przestrzenne składowe ładunków zachowanych. Dodatkowo, wykorzystamy obserwację poczynioną powyżej i zapiszemy działanie wyższych ładunków w postaci $Q_s|p\rangle = p^s|p\rangle$, gdzie p jest (zwykłą) współrzędną pędową. Rozważmy fale płaskie

$$\psi(x, t) = e^{ip(x-x_0)+i\frac{p^2}{2}(t-t_0)} \quad (2.40)$$

i zbudujemy z nich pakiet falowy o zdefiniowanym pędzie $p \simeq p_0$

$$\Psi(x, t) = \int dp e^{-\alpha_0(p-p_0)^2} e^{ip(x-x_0)-i\frac{p^2}{2}(t-t_0)}. \quad (2.41)$$

Pakiet taki stanowi opis cząstek w naszej teorii. Można zauważyć, że pakiet (2.41) jest zlokalizowany wokół punktu w przestrzeni o współrzędnej

$$x = x_0 + p_0(t - t_0). \quad (2.42)$$

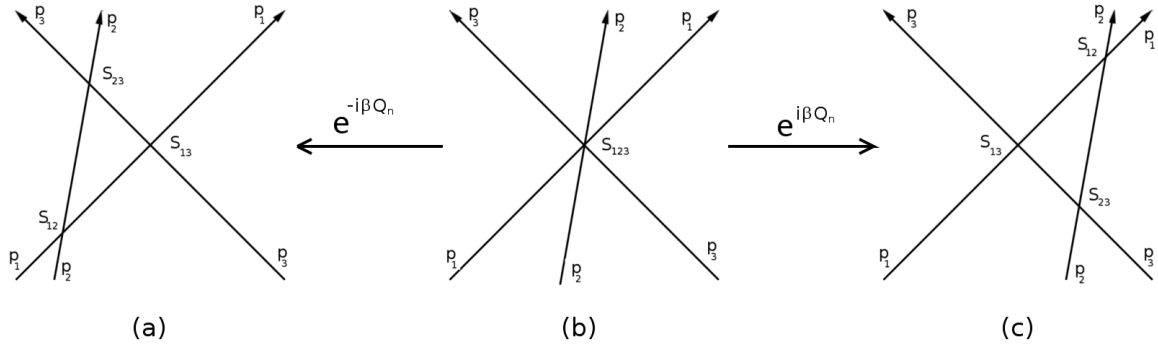
Teraz założmy, że w naszej teorii mamy co najmniej trzy ładunki zachowane. Jeśli będziemy działać na pakiet falowy ładunkiem $e^{i\beta Q_s} = e^{i\beta p^s}$, to dostaniemy

$$e^{i\beta Q_s} \Psi(x, t) = \int dp e^{-\alpha_0(p-p_0)^2} e^{ip(x-x_0)-i\frac{p^2}{2}(t-t_0)+i\beta p^s} \quad (2.43)$$

i wtedy miejsce, w którym zlokalizowany jest nasz pakiet ulegnie zmianie w formie

$$x = x_0 + p_0(t - t_0) + \beta s p_0^{s-1}. \quad (2.44)$$

Dla ustalenia uwagi weźmy teraz dokładnie trzy takie pakiety falowe i założmy, że rozpraszają się one na sobie jednocześnie (w tym samym miejscu w przestrzeni) jak obrazuje to Rys. 2.2b. Amplituda rozpraszania dla tego procesu będzie taka sama, jak amplituda rozpraszania dla procesu powstałego przez zadziałanie dowolnym ładunkiem zachowanym Q_s . Zacznijmy od rozważenia ładunku odpowiadającego całkowitemu pędowi ($s = 1$). W tym przypadku dodatkowy przyczynik we wzorze (2.44) jest równy β i może zostać potraktowany jako globalna zmiana współrzędnej przestrzennej. Podobnie, gdy weźmiemy drugi w kolejności ładunek zachowany z $s = 2$, to dostaniemy przyczynik proporcjonalny do p_0 , który można utożsamić z globalnym przesunięciem w czasie. Jeśli jednak dopuścimy możliwość wystąpienia ładunków zachowanych z $s \geq 3$, wtedy sytuacja staje się dużo ciekawsza. Lokalizacja pakietów falowych zaczyna bowiem zależeć od indywidualnych pędów. Oznacza to, że rozpraszanie pakietów falowych nie będzie się już odbywać



Rysunek 2.2: Działanie wyższych ładunków zachowanych na rozpraszanie trzech pakietów falowych.

jednocześnie. Będziemy z kolei mieli do czynienia z sytuacją zobrazowaną na rysunku 2.2c. Korzystając z faktu, że parametr β może być dowolnie duży, jesteśmy w stanie przesunąć linię odpowiadającą pakietowi falowemu o pędzie p_2 dowolnie daleko od miejsca, w którym oddziałują ze sobą pozostałe dwa pakiety. Oznacza to, że jeśli oddziaływanie jest krótkozasięgowe, jak dzieje się w przypadku teorii z cząstkami o niezerowych masach, jesteśmy w stanie przesunąć cząstkę o pędzie p_2 wystarczająco daleko tak, aby nie miała ona wpływu na proces rozpraszania pomiędzy cząstkami o pędach p_1 oraz p_3 . Dzięki temu udało nam się sfaktoryzować rozpraszanie trzech pakietów falowych na trzy procesy, w których jednocześnie biorą udział jedynie dwa z nich

$$\mathcal{S}_{123}(p_1, p_2, p_3) = \mathcal{S}_{12}(p_1, p_2)\mathcal{S}_{13}(p_1, p_3)\mathcal{S}_{23}(p_2, p_3). \quad (2.45)$$

Własność faktoryzacji jest jedną z podstawowych cech modeli całkowlanych!

Dodatkowo, możemy zadziałać na nasze trzy pakiety transformacją $e^{-i\beta Q_s}$, która skutkuje innym porządkiem chronologicznym oddziaływań pomiędzy dwoma pakietami, jak zaprezentowano na rysunku 2.2a. Prowadzi nas to do wniosku, że dla modeli, w których występują wyższe ładunki zachowane możemy zapisać równość

$$\mathcal{S}_{12}(p_1, p_2)\mathcal{S}_{13}(p_1, p_3)\mathcal{S}_{23}(p_2, p_3) = \mathcal{S}_{23}(p_2, p_3)\mathcal{S}_{13}(p_1, p_3)\mathcal{S}_{12}(p_1, p_2). \quad (2.46)$$

gdzie przez \mathcal{S} oznaczyliśmy amplitudę rozpraszania pomiędzy dwoma pakietami falowymi. W opisanym przez nas przypadku nie zakładaliśmy żadnej dodatkowej struktury wewnętrznej naszych pakietów falowych (cząstek) oraz rozważaliśmy teorie z tylko jednym rodzajem cząstek. W takim przypadku amplitudy rozpraszania są funkcjami skalarnymi i równanie (2.46) jest trywialnie spełnione. Wiemy jednak, że cząstki mogą nieść ze sobą wewnętrzne stopnie swobody takie, jak spin, które mogą być wymieniane w czasie rozpraszania. Poza tym, jeśli mamy więcej niż jedną cząstkę w spektrum teorii, to może następować także zmiana polaryzacji, gdy cząstki są na sobie rozpraszane. W takim przypadku amplituda rozpraszania jest wielkością macierzową i równanie (2.46) daje nam silne ograniczenia na postać macierzy \mathcal{S} . Równanie (2.46) nosi nazwę *równania Yanga-Baxtera*.

Aby teraz pokazać, że także procesy $n \rightarrow n$ możemy sfaktoryzować używając jedynie macierzy rozpraszania pomiędzy dwoma cząstkami, musimy użyć rozumowania indukcyjnego. Korzystając z istnienia wyższych ładunków zachowanych możemy, podobnie jak w

przypadku trzech cząstek, przesunąć położenie początkowych cząstek w taki sposób, że w danej chwili czasu maksymalnie $n - 1$ cząstek oddziałuje ze sobą. Z założenia indukcyjnego wiemy jednak, że procesy $(n - 1)$ -cząsteczkowe dają się sfaktoryzować, z czego wynika także faktoryzacja dla rozpraszania n cząstek!

Podsumowując, udało nam się pokazać, że istnienie wyższych ładunków zachowanych w teorii zdefiniowanej w $1 + 1$ wymiarach powoduje znaczące uproszczenie własności amplitud rozpraszania tej teorii. W szczególności:

- nie ma produkcji ani anihilacji cząstek (dozwolone są jedynie procesy $n \rightarrow n$);
- zbiór pędów po rozpraszaniu jest permutacją pędów wchodzących;
- wszystkie procesy $n \rightarrow n$ dają się opisać w języku jedynie procesów $2 \rightarrow 2$.

Sprowadziliśmy więc problem znalezienia skomplikowanych amplitud rozpraszania do problemu znalezienia dwucząstkowej macierzy \mathcal{S} . Przejdziemy teraz do próby jej wyznaczenia dla generycznej teorii relatywistycznej, a następnie także w przypadku, w którym mamy teorię z nierelatywistyczną relacją dyspersji.

2.2.2 Macierz rozpraszania $2 \rightarrow 2$

Jak już zauważyliśmy wcześniej, jeśli w modelu istnieje nieskończenie wiele niezależnych ładunków zachowanych, to dla każdego n macierz rozpraszania, występująca we wzorze (2.30), da się zapisać jako iloczyn macierzy dla $n = 2$. W naszej notacji macierz dwucząstkowa zdefiniowana jest poprzez

$$|A_i(\theta_1)A_j(\theta_2)\rangle_{in} = \mathcal{S}_{ij}^{kl}(\theta_1, \theta_2)|A_k(\theta_1)A_l(\theta_2)\rangle_{out}, \quad (2.47)$$

co można przepisać używając powyższej dyskusji jako

$$A_i(\theta_1)A_j(\theta_2) = \mathcal{S}_{ij}^{kl}(\theta_1, \theta_2)A_l(\theta_2)A_k(\theta_1), \quad (2.48)$$

gdzie $\theta_1 > \theta_2$. Chcielibyśmy zwrócić uwagę, że macierz rozpraszania w teorii relatywistycznej powinna być niezmiennicza względem transformacji Lorentza. Transformacja te odpowiada translacjom zmiennej rapidity o stałą wielkość. Jedyną sytuacją, w której macierz \mathcal{S} będzie niezmiennicza względem transformacji Lorentza jest więc, gdy jej zależność od zmiennych rapidity dana jest jako ich różnica

$$\mathcal{S}(\theta_1, \theta_2) = \mathcal{S}(\theta_1 - \theta_2) \equiv \mathcal{S}(\theta). \quad (2.49)$$

W teorii posiadającej r rodzajów cząstek rozmiar macierzy $\mathcal{S}_{ij}^{kl}(\theta)$ dany jest poprzez $r^2 \times r^2$. Wynika stąd, że aby ją w pełni wyznaczyć musimy znaleźć r^4 różnych funkcji zmiennej rapidity. Okazuje się jednak, że istnieje bardzo dużo ograniczeń, którym podlega macierz rozpraszania i nie wszystkie funkcje są niezależne od siebie. Celem tej części pracy jest pokazanie, jakie ograniczenia nałożone są na macierz rozpraszania w teoriach relatywistycznych.

Po pierwsze, macierz rozpraszania powinna być niezmiennicza względem transformacji odbicia przestrzennego jak i odbicia w czasie. Prowadzi to do relacji

$$\mathcal{S}_{ij}^{kl}(\theta) = \mathcal{S}_{ji}^{lk}(\theta), \quad \mathcal{S}_{ij}^{kl}(\theta) = \mathcal{S}_{lk}^{ji}(\theta). \quad (2.50)$$

Poza tym, również transformacja sprzężenia ładunku nie powinna zmieniać macierzy \mathcal{S} . Daje to relację

$$\mathcal{S}_{ij}^{kl}(\theta) = \mathcal{S}_{\bar{i}\bar{j}}^{\bar{k}\bar{l}}(\theta). \quad (2.51)$$

Aby wprowadzić kolejne ograniczenia zajmiemy się strukturą analityczną macierzy rozpraszania. W tym celu wygodnym jest używanie zmiennych Mandelstama zdefiniowanych poprzez

$$s = (p_1 + p_2)^2, \quad t = (p_1 - p_3)^2, \quad u = (p_1 - p_4)^2. \quad (2.52)$$

Powiązane są one ze sobą zależnością $s + t + u = \sum_{i=1}^4 m_i^2$. W teorii $(1+1)$ -wymiarowej tylko jedna z tych zmiennych jest niezależna i standardowo wybiera się do rozważań zmienną s . Możemy ją teraz zapisać w języku zmiennej rapidity jako

$$s = m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2 \cosh(\theta_{12}), \quad (2.53)$$

gdzie przez θ_{12} oznaczyliśmy różnicę zmiennych rapidity $\theta_1 - \theta_2$. Dla procesów fizycznych θ_{12} jest rzeczywista i co za tym idzie s jest rzeczywiste. Dodatkowo spełnia nierówność $s > (m_1 + m_2)^2$.

W naszych rozważaniach będziemy zainteresowani przedłużeniem analitycznych funkcji $\mathcal{S}(s)$ na całą płaszczyznę zespoloną. Jak zobaczymy za chwilę jest to zadanie nietrywialne i musimy dokonać go bardzo ostrożnie. Dla prostoty skoncentrujemy się na przypadku jednej cząstki w spektrum, co oznacza, że macierz \mathcal{S} jest funkcją skalarną. Doświadczenie, które wyniesiemy z takiej analizy zostanie potem uogólnione do przypadku wielu cząstek w spektrum. Będziemy chcieli, aby przedłużona macierz rozpraszania była analityczna w następującym sensie

$$\mathcal{S}(s^*) = [\mathcal{S}(s)]^*. \quad (2.54)$$

Oznacza to, że przyjmuje ona wartości będące sprzężeniem zespolonym dla sprzężonych zespolenie argumentów. Załóżmy, że udało nam się już znaleźć przedłużenie analityczne macierzy rozpraszania na całą płaszczyznę zespoloną. Wtedy dla procesów fizycznych macierz ta powinna być unitarna

$$\mathcal{S}(s)\mathcal{S}^\dagger(s) = 1, \quad (2.55)$$

dla $s \in \mathbb{R}$ oraz $s \geq (m_1 + m_2)^2$. Korzystając teraz z relacji (2.54) dostaniemy

$$1 = \mathcal{S}(s)\mathcal{S}^\dagger(s) = \mathcal{S}(s)\mathcal{S}^*(s) = \mathcal{S}(s)\mathcal{S}(s^*) = \mathcal{S}(s)^2, \quad (2.56)$$

co prowadzi nas jedynie do trywialnych rozwiązań na macierz rozpraszania $\mathcal{S}(s) = 1$ lub $\mathcal{S}(s) = -1$. Jeśli chcemy jednak dostać nietrywialną postać macierzy \mathcal{S} , musimy zmodyfikować warunek na wartości s , dla których mamy do czynienia z procesami fizycznymi. W tym celu standardową procedurą jest wzięcie punktów leżących powyżej osi rzeczywistej, ale bardzo blisko niej. Od tej pory przyjmiemy więc, że proces odpowiadający fizycznej sytuacji zachodzi dla wartości zmiennej Mandelstama równej $s^+ = s + i0$ oraz $s \geq (m_1 + m_2)^2$. W takiej sytuacji warunek unitarności przybiera postać

$$\mathcal{S}(s^+)\mathcal{S}((s^+)^*) \equiv \mathcal{S}(s^+)\mathcal{S}(s^-) = 1, \quad (2.57)$$

gdzie wprowadziliśmy $s^- = s - i0$, która leży pod osią rzeczywistą. Należy zauważyć, że odległość pomiędzy punktami s^+ oraz s^- jest infinitezymalnie mała. Jedyнным sposobem

na to, aby równanie (2.57) dawało nietrywialne rozwiązania jest istnienie cięcia leżącego na osi rzeczywistej pomiędzy punktami s^+ a s^- . Równanie (2.57) musi być spełnione dla wszystkich procesów fizycznych, z czego wynika, że cięcie musi znajdować się na prawo od punktu $s = (m_1 + m_2)^2$, który jest w tym przypadku punktem rozgałęzienia. Można pokazać, że cięcie to pochodzi od pierwiastka kwadratowego.

Jak do tej pory zajmowaliśmy się cząstkami poruszającymi się w przód w czasie. Jeśli teraz skupimy się na tych poruszających się w tył w czasie, to możemy przeprowadzić podobną analizę jak powyżej. Jako wniosek dostaniemy, że funkcja $\mathcal{S}(s)$ posiada jeszcze jedno cięcie leżące na osi rzeczywistej i określone przez $s \leq (m_1 - m_2)^2$. Podsumowując, przedłużenie analityczne funkcji $\mathcal{S}(s)$ jest funkcją meromorficzną z dwoma cięciami leżącymi na kawałkach osi rzeczywistej zdefiniowanych przez $s > (m_1 + m_2)^2$ oraz $s < (m_1 - m_2)^2$. Fizyczne wartości macierz $\mathcal{S}(s)$ przyjmuje dla s znajdujących się tuż nad prawym cięciem. Pierwszą gałąź pełnej powierzchni Riemanna będziemy nazywać *gałęzią fizyczną*.

Korzystając ze zdefiniowanego powyżej przedłużenia analitycznego, można znaleźć jeszcze jedną relację ograniczającą swobodę macierzy rozpraszania. Jest to tzw. *równanie crossing*. W celu znalezienia go zajmijmy się ponownie amplitudą rozpraszania $\mathcal{S}_{ij}^{kl}(s)$. Jeśli teraz rozpatrzmy sytuację, w której jedna z cząstek (powiedzmy j) należących wcześniej do kanału wejściowego, będzie należała do kanału wyjściowego podczas, gdy jednocześnie weźmiemy cząstkę (l) z kanału wyjściowego by była w kanale wejściowym, to otrzymamy nowe wyrażenie na tę samą amplitudę rozpraszania pomiędzy dwoma cząstkami fizycznymi. Dla tej nowej amplitudy cząstkami wchodzącymi będą i oraz \bar{l} , natomiast wychodzącymi będą k oraz \bar{j} , gdzie kreska nad literą oznacza, że zamieniliśmy cząstkę na antycząstkę. Operacja ta w typowym przypadku oznacza sprzężenie ładunkowe.

Do opisu procesu, który przed chwilą opisaliśmy, lepiej od zmiennej s nadaje się zmienna $t = (p_1 - p_3)^2$. Zależność pomiędzy zmiennymi t i s może zostać znaleziona jeśli podstawimy $p_3 = p_2$ i przyjmuje postać

$$t = (p_1 - p_2)^2 = 2p_1^2 + 2p_2^2 - (p_1 + p_2)^2 = 2m_1^2 + 2m_2^2 - s. \quad (2.58)$$

Symetria crossing mówi, że amplituda dla tego procesu może zostać uzyskana jako przedłużenie analityczne poprzedniej amplitudy rozpraszania do obszaru płaszczyzny s , dla którego t staje się fizyczne, tzn. $t \in \mathbb{R}$ oraz $t \geq (m_1 + m_2)^2$. Obszar ten leży poniżej lewego cięcia na płaszczyźnie s . Równanie crossing możemy teraz zapisać jako

$$\mathcal{S}_{ij}^{kl}(s) = \mathcal{S}_{i\bar{l}}^{k\bar{j}}(2m_1^2 + 2m_2^2 - s). \quad (2.59)$$

Wszystkie opisane do tej pory własności macierzy rozpraszania możemy zapisać w języku zmiennej rapidity θ . Jeśli odwrócimy relację (2.53), to możemy znaleźć, że gałąź fizyczna przekształcona zostaje na obszar

$$0 \leq \Im \theta \leq \pi. \quad (2.60)$$

Punkty rozgałęzienia zostają z kolei przekształcone na punkty $\theta = 0$ oraz $\theta = i\pi$ leżące na brzegu obszaru (2.60). Obszar ten nazywać będziemy *pasem fizycznym*. Wszystkie własności macierzy rozpraszania dla relatywistycznych dwuwymiarowych teorii całkowalnych możemy podsumować za pomocą następujących relacji

- analityczność: $\mathcal{S}(\theta)$ jest rzeczywiste dla czysto urojonych wartości θ ;
- unitarność: $\mathcal{S}_{ij}^{mn}(\theta)\mathcal{S}_{mn}^{kl}(-\theta) = \delta_i^k\delta_j^l$;
- równanie crossing: $\mathcal{S}_{ij}^{kl}(\theta) = \mathcal{S}_{i\bar{l}}^{k\bar{j}}(i\pi - \theta)$;
- równanie Yanga-Baxtera: $\mathcal{S}_{\beta\alpha}^{ij}(\theta_{12})\mathcal{S}_{n\gamma}^{\beta k}(\theta_{13})\mathcal{S}_{ml}^{\alpha\gamma}(\theta_{23}) = \mathcal{S}_{\beta\gamma}^{jk}(\theta_{23})\mathcal{S}_{\alpha l}^{i\gamma}(\theta_{13})\mathcal{S}_{nm}^{\alpha\beta}(\theta_{12})$.

2.2.3 Macierz rozpraszania dla teorii nierelatywistycznych

W przypadku, gdy rozważamy teorię, która nie jest relatywistyczna, dwucząstkowa macierz rozpraszania zależy w sposób nietrywialny od obydwu swoich argumentów. Mimo tej komplikacji możemy jednak zapisać ograniczenia podobne do tych, które znaleźliśmy w poprzednim przypadku. Załóżmy, że udało nam się znaleźć uogólnioną zmienną rapidity z , tzn. zmienną należącą do nakrycia uniwersalnego krzywej algebraicznej parametryzowanej zmiennymi energii i pędu związanymi ze sobą relacją dyspersji². Wtedy możemy zapisać macierz rozpraszania z użyciem tej zmiennej jako $\mathcal{S}_{12}(z_1, z_2)$. Funkcja ta ponownie posiada szereg nietrywialnych własności dających ograniczenia na jej strukturę. W szczególności musi być ona unitarna

$$\mathcal{S}_{12}(z_1, z_2)\mathcal{S}_{12}^\dagger(z_1, z_2) = \mathbb{I}. \quad (2.61)$$

Możemy także napisać równanie crossing

$$\mathcal{S}_{12}(z_1, z_2)\mathcal{S}_{12}(z_1 + \frac{\omega}{2}, z_2) = \mathbb{I} \quad \text{lub} \quad \mathcal{S}_{1\bar{2}}(z_1, z_2)\mathcal{S}_{12}(z_1, z_2 - \frac{\omega}{2}) = \mathbb{I}, \quad (2.62)$$

gdzie ω jest okresem na krzywej algebraicznej zmiennej rapidity³. Przez kreskę nad numerem cząstki oznaczyliśmy ponownie zamianę cząstki na antycząstkę.

Dla teorii całkownalnych mamy dodatkowo równanie Yanga-Baxtera, które można napisać w postaci

$$\mathcal{S}_{12}(z_1, z_2)\mathcal{S}_{13}(z_1, z_3)\mathcal{S}_{23}(z_2, z_3) = \mathcal{S}_{23}(z_2, z_3)\mathcal{S}_{13}(z_1, z_3)\mathcal{S}_{12}(z_1, z_2). \quad (2.63)$$

Relacje (2.61)-(2.63) pozwalają w szczególności wyznaczyć macierz rozpraszania dla wzbudzeń na wstędze świata struny w przestrzeni $AdS_5 \times S^5$. Macierz ta znajduje się w Dodatku B.

2.3 Całkownalne łańcuchy spinowe

W poniższej części pracy chcielibyśmy przybliżyć metodę otrzymywania równań Asymptotycznego Ansatzu Bethego dla całkownalnych łańcuchów spinowych, jak również pokazać, że równania te muszą być uzupełnione przez poprawki skończonego rozmiaru w przypadku łańcucha spinowego w teorii $\mathcal{N} = 4$ SYM. W celu policzenia tych poprawek, danych

²Szczególne przypadki rozpatrywane są w Dodatku A

³Dla teorii strun na $AdS_5 \times S^5$ postać krzywej algebraicznej zmiennej rapidity, jak również znaczenie okresu ω , wyjaśnione są w Dodatku A.

przez wzory Lüschera, będziemy używali opisu dualnego, jakim jest dwuwymiarowa teoria pola na wstędze świata struny w $AdS_5 \times S^5$.

Całkowalne łańcuchy spinowe stanowią bardzo ważną klasę teorii całkowalnych. W szczególności operator dylatacji dla teorii $\mathcal{N} = 4$ SYM może być utożsamiony z hamiltonianem pewnego długozasięgowego łańcucha spinowego, który jest całkowalny. Zanim dojdziemy jednak do tego, najbardziej interesującego nas przypadku, zaczniemy nasze rozważania od prostego przykładu, jakim jest łańcuch spinowy Heisenberga o symetrii $\mathfrak{su}(2) - XXX_{\frac{1}{2}}$. W dalszej części tego podrozdziału użyjemy metod, których nauczyliśmy się w tym prostym przypadku do skonstruowania równań Bethego dla łańcucha spinowego obecnego w $\mathcal{N} = 4$ SYM.

2.3.1 Łańcuch spinowy Heisenberga

Łańcuch spinowy Heisenberga jest lokalny w tym sensie, że jedynie sąsiadujące ze sobą spiny oddziałują między sobą. Poniżej wprowadzimy ogólne idee dotyczące lokalnych łańcuchów spinowym, a następnie użyjemy ich do wyprowadzenia równań Bethego dla łańcucha Heisenberga korzystając z Asymptotycznego Ansatzu Bethego.

Przestrzenią Hilberta, na której zdefiniowane są łańcuchy spinowe o długości L jest iloczyn tensorowy L kopii pewnej przestrzeni kwantowej V

$$\mathcal{H} = V \otimes \dots \otimes V. \quad (2.64)$$

Każda przestrzeń kwantowa V jest modułem algebry \mathcal{A} , która jest algebrą symetrii modelu. Z kolei, każdy spin (cząstka) jest elementem tego modułu

$$\rho_A \in V. \quad (2.65)$$

Możemy teraz zdefiniować hamiltonian \hat{H} dla lokalnego łańcucha spinowego jako

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^L \hat{H}_{i,i+1}, \quad (2.66)$$

gdzie obiekt $\hat{H}_{i,i+1}$ działa jedynie na przestrzenie kwantowe o numerze i oraz $(i+1)$

$$\dots \otimes \underbrace{V \otimes V}_{i \quad i+1} \otimes \dots \quad (2.67)$$

Przejdźmy teraz do szczególnego przypadku lokalnego łańcucha spinowego jakim jest łańcuch Heisenberga. W tym przypadku spin może przyjmować jedynie dwie wartości i przestrzeń kwantowa może być utożsamiona z

$$V = \mathbb{C}^2. \quad (2.68)$$

Przestrzeń V rozpięta jest przez dwa stany, z których jeden odpowiada cząstce o spinie $+\frac{1}{2}$, a drugi cząstce o spinie $-\frac{1}{2}$, które będziemy oznaczać w dalszej części odpowiednio przez $|\uparrow\rangle$ oraz $|\downarrow\rangle$. Z kolei hamiltonian dla łańcucha spinowego Heisenberga dany jest przez

$$\hat{H}_{i,i+1} = \frac{1}{2} (\vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_{i+1} - 1) = (1 - \mathcal{P}_{i,i+1}), \quad (2.69)$$

gdzie przez $\vec{\sigma}_i$ oznaczyliśmy wektor składający się z macierzy Pauliego, natomiast $\mathcal{P}_{i,i+1}$ oznacza operację permutacji spinów znajdujących się na pozycjach i oraz $i+1$. Jako stan podstawowy naszego łańcucha spinowego przyjmijmy stan składający się ze wszystkich spinów równych $+\frac{1}{2}$ ⁴. Wtedy łatwo znaleźć, że energia tak otrzymanej próżni jest równa zero

$$\hat{H}(|\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes \dots \otimes |\uparrow\rangle) = 0. \quad (2.70)$$

Możemy następnie zbudować stany wzbudzone zamieniając jeden lub więcej spinów w górę na spiny w dół. Zaczniemy od stanów jednowzbudzeniowych i zdefiniujemy

$$|i\rangle = |\uparrow\rangle \otimes \dots \otimes \underbrace{|\downarrow\rangle}_i \otimes \dots \otimes |\uparrow\rangle. \quad (2.71)$$

W celu znalezienia wartości własnych hamiltonianu dla stanów jednowzbudzeniowych wygodne okazuje się przejście do przestrzeni pędów, gdzie stany w tej przestrzeni dane są przez dyskretną transformatę Fouriera stanów z przestrzeni położeń

$$|p\rangle = \sum_{k=1}^L e^{ipk} |k\rangle. \quad (2.72)$$

Jeśli teraz zadziałamy hamiltonianem na stan jednowzbudzeniowy w przestrzeni pędów, to dostaniemy, że jest on stanem własnym o energii danej przez relację dyspersji dla pojedynczych wzbudzeń w postaci

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{2} (2 - 2 \cos p) = 2 \sin^2 \frac{p}{2}. \quad (2.73)$$

Kolejnym krokiem jest rozpatrzenie stanów z dwoma wzbudzeniami. Stany asymptotyczne w przestrzeni położeń zdefiniowane są jako

$$|k_1 k_2\rangle = |\uparrow\rangle \otimes \dots \otimes \underbrace{|\downarrow\rangle}_{k_1} \otimes \dots \otimes \underbrace{|\downarrow\rangle}_{k_2} \otimes \dots \otimes |\uparrow\rangle, \quad (2.74)$$

gdzie wzbudzenia znajdujące się w pozycjach $k_1 \ll k_2$ są daleko od siebie. W celu rozwiązania zagadnienia własnego dla hamiltonianu, ponownie przejdziemy do przestrzeni pędów. W tym przypadku jednak, stanami własnymi nie będą po prostu transformaty Fouriera, gdyż dwa wzbudzenia mogą ze sobą oddziaływać. Napiszmy ogólną postać stanu asymptotycznego w przestrzeni pędów

$$|p_1 p_2\rangle = \sum_{1 \leq k_1 \ll k_2 \leq L} \psi(k_1, p_1; k_2, p_2) |k_1 k_2\rangle. \quad (2.75)$$

Naszym celem jest znalezienie rozwiązania równania na wartości własne hamiltonianu $\hat{H}|p_1 p_2\rangle = E(p_1, p_2)|p_1 p_2\rangle$, które dla hamiltonianu danego wzorem (2.69) przyjmuje postać:

- jeśli $k_1 < k_2 - 1$, to

$$\begin{aligned} E(p_1, p_2) \psi(k_1, p_1; k_2, p_2) &= 2\psi(k_1, p_1; k_2, p_2) - \psi(k_1 - 1, p_1; k_2, p_2) \\ &\quad - \psi(k_1 + 1, p_1; k_2, p_2) + 2\psi(k_1, p_1; k_2, p_2) \\ &\quad - \psi(k_1, p_1; k_2 - 1, p_2) - \psi(k_1, p_1; k_2 + 1, p_2); \end{aligned} \quad (2.76)$$

⁴Alternatywnie można wybrać stan składający się ze wszystkich spinów $-\frac{1}{2}$.

- jeśli $k_1 = k_2 - 1$, to

$$E(p_1, p_2)\psi(k_1, p_1; k_2, p_2) = 2\psi(k_1, p_1; k_2, p_2) - \psi(k_1 - 1, p_1; k_2, p_2) - \psi(k_1, p_1; k_2 + 1, p_2). \quad (2.77)$$

Okazuje się, że rozwiązanie tych równań może być łatwo znalezione, jeśli założymy, że rozwiązanie jest postaci

$$\psi(k_1, p_1; k_2, p_2) = e^{ik_1 p_1 + ik_2 p_2} + \mathcal{S}(p_2, p_1)e^{ik_1 p_2 + ik_2 p_1}, \quad (2.78)$$

gdzie $\mathcal{S}(p_1, p_2)$ jest macierzą rozpraszania wzbudzeń o pędach p_1 oraz p_2 . Postać ta została zaproponowana przez Bethego w [14] i w literaturze nazywana jest *Asymptotycznym Ansatzem Bethego*. Jeśli teraz wstawimy (2.78) do równań (2.76) oraz (2.77), to po pierwsze dostaniemy, że energia stanu dwuwzbudzeniowego jest sumą wyrażań jak w (2.73)

$$E(p_1, p_2) = \varepsilon(p_1) + \varepsilon(p_2) = \sum_{k=1}^2 2 \sin^2 \frac{p}{2}. \quad (2.79)$$

Po drugie, również macierz rozpraszania może być wyznaczona z tych równań. Przyjmuje ona postać

$$S(p_1, p_2) = -\frac{e^{ip_1 + ip_2} - 2e^{ip_1} + 1}{e^{ip_1 + ip_2} - 2e^{ip_2} + 1}. \quad (2.80)$$

Wszystkie wyniki przedstawione do tej pory są prawdziwe dla dowolnych wartości pędów. Musimy jednak pamiętać, że mamy do czynienia z układem kwantowomechanicznym, który jest cykliczny, dlatego też, w celu wyznaczenia rozwiązań fizycznych, musimy zadać warunki brzegowe, które w naszej sytuacji mają postać

$$\psi(k_1, p_1; k_2, p_2) = \psi(k_2, p_2; k_1 + L, p_1). \quad (2.81)$$

Jeśli teraz wstawimy do powyższego wzoru wyrażenie pochodzące z Ansatzu Bethego (2.78), to otrzymamy równania Bethego w postaci

$$e^{ip_1 L} = \mathcal{S}(p_1, p_2). \quad (2.82)$$

Analogiczne rozumowanie prowadzi do drugiego równania, w którym pędy p_1 i p_2 zamieniają się rolami. Rozwiązania równań Bethego okazują się być często zespolone. Można to wyjaśnić faktem, że wzbudzenia nie poruszają się swobodnie, lecz oddziałują ze sobą w skończonej objętości i w szczególności mogą tworzyć stany związane.

Moglibyśmy kontynuować nasze rozważania stopniowo zwiększając ilość wzbudzeń w naszym łańcuchu spinowym i starając się rozwiązać równania analogiczne do (2.76) i (2.77). Okazuje się jednak, że całkowalność umożliwi nam na dokonanie wielkiego skoku i od razu rozwiązanie problemu z dowolną ilością M wzbudzeń. Całkowita faza, jaką dostanie wzbudzenie, jeśli weźmiemy je i przesuniemy wokół łańcucha spinowego, będzie równa iloczynowi faz powstałych przez niezależne rozproszenie na pozostałych $M - 1$ wzbudzeniach. W takim przypadku dostajemy po prostu

$$e^{ip_j L} = \prod_{k \neq j}^M \mathcal{S}(p_j, p_k), \quad j = 1, \dots, M, \quad (2.83)$$

gdzie $\mathcal{S}(p_j, p_k)$ jest tą samą macierzą rozpraszania, co w przypadku dwóch wzbudzeń. Dodatkowo, energia układu dana będzie jako suma relacji dyspersji (2.73) dla każdego wzbudzenia.

Na zakończenie dyskusji o równaniach Bethego dla łańcucha Heisenberga chcielibyśmy wprowadzić standardową zmianę zmiennych, która umożliwi nawiązanie kontaktu z algebraicznymi aspektami teorii. Wprowadzimy tzw. *pierwiastki Bethego*, które wyrażają się w języku pędów poprzez

$$u_k = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{p_k}{2}. \quad (2.84)$$

Możemy teraz przepisać równania Bethego oraz wzór na całkowitą energię stanu w postaci

$$\left(\frac{u_j + \frac{i}{2}}{u_j - \frac{i}{2}} \right)^L = \prod_{k \neq j}^M \frac{u_j - u_k + i}{u_j - u_k - i} \quad (2.85)$$

oraz

$$E = \sum_{j=1}^M \frac{1}{u_j^2 + \frac{1}{4}}. \quad (2.86)$$

2.3.2 Łańcuch spinowy w $\mathcal{N} = 4$ SYM

Jeśli teraz rozpatrzemy łańcuch pojawiający się w teorii $\mathcal{N} = 4$ SYM, to musimy zwrócić uwagę na dwie jego własności, które odróżniają go od łańcucha Heisenberga i jednocześnie komplikują jego analizę. Po pierwsze, oddziaływanie w tym łańcuchu, jak już wspomnieliśmy wcześniej, jest długozasięgowe. W tym przypadku zasięg oddziaływania numeruje wyrazy w rozwinięciu perturbacyjnym w słabym sprzężeniu, gdyż jeśli weźmiemy ℓ -ty wyraz rozwinięcia hamiltonianu, to będzie on działał na ℓ sąsiednich spinów w łańcuchu i jednocześnie jego wkład do końcowego wyniku będzie rzędu $g^{2\ell}$. Jeśli teraz chcemy zdefiniować macierz rozpraszania, to musimy najpierw zidentyfikować stany asymptotyczne, w których możemy dobrze odseparować od siebie wzbudzenia. Jeśli jednak rozpatrujemy łańcuch spinowy o skończonej długości, to dla odpowiednio dużego wyrazu rozwinięcia, każde dwa spiny będą ze sobą oddziaływać i nie będziemy w stanie znaleźć stanów asymptotycznych. Wynika stąd, że analiza, którą przeprowadziliśmy dla łańcucha Heisenberga załamuje się w pełnej teorii i możliwa jest jedynie perturbacyjnie. Jeśli chcemy wyprowadzić równania ABA w pełnej teorii, to musimy wziąć (nieskończenie) długie łańcuchy spinowe. Dla krótkich łańcuchów analiza ta będzie się załamywała i w celu uzyskania poprawnego wyniku będziemy musieli uzupełnić wynik pochodzący z równań ABA o poprawki skończonego rozmiaru.

Druga różnica w stosunku do łańcucha Heisenberga bierze się z tego, że symetria łańcucha w teorii $\mathcal{N} = 4$ SYM dana jest przez bardziej skomplikowaną algebrę $\mathfrak{su}(2|2)^2$. Prowadzić będzie to do tzw. zagnieżdżonych równań Bethego.

Zanim przejdziemy do zapisania równań ABA w teorii $\mathcal{N} = 4$ SYM, chcielibyśmy uściślić, jaka jest zależność pomiędzy lokalnymi operatorami teorii cechowania a łańcuchami spinowymi. Jeśli przyglądnijemy się lokalnym operatorom w granicy planarnej (2.18), to mamy do czynienia jedynie z operatorami jednośladowymi. Z każdym polem wewnątrz śladu możemy teraz utożsamić pewien spin. Korzystając z cykliczności śladu dostajemy układ składający się z ciągu spinów, które możemy przedstawiać cyklicznie. Oznacza to,

że mamy zamknięty łańcuch spinowy z ilością spinów równą ilości operatorów wewnątrz śladu (2.18). Operator dylatacji może zostać teraz utożsamiony z hamiltonianem działającym na tak otrzymany łańcuch spinowy.

Dla łańcucha spinowego w teorii $\mathcal{N} = 4$ SYM możemy ponownie zdefiniować próżnię, jako stan o najniższej energii. W naszych rozważaniach weźmiemy jako próżnię stan BPS zdefiniowany jako

$$\text{Tr} Z^J, \quad (2.87)$$

gdzie $Z = \Phi_5 + i\Phi_6$ jest kombinacją liniową pól skalarnych teorii. Okazuje się, że taki wybór próżni redukuje oryginalną symetrię modelu do $\mathfrak{su}(2|2) \otimes \mathfrak{su}(2|2)$, co dokładnie odpowiada symetrii wzbudzeń na powierzchni świata w cechowaniu na stożku świetlnym. Wzbudzeniami nad próżnią (2.87) są dwa niezależne komplety pól, każdy składający się z dwóch wzbudzeń bozonowych oraz dwóch fermionowych. Macierz rozpraszania pełnej teorii może być zapisana w takim przypadku jako

$$\mathcal{S}(p_1, p_2) = S_0(p_1, p_2)^2 \cdot S_{\mathfrak{su}(2|2)}(p_1, p_2) \otimes S_{\mathfrak{su}(2|2)}(p_1, p_2). \quad (2.88)$$

Szczegółowe informacje na temat tej macierzy rozpraszania znajdują się w Dodatku B. Teraz możemy już zapisać równania ABA dla łańcucha w $\mathcal{N} = 4$ SYM. Ze względu na to, że oddziaływanie w nim jest długozasięgowe, jest to możliwe jedynie w granicy dużej długości łańcucha, co oznacza granicę $J \rightarrow \infty$ w (2.87). Równania ABA przyjmują w tym przypadku bardziej skomplikowaną postać niż w przypadku łańcucha Heisenberga i po raz pierwszy zaproponowane były w [22]. Można je znaleźć w Tabeli 2.1.

Wymiar anomalny danego stanu łańcucha może być policzony ze wzoru

$$\gamma(g) = 2g^2 \sum_{k=1}^{M_4} \left(\frac{i}{x_{4,k}^+} - \frac{i}{x_{4,k}^-} \right), \quad (2.89)$$

gdzie $x_{4,k}^\pm$ są rozwiązaniami równań Bethego. Wielkości x^\pm mogą być powiązane z tzw. parametrem spektralnym u , występującym w równaniach Bethego, dzięki relacjom

$$x_k^\pm = x(u_k^\pm), \quad u^\pm = u \pm \frac{i}{2}, \quad x(u) = \frac{u}{2} \left(1 + \sqrt{1 - 4 \frac{g^2}{u^2}} \right). \quad (2.90)$$

Z kolei liczby M_i , dla $i = 1, \dots, 7$, charakteryzują stan, którego wymiar anomalny liczymy.

Rozwiązując równania z Tabeli 2.1 i wstawiając ich rozwiązanie do wzoru na wymiar anomalny (2.89), możemy znaleźć kolejne jego wyrazy rozwinięcia w stałej sprzężenia g . Teoretycznie, tak otrzymany wynik można teraz porównać z bezpośrednimi rachunkami z użyciem diagramów Feynmana teorii $\mathcal{N} = 4$ SYM. W praktyce jest to jednak zadanie praktycznie niewykonalne dla generycznego stanu łańcucha spinowego. Można jednak znaleźć stany, dla których jest to możliwe. Klasycznym przykładem jest tutaj tzw. *operator Konishiego* dany przez

$$\text{Tr} \Phi_i^2, \quad (2.91)$$

gdzie Φ_i są polami skalarnymi teorii (patrz (2.3)) i sumujemy po wszystkich sześciu polach. W celach skorzystania z równań ABA bardziej odpowiednim okazuje się użycie jednego z dwóch operatorów należących do tego samego supermultipletu, co operator Konishi, a co za tym idzie, posiadających ten sam wymiar anomalny. Jednym z nich jest operator

$$\begin{aligned}
1 &= \prod_{l=1}^{M_2} \frac{u_{1,k} - u_{2,l} + i/2}{u_{1,k} - u_{2,l} - i/2} \prod_{l=1}^{M_4} \frac{1 - g^2/x_{1,k}x_{4,l}^+}{1 - g^2/x_{1,k}x_{4,l}^-} \\
1 &= \prod_{l \neq k}^{M_2} \frac{u_{2,k} - u_{2,l} - i}{u_{2,k} - u_{2,l} + i} \prod_{l=1}^{M_1} \frac{u_{2,k} - u_{1,l} + i/2}{u_{2,k} - u_{1,l} - i/2} \prod_{l=1}^{M_3} \frac{u_{2,k} - u_{3,l} + i/2}{u_{2,k} - u_{3,l} - i/2} \\
1 &= \prod_{l=1}^{M_4} \frac{x_{3,k} - x_{4,l}^+}{x_{3,k} - x_{4,l}^-} \prod_{l=1}^{M_2} \frac{u_{3,k} - u_{2,l} + i/2}{u_{3,k} - u_{2,l} - i/2} \\
1 &= \left(\frac{x_{4,k}^-}{x_{4,k}^+} \right)^L \prod_{l \neq k}^{M_4} \frac{u_{4,k} - u_{4,l} + i}{u_{4,k} - u_{4,l} - i} \sigma^2(x_{4,k}, x_{4,l}) \\
&\quad \times \prod_{l=1}^{M_1} \frac{1 - g^2/x_{4,k}^-x_{1,l}}{1 - g^2/x_{4,k}^+x_{1,l}} \prod_{l=1}^{M_3} \frac{x_{4,k}^- - x_{3,l}}{x_{4,k}^+ - x_{3,l}} \prod_{l=1}^{M_5} \frac{x_{4,k}^- - x_{5,l}}{x_{4,k}^+ - x_{5,l}} \prod_{l=1}^{M_7} \frac{1 - g^2/x_{4,k}^-x_{7,l}}{1 - g^2/x_{4,k}^+x_{7,l}} \\
1 &= \prod_{l=1}^{M_4} \frac{x_{5,k} - x_{4,l}^+}{x_{5,k} - x_{4,l}^-} \prod_{l=1}^{M_6} \frac{u_{5,k} - u_{6,l} + i/2}{u_{5,k} - u_{6,l} - i/2} \\
1 &= \prod_{l \neq k}^{M_6} \frac{u_{6,k} - u_{6,l} - i}{u_{6,k} - u_{6,l} + i} \prod_{l=1}^{M_7} \frac{u_{6,k} - u_{7,l} + i/2}{u_{6,k} - u_{7,l} - i/2} \prod_{l=1}^{M_5} \frac{u_{6,k} - u_{5,l} + i/2}{u_{6,k} - u_{5,l} - i/2} \\
1 &= \prod_{l=1}^{M_6} \frac{u_{7,k} - u_{6,l} + i/2}{u_{7,k} - u_{6,l} - i/2} \prod_{l=1}^{M_4} \frac{1 - g^2/x_{7,k}x_{4,l}^+}{1 - g^2/x_{7,k}x_{4,l}^-}.
\end{aligned}$$

Tabela 2.1: Równania Bethego dla nieskończonego łańcucha spinowego w teorii $\mathcal{N} = 4$ SYM.

$\text{Tr}X^2Z^2 + \dots$, gdzie kropki oznaczają wszystkie możliwe kombinacje rozmieszczenia pól wewnątrz śladu. Należy on do sektora $\mathfrak{su}(2)$ teorii i ma długość $L = 4$. Drugim z operatorów należących do tego samego multipletu jest $\text{Tr}\mathcal{D}^2Z^2 + \dots$ należący do sektora $\mathfrak{sl}(2)$. Jest to najprostszy z tzw. operatorów twist-2, które będą obiektem naszych zainteresowań w Rozdziale 5. Obydwa te operatory można rozumieć jako łańcuchy spinowe z dwoma wzbudzeniami typu X lub typu \mathcal{D} nad próżnią składającą się z czterech pól Z .

Diagramatycznie wymiar anomalny został znaleziony dla operatora Konishiego w [26] aż do czterech pętli i dany jest on przez

$$\Delta_{\text{Feynman}}^{\text{Konishi}} = 4 + 12g^2 - 48g^4 + 336g^6 + (-2496 + 576\zeta(3) - 1440\zeta(5))g^8. \quad (2.92)$$

Z drugiej strony, rozwiązując równania ABA, udało się znaleźć wynik aż do czterech pętli w postaci

$$\Delta_{\text{ABA}}^{\text{Konishi}} = 4 + 12g^2 - 48g^4 + 336g^6 - (2820 + 288\zeta(3))g^8, \quad (2.93)$$

który zgadza się z (2.92) dla pierwszych trzech pętli w rachunku perturbacyjnych, lecz różni się dla wyrazu proporcjonalnego do g^8 ! Wynika to z faktu pojawienia się nowego typu diagramów Feynmana w rozwinięciu czteropętlowym, dla których równania Bethego nie są w stanie odtworzyć ich wkładu do końcowego wyniku. W grafach tych pojawiają się tzw.

efekty wrapping, tzn. zamknięte pętle obiegające łańcuch spinowy dookoła. Znalezienie metod na policzenie wkładu pochodzącego od efektów wrapping będzie jednym z tematów przewodnich tej rozprawy doktorskiej. Dla przypadku operatora Konishiego poprawka do wyniku pochodzącego z ABA została uzyskana w [25] przy użyciu uogólnionych formuł Lüschera, których wyprowadzenie znajduje się w kolejnym rozdziale. Wzory Lüschera dają w tym przypadku

$$\Delta_{\text{wrapping}}^{\text{Konishi}} = (324 + 864\zeta(3) - 1440\zeta(5))g^8, \quad (2.94)$$

co po dodaniu do wyniku (2.93) dokładnie odtwarza rezultat z bezpośrednich rachunków perturbacyjnych.

Należy zwrócić szczególną uwagę na fakt, że wiodąca poprawka pochodząca od efektów wrapping jest proporcjonalna do $(g^2)^4$. Bierze się to z faktu, że w sektorze $\mathfrak{su}(2)$ operator Konishiego ma długość $L = 4$. Jak się okazuje, jest to typowe zachowanie w słabym sprzężeniu – poprawki wrapping zaczynają odgrywać rolę w wyrazie rozwinięcia perturbacyjnego równym długości łańcucha spinowego.

Część II

Całkowalność w korespondencji AdS/CFT

Rozdział 3

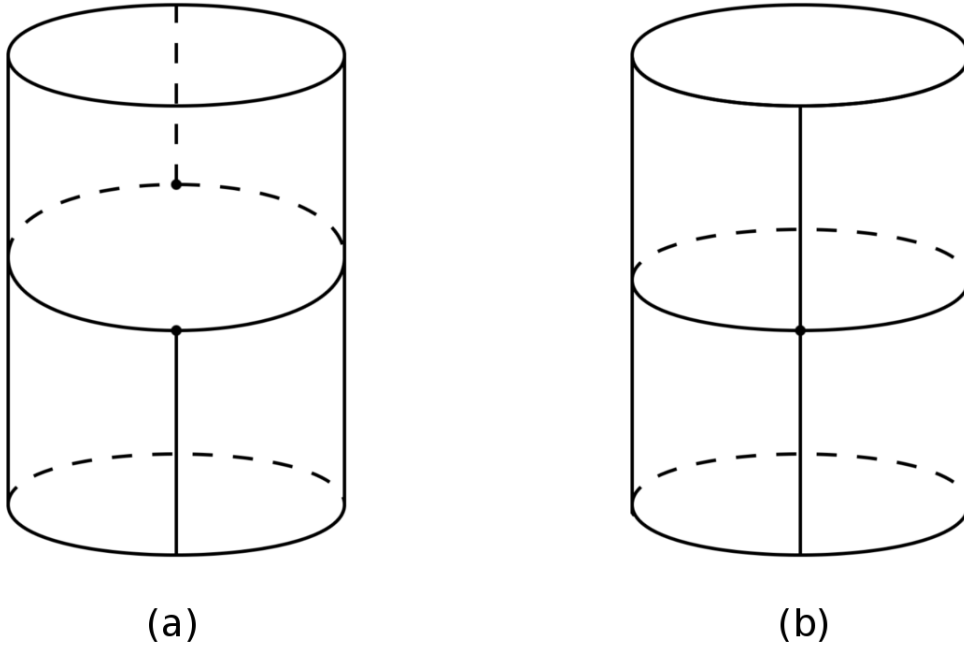
Uogólnione formuły Lüschera

Rozdział poniższy w całości poświęcony jest znalezieniu *uogólnionych wzorów Lüschera*. Formuły Lüschera pozwalają na policzenie wiodącej teoriopolowej poprawki do energii (w nieskończonej objętości), gdy rozpatrujemy kwantową teorię pola w skończonej objętości. W naszych rozważaniach skoncentrujemy się na przypadku 2-wymiarowych kwantowych teorii pola zdefiniowanych na cylindrze. Układ współrzędnych na cylindrze wybierzemy tak, aby współrzędna wzdłuż pobocznic walca (nieskompaktyfikowana) była współrzędną czasową, natomiast współrzędna przestrzenna będzie biegła wokół walca. W przypadku, gdy obwód cylindra jest bardzo duży, wartość energii cząstek naszej teorii może być dobrze przybliżana przez energię cząstek teorii zdekompaktyfikowanej, tzn. zdefiniowanej na nieskończonej płaszczyźnie. Jeśli jednak zmniejszamy obwód cylindra, to coraz większy wkład do energii zaczynają dawać procesy z udziałem wirtualnych cząstek biegnących dookoła cylindra. W 1986 roku Lüscher znalazł w [24], posługując się wyprowadzeniem diagramatycznym, jaki jest wiodący wkład od tych wirtualnych cząstek do energii (masy) elementarnego wzbudzenia teorii. W swoich rozważaniach ograniczył się on jedynie do teorii z relatywistyczną relacją dyspersji oraz stanu jednocząstkowego. Wynik był dość zaskakujący, gdyż cała informacja na temat wiodącej poprawki okazała się być zdeterminowana przez wielkości pochodzące z teorii na nieskończonej płaszczyźnie - relację dyspersji oraz asymptotyczną macierz rozpraszania (macierz \mathcal{S}). Aby być bardziej precyzyjnym, jego wynik składał się z dwóch członów, które zostały nazwane przez Lüschera *F-termem* oraz *μ -termem*. Dane są one wzorami

$$\Delta m_F(L) = -m \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta}{2\pi} e^{-mL \cosh \theta} \cosh \theta \sum_b \left(\mathcal{S}_{ab}^{ab} \left(\theta + i \frac{\pi}{2} \right) - 1 \right), \quad (3.1)$$

$$\Delta m_\mu(L) = -\frac{\sqrt{3}}{2} m \sum_{b,c} M_{abc}(-i) \operatorname{res}_{\theta = \frac{2\pi i}{3}} \mathcal{S}_{ab}^{ab}(\theta) \cdot e^{-\frac{\sqrt{3}}{2} mL}, \quad (3.2)$$

gdzie przez m oznaczyliśmy masę cząstki w teorii o nieskończonej objętości, $\mathcal{S}(\theta)$ jest macierzą rozpraszania, natomiast zmienną całkowania θ możemy utożsamić ze zmienną rapidity wirtualnej cząstki biegnącej wokół cylindra. Liczba M_{abc} równa się 1, jeśli c jest stanem związanym a oraz b i równa się 0 w przeciwnym przypadku. Idąc za przykładem Lüschera, możemy nadać interpretację wyrażeniom na *F-term* oraz *μ -term*. *F-term* pochodzi z oddziaływania fizycznej cząstki z wirtualną cząstką biegnącą wokół cylindra. Oddziaływanie to opisywane jest macierzą rozpraszania. Z drugiej strony, *μ -term* można



Rysunek 3.1: Zaproponowana przez Lüschera diagramatyczna reprezentacja poprawek (3.1) pochodzących od (a) μ -termu oraz (b) F -termu.

utożsamiać z sytuacją, w której fizyczna cząstka rozpada na się na dwie wirtualne cząstki (obie będące na powłoce masy), które następnie rekombinują odtwarzając wyjściową cząstkę fizyczną. Proces ten matematycznie może być opisany przez residuum macierzy rozpraszania w położeniu jej bieguna (istnienie biegunów macierzy rozpraszania tożsame jest z istnieniem stanów związanych w teorii). Reprezentacje diagramatyczne F -termu i μ -termu znajdują się na rysunku 3.1.

Należy zwrócić uwagę na fakt, że wynik znaleziony przez Lüschera dotyczy tylko specyficznej klasy teorii – teorii relatywistycznych, oraz wąskiej klasy stanów danej teorii - jedynie wzbudzeń elementarnych. Naszym celem jest znalezienie wzorów na poprawki Lüschera dla szerszej klasy teorii (i stanów). Jeśli chodzi o rozszerzenie diagramatycznego wyprowadzenia na przypadek stanów wielocząsteczkowych, to wydaje się to być zadaniem beznadziejnym, gdyż ilość diagramów, które należy wziąć pod uwagę w rachunkach, rośnie eksponencjalnie szybko z ilością rozpatrywanych cząstek. W literaturze nie istnieje nawet wyprowadzenie dla przypadku dwóch cząstek. Z kolei uogólnienie na teorie z generyczną relacją dyspersji jest możliwe i zostało znalezione w [A1]. Wyprowadzenie to stanowi jeden z wyników obecnej rozprawy doktorskiej i będzie ono tematem kolejnego podrozdziału.

Mimo tego, że wyprowadzenie diagramatyczne poprawek Lüschera dla dowolnych stanów wielocząsteczkowych wydaje się być niemożliwe, to jednak istnieje alternatywna droga znalezienia postaci tych poprawek, przynajmniej w teoriach relatywistycznych. Jako przykład weźmy teorię Sinh-Gordona na cylindrze. W tym przypadku rozwiązanie problemu spektralnego jest znane dokładnie, a energie wzbudzeń tej teorii zakodowane są w pewnych znanych, nieliniowych równaniach całkowych. Równania te można rozwiązać iteracyjnie, jeśli za parametr rozwinięcia weźmiemy wyrażenie e^{-L} , gdzie L ponownie jest obwodem cylindra. Poprawki Lüschera są dokładnie pierwszym nietrywialnym wyrazem

tego rozwinięcia. Co jest ciekawe, po raz kolejny okazuje się, że poprawki te wyrażają się jedynie przez (asymptotyczną) relację dyspersji oraz macierz \mathcal{S} . Wzory uzyskane w modelu Sinh-Gordona mogą być teraz z powodzeniem użyte dla dowolnej teorii relatywistycznej - jedyna różnica polegać będzie na wzięciu innej macierzy rozpraszania, właściwej rozpatrywanej teorii.

Kolejnym (i ostatnim) krokiem wydaje się być znalezienie poprawek Lüschera dla przypadku wielocząsteczkowego w teorii z dowolną relacją dyspersji. Sposób rozwiązania tego nietrywialnego problemu przedstawimy w drugiej części tego rozdziału.

3.1 Poprawki Lüschera dla pojedynczego wzbudzenia

W tej części pracy chcielibyśmy przedstawić, krok po kroku, diagramatyczne wyprowadzenie uogólnionych wzorów Lüschera dla pojedynczego elementarnego wzbudzenia. Wyprowadzenie to oryginalnie znajduje się w pracy [A1] i oparte jest na metodzie opracowanej przez Lüschera w [24], a następnie uogólnionej w pracy Klassena i Metzera [39]. Naszym celem będzie uzyskanie wyniku dla teorii z generyczną relacją dyspersji startując z możliwie najmniejszego zbioru założeń, które będą wzięte przez analogię z faktami znanymi z teorii relatywistycznych. W szczególności przyjmiemy pewne założenia dotyczące normalizacji stanów oraz postaci funkcji Greena. Poza tym przyjmiemy, że postać diagramów Feynmana, które będą dawały przyczynek do poprawki energetycznej będą dokładnie tej samej postaci jak znalezione przez Lüschera. W swojej oryginalnej pracy Lüscher znalazł odpowiedź na pytanie, które diagramy są istotne dla wiodącej poprawki wraz z dowodem tego faktu, wykorzystującym w sposób istotny teorię grafów. Pomimo tego, że dowód ten przedstawiony jest konkretnie dla teorii relatywistycznej, to rozsądnym okazuje się wzięcie dokładnie tych samych diagramów, które zaproponował Lüscher i użycie ich do policzenia wiodącej poprawki także w teoriach nierelatywistycznych. Jednym z głównych argumentów przemawiających za poprawnością użytych przez nas założeń jest fakt, że końcowy wynik, który uzyskaliśmy, redukuje się do wyniku znalezionego przez Lüschera (3.1), gdy wstawimy w naszym wzorze relatywistyczną relację dyspersji .

Zanim przejdziemy do właściwych rachunków, chcielibyśmy zwrócić uwagę na fakt, że wyprowadzenie, jak również wynik końcowy, przedstawione w tym rozdziale różnią się od oryginalnych w dwóch istotnych aspektach. Po pierwsze, jak zostało zauważone w [40], jeśli mamy do czynienia z teorią, w której występują fermiony, to należy uwzględnić ten fakt mnożąc przyczynki pochodzące od wirtualnych fermionów przez -1 . Powoduje to, że w końcowym wyniku pojawia się superśląd zamiast śladu macierzy rozpraszania. Po drugie, jak z kolei zostało zauważone w [41], należy bardzo ostrożnie dokonać przedłużenia analitycznego będącego częścią rachunków. Wynik znaleziony przy poprawnym przedłużeniu okaże się być częścią rzeczywistą wyniku znalezionego w [A1]. Dodatkowo, notacja użyta w poniższym wyprowadzeniu różni się od tej z [A1]. Jest to zabieg celowy, mający na celu ujednoczenie notacji w całej pracy.

W kolejnych podrozdziałach wprowadzimy wszystkie potrzebne nam definicje i określimy, które diagramy Feynmana będą istotne w naszych rozważaniach, a następnie, zakładając, że obwód cylindra L , na którym zdefiniowana jest nasza teoria jest duży, znajdziemy wiodącą poprawkę do energii. Zacniemy od zdefiniowania funkcji Greena i podania jej własności, następnie zdefiniujemy energię własną i wyznaczymy zależność między po-

prawką do energii a energią własną w skończonej objętości. W dalszej części podrozdziału podamy trzy typy diagramów Feynmana dających wiodący wkład do energii własnej. Następnie używając własności analitycznych funkcji Greena zredukujemy problem policzenia odpowiednich grafów Feynmana do obliczenia pojedynczej całki z wyrażenia zawierającego jedynie macierz \mathcal{S} oraz relację dyspersji. W celu dokonania tego ostatniego kroku będziemy musieli znaleźć zależność pomiędzy 4-punktową funkcją Greena a macierzą rozpraszania. Jako wynik otrzymamy dwa wzory opisujące wkład pochodzący od F -termu oraz μ -termu w teorii z dowolną relacją dyspersji.

3.1.1 Funkcje Greena

Jako generyczną postać relacji dyspersji dla wzbudzeń elementarnych przyjmować będziemy w naszych rozważaniach

$$E^2 = \varepsilon^2(p). \quad (3.3)$$

Dowolna teoria relatywistyczna należy do tej klasy, gdyż w tym przypadku $\varepsilon^2(p) = m^2 + p^2$. Podobnie jest w przypadku teorii, którą będziemy się interesować najbardziej w późniejszej części tej pracy, tzn. teorii superstrun zdefiniowanej na przestrzeni $AdS_5 \times S^5$, dla której relacja dyspersji przyjmuje postać $\varepsilon^2(p) = 1 + 16g^2 \sin^2 \frac{p}{2}$.

Rozpocznijmy nasze rozważania od przypadku 2-wymiarowej teorii na płaszczyźnie. Obiektem, którego własności będziemy badać jest dwupunktowa, euklidesowa funkcja Greena dla pojedynczego wzbudzenia, $G_a(\mathbf{p})$, będąca funkcją dwuwymiarowego wektora $\mathbf{p} = (p^0, p^1)$, gdzie przez p^0 oznaczamy energię euklidesową, a p^1 pęd cząstki. Wybieramy euklidesową funkcję Greena, gdyż w tym przypadku mamy większą kontrolę nad jej biegunami (w szczególności bieguny te nie leżą na osi rzeczywistej). Na końcu naszych rozważań będziemy mogli dokonać obrotu Wicka i dostaniemy poprawny wynik dla teorii o sygnaturze Minkowskiego. Transformata Fouriera funkcji Greena definiuje propagator dla pojedynczej cząstki w przestrzeni położeń:

$$\langle \phi_a(\mathbf{x}) | \phi_b(\mathbf{0}) \rangle = \delta_{ab} \int \frac{d^2 \mathbf{p}}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} G_a(\mathbf{p}). \quad (3.4)$$

Zdefiniujmy energię własną Σ jako

$$G_a(\mathbf{p})^{-1} = (p^0)^2 + \varepsilon^2(p^1) - \Sigma(\mathbf{p}). \quad (3.5)$$

Z własności funkcji Greena wiemy, że powinna ona mieć biegun wzdłuż powłoki masy (będącej jednowymiarową rozmaitością), która zdefiniowana jest relacją

$$(p^0)^2 + \varepsilon^2(p^1) = 0. \quad (3.6)$$

Wynika stąd, że energia własna Σ powinna znikać wzdłuż tej rozmaitości. Ponadto, wybierając odpowiedni schemat renormalizacji, możemy ustalić wartość residuum względem zmiennej $(p^0)^2$ tak, aby była dowolną, wybraną przez nas liczbą. Nasz wybór będzie miał postać

$$\text{res}_{(p^0)^2} G_a(\mathbf{p}) = 1. \quad (3.7)$$

Nakłada to dodatkowe warunki na energię własną, gdyż

$$\begin{aligned} 1 &= \operatorname{res}_{(p^0)^2} G_a(\mathbf{p}) = \frac{d}{d(p^0)^2} G_a^{-1}(\mathbf{p}) \Big|_{\text{on-shell}} = \frac{d}{d(p^0)^2} ((p^0)^2 + \varepsilon^2(p^1) - \Sigma(\mathbf{p})) \Big|_{\text{on-shell}} \\ &= 1 - \frac{d}{d(p^0)^2} \Sigma(\mathbf{p}) \Big|_{\text{on-shell}} = 1 - \frac{dp^0}{d(p^0)^2} \frac{d}{dp^0} \Sigma(\mathbf{p}) \Big|_{\text{on-shell}}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

z czego wynika, że pochodna cząstkowa energii własnej względem pierwszej współrzędnej znika, jeśli cząstka znajduje się na powłoce masy.

W naszych dalszych rozważaniach będziemy potrzebować także residuum funkcji Greena względem części przestrzennej pędu $p^1 = p_*$ w punktach leżących na powłoce masy. Dane jest ono poprzez

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{p^1=p_*} G_a(\mathbf{p}) &= \lim_{p^1 \rightarrow p_*} \frac{p^1 - p_*}{(p^0)^2 + \varepsilon^2(p^1) - \Sigma(\mathbf{p})} = \lim_{p^1 \rightarrow p_*} \frac{p^1 - p_*}{-\varepsilon^2(p_*) + \varepsilon^2(p^1)} \\ &= \lim_{p^1 \rightarrow p_*} \frac{p^1 - p_*}{\varepsilon(p^1) - \varepsilon(p_*)} \frac{1}{\varepsilon(p^1) + \varepsilon(p_*)} = \frac{1}{\varepsilon'(p_*)} \frac{1}{2\varepsilon(p_*)} = \frac{1}{\varepsilon^2(p_*)'}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Jak do tej pory zajmowaliśmy się teorią zdefiniowaną na płaszczyźnie, lecz nic nie stoi na przeszkodzie, aby skompaktyfikować jeden z wymiarów naszej teorii definiując teorię na cylindrze o (dużym) obwodzie L . Możemy to zrobić na przykład utożsamiając współrzędną przestrzenną $x \sim x + L$. W takiej sytuacji energia własna cząstki (a co za tym idzie także funkcja Greena) ulegnie modyfikacji, ale dla dużych wartości L zmiana ta nie będzie znacząca. Naszym celem jest właśnie wyliczenie wiodącej modyfikacji dla dużych L . Zakładając, że energia euklidesowa cząstki uległa tylko niewielkiej modyfikacji w postaci

$$\bar{p}^0 = i(\varepsilon(p^1) + \delta\varepsilon_L(\mathbf{p})), \quad \bar{p}^1 = p^1, \quad (3.10)$$

jesteśmy w stanie znaleźć zależność zmiany energii cząstki od zmiany energii własnej wynikającej ze skończonego rozmiaru układu. W tym celu należy rozwiązać warunek na położenie bieguna L -zależnej funkcji Greena

$$(\bar{p}^0)^2 + \varepsilon^2(\bar{p}^1) - \Sigma_L(\bar{\mathbf{p}}) = 0. \quad (3.11)$$

Podstawiając (3.10) otrzymujemy

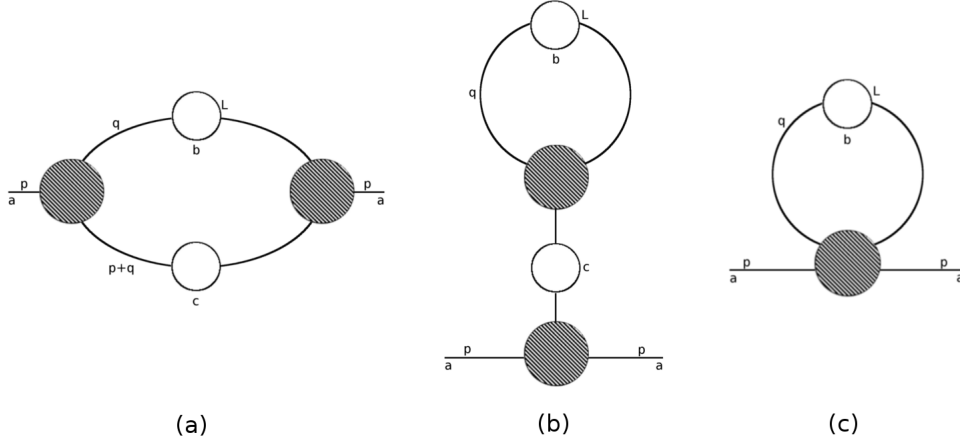
$$(i(\varepsilon(p^1) + \delta\varepsilon_L(\mathbf{p})))^2 + \varepsilon^2(p^1) - \Sigma_L(i(\varepsilon(p^1) + \delta\varepsilon_L(\mathbf{p})), p^1) = 0, \quad (3.12)$$

co prowadzi do

$$-2\varepsilon(p^1)\delta\varepsilon_L(\mathbf{p}) - \Sigma_L(\mathbf{p}) - \left(\frac{d}{d(i\varepsilon(p^1))} \Sigma_L(i\varepsilon(p^1), p^1) \right) \delta\varepsilon_L(\mathbf{p}) = 0 \quad (3.13)$$

i ponieważ zauważyliśmy wcześniej, że pochodna cząstkowa względem pierwszej współrzędnej znika na powłoce masy, więc ostateczny wynik na zmianę energii wynikającą ze skończonego rozmiaru układu dana jest wzorem

$$\delta\varepsilon_L(\mathbf{p}) = -\frac{1}{2\varepsilon(p^1)} \Sigma_L(\mathbf{p}). \quad (3.14)$$



Rysunek 3.2: Trzy klasy diagramów, które należy wziąć pod uwagę licząc wiodącą poprawkę do energii własnej: (a) I_{abc} , (b) J_{abc} , (c) K_{ab} .

3.1.2 Wiodące diagramy Feynmana

Istnieje sposób na zrekonstruowanie funkcji Greena zdefiniowanej dla teorii na cylindrze startując z funkcji Greena zdefiniowanej na płaszczyźnie. W tym celu należy uśrednić $G_a(\mathbf{p})$ po wszystkich możliwych translacjach $x \rightarrow x + nL$. W przestrzeni pędów proces uśredniania sprowadza się do pomnożenia przez czynniki typu e^{inp^1L} dla dowolnych $n \in \mathbb{Z}$, gdzie czynniki te powinny być umieszczone w każdy możliwy sposób na propagatorach danego diagramu Feynmana. Posiłkując się wynikami otrzymanymi dla przypadku relatywistycznego będziemy zakładać, że wiodący wkład do energii pochodzący od skończonego rozmiaru układu¹ bierze się wyłącznie z diagramów, dla których *dokładnie jeden* propagator posiada czynnik e^{iq^1L} lub e^{-iq^1L} . Gdy uwzględnimy tę modyfikację wszystkie diagramy liczone są używając jedynie reguł Feynmana dla nieskończonego L .

Klasyfikacja wszystkich diagramów, które będą dawały wiodący wkład do zmiany energii własnej dla cząstki typu a może być znaleziona w [24]. Są trzy klasy takich diagramów, które prezentujemy na rysunku Rys. 3.2.

Stosując reguły Feynmana możemy zapisać zmianę energii własnej jako sumę trzech wyrażeń

$$\Sigma_L = \frac{1}{2} \left(\sum_{bc} I_{abc} + \sum_{bc} J_{abc} + \sum_b K_{ab} \right), \quad (3.15)$$

które dane są następującymi wzorami

$$\begin{aligned} I_{abc} &= (-1)^{F_b} \int \frac{d^2\mathbf{q}}{(2\pi)^2} (e^{-iq^1L} + e^{iq^1L}) G_b(\mathbf{q}) G_c(\mathbf{q} + \mathbf{p}) \times \\ &\quad \times \Gamma_{abc}(-\mathbf{p}, -\mathbf{q}, \mathbf{p} + \mathbf{q}) \Gamma_{acb}(\mathbf{p}, -\mathbf{p} - \mathbf{q}, \mathbf{q}), \\ J_{abc} &= (-1)^{F_b} \int \frac{d^2\mathbf{q}}{(2\pi)^2} (e^{-iq^1L} + e^{iq^1L}) G_b(\mathbf{q}) \Gamma_{bbc}(\mathbf{q}, -\mathbf{q}, \mathbf{0}) G_c(\mathbf{0}) \Gamma_{aac}(-\mathbf{p}, \mathbf{p}, \mathbf{0}), \end{aligned} \quad (3.16)$$

¹Diagramy, dla których wszystkie propagatory posiadają czynniki z $n = 0$ są częścią energii w nieskończonej objętości.

oraz

$$K_{ab} = (-1)^{F_b} \int \frac{d^2\mathbf{q}}{(2\pi)^2} (e^{-iq^1 L} + e^{iq^1 L}) G_b(\mathbf{q}) \Gamma_{aabb}(\mathbf{p}, -\mathbf{p}, \mathbf{q}, -\mathbf{q}), \quad (3.17)$$

gdzie przez Γ oznaczyliśmy 3- jak i 4-punktowe funkcje wierzchołkowe. Czynniki $(-1)^{F_b}$ jest równy 1, jeśli cząstka b jest bozonem oraz -1 , gdy jest fermionem.

W celu obliczenia powyższych całek wykorzystamy fakt, że jesteśmy zainteresowani tylko przypadkiem, w którym obwód cylindra jest bardzo duży. Powoduje to, że za każdym razem, gdy napotkamy wyrażenie postaci e^{-aL} dla dodatniego a , przyczynę do ostatecznego wyniku pochodzący od tego wyrażenia będzie zaniedbywalnie mały w stosunku do wyrażenia postaci e^{-bL} z $b < a$. Dzięki temu, będziemy mogli zaniedbać go w dalszych rachunkach. Oryginalny pomysł Lüschera polega na tym, aby przesunąć kontur całkowania względem zmiennej q^1 w górę lub w dół w zależności od tego, czy rozpatrujemy całkę zawierającą $e^{iq^1 L}$ czy $e^{-iq^1 L}$. Dla ustalenia uwagi skoncentrujemy się na razie na pierwszym typie całek. Po pierwsze, musimy się zastanowić jak wybrać kontur całkowania tak, aby całka była dobrze określona, tzn. skończona. Łatwo zauważyć, że poprawnym wyborem jest zamknięcie konturu powyżej osi rzeczywistej i zorientowanie go w kierunku przeciwnym do kierunku wskazówek zegara (wybór konturu obrazuje Rys. 3.3). Teraz, możemy przesunąć tak otrzymany kontur w górę płaszczyzny zespolonej tak, aby część urojona q^1 była postaci $\Im(q^1) = \kappa > 0$. Wtedy

$$e^{iq^1 L} = e^{i(\Re(q^1) + i\Im(q^1))L} = e^{-\kappa L} e^{i\Re(q^1)L} \quad (3.18)$$

jest eksponencjalnie tłumione. Musimy jednak pamiętać, że w czasie przesuwania konturu możemy przekroczyć położenie biegunów funkcji podcałkowych i, jeśli tak się zdarzy, musimy uwzględnić dodatkowe wkłady pochodzące od residuów policzonych w tych biegunach. W naszych rozważaniach będziemy podobnie jak Lüscher zakładać, że jedynymi biegunami, które przekroczymy będą te pochodzące od propagatorów $G(\mathbf{p})$. W celu znalezienia położenia tych biegunów musimy rozwiązać (względem q_*) równanie:

$$(q^0)^2 + \varepsilon^2(q_*) = 0. \quad (3.19)$$

Jeśli jako przykład weźmiemy teorię relatywistyczną, to znajdziemy dwa (czysto urojone) rozwiązania równania (3.19), z których jedno leży nad osią rzeczywistą, a drugie pod osią rzeczywistą

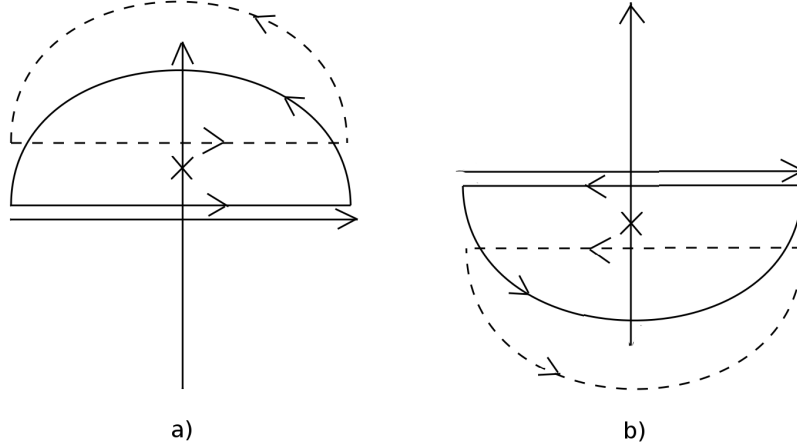
$$(q^0)^2 + m^2 + (q_*)^2 = 0 \iff q_*^\pm = \pm i \sqrt{(q^0)^2 + m^2}. \quad (3.20)$$

Podobnie możemy znaleźć położenie bieguna dla teorii superstrun na $AdS_5 \times S^5$, dla której relacja dyspersji dana jest wzorem $\varepsilon(p) = \sqrt{1 + 16g^2 \sin^2(\frac{p}{2})}$. W tym przypadku dostaniemy

$$q_*^\pm = \pm 2i \operatorname{arcsinh} \frac{\sqrt{1 + (q^0)^2}}{4g}. \quad (3.21)$$

Ponownie w tym przypadku można zauważyć, że bieguny leżą na osi urojonej (i po przeciwnych stronach osi rzeczywistej). Sytuacja ta jest generyczna dla relacji dyspersji danej wzorem (3.3). Spróbujmy znaleźć ogólne rozwiązanie równania (3.19)

$$\varepsilon^2(q_*) = - (q^0)^2 \iff \varepsilon(q_*) = \pm i q^0. \quad (3.22)$$



Rysunek 3.3: Wybór konturów dla całek (względem q^1) występujących we wzorach (3.16). Rysunek a) przedstawia wybór dla składników zawierających wyrażenie e^{iq^1L} , natomiast rysunek b) dla tych, które mają e^{-iq^1L} . Na obu rysunkach krzyżykiem zaznaczone jest położenie biegunów funkcji $G_a(\mathbf{p})$, które należy wziąć pod uwagę w rachunkach po przesunięciu konturu całkowania.

Posiłkując się szczególnymi przypadkami rozważanymi powyżej założymy, że funkcja odwrotna do funkcji $\varepsilon(p)$ istnieje oraz że jest ona funkcją dwuwartościową na płaszczyźnie zespolonej. Będziemy ją oznaczać przez $\varepsilon^{-1}(x)$. Poza tym jej argument występuje tylko w kwadracie, dlatego też możemy wybrać dowolny znak z prawej strony równości (3.22) i zapisać ogólne rozwiązanie w postaci

$$q_\star^\pm = \pm \varepsilon^{-1}(iq^0). \quad (3.23)$$

Dodatkowo zdefiniujemy funkcję²

$$\tilde{\varepsilon}(q) = -i\varepsilon^{-1}(iq). \quad (3.24)$$

Funkcja $\tilde{\varepsilon}(q)$ została tak wybrana, aby dla $q \in \mathbb{R}$ przyjmowała wartości dodatnie. Dla celów przyszłych obliczeń zapiszemy jeszcze relację pomiędzy q_\star^\pm a $\tilde{\varepsilon}(q)$, która ma postać

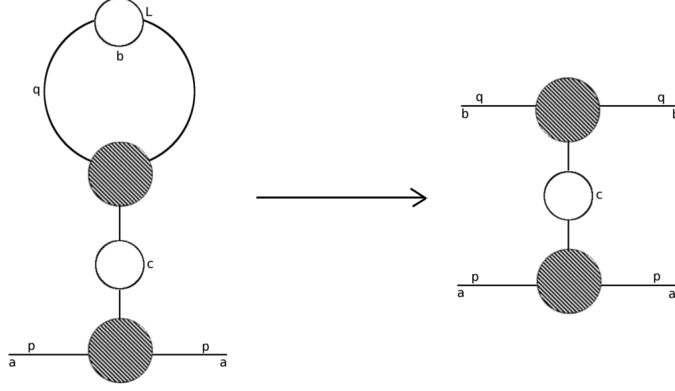
$$\tilde{\varepsilon}(q) = \mp iq_\star^\pm. \quad (3.25)$$

Wybór konturów całkowania oraz położenie biegunów można znaleźć na Rys. 3.3.

Wróćmy do wyrażenia na poprawkę do energii własnej (3.16) i zobaczymy jaki wpływ na wyrażenia tam występujące będzie miało przesunięcie konturu całkowania. W dalszej części rozdziału zajmiemy się pozostałymi składnikami, ale na początku prześledźmy wyrażenie, które pojawia się we wzorze na J_{abc}

$$(\diamond) = \int \frac{d^2\mathbf{q}}{(2\pi)^2} e^{iq^1L} G_b(\mathbf{q}) \Gamma_{bbc}(\mathbf{q}, -\mathbf{q}, \mathbf{0}) G_c(\mathbf{0}) \Gamma_{aac}(-\mathbf{p}, \mathbf{p}, \mathbf{0}). \quad (3.26)$$

²Funkcja ta dokładnie odpowiada relacji dyspersji w teorii zwierciadlanej, którą opiszemy w kolejnym podrozdziale.



Rysunek 3.4: Graficzna reprezentacja tego, co dzieje się z diagramami Feynmana po przesunięciu konturu całkowania. Na prawym rysunku obydwie cząstki znajdują się na powłoce masy.

W czasie przesuwania konturu przekroczymy w tym przypadku dokładnie jeden biegun pochodzący od propagatora $G_b(\mathbf{q})$. Wtedy

$$(\diamond) = \int \frac{dq^0}{2\pi} i e^{iq_*^+ L} \operatorname{res}_{q^1=q_*^+} (G_b(\mathbf{q})) \Gamma_{bbc}(\mathbf{q}_*^+, -\mathbf{q}_*^+, \mathbf{0}) G_c(\mathbf{0}) \Gamma_{aac}(-\mathbf{p}, \mathbf{p}, 0), \quad (3.27)$$

gdzie zaniedbaliśmy całkę po przesuniętym konturze, gdyż, ze względu na relację $\Im q^1 > \Im q_*^+$ (tutaj q^1 jest dla przesuniętego konturu), jest ona podwiodąca względem wyrażenia pochodzącego od bieguna funkcji Greena. Dodatkowo, oznaczyliśmy $\mathbf{q}_*^+ = (q^0, q_*^+)$. Korzystając ze wzoru (3.9) na wartość residuum funkcji Greena, możemy ostatecznie napisać

$$(\diamond) = \int \frac{dq^0}{2\pi} \frac{i}{\varepsilon^2(q_*^+)' } e^{iq_*^+ L} \Gamma_{bbc}(\mathbf{q}_*^+, -\mathbf{q}_*^+, \mathbf{0}) G_c(\mathbf{0}) \Gamma_{aac}(-\mathbf{p}, \mathbf{p}, 0). \quad (3.28)$$

Powyższe matematyczne przekształcenia można zobrazować w następujący sposób: przesunięcie konturu całkowania powoduje, że pęd cząstki, który wcześniej był dowolny (cząstka biegła w zamkniętej pętli), po przesunięciu konturu musi spełniać równanie (3.19), czyli cząstka została włożona na powłokę masy. Można to zinterpretować jako "przecięcie" pętli jak zaprezentowano na Rysunku 3.4.

Przeprowadzając podobne rachunki możemy znaleźć wyrażenie, które powstanie po zmodyfikowaniu konturu całkowania dla pozostałych wyrazów pojawiających się we wzorze (3.15). Dla K_{ab} dostaniemy

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^2 \mathbf{q}}{(2\pi)^2} e^{iq^1 L} G_b(\mathbf{q}) \Gamma_{aabb}(\mathbf{p}, -\mathbf{p}, \mathbf{q}, -\mathbf{q}) \\ &= \int \frac{dq^0}{2\pi} i e^{iq_*^+ L} \operatorname{res}_{q^1=q_*^+} (G_b(\mathbf{q})) \Gamma_{aabb}(\mathbf{p}, -\mathbf{p}, \mathbf{q}_*^+, -\mathbf{q}_*^+) \\ &= \int \frac{dq^0}{2\pi} \frac{i}{\varepsilon^2(q_*^+)' } e^{iq_*^+ L} \Gamma_{aabb}(\mathbf{p}, -\mathbf{p}, \mathbf{q}_*^+, -\mathbf{q}_*^+). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Z kolei wyrażenie I_{abc} jest bardziej skomplikowane i wymaga specjalnego potraktowania. Przyczyną tego jest fakt, że w tym przypadku funkcja podcałkowa posiada dwa bieguny:

jeden pochodzi z propagatora $G_b(\mathbf{q})$ (wkład od tego bieguna będziemy oznaczać I_{abc}^+), a drugi z propagatora $G_c(\mathbf{q} + \mathbf{p})$ (wkład będziemy oznaczać I_{abc}^-). Biorąc to pod uwagę otrzymamy

$$\begin{aligned}
& \int \frac{d^2\mathbf{q}}{(2\pi)^2} e^{iq^1 L} G_b(\mathbf{q}) G_c(\mathbf{q} + \mathbf{p}) \Gamma_{abc}(-\mathbf{p}, -\mathbf{q}, \mathbf{p} + \mathbf{q}) \Gamma_{acb}(\mathbf{p}, -\mathbf{p} - \mathbf{q}, \mathbf{q}) \\
&= \int \frac{dq^0}{2\pi} i e^{iq_\star^+ L} \operatorname{res}_{q^1=q_\star^+} (G_b(\mathbf{q})) G_c(\mathbf{q}_\star^+ + \mathbf{p}) \Gamma_{abc}(-\mathbf{p}, -\mathbf{q}_\star^+, \mathbf{p} + \mathbf{q}_\star^+) \Gamma_{acb}(\mathbf{p}, -\mathbf{p} - \mathbf{q}_\star^+, \mathbf{q}_\star^+) \\
&+ \int \frac{dq^0}{2\pi} i e^{iq_\bullet^+ L} G_b(\mathbf{q}_\bullet^+) \operatorname{res}_{q^1=q_\bullet^+} (G_c(\mathbf{q} + \mathbf{p})) \Gamma_{abc}(-\mathbf{p}, -\mathbf{q}_\bullet^+, \mathbf{p} + \mathbf{q}_\bullet^+) \Gamma_{acb}(\mathbf{p}, -\mathbf{p} - \mathbf{q}_\bullet^+, \mathbf{q}_\bullet^+) \\
&= I_{abc}^+ + I_{abc}^-, \tag{3.30}
\end{aligned}$$

gdzie q_\bullet^+ jest rozwiązaniem równania

$$(q^0 + p^0)^2 + \varepsilon^2(q_\bullet + p^1) = 0, \tag{3.31}$$

leżącym powyżej osi rzeczywistej. W celu otrzymania ostatecznego wyniku, zasadna jest zmiana zmiennych w drugiej całce we wzorze (3.30) tak, aby wartość pędu, dla której funkcja Greena ma biegun, była taka sama we wszystkich całkach. W tym celu wprowadzamy zmianę zmiennych postaci $\mathbf{q}' = \mathbf{q} + \mathbf{p}$ (tylko w drugiej całce). Należy zauważyć w tym miejscu, że \mathbf{p} jest zmienną typu Minkowskiego podczas, gdy \mathbf{q} jest euklidesowa. Wynika stąd, że zmiana zmiennych dla zerowych komponentów tych wektorów ($(q')^0 = q^0 + p^0$) jest tak naprawdę przesunięciem konturu całkowania w górę lub w dół płaszczyzny zespolonej. Może to spowodować, że napotkamy nie uwzględnione do tej pory bieguny, gdy będziemy przesuwać kontur całkowania względem zmiennej q^0 . Residua obliczone w położeniu tych nowych biegunów są odpowiedzialne za pojawienie się μ -termu. Zajmiemy się nimi dokładnie w późniejszej części podrozdziału. Wróćmy jednak do zmiany współrzędnym i zobaczymy jak wpływa ona na strukturę całki I_{abc}^- (dla uproszczenia notacji pominiemy znak prim w zmienionych współrzędnych)

$$\begin{aligned}
I_{abc}^- &= \int \frac{dq^0}{2\pi} i e^{iq_\bullet^+ L} G_b(\mathbf{q}_\bullet^+) \operatorname{res}_{q^1=q_\bullet^+} (G_c(\mathbf{q} + \mathbf{p})) \Gamma_{abc}(-\mathbf{p}, -\mathbf{q}_\bullet^+, \mathbf{p} + \mathbf{q}_\bullet^+) \Gamma_{acb}(\mathbf{p}, -\mathbf{p} - \mathbf{q}_\bullet^+, \mathbf{q}_\bullet^+) \\
&= \int \frac{dq^0}{2\pi} i e^{iq_\star^+ L} G_b(\mathbf{q}_\star^+ - \mathbf{p}) \operatorname{res}_{q^1=q_\star^+} (G_c(\mathbf{q})) \Gamma_{abc}(-\mathbf{p}, \mathbf{p} - \mathbf{q}_\star^+, \mathbf{q}_\star^+) \Gamma_{acb}(\mathbf{p}, -\mathbf{q}_\star^+, \mathbf{q}_\star^+ - \mathbf{p}) \\
&+ \mu - \text{term}. \tag{3.32}
\end{aligned}$$

Ostatecznie, z I_{abc} otrzymujemy

$$\begin{aligned}
& \int \frac{dq^0}{2\pi} \frac{i}{\varepsilon^2(q_\star^+)',} e^{iq_\star^+ L} G_b(\mathbf{q}) G_c(\mathbf{q}_\star^+ + \mathbf{p}) \Gamma_{abc}(-\mathbf{p}, -\mathbf{q}_\star^+, \mathbf{p} + \mathbf{q}_\star^+) \Gamma_{acb}(\mathbf{p}, -\mathbf{p} - \mathbf{q}_\star^+, \mathbf{q}_\star^+) \\
&+ \int \frac{dq^0}{2\pi} \frac{i}{\varepsilon^2(q_\star^+)',} e^{iq_\star^+ L} G_b(\mathbf{q}_\star^+ - \mathbf{p}) \Gamma_{abc}(-\mathbf{p}, \mathbf{p} - \mathbf{q}_\star^+, \mathbf{q}_\star^+) \Gamma_{acb}(\mathbf{p}, -\mathbf{q}_\star^+, \mathbf{q}_\star^+ - \mathbf{p}) \\
&+ \mu - \text{term}. \tag{3.33}
\end{aligned}$$

Jak do tej pory zajmowaliśmy się jedynie całkami, w których mieliśmy czynniki postaci $e^{iq^1 L}$. Okazuje się, że jeśli weźmiemy te zawierające $e^{-iq^1 L}$, to wynik będzie dokładnie

sprężeniem zespolonym wyniku otrzymanego wcześniej. Prześledźmy to na przykładzie najprostszej z całek – K_{ab} . Musimy pamiętać, że w tym przypadku należy zamknąć kontur całkowania poniżej osi rzeczywistej, aby otrzymać skończony wynik (patrz Rys. 3.3). Skutkiem tego jest fakt, że musimy zorientować nasz kontur przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, co powoduje pojawienie się dodatkowego znaku minus przez całkę. Ponadto, aby otrzymać zanedbywalnie małą całkę, musimy zmodyfikować kontur całkowania przesuwając go w dół. W ten sposób biegunem, którego położenie przekroczyliśmy, będzie q_\star^- , a nie q_\star^+ , jak w poprzednim przypadku. Prześledźmy, krok po kroku, jak wyglądają dokładne obliczenia

$$\begin{aligned}
& \int \frac{d^2\mathbf{q}}{(2\pi)^2} e^{-iq^1 L} G_b(\mathbf{q}) \Gamma_{bbc}(\mathbf{q}, -\mathbf{q}, \mathbf{0}) G_c(\mathbf{0}) \Gamma_{aac}(-\mathbf{p}, \mathbf{p}, \mathbf{0}) \\
&= - \int \frac{dq^0}{2\pi} i e^{-iq_\star^- L} \operatorname{res}_{q^1=q_\star^-} (G_b(\mathbf{q})) \Gamma_{bbc}(\mathbf{q}_\star^-, -\mathbf{q}_\star^-, \mathbf{0}) G_c(\mathbf{0}) \Gamma_{aac}(-\mathbf{p}, \mathbf{p}, \mathbf{0}) \\
&= - \int \frac{dq^0}{2\pi} \frac{i}{\varepsilon^2(q_\star^-)'} e^{-iq_\star^- L} \Gamma_{bbc}(\mathbf{q}_\star^-, -\mathbf{q}_\star^-, \mathbf{0}) G_c(\mathbf{0}) \Gamma_{aac}(-\mathbf{p}, \mathbf{p}, \mathbf{0}) \\
&= \dots
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Pamiętając o tym, że $q_\star^- = \overline{q_\star^+}$ jest liczbą czysto urojoną (czyli $iq_\star^+ L$ jest rzeczywiste) oraz, że \mathbf{p} jest rzeczywiste możemy zapisać

$$\begin{aligned}
\dots &= \int \frac{dq^0}{2\pi} \overline{\left(\frac{i}{\varepsilon^2(q_\star^+)'} \right)} e^{iq_\star^+ L} \overline{\Gamma_{bbc}(\mathbf{q}_\star^+, -\mathbf{q}_\star^+, \mathbf{0})} G_c(\mathbf{0}) \Gamma_{aac}(-\mathbf{p}, \mathbf{p}, \mathbf{0}) \\
&= \overline{(3.28)},
\end{aligned} \tag{3.35}$$

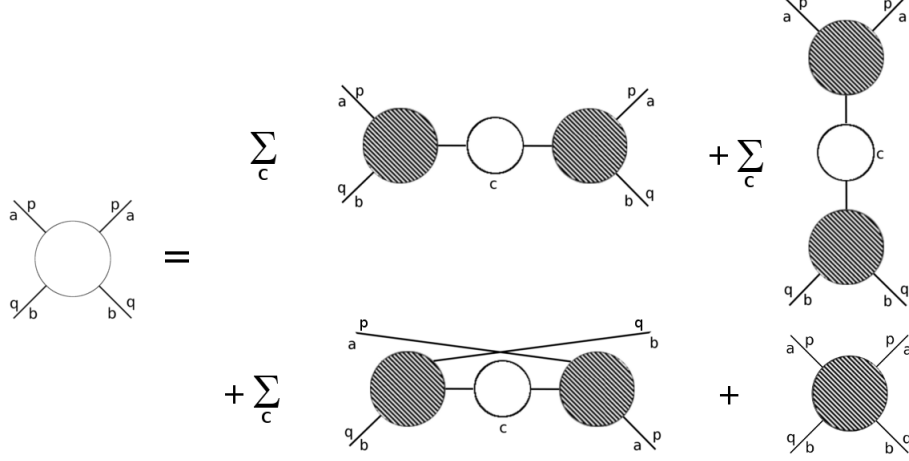
czyli tak, jak już wspominaliśmy, otrzymujemy sprzężenie zespolone poprzedniego wyniku. Identyczna sytuacja będzie miała miejsce w przypadku całek występujących w I_{abc} oraz J_{abc} . W celu uzyskania ostatecznego wyniku, jedyne co pozostało do zrobienia, to dodanie do siebie wszystkich do tej pory znalezionych wyników częściowych. Wzór na modyfikację energii własnej ma wtedy postać

$$\Sigma_L = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \Re \left(\int \frac{dq^0}{2\pi} \frac{i}{\varepsilon^2(q_\star^+)'} \cdot e^{iq_\star^+ L} \cdot \operatorname{Int}(\mathbf{q}_\star^+, \mathbf{p}) \right), \tag{3.36}$$

gdzie funkcja podcałkowa wyraża się wzorem

$$\begin{aligned}
\operatorname{Int}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) &= \sum_{bc} (-1)^{F_b} \left(\Gamma_{abc}(-\mathbf{p}, -\mathbf{q}, \mathbf{p} + \mathbf{q}) G_c(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \Gamma_{acb}(\mathbf{p}, -\mathbf{p} - \mathbf{q}, \mathbf{q}) \right. \\
&+ \Gamma_{acb}(-\mathbf{p}, \mathbf{p} - \mathbf{q}, \mathbf{q}) G_c(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \Gamma_{abc}(\mathbf{p}, -\mathbf{q}, \mathbf{q} - \mathbf{p}) \\
&+ \Gamma_{aac}(\mathbf{p}, -\mathbf{p}, \mathbf{0}) G_c(\mathbf{0}) \Gamma_{bbc}(\mathbf{q}, -\mathbf{q}, \mathbf{0}) \\
&\left. + \Gamma_{aabb}(\mathbf{p}, -\mathbf{p}, \mathbf{q}, -\mathbf{q}) \right).
\end{aligned} \tag{3.37}$$

W powyższym wzorze zarówno \mathbf{p} jak i \mathbf{q} znajdują się na powłoce masy. Kluczową obserwacją jest teraz, że funkcja podcałkowa występująca we wzorze (3.37) jest po prostu 4-punktową, amputowaną, spójną funkcją Greena pomiędzy dwiema cząstkami znajdującymi się na powłoce masy (patrz Rys. 3.5).



Rysunek 3.5: Rozwinięcie 4-punktowej funkcji Greena.

Możemy więc napisać

$$\Sigma_L = \Re \left(\int \frac{dq^0}{2\pi} \frac{i}{\varepsilon^2(q_\star^+)' } \cdot e^{iq_\star^+ L} \cdot \sum_b (-1)^{F_b} G_{abab}(-\mathbf{p}, -\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) \right). \quad (3.38)$$

W celu uzyskania ostatecznego wyniku musimy znaleźć zależność pomiędzy tą funkcją Greena a macierzą rozpraszania naszej teorii.

3.1.3 Zależność między funkcją Greena a macierzą \mathcal{S}

Zasadniczo, 4-punktowa funkcja Greena różni się od macierzy \mathcal{S} jedynie normalizacją. W tym paragrafie przyglądnijmy się dokładniej, jaka jest normalizacja obu wielkości, co pozwoli nam napisać ostateczny wzór na wiodącą poprawkę do energii, pochodzącą od skończonego rozmiaru, używając jedynie wielkości asymptotycznych.

Zdefiniujmy iloczyn skalarny pomiędzy stanami asymptotycznymi w analogii do przypadku relatywistycznego jako

$$\langle b(\mathbf{p}') | a(\mathbf{p}) \rangle = \delta_{ab} 2p^0 \cdot 2\pi \delta(p^{1'} - p^1). \quad (3.39)$$

Macierz rozpraszania zdefiniowana jest jako iloczyn skalarny pomiędzy dwoma stanami dwucząsteczkowymi będącymi na powłoce masy (dwie cząsteczki w kanale wejściowym oraz dwie w kanale wyjściowym) z wydzieloną normalizacją (3.39)

$$\begin{aligned} {}_{out} \langle b(\mathbf{q}') a(\mathbf{p}') | b(\mathbf{q}) a(\mathbf{p}) \rangle_{in} &= 4p^0 q^0 (2\pi)^2 \delta(p^{1'} - p^1) \delta(q^{1'} - q^1) \mathcal{S}_{ba}^{ba}(q^1, p^1) \\ &\equiv \delta_{fi} \mathcal{S}_{ba}^{ba}(q^1, p^1). \end{aligned} \quad (3.40)$$

Z drugiej strony, funkcję Greena $G_{abab}(-\mathbf{p}, -\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$ utożsamiamy z amplitudą elastycznego rozpraszania $T_{ab}(\mathbf{p}, \mathbf{q} | \mathbf{p}, \mathbf{q})$, która jest zdefiniowana w następujący sposób

$${}_{out} \langle b(\mathbf{q}') a(\mathbf{p}') | b(\mathbf{q}) a(\mathbf{p}) \rangle_{in} = \delta_{fi} + i(2\pi)^2 \delta^{(2)}(\mathbf{p}' + \mathbf{q}' - \mathbf{p} - \mathbf{q}) T_{ab}(\mathbf{p}, \mathbf{q} | \mathbf{p}, \mathbf{q}). \quad (3.41)$$

W celu wyznaczenia zależności pomiędzy amplitudą rozpraszania T oraz macierzą \mathcal{S} jedyne, co musimy znaleźć, to postać jacobianu przejścia pomiędzy deltami występującymi we wzorach (3.40) i (3.41). Zależność między tymi deltami dana jest przez

$$\delta^{(2)}(\mathbf{p}' + \mathbf{q}' - \mathbf{p} - \mathbf{q}) = \frac{1}{\varepsilon'(p^1) - \varepsilon'(q^1)} \cdot \delta(p^{1'} - p^1) \delta(q^{1'} - q^1). \quad (3.42)$$

Wzór powyższy możemy uzyskać w następujący sposób: Ustalmy \mathbf{p} oraz \mathbf{q} i potraktujmy delty Diraca występujące w równości (3.42) jako dystrybucje względem zmiennych primowanych. Lewą stronę równania możemy zapisać jako

$$\delta^{(2)}(\mathbf{p}' + \mathbf{q}' - \mathbf{p} - \mathbf{q}) = \delta(p^{1'} + q^{1'} - p^1 - q^1) \delta(\varepsilon(p^{1'}) + \varepsilon(q^{1'}) - \varepsilon(p^1) - \varepsilon(q^1)). \quad (3.43)$$

Zmiana zmiennych, z którą mamy do czynienia w równości (3.42), jest zmianą pomiędzy zmiennymi $(p^{1'}, q^{1'})$ (z prawej strony równości) a zmiennymi $(\varepsilon(p^{1'}) + \varepsilon(q^{1'}), p^{1'} + q^{1'})$ (z lewej strony równości). Macierz przejścia między tymi dwiema bazami ma postać

$$\begin{bmatrix} \varepsilon'(p^{1'}) & \varepsilon'(q^{1'}) \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.44)$$

a jacobian przejścia, będący wyznacznikiem tej macierzy, wynosi $\varepsilon'(p^{1'}) - \varepsilon'(q^{1'})$. Daje to nam wzór (3.42).

Łącząc wszystkie fakty dostajemy zależność pomiędzy 4-punktową funkcją Greena a macierzą \mathcal{S} w postaci

$$G_{abab}(-\mathbf{p}, -\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = -4i\varepsilon(p^1)\varepsilon(q^1) (\varepsilon'(q^1) - \varepsilon'(p^1)) [\mathcal{S}_{ba}^{ba}(q^1, p^1) - 1]. \quad (3.45)$$

3.1.4 Ostateczne wzory na poprawkę

Wstawiając (3.45) do wzoru (3.38), a następnie tak otrzymany wynik do (3.14), otrzymujemy ostateczny wzór na poprawkę do energii własnej dla cząstki typu a o pędzie p pochodząca od uogólnionego F-termu jako

$$\delta\varepsilon_a^F(p) = -\Re \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \left(1 - \frac{\varepsilon'(p)}{\varepsilon'(q_*)} \right) \cdot e^{iq_*L} \cdot \sum_b (-1)^{F_b} (\bar{\mathcal{S}}_{ba}^{ba}(q, p) - 1) \right), \quad (3.46)$$

gdzie wprowadziliśmy oznaczenie na macierz rozpraszania pomiędzy cząstką fizyczną, a cząstką wirtualną

$$\bar{\mathcal{S}}_{ba}^{ba}(q, p) = \mathcal{S}_{ba}^{ba}(q_*, p). \quad (3.47)$$

We wzorze (3.46) zmienna q jest energią euklidesową³, $\varepsilon(p)$ jest relacją dyspersji, natomiast q_* jest zdeterminowane jako rozwiązanie (z dodatnim znakiem) warunku leżenia na powłoce masy

$$q^2 + \varepsilon^2(q_*) = 0. \quad (3.48)$$

Zanim przejdziemy do obliczenia wyrażenia na μ -term, skorzystamy z relacji (3.25) w celu przepisania wzoru (3.46) z użyciem funkcji $\tilde{\varepsilon}(q)$

$$\delta\varepsilon_a^F(p) = -\Re \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \left(1 - \frac{\varepsilon'(p)}{\varepsilon'(i\tilde{\varepsilon}(q))} \right) \cdot e^{-L\tilde{\varepsilon}(q)} \cdot \sum_b (-1)^{F_b} (\bar{\mathcal{S}}_{ba}^{ba}(q, p) - 1) \right). \quad (3.49)$$

³która odgrywa rolę pędu w teorii zwierciadlanej.

Postaramy się teraz także otrzymać poprawkę do energii pochodzącą od uogólnionego μ -termu. W trakcie wyprowadzania wzoru (3.46) przesuwaliliśmy kontur związany z całkowaniem po zmiennej pędowej q^1 , jednocześnie przekraczając bieguny funkcji Greena, co zredukowało wyjściową całkę podwójną do całki pojedynczej. Spowodowało to między innymi, że niektóre cząstki biegnące w pętłach rozpatrywanych diagramów zostały włożone na powłokę masy. Należy jednak pamiętać, że w tym procesie napotkaliśmy na pewną subtelność. Mianowicie, dla grafu I_{abc}^- warunek masowy był inny niż dla pozostałych grafów, co zostało skompensowane dodatkowym przesunięciem także drugiego konturu całkowania, stowarzyszonego z całkowanie po zmiennej q^0 . W czasie tego procesu mogliśmy przekroczyć położenie dodatkowego bieguna, który jest biegunem macierzy \mathcal{S} . Residuum obliczone w tym biegunie definiuje uogólniony μ -term

$$\delta\varepsilon_a^\mu(p) = -\Re \left(i \left(1 - \frac{\varepsilon'(p)}{\varepsilon'(i\tilde{\varepsilon}(\bar{q}))} \right) \cdot e^{-L\tilde{\varepsilon}(\bar{q})} \cdot \operatorname{res}_{q=\bar{q}} \sum_b (-1)^{F_b} \bar{\mathcal{S}}_{ba}^{ba}(q, p) \right). \quad (3.50)$$

W późniejszej części pracy użyjemy wzorów (3.49) oraz (3.50) do znalezienia wiodącej poprawki energetycznej w silnym sprzężeniu dla tzw. wielkich magnonów w teorii superstrun określonej na przestrzeni $AdS_5 \times S^5$.

3.1.5 Przypadek teorii relatywistycznej

Rozpatrzmy teraz, jak wzór na uogólniony F-term redukuje się, gdy podstawimy relatywistyczną relację dyspersji. W celu porównania wyniku ze znanymi z klasycznej teorii wprowadzimy zmienną θ zdefiniowaną przez

$$q(\theta) = i \cosh\left(\theta + i\frac{\pi}{2}\right). \quad (3.51)$$

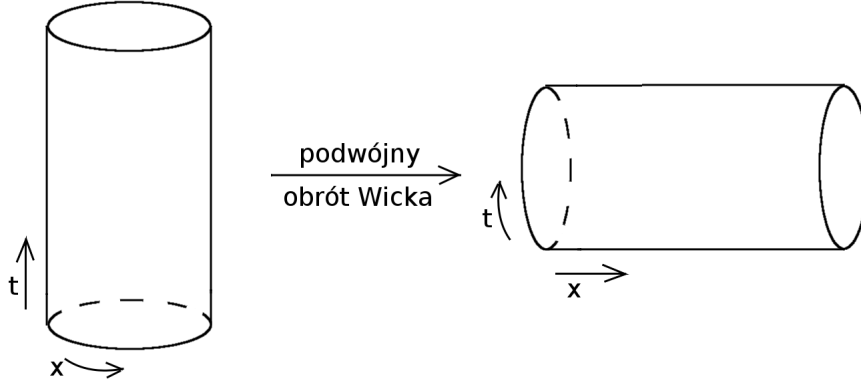
Rozwiązując równanie powłoki masy możemy znaleźć $\tilde{\varepsilon}(q)$ jako funkcję zmiennej θ

$$\tilde{\varepsilon}(\theta) = -i \sinh\left(\theta + i\frac{\pi}{2}\right) = \cosh(\theta). \quad (3.52)$$

Poza tym możemy wyznaczyć pochodną relacji dyspersji, która wyraża się wzorem $\varepsilon'(p) = \frac{p}{\varepsilon(p)} = \operatorname{tgh} \theta_p$. Wstawiając te wyrażenia do wzoru na F-term i używając prostych zależności na funkcje hiperboliczne można znaleźć, że

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon_{\text{relativistic}}^F(\theta_p) &= -\frac{1}{\cosh \theta_p} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta}{2\pi} \cosh(\theta - \theta_p) \cdot e^{-L \cosh \theta} \times \\ &\quad \times \sum_b (-1)^{F_b} \left(\mathcal{S}_{ba}^{ba}\left(\theta + i\frac{\pi}{2} - \theta_p\right) - 1 \right), \end{aligned} \quad (3.53)$$

co dokładnie pokrywa się z wzorem z [39]. Jeśli dodatkowo weźmiemy cząstkę spoczywającą, tzn. taką, dla której $\theta_p = 0$, to otrzymamy klasyczny wzór (3.1) na poprawkę do energii (masy) cząstki, pochodzącą od skończonych rozmiarów układu, który Lüscher dostał w swojej oryginalnej pracy [24].



Rysunek 3.6: Zależność pomiędzy oryginalną teorią i teorią do niej zwierciadlaną.

3.2 Poprawki Lüschera dla wielu wzbudzeń

W wyprowadzeniu wzorów Lüschera dla pojedynczego wzbudzenia nie zakładaliśmy niczego o rozpatrywanej teorii na cylindrze. Wyprowadzenie poprawek dla wielu wzbudzeń będzie możliwe, jeśli dołożymy dodatkowe założenie – ograniczymy się do teorii całkowalnych. W celu wyprowadzenia poprawek Lüschera dla stanów wielocząstkowych będziemy musieli najpierw zrozumieć, jak można znaleźć dokładne spektrum dla dwuwymiarowych całkowalnych kwantowych teorii pola na cylindrze. W literaturze znane są trzy niezależne drogi na zrobienie tego: używając Termodynamicznego Ansatzu Bethego (TBA) [28], wyprowadzając równania typu Destriego- de Vegi [42] lub też znajdując równania funkcyjne [43]. My skoncentrujemy się jak na razie tylko na pierwszym podejściu.

Celem Termodynamicznego Ansatzu Bethego w jego oryginalnej formie jest policzenie energii stanu podstawowego $E_0(L)$ dla całkowalnego modelu na cylindrze o średnicy L . Energia ta może być znaleziona z euklidesowej funkcji rozdziału

$$E_0 = - \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \log Z(R, L). \quad (3.54)$$

Bezpośrednie obliczenie tej funkcji w teorii z oddziaływaniem, nawet jeśli jest ona całkowalna, jest bardzo skomplikowane ze względu na wkład od wirtualnych cząstek biegnących dookoła cylindra i oddziałujących między sobą. Pomysł na obejście tych trudności polega na tym, żeby tę samą funkcję rozdziału policzyć zamieniając znaczenie pojęć czasu i przestrzeni. Oznacza to, że będziemy traktować R jako wielkość przestrzenną podczas, gdy L oznaczać będzie skompaktyfikowany czas lub, innymi słowy, odwrotność temperatury. Teorię z zamienionymi czasem i przestrzenią nazywać będziemy *teorią zwierciadlaną* względem wyjściowej teorii [44]. Na Rys. 3.6 przedstawiona jest graficznie zależność pomiędzy oryginalną teorią a teorią zwierciadlaną. W teorii zwierciadlanej nie mamy komplikacji pochodzących od wirtualnych cząstek, ponieważ kierunek przestrzenny jest nieskończony i możemy z powodzeniem użyć Asymptotycznego Ansatzu Bethego, który w tym przypadku staje się dokładny.

W dalszej części rozdziału pokażemy, krok po kroku, jak przebiega oryginalne wyprowadzenie równań Termodynamicznego Ansatzu Bethego dla przypadku teorii z jednym rodzajem cząstek w spektrum. Na początek podamy wyprowadzenie dla stanu podstawowego

wego, a następnie, poprzez odpowiednie przedłużenie analityczne, podamy wynik także dla stanów wzbudzonych. Na koniec uogólnimy tak otrzymaną odpowiedź na przypadek całkowalnej teorii z dowolną ilością cząstek w spektrum. Dodatkowo, dla prostoty wyprowadzenia będziemy zakładać, że w naszej teorii nie ma stanów związanych i jedyny wkład pochodzący od wirtualnych cząstek dają wzbudzenia elementarne. Na samym końcu będziemy także w stanie dołożyć stany związane do naszej teorii. Oryginalnie wyprowadzenie, które tutaj zaprezentujemy znajduje się w pracy [A2].

3.2.1 TBA dla stanu podstawowego

Punktem startowym do wyprowadzenia równań Termodynamicznego Ansatzu Bethego jest rozważenie Asymptotycznego Ansatzu Bethego w teorii zwierciadlanej. W celu odróżnienia od pędów teorii oryginalnej, które będziemy oznaczać przez p , będziemy oznaczać pędy w teorii zwierciadlanej poprzez \tilde{p} . Na początku skoncentrujemy się na teorii, która posiada jeden rodzaj cząstek, rozpraszanie których opisane jest przez macierz $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)^4$.

W teorii zwierciadlanej Asymptotyczny Ansatz Bethego przyjmuje postać

$$e^{i\tilde{p}_j R} = \prod_{k \neq j}^M \mathcal{S}(\tilde{p}_j, \tilde{p}_k), \quad j = 1, \dots, M, \quad (3.55)$$

gdzie przez M oznaczyliśmy ilość cząstek, które bierzemy pod uwagę. Standardowym podejściem w TBA jest zainteresowanie jedynie granicą termodynamiczną. Wynika to z faktu, że chcemy wyliczyć wartość energii stanu podstawowego za pomocą wzoru (3.54). Wielkością, którą będziemy badać będzie energia swobodna, w której fizyczny rozmiar cylindra L odgrywać będzie rolę odwrotności temperatury. Granica termodynamiczna oznacza w tym przypadku wzięcie granicy $R \rightarrow \infty$ oraz $M \rightarrow \infty$ tak, aby $0 \ll \frac{M}{R}$. Równanie (3.55) może być rozwiązane dla dowolnej wartości R oraz M i jego rozwiązanie daje jako pewien zbiór $\{\tilde{p}_j\}_{j=1, \dots, M}$. Z każdym elementem tego zbioru można utożsamić liczbę z należącą do krzywej algebraicznej zmiennej rapidity⁵, co pozwala nam parametryzować rozwiązania za pomocą liczb zespolonych $p = p(z)$. Rozwiązując równanie (3.55) dla dużych wartości R można zauważyć, że rozwiązania zaczynają układać się na krzywej algebraicznej w charakterystyczne kształty, nazywane w literaturze strunami. Ponadto, odległości pomiędzy elementami zbioru rozwiązań zaczynają robić się coraz mniejsze wraz ze wzrostem wartości R . Powoduje to, że w granicy termodynamicznej możemy opisać rozmieszczenie tych pierwiastków poprzez wprowadzenie ciągłych gęstości pierwiastków $\rho(z)$. Dodatkowo, dla konkretnego rozwiązania równania (3.55), pewne dozwolone położenia rozwiązań równania (3.55) nie będą obsadzone. W granicy termodynamicznej te nieobsadzone pierwiastki także mogą być opisane przez pewną ciągłą gęstość, którą będziemy nazywać gęstością dziur i oznaczać $\rho_h(z)$.

Naszym celem jest obecnie znalezienie zależności pomiędzy gęstością pierwiastków a gęstością dziur. Będziemy potrzebowali dwóch takich zależności, z których jedna pochodząca będzie z rozpatrzenia granicy termodynamicznej równań ABA, natomiast druga

⁴W tym przypadku macierz \mathcal{S} jest po prostu funkcją skalarną.

⁵Patrz Dodatek A, gdzie wprowadzone zostało pojęcie krzywej algebraicznej zmiennej rapidity dla teorii relatywistycznych oraz teorii superstrun zdefiniowanej na przestrzeni $AdS_5 \times S^5$. Zostały tam także wytłumaczone podstawowe ich własności.

będzie wynikiem minimalizacji energii swobodnej. Zaczniemy od przekształcenia równań ABA do postaci odpowiedniej do analizy granicy termodynamicznej. W tym celu weźmy logarytm z równości (3.55)

$$\tilde{p}_j R = \frac{1}{i} \sum_{k \neq j}^M \log \mathcal{S}(\tilde{p}_j, \tilde{p}_k) + 2\pi n_j, \quad (3.56)$$

gdzie liczba n_j , zwana numerem modu, jest całkowita i bierze się z dowolności wyboru cięcia logarytmu. Jeśli przyjrzymy się dowolnemu rozwiązaniu równania (3.55), to zauważymy, że odpowiada ono pewnemu konkretnemu zbiorowi $\{n_j\}_j$. Zbiór ten definiuje tzw. "obsadzone pierwiastki". Dla konkretnego rozwiązania pewne numery modów nie są obsadzone. To właśnie one definiować będą gęstość dziur.

Zapisując równość (3.56) przy pomocy zmiennej na krzywej algebraicznej, a następnie różniczkując względem z i zapisując sumę jako całkę otrzymujemy

$$2\pi \frac{dn(z)}{dz} = R\tilde{p}'(z) - \frac{1}{i} \int dz' (\partial_z \log \mathcal{S}(\tilde{p}(z), \tilde{p}(z'))) \rho(z'), \quad (3.57)$$

gdzie pochodną z numeru modu można zapisać jako sumę gęstości pierwiastków i gęstości dziur. Ostatecznie dostajemy pierwszą z relacji pomiędzy $\rho(z)$ a $\rho_h(z)$:

$$\begin{aligned} 2\pi (\rho(z) + \rho_h(z)) &= R\tilde{p}'(z) - \frac{1}{i} \int dz' (\partial_z \log \mathcal{S}(\tilde{p}(z), \tilde{p}(z'))) \rho(z') \\ &\equiv R\tilde{p}'(z) - \phi * \rho, \end{aligned} \quad (3.58)$$

gdzie $*$ oznacza splot dwóch funkcji. W celu otrzymania drugiego równania wiążącego obie gęstości, musimy zminimalizować energię swobodną f , która dana jest poprzez

$$-RLf \equiv -LH + \mathbf{S} = -L \int dz \tilde{\epsilon}(z) \rho(z) + \mathbf{S}[\rho, \rho_h], \quad (3.59)$$

gdzie przez $\tilde{\epsilon}(z)$ oznaczyliśmy energię w teorii zwierciadlanej podczas, gdy entropia dana jest wzorem

$$\mathbf{S}[\rho, \rho_h] = \int dz \{(\rho + \rho_h) \log(\rho + \rho_h) - \rho \log \rho - \rho_h \log \rho_h\}. \quad (3.60)$$

W celu uproszczenia dalszych wyników, okazuje się, że wygodnym jest wprowadzenie tzn. pseudoenergii $\epsilon(z)$, która dana jest poprzez gęstości relacją

$$\frac{\rho}{\rho + \rho_h} = \frac{e^{-\epsilon}}{1 + e^{-\epsilon}}. \quad (3.61)$$

W wyniku minimalizacji energii swobodnej, przy jednoczesnym wzięciu pod uwagę relacji

$$\delta\rho + \delta\rho_h = -\frac{1}{2\pi} \phi * \delta\rho, \quad (3.62)$$

pochodzącej z wariacji równania (3.58), otrzymujemy ostateczną postać równania TBA

$$\epsilon(z) = L\tilde{\epsilon}(z) + \int \frac{dw}{2\pi} \phi(w, z) \log(1 + e^{-\epsilon(w)}). \quad (3.63)$$

Możemy teraz obliczyć termodynamiczną energię swobodną w teorii zwierciadlanej, która daje nam energię stanu podstawowego w oryginalnej teorii w temperaturze zerowej, ale w skończonej objętości

$$E_0 = Lf = - \int \frac{dz}{2\pi} \tilde{p}'(z) \log(1 + e^{-\epsilon(z)}) . \quad (3.64)$$

Wiodące rozwinięcie w L dla stanu podstawowego możemy otrzymać wstawiając wyrażenie na pseudoenergię do wzoru (3.64), a następnie zachowując tylko wiodące człony. Dane jest ono poprzez

$$E_0^{l.o.} = - \int \frac{dz}{2\pi} \tilde{p}'(z) e^{-L\tilde{\epsilon}(z)} = - \int \frac{d\tilde{p}}{2\pi} e^{-L\tilde{\epsilon}(\tilde{p})} . \quad (3.65)$$

3.2.2 TBA dla stanów wzbudzonych

Rachunek przeprowadzony w poprzednim rozdziale daje odpowiedź na pytanie o postać równań Termodynamicznego Ansatzu Bethego jedynie dla stanu podstawowego. Początkowo, gdy metoda ta została znaleziona, była to jedyna informacja, jaką można było uzyskać. Przez długi czas nie było jasne, jak można uzyskać podobne równania dla stanów wzbudzonych w skończonej objętości. Sytuacja zmieniła się, gdy w [45] autorzy zaproponowali sposób znalezienia równań TBA dla stanów wzbudzonych poprzez odpowiednie przedłużenie analityczne równań (3.63) oraz (3.64). Idea polega na zdeformowaniu konturu całkowania, który mamy w równaniach TBA. Za każdym razem, gdy przekroczyliśmy położenie zera funkcji $1 + e^{-\epsilon(z)}$, dostaniemy dodatkowy przyczynik pochodzący od biegunów funkcji podcałkowej. Residua obliczone w położeniu tych biegunów mogą być następnie zapisane jako dodatkowe człony źródłowe w równaniach TBA.

W naszym przypadku zastosujemy podobną heurystyczną metodę. W równaniach (3.63) i (3.64) wybierzemy orientację konturu w sposób, który zagwarantuje nam odtworzenie wyniku dla ABA w dużej objętości. Dodatkowo założymy, że w naszej teorii nie ma w ogóle μ -termów, co powoduje, że nasze obliczenia będą podobne do tych w teorii Sinh-Gordona dla przypadku relatywistycznego (patrz np. [25]). Założenie o braku μ -termów oznacza, że każda cząstka fizyczna naszej teorii reprezentowana jest dokładnie przez pojedynczy punkt na płaszczyźnie zespolonej. W naszych dalszych rozważaniach skoncentrujemy się dla prostoty na przypadku dwóch cząstek, a wynik dla dowolnej ilości cząstek podamy na końcu tego rozdziału!

Przyjmijmy następującą zależność pomiędzy energią i pędem w teorii zwierciadlanej $(\tilde{\epsilon}(\tilde{p}), \tilde{p})$ a tymi w oryginalnej teorii $(\epsilon(p), p)$

$$\tilde{\epsilon}(z) = ip(z), \quad \tilde{p}(z) = i\epsilon(z) . \quad (3.66)$$

Jak łatwo zauważyć wybór ten jest konsystentny ze wzorem (3.24), gdzie zdefiniowaliśmy relację dyspersji w teorii zwierciadlanej.

Na początku skoncentrujemy się na relacji (3.64) i scałkujemy ją przez części

$$E_0 = \int \frac{dz}{2\pi} \tilde{p}(z) \partial_z \log(1 + e^{-\epsilon(z)}) . \quad (3.67)$$

Przypuśćmy teraz, że w czasie przesuwania konturu przekroczyliśmy położenie dokładnie dwóch biegunów z_1 oraz z_2 . Warunek na znalezienie tych biegunów dany jest przez

$1 + e^{-\epsilon(z_{1,2})} = 0$. Wybieramy orientację naszego konturu w taki sposób, aby wyrażenie $\partial_z \log(1 + e^{-\epsilon(z)})$ dawało wkład -1 przy braniu residuów. Dostajemy wtedy

$$E = \epsilon(z_1) + \epsilon(z_2) - \int \frac{dz}{2\pi} \tilde{p}'(z) \log(1 + e^{-\epsilon(z)}). \quad (3.68)$$

Używając tego samego mechanizmu, możemy w analogiczny sposób przeprowadzić przedłużenie analityczne wzoru (3.63). W tym przypadku orientacja konturu wyznaczona jest przez poprzednie rozważania i nie mamy już dowolności w tej kwestii. Po krótkich obliczeniach dostajemy

$$\epsilon(z) = L\tilde{\epsilon}(z) + \log \mathcal{S}(z_1, z) + \log \mathcal{S}(z_2, z) + \int \frac{dw}{2\pi i} (\partial_w \log \mathcal{S}(w, z)) \log(1 + e^{-\epsilon(w)}). \quad (3.69)$$

Poprawki Lüschera dla układu dwóch cząstek będą dane przez wiodące rozwinięcie powyższego wzoru dla dużych wartości L .

3.2.3 Wzory na poprawki Lüschera

Aby uzyskać wiodące poprawki pochodzące od skończonego rozmiaru wystarczy, że w dalszych rozważaniach będziemy trzymać jedynie wyrazy, które dają przyczynę postaci $e^{-L\tilde{\epsilon}}$. Wszystkie wyższe wyrazy postaci $e^{-nL\tilde{\epsilon}}$, dla $n > 1$, będziemy zaniebawać. Aby policzyć energię musimy iteracyjnie rozwiązać równanie (3.69), a następnie otrzymany wynik wstawić do wyrażenia (3.68). Jeśli jednak zaczniemy to robić, to bardzo szybko okaże się, że będziemy dostawać wyrazy, które są podwiodące w stosunku do tych, którymi jesteśmy zainteresowani. Okazuje się, że wystarczy, jeśli zaniebamy całkę znajdującą się po prawej stronie równości (3.69), a pozostałą część wzoru wstawimy do równości (3.68). Tym sposobem otrzymamy

$$\begin{aligned} E^{l.o.} &= \epsilon(z_1) + \epsilon(z_2) - \int \frac{dz}{2\pi} \tilde{p}' e^{-L\tilde{\epsilon}(z)} \frac{1}{\mathcal{S}(z_1, z)\mathcal{S}(z_2, z)} \\ &= \epsilon(p_1) + \epsilon(p_2) - \int \frac{d\tilde{p}}{2\pi} e^{-L\tilde{\epsilon}(\tilde{p})} \bar{\mathcal{S}}(\tilde{p}, p_1) \bar{\mathcal{S}}(\tilde{p}, p_2), \end{aligned} \quad (3.70)$$

gdzie skorzystaliśmy z relacji $\mathcal{S}^{-1}(z_1, z_2) = \mathcal{S}(z_2, z_1)$, zmieniliśmy zmienną całkowania oraz utożsamiliśmy $\mathcal{S}(p_1, p_2) = \mathcal{S}(p(z_1), p(z_2)) \equiv \mathcal{S}(z_1, z_2)$. Wielkość $\bar{\mathcal{S}}$ zdefiniowana jest w (3.47). Jak łatwo zauważyć wzór ten ma strukturę F -termu.

W celu dokończenia naszych rozważań musimy jeszcze wyznaczyć położenie biegunów z_1 oraz z_2 . Zrobimy to w dwóch krokach. Na początku zaniebamy całkę we wzorze (3.69)

$$\epsilon(z) = iLp(z) + \log \mathcal{S}(z_1, z) + \log \mathcal{S}(z_2, z). \quad (3.71)$$

Jeśli teraz rozwiążemy warunek na położenie biegunów, to dostaniemy warunek kwantowania w postaci

$$e^{-\epsilon(z_j)} = -1 \quad \iff \quad \epsilon(z_j) = i\pi + 2\pi ni. \quad (3.72)$$

Liczba n odpowiada za wybór cięcia logarytmu. Wstawiając do równania (3.71) wartość z_1 (odpowiednio z_2) dostajemy

$$i\pi = \epsilon(z_1) = iLp_1 + i\pi + \log \mathcal{S}(z_2, z_1), \quad (3.73)$$

gdzie użyliśmy faktu, że $\mathcal{S}(z, z) = -1 \Leftrightarrow \log \mathcal{S}(z, z) = i\pi + 2\pi n$ z tą samą wartością n , co poprzednio. Ostatecznie, po przekształceniu wzoru (3.73), znajdujemy automatycznie równania ABA

$$e^{iLp_1} = \mathcal{S}(p_1, p_2). \quad (3.74)$$

Widzimy więc, że wybór konturu całkowania, jaki dokonaliśmy powoduje, że wiodący warunek kwantowania pochodzący z równań TBA pokrywa się równaniami ABA! W dalszym kroku będziemy chcieli zobaczyć, jak wygląda wiodąca poprawka do kwantowania ABA, gdy uwzględnimy także efekty skończonego rozmiaru.

W tym celu, w kroku drugim, uwzględnimy także wyraz całkowy występujący w równości (3.69). Iterując tę równość raz i zaniedbując wyrazy podwiodące dostajemy

$$\begin{aligned} \epsilon(z) &= iLp(z) + \log \mathcal{S}(z_1, z) + \log \mathcal{S}(z_2, z) \\ &+ \int \frac{dw}{2\pi i} e^{-L\bar{\epsilon}(w)} \frac{\partial_w \mathcal{S}(w, z)}{\mathcal{S}(w, z)} \mathcal{S}(w, z_1) \mathcal{S}(w, z_2). \end{aligned} \quad (3.75)$$

Wstawiając do relacji (3.75) odpowiednio z_1 oraz z_2 oraz korzystając z warunku kwantowania i faktu, że $\mathcal{S}(z, z) = -1$, dostajemy układ dwóch równań

$$\begin{aligned} 0 &= \underbrace{\log\{e^{iLp(z_1)} \mathcal{S}(z_2, z_1)\}}_{BY_1} + \underbrace{\int \frac{dw}{2\pi i} e^{-L\bar{\epsilon}(w)} (\partial_w \mathcal{S}(w, z_1)) \mathcal{S}(w, z_2)}_{\Phi_1}, \\ 0 &= \underbrace{\log\{e^{iLp(z_2)} \mathcal{S}(z_1, z_2)\}}_{BY_2} + \underbrace{\int \frac{dw}{2\pi i} e^{-L\bar{\epsilon}(w)} \mathcal{S}(w, z_1) (\partial_w \mathcal{S}(w, z_2))}_{\Phi_2}. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Jesteśmy zainteresowani jedynie znalezieniem wiodącej poprawki do pędów, więc nie musimy rozwiązywać pełnego układu równań, lecz wystarczy nam jego liniowe przybliżenie. Jeśli zauważymy, że całki występujące w powyższych równaniach są eksponencjalnie małe, to liniowe przybliżenie układu równań (3.76) ma postać

$$\begin{aligned} \frac{\partial BY_1}{\partial p_1} \delta p_1 + \frac{\partial BY_1}{\partial p_2} \delta p_2 + \Phi_1 &= 0, \\ \frac{\partial BY_2}{\partial p_1} \delta p_1 + \frac{\partial BY_2}{\partial p_2} \delta p_2 + \Phi_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Ostatecznie, gdy już znajdziemy rozwiązanie układu równań (3.77), nasze rozwiązanie na poprawkę do energii dla dwóch cząstek dane jest wzorem

$$\begin{aligned} E^{l.o.} &= \epsilon(p_1 + \delta p_1) + \epsilon(p_2 + \delta p_2) - \int \frac{dq}{2\pi} e^{-L\bar{\epsilon}(q)} \bar{\mathcal{S}}(q, p_1) \bar{\mathcal{S}}(q, p_2) \\ &= \epsilon(p_1) + \epsilon(p_2) + \epsilon'(p_1) \delta p_1 + \epsilon'(p_2) \delta p_2 - \int \frac{dq}{2\pi} e^{-L\bar{\epsilon}(q)} \bar{\mathcal{S}}(q, p_1) \bar{\mathcal{S}}(q, p_2). \end{aligned} \quad (3.78)$$

Uogólnienie powyższego wzoru na większą liczbę cząstek nie stanowi problemu. We wszystkich poniższych wzorach pozbyliśmy się zależności od zmiennych na krzywej algebraicznej zmiennej rapidity i zamieniliśmy ją na zależność od pędów cząstek rzeczywistych

oraz od pędu cząstki wirtualnej. Dodatkowo, od naszego wyniku odjeliśmy energię stanu podstawowego (3.65). Ostateczne wzory dla dowolnej ilości cząstek (M) wyglądają następująco

$$E^{l.o.} - E_0^{l.o.} = \sum_{i=1}^M \varepsilon(p_i) + \sum_{i=1}^M \varepsilon'(p_i) \delta p_i - \int \frac{dq}{2\pi} e^{-L\tilde{\varepsilon}(q)} \left(\prod_{i=1}^M \bar{\mathcal{S}}(q, p_i) - 1 \right). \quad (3.79)$$

W powyższym wzorze wielkości δp_i dane są jako rozwiązanie układu równań (będącego uogólnieniem układu (3.77))

$$\sum_{i=1}^M \frac{\partial BY_k}{\partial p_i} \delta p_i + \Phi_k = 0, \quad k = 1, \dots, M, \quad (3.80)$$

w którym przez Φ_k oznaczyliśmy

$$\Phi_k = \int \frac{dq}{2\pi i} e^{-L\tilde{\varepsilon}(q)} \left[\bar{\mathcal{S}}(q, p_1) \cdot \dots \cdot \partial_q \bar{\mathcal{S}}(q, p_k) \cdot \dots \cdot \bar{\mathcal{S}}(q, p_M) \right], \quad (3.81)$$

natomiast BY_k dane jest wzorem

$$BY_k = \log \left\{ e^{iLp_k} \prod_{j \neq k}^M \mathcal{S}(p_j, p_k) \right\}. \quad (3.82)$$

Równania (3.79)-(3.82) opisują energię układu wielu cząstek z dokładnością do pierwszych poprawek eksponencjalnych w teorii z jednym rodzajem cząstek w spektrum i przy założeniu, że w teorii nie występują stany związane. Aby zakończyć nasze rozważania musimy uogólnić powyższy wynik także na te dwa przypadki.

3.2.4 Teoria z niediagonalnym rozpraszaniem

Jak do tej pory koncentrowaliśmy się na teorii z jednym rodzajem cząstek w spektrum. W późniejszych zastosowaniach chcielibyśmy jednak móc używać wzorów bardziej ogólnych – dla teorii z wieloma cząstkami w spektrum. W takim przypadku macierz \mathcal{S} (nie tylko z nazwy) jest macierzą o wymiarach $n \times n$, gdzie n oznacza ilość różnych cząstek w spektrum. Problemem w tym przypadku jest fakt, że równania Asymptotycznego Ansatzu Bethego stają się dużo bardziej skomplikowane i mamy do czynienia z tzw. zagnieżdżonymi równaniami ABA. Powoduje to, że wyprowadzenie równań TBA staje się niezwykle skomplikowane (wyprowadzenie tych równań dla przypadku teorii strun w $AdS_5 \times S^5$ jest istotnym kierunkiem badań [29, 30, 31]). Mimo tego, istnieje sposób na uzyskanie wzorów Lüschera także w tym przypadku. Zauważmy, że dla pojedynczej cząstki wzór Lüschera otrzymany diagramatycznie ma taką samą postać dla teorii z wieloma cząstkami w spektrum jak i z jedną. Jedyna różnica polega na zastąpieniu skalarnej macierzy rozpraszania przez ślad z macierzy \mathcal{S} . Dla przypadku poprawki Lüschera dla stanu wielowzbudzeniowego zapostulujemy podobne zachowanie. Jeśli tylko założymy, że poprawki Lüschera także w tym przypadku wyrażać się będą wyłącznie poprzez relację dyspersji oraz pełną macierz rozpraszania, to jedyne, co musimy zrobić to zamiana iloczynu skalarnej macierzy \mathcal{S} na ślad z iloczynu macierzy \mathcal{S} . Jeśli teraz spojrzymy na równania (3.79)-(3.82), to uogólnienie to będzie wyglądać następująco

$$E^{l.o.} - E_0^{l.o.} = \sum_{i=1}^M \varepsilon(p_i) + \sum_{i=1}^M \varepsilon'(p_i) \delta p_i - \int \frac{dq}{2\pi} e^{-L\tilde{\varepsilon}(q)} \text{Str} \left[\prod_{i=1}^M \bar{\mathcal{S}}(q, p_i) - 1 \right], \quad (3.83)$$

gdzie Str oznacza superśląd, tzn. ważoną sumę wyrazów diagonalnych z wagami +1 dla bozonów oraz -1 dla fermionów. Dodatkowo musimy zmienić definicję Φ_k na

$$\Phi_k = \int \frac{dq}{2\pi i} e^{-L\tilde{\varepsilon}(q)} \text{Str} \left[\bar{\mathcal{S}}(q, p_1) \cdot \dots \cdot \partial_q \bar{\mathcal{S}}(q, p_k) \cdot \dots \cdot \bar{\mathcal{S}}(q, p_M) \right], \quad (3.84)$$

pozostawiając wzory (3.80) oraz (3.82) niezmienione.

3.2.5 Porównanie z wyprowadzeniem diagramatycznym

Jak do tej pory wyprowadziliśmy wzory na poprawkę Lüschera dla pojedynczego wzbudzenia używając metod diagramatycznych jak i dla wielu wzbudzeń korzystając z równań TBA. W tym miejscu chcielibyśmy sprawdzić, czy wyprowadzony przez nas wzór na poprawkę Lüschera dla wielu wzbudzeń (3.83) odtwarza wzór (3.49) w przypadku, gdy weźmiemy $M = 1$. Dla celów tego podrozdziału oznaczyliśmy $p \equiv p_1$. Wtedy

$$(\star) = (3.83) \Big|_{M=1} = \varepsilon(p) + \varepsilon'(p) \delta p - \int \frac{dq}{2\pi} e^{-L\tilde{\varepsilon}(q)} \text{Str} [\bar{\mathcal{S}}(q, p) - 1], \quad (3.85)$$

gdzie δp dane jest przez

$$\delta p = \frac{1}{-iL} \int \frac{dq}{2\pi i} e^{-L\tilde{\varepsilon}(q)} \text{Str} [\partial_q \bar{\mathcal{S}}(q, p)]. \quad (3.86)$$

Scałkujemy tę równość przez części

$$\delta p = - \int \frac{dq}{2\pi L} (-L\tilde{\varepsilon}'(q)) e^{-L\tilde{\varepsilon}(q)} \text{Str} [\bar{\mathcal{S}}(q, p)] = \int \frac{dq}{2\pi} \tilde{\varepsilon}'(q) e^{-L\tilde{\varepsilon}(q)} \text{Str} [\bar{\mathcal{S}}(q, p)]. \quad (3.87)$$

Skorzystamy teraz ze związku pomiędzy relacją dyspersji w teorii fizycznej a relacją dyspersji w teorii zwierciadlanej, która jest postaci

$$\tilde{\varepsilon}(q) = -i\varepsilon^{-1}(iq), \quad (3.88)$$

gdzie ε^{-1} oznacza funkcję odwrotną do funkcji ε . Możemy stąd znaleźć, że

$$\tilde{\varepsilon}'(q) = (-i\varepsilon^{-1}(iq))' = -i \frac{1}{\varepsilon'(i\tilde{\varepsilon}(q))} i = \frac{1}{\varepsilon'(i\tilde{\varepsilon}(q))}. \quad (3.89)$$

Wracając do wyrażenia na δp dostajemy

$$\delta p = \int \frac{dq}{2\pi} \frac{1}{\varepsilon'(i\tilde{\varepsilon}(q))} e^{-L\tilde{\varepsilon}(q)} \text{Str} [\bar{\mathcal{S}}(q, p)]. \quad (3.90)$$

Jeśli teraz wstawimy to do wyrażenia (3.85) oraz zauważymy, że całka

$$\int \frac{dq}{2\pi} \tilde{\varepsilon}'(q) e^{-L\tilde{\varepsilon}(q)} = \int \frac{dq}{2\pi} \frac{1}{\varepsilon'(i\tilde{\varepsilon}(q))} e^{-L\tilde{\varepsilon}(q)} = 0 \quad (3.91)$$

znika ze względu na antysymetrię funkcji $\varepsilon'(q)$, dostaniemy ostateczny wynik

$$\begin{aligned}
(\star) &= \varepsilon(p) + \varepsilon'(p) \int \frac{dq}{2\pi} \frac{1}{\varepsilon'(i\tilde{\varepsilon}(q))} e^{-L\tilde{\varepsilon}(q)} \text{Str}[\bar{\mathcal{S}}(q, p)] - \int \frac{dq}{2\pi} e^{-L\tilde{\varepsilon}(q)} \text{Str}[\bar{\mathcal{S}}(q, p) - 1] \\
&= \varepsilon(p) + \varepsilon'(p) \int \frac{dq}{2\pi} \frac{1}{\varepsilon'(i\tilde{\varepsilon}(q))} e^{-L\tilde{\varepsilon}(q)} \text{Str}[\bar{\mathcal{S}}(q, p) - 1] - \int \frac{dq}{2\pi} e^{-L\tilde{\varepsilon}(q)} \text{Str}[\bar{\mathcal{S}}(q, p) - 1] \\
&= \varepsilon(p) - \int \frac{dq}{2\pi} \left(1 - \frac{\varepsilon'(p)}{\varepsilon'(i\tilde{\varepsilon}(q))} \right) e^{-L\tilde{\varepsilon}(q)} \text{Str}[\bar{\mathcal{S}}(q, p) - 1], \tag{3.92}
\end{aligned}$$

które, po uwzględnieniu faktu, że energia otrzymana z równań TBA jest zawsze wielkością rzeczywistą, dokładnie zgadza się z wyrażeniem na F -term (3.49), które otrzymaliśmy używając wyprowadzenia diagramatycznego.

3.2.6 Wzory końcowe

Ostatnim krokiem jest dopuszczenie w naszej teorii także stanów związanych. Załóżmy, że stany te mogą być numerowane liczbą naturalną Q . Relację dyspersji dla stanów związanych będziemy oznaczać przez ε_Q , natomiast przez $\mathcal{S}_Q(p_Q, p)$ będziemy oznaczać macierz rozpraszania pomiędzy stanem związanym a pojedynczym wzbudzeniem. Macierz ta redukuje się do standardowej macierzy \mathcal{S} , gdy weźmiemy $Q = 1$. Przy takich oznaczeniach ostateczne wzory na poprawkę mogą być zapisane jak poniżej.

- Wzór na energię

$$E^{l.o.} - E_0^{l.o.} = \sum_{i=1}^M \varepsilon(p_i) + \sum_{i=1}^M \varepsilon'(p_i) \delta p_i - \sum_{Q=1}^{\infty} \int \frac{dq}{2\pi} e^{-L\tilde{\varepsilon}_Q(q)} \text{Str} \left[\prod_{i=1}^M \bar{\mathcal{S}}_Q(q, p_i) - 1 \right]; \tag{3.93}$$

- Układ równań determinujący przesunięcia w pędach δp_i

$$\sum_{i=1}^M \frac{\partial B Y_k}{\partial p_i} \delta p_i + \Phi_k = 0, \quad k = 1, \dots, M; \tag{3.94}$$

- Przyczynek eksponencjalny do modyfikacji pędów

$$\Phi_k = \sum_{Q=1}^{\infty} \int \frac{dq}{2\pi i} e^{-L\tilde{\varepsilon}_Q(q)} \left[\bar{\mathcal{S}}_Q(q, p_1) \cdots \partial_q \bar{\mathcal{S}}_Q(q, p_k) \cdots \bar{\mathcal{S}}_Q(q, p_M) \right]; \tag{3.95}$$

- Logarytm równań ABA

$$B Y_k = \log \left\{ e^{i L p_k} \prod_{j \neq k}^M \mathcal{S}(p_j, p_k) \right\}. \tag{3.96}$$

Wzory te będziemy używać w dalszej części pracy w celu policzenia poprawek do energii operatorów twist- J występujących w teorii $\mathcal{N} = 4$ SYM.

Rozdział 4

Silne sprzężenie

Skoro znamy już wzory na poprawki Lüschera zarówno dla pojedynczego wzbudzenia, jak i dla większej ich ilości, możemy spróbować teraz zastosować wzory znalezione w poprzednim rozdziale w jakimś konkretnym przypadku. Teorią, którą będziemy się interesować w tym i następnym rozdziale jest supersymetryczna teoria Yanga-Millsa z maksymalną ilością superładunków $\mathcal{N} = 4$ lub, co wychodzi na to samo dzięki korespondencji AdS/CFT, teoria superstrun w przestrzeni $AdS_5 \times S^5$. W przypadku tej teorii należy pamiętać, że występuje w niej dodatkowy parametr – stała sprzężenia g . W tym rozdziale przedstawimy wyniki dla silnego sprzężenia (dużej wartości stałej g), natomiast w następnym dla słabego sprzężenia (wartości g bliskiej zeru). W silnym sprzężeniu znane są klasyczne rozwiązania strunowe dla pojedynczego wzbudzenia (tzw. wielkiego magnonu) oraz ich relacja dyspersji. Znalezione zostały także wiodące poprawki do tej relacji pochodzące od skończonego rozmiaru układu. Poprawki te były niezrozumiane z punktu widzenia opisu za pomocą Asymptotycznego Ansatzu Bethego. Naszym celem będzie wyjaśnienie ich źródła używając wyprowadzonych przez nas poprawek Lüschera. Będzie to jednocześnie test naszego formalizmu. Z kolei w następnym rozdziale zastosujemy nasze wyniki przy słabym sprzężeniu, co umożliwi porównanie wyników strunowych z rozwinięciem perturbacyjnym dualnej teorii cechowania, a więc przeprowadzenie ilościowych testów korespondencji AdS/CFT.

4.1 Wielkie magnony

Nasze rozważania zaczniemy od sprawdzenia, jak w silnym sprzężeniu wyglądają wyrazy eksponencjalne występujące we wzorach na poprawki Lüschera. Relacja dyspersji dla wzbudzeń, będących stanami związanymi na wstędze świata struny w korespondencji AdS/CFT ma postać

$$\varepsilon_Q(p) = \sqrt{Q^2 + 16g^2 \sin^2 \frac{p}{2}}. \quad (4.1)$$

W celu wyznaczenia postaci wyrazów eksponencjalnych we wzorach Lüschera musimy znaleźć wyrażenie na relację dyspersji w teorii zwierciadlanej. Ma ona postać

$$\tilde{\varepsilon}_Q(q) = -i\varepsilon_Q^{-1}(iq) = 2 \operatorname{arcsinh} \left(\frac{1}{4g} \sqrt{Q^2 + q^2} \right) = \frac{1}{2g} \sqrt{Q^2 + q^2} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{g^2} \right). \quad (4.2)$$

Jeśli teraz rozpatrzmy wyrażenia $e^{-\tilde{\varepsilon}_Q(q)L}$ dla dużych L , to wiodący wkład będzie pochodził od wyrazów z $Q = 1$, gdyż $\sqrt{Q^2 + q^2} > \sqrt{1 + q^2}$, dla $Q \geq 2$. Tak więc wyrazy pochodzące od zwierciadlanych stanów związanych są podwiodące względem pochodzącego od elementarnego wzbudzenia i możemy je zaniedbać w rozważaniach w silnym sprzężeniu!

W naszych rozważaniach skupimy się na przypadku pojedynczego fizycznego wzbudzenia (przypadek wielu wzbudzeń był rozpatrywany później np. w [41]). Jeśli skoncentrujemy się teraz na wiodącym rozwinięciu relacji dyspersji dla elementarnych wzbudzeń na wstędze świata w silnym sprzężeniu, to otrzymamy

$$\varepsilon(p) \stackrel{g \rightarrow \infty}{=} 4g \left| \sin \frac{p}{2} \right|. \quad (4.3)$$

Jak zauważyliśmy we wstępie, duża wartość stałej sprzężenia $g = \frac{\lambda}{16\pi^2}$ odpowiada rozwiązaniom (semi)klasycznym teorii strun. Możemy więc zadać sobie pytanie o klasyczne konfiguracje struny, które odtworzą tę relację dyspersji. Konfiguracje takie, nazwane *wielkimi magnonami* (ang. "giant magnon"), zostały znalezione przez Hofmana i Maldaceny w [46]. Rozpatrywali oni klasyczne struny poruszające się w podprzestrzeni $\mathbb{R} \times S^2$ przestrzeni $AdS_5 \times S^5$. W naszych rozważaniach będziemy oznaczać współrzędne na sferze jako (ϕ, ψ) , natomiast współrzędną czasową pochodzącą z przestrzeni anty-de-Sittera oznaczymy po prostu t . Wybierzemy następującą parametryzację rozważanej struny

$$t = \tau, \quad \phi - t = \sigma \quad (4.4)$$

oraz ψ nie zależy od τ . W naszych oznaczeniach, (τ, σ) są współrzędnymi na wstędze świata struny. Wykorzystując powyższą parametryzację, jesteśmy w stanie napisać działanie Nambu-Goto dla struny

$$S = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \int d\tau d\sigma \sqrt{\cos^2(\psi\sigma^2) + \sin^2 \psi}. \quad (4.5)$$

Możemy teraz łatwo znaleźć i rozwiązać równania ruchu wynikające z tego działania. Wynik dany jest przez

$$\sin \psi = \frac{\sin \psi_0}{\cos \sigma}, \quad -\left(\frac{\pi}{2} - \psi_0\right) \leq \sigma \leq \left(\frac{\pi}{2} - \psi_0\right), \quad (4.6)$$

gdzie $0 \leq \psi_0 \leq \frac{\pi}{2}$ jest stałą całkowania. W używanych przez nas współrzędnych struna ma skończoną długość w przestrzeni, w której jest zanurzona, jednak niesie nieskończony ładunek J , stowarzyszony z przesunięciem wzdłuż współrzędnej ϕ , na swoich końcach! Długość struny dla ustalonej chwili czasu dana jest przez odległość kątową pomiędzy dwoma jej końcami. Jak łatwo zauważyć wynosi ona

$$\Delta\phi = \Delta\sigma = 2\left(\frac{\pi}{2} - \psi_0\right). \quad (4.7)$$

Jesteśmy już gotowi do policzenia energii tej struny

$$E - J = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi} \cos \psi_0 = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi} \sin \frac{\Delta\phi}{2}. \quad (4.8)$$

Idąc za Hofmanem i Maldacena, jeśli utożsamimy odległość końców struny z wartością pędu $p = \Delta\phi$, to dostaniemy wyrażenie na energię

$$E - J = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi} \left| \sin \frac{p}{2} \right|, \quad (4.9)$$

które, jeśli użyjemy dodatkowo relacji $g^2 = \frac{\lambda}{16\pi^2}$, dokładnie odtwarza rozwinięcie relacji dyspersji dla dużej stałej sprzężenia (4.3). Udało nam się więc znaleźć konfigurację strunową, która jest odpowiednia do rozważań wzbudzeń elementarnych w silnym sprzężeniu. Z kolei w pracy [47] znaleziona została modyfikacja rozwiązania (4.7) dla skończonej wartości J , co pozwoliło wyznaczyć wiodące poprawki do energii (4.3). W dalszej części rozdziału znajdziemy poprawki eksponencjalne do energii (4.3) dla dużej wartości g pochodzące od F -termu oraz μ -termu. Wkład od μ -termu odtworzy wynik z [47]

$$\delta E_{\text{string}} = -\frac{\sqrt{\lambda}}{\pi} \cdot \frac{4}{e^2} \cdot \sin^3 \frac{p}{2} \cdot e^{-\frac{2\pi J}{\sqrt{\lambda} \sin \frac{p}{2}}} = -g \cdot \frac{16}{e^2} \cdot \sin^3 \frac{p}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2g \sin \frac{p}{2}} J}, \quad (4.10)$$

gdzie autorzy rozważali klasyczne konfiguracje struny ze skończonym ładunkiem J , które po wzięciu granicy $J \rightarrow \infty$ redukują się do rozwiązania Hofmana i Maldaceny. Z kolei F -term odpowiada pierwszej kwantowej poprawce do wielkich magnonów pochodzącej od kwantowych fluktuacji wokół rozwiązania Hofmana i Maldaceny. W ten sposób widzimy, że μ -term odpowiada pierwszej poprawce związanej ze skończonym rozmiarem układu obliczonej w teorii klasycznej podczas, gdy w celu otrzymania F -termu musimy skwantować nasz układ!

4.2 μ -term

Zacznijmy od próby odtworzenia wyniku (4.10), wykorzystując wzór na μ -term (3.50) obliczony dla wielkiego magnonu. Jeśli uda nam się odtworzyć ten wynik korzystając z wzorów Lüschera, będzie to oznaczać, że nasz formalizm działa poprawnie. W celu wyznaczenia wartości μ -termu z wyrażenia (3.50) musimy znaleźć położenie biegunów macierzy rozpraszania. Aby to zrobić potrzebujemy najpierw wprowadzić nowe zmienne, które są bardziej odpowiednie do opisu wzbudzeń na strunie.

Energia oraz pęd pojedynczego wzbudzenia (magnonu) na wstędze świata struny na $AdS_5 \times S^5$ zakodowane są w dwóch zmiennych zespolonych x^\pm , które związane są ze sobą poprzez relację

$$x^+ + \frac{1}{x^+} - x^- - \frac{1}{x^-} = \frac{i}{g}. \quad (4.11)$$

Energia, jak również pęd, mogą zostać wyrażone poprzez zmienne x^\pm za pomocą relacji

$$e^{ip} = \frac{x^+}{x^-}, \quad \varepsilon(p) = 2gi(x^- - x^+) - 1. \quad (4.12)$$

Odwracając równości w (4.12) oraz wykorzystując (4.11) możemy wyrazić x^\pm jako funkcje pędu (lub energii). Niestety, ze względu na dowolność wyboru cięcia pierwiastka, nie można tego zrobić w sposób jednoznaczny. Nasz wybór będzie miał postać

$$x_p^\pm = \frac{1 + \sqrt{1 + 16g^2 \sin^2 \frac{p}{2}}}{4g \sin(\frac{p}{2})} e^{\pm i \frac{p}{2}}. \quad (4.13)$$

Zmienne x^\pm słuŹą w szczególności do zapisania macierzy rozpraszania elementarnych magnonów, którą można znaleźć w Dodatku B. Okazuje się, Źe istnieje dokładnie jeden biegun macierzy rozpraszania i dany jest on przez relację

$$x_p^+ = x_{\bar{q}}^- . \quad (4.14)$$

W równaniu (4.14) należy traktować p jako dane i równe pędoowi wielkiego magnonu podczas, gdy \bar{q} jest niewiadomą, która ma interpretację pędu cząstki wirtualnej, z którą wielki magnon tworzy stan zwiąŹany. Jesteśmy zainteresowani jedynie wynikami w silnym sprzęŹeniu, więc do naszych celów wystarczy, jeśli znajdziemy rozwinięcie wielkości $x_{p,\bar{q}}^\pm$ dla duŹej wartości g . Dane jest ono poprzez

$$\begin{aligned} x_p^+ &= e^{\frac{ip}{2}} \left(1 + \frac{1}{4g \sin \frac{p}{2}} \right) , \\ x_p^- &= e^{-\frac{ip}{2}} \left(1 + \frac{1}{4g \sin \frac{p}{2}} \right) . \end{aligned} \quad (4.15)$$

Znając rozwinięcie dla x_p^+ możemy wyznaczyć $x_{\bar{q}}^-$ korzystając z relacji (4.14). Z kolei, aby znaleźć $x_{\bar{q}}^+$ skorzystamy z równości (4.11). Rozwinięcia, które otrzymamy tym sposobem mają postać

$$\begin{aligned} x_{\bar{q}}^- &= e^{\frac{ip}{2}} \left(1 + \frac{1}{4g \sin \frac{p}{2}} \right) , \\ x_{\bar{q}}^+ &= e^{\frac{ip}{2}} \left(1 + \frac{3}{4g \sin \frac{p}{2}} \right) . \end{aligned} \quad (4.16)$$

Korzystając z tych rozwinięć możemy także wyznaczyć przybliŹoną wartość pędu fizycznego $i\tilde{\varepsilon}(\bar{q})$, odpowiadającego cząstce wirtualnej, która jest dana poprzez

$$e^{-\tilde{\varepsilon}(\bar{q})} \equiv \frac{x_{\bar{q}}^+}{x_{\bar{q}}^-} \sim 1 + \frac{1}{2g \sin \frac{p}{2}} , \quad (4.17)$$

skąd dostajemy

$$\tilde{\varepsilon}(\bar{q}) \sim \frac{-1}{2g \sin \frac{p}{2}} . \quad (4.18)$$

W ten sposób możemy potwierdzić juŹ czynnik eksponencjalny występujący we wzorze (4.10). Pozostaje nam jeszcze obliczenie czynnika kinetycznego oraz policzenie residuum macierzy \mathcal{S} w połoŹeniu bieguna. Zaczniemy od czynnika kinematycznego. Musimy oszacować, ile wynosi wiodące rozwinięcie pochodnej relacji dyspersji w punktach p oraz $i\tilde{\varepsilon}(\bar{q})$. Dostajemy odpowiednio

$$\varepsilon'(p) = \frac{4g^2 \sin \frac{p}{2} \cos \frac{p}{2}}{\sqrt{1 + 8g^2 \sin^2 \frac{p}{2}}} \sim 2g \cos \frac{p}{2} \quad (4.19)$$

oraz

$$\varepsilon'(i\tilde{\varepsilon}(\bar{q})) = \frac{4g^2 \sin \frac{i\tilde{\varepsilon}(\bar{q})}{2} \cos \frac{i\tilde{\varepsilon}(\bar{q})}{2}}{\sqrt{1 + 8g^2 \sin^2 \frac{i\tilde{\varepsilon}(\bar{q})}{2}}} \sim \frac{2g}{\cos \frac{p}{2}} . \quad (4.20)$$

Łącząc te dwa fakty, dostajemy wyrażenie na czynnik kinematyczny w postaci

$$1 - \frac{\varepsilon'(p)}{\varepsilon'(i\tilde{\varepsilon}(\bar{q}))} \sim 1 - \cos^2 \frac{p}{2} = \sin^2 \frac{p}{2}. \quad (4.21)$$

Jak do tej pory uzyskaliśmy następującą postać wyrażenia na μ -term dla wielkiego magnonu

$$\delta\varepsilon_a^\mu = -i \cdot \sin^2 \frac{p}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2g \sin \frac{p}{2}} L} \cdot \operatorname{res}_{q=\bar{q}} \sum_b \bar{\mathcal{S}}_{ba}^{ba}(q, p). \quad (4.22)$$

Pozostaje jeszcze policzenia residuum macierzy rozpraszania $\mathcal{S}(q, p)$ w punkcie $q = \bar{q}$. Jak można znaleźć w Dodatku B, macierz rozpraszania może zostać zapisana jako iloczyn trzech czynników – części skalarnej, części macierzowej oraz tzn. dressing factora. W położeniu bieguna macierzy \mathcal{S} zdecydowanie najtrudniejszy do policzenia będzie wkład pochodzący od dressing factora σ . Z kolei można także zauważyć, że biegun macierzy rozpraszania pochodzi od części macierzowej. W celu policzenia residuum skorzystamy z reguły de l'Hospitala. Po żmudnych, lecz oczywistych obliczeniach (patrz [A1] po szczególności), otrzymujemy następujące wyrażenie na residuum macierzy \mathcal{S}

$$\operatorname{res}_{q=\bar{q}} \sum_b \bar{\mathcal{S}}_{ba}^{ba}(q, p) = \frac{4i}{g \cdot \sin^3 \frac{p}{2}} \cdot e^{ip} \cdot \sigma^2(x_{\bar{q}}, x_p), \quad (4.23)$$

gdzie jedyna wielkość, która pozostała do policzenia to wartość dressing factora σ w położeniu residuum, który ma rozwinięcie w silnym sprzężeniu w postaci

$$\sigma^2(x_q, x_p) = \exp \left(2i \sum_{n=0}^{\infty} g^{1-n} (\chi^{(n)}(x_q^-, x_p^-) - \chi^{(n)}(x_q^+, x_p^-) + \chi^{(n)}(x_q^+, x_p^+) - \chi^{(n)}(x_q^-, x_p^+)) \right). \quad (4.24)$$

Jest to zadanie o tyle trudne, że w położeniu bieguna wszystkie składniki szeregu (4.24) są tego samego rzędu i dają wkład do wyniku. Alternatywnie, można obliczyć wartość dressing factora z reprezentacji całkowej (B.13), lecz w tym przypadku trudność bierze się z faktu, że bieguny funkcji podcałkowej w silnym sprzężeniu leżą dokładnie na konturze całkowania. W naszych obliczeniach skorzystamy z reprezentacji dressing factora za pomocą szeregu (użyte wzory znajdują się w Dodatku B). Zaczniemy od fazy AFS, która jest wiodącym rozwinięciem w silnym sprzężeniu ($n = 0$ w (4.24)). Jeśli wstawimy wyrażenia na x_p^\pm oraz $x_{\bar{q}}^\pm$, to dostaniemy

$$\sigma_{\text{AFS}}^2(x_{\bar{q}}, x_p) = -\frac{g^2}{2} \cdot e^{-ip} \sin^4 \frac{p}{2}. \quad (4.25)$$

Jeśli teraz wstawimy to wyrażenie do (4.23), to możemy zobaczyć, że zarówno zależność od stałej sprzężenia g jak i od pędu wielkiego magnonu p jest identyczna, jak we wzorze (4.10). Jedyna różnica bierze się teraz z czynnika liczbowego stojącego przez zależnością funkcyjną. Jak do tej pory nie uwzględniliśmy jednak pozostałych wyrazów rozwinięcia dressing factora. Druga w kolejności jest faza Hernandeza-Lopeza (HL), która jest proporcjonalna do g^0 . Po krótkich obliczeniach dostajemy, że

$$\sigma_{\text{HL}}^2(x_{\bar{q}}, x_p) = \frac{1}{2}. \quad (4.26)$$

Naiwnie mogłoby się wydawać, że $\chi^{(n)}$ dla $n \geq 2$ nie powinny dawać wkładu do wyniku w silnym sprzężeniu, gdyż są to wyrazy podwiódące względem fazy AFS oraz HL. Okazuje się, że tak nie jest w przypadku wielkiego magnonu. W silnym sprzężeniu zarówno x_p^\pm jak i $x_{\bar{q}}^\pm$ leżą na brzegu zbieżności szeregu (B.4) i znajdują się blisko osobliwości, która kompensuje odwrotności potęg stałej sprzężenia. Mówiąc ściślej, okazuje się, że funkcje $\tilde{\chi}^{(n)}(x, y)$ mają wspólną strukturę postaci

$$\tilde{\chi}^{(n)}(x, y) = \frac{\dots}{g^{n-1}(1-xy)^{n-1}}. \quad (4.27)$$

W takiej sytuacji, zarówno jeśli weźmiemy parę $(x, y) = (x_{\bar{q}}^-, x_p^-)$ jak i $(x, y) = (x_{\bar{q}}^+, x_p^-)$, to drugi czynnik w mianowniku będzie proporcjonalny do g^{1-n} , co skróci się dokładnie z pozostałą zależnością od stałej sprzężenia występującą w mianowniku i cały wynik będzie, dla każdego n , stały względem g . Oznacza to, że w naszych rachunkach musimy wziąć pod uwagę pełne rozwinięcie dressing factora.

W tym celu będziemy chcieli policzyć wkład od $\chi^{(n)}(x, y)$ dla x, y postaci¹

$$\begin{aligned} x &= e^{\frac{ip}{2}} \left(1 + \frac{a}{g \sin \frac{p}{2}} \right), \\ y &= e^{\frac{ip}{2}} \left(1 + \frac{b}{g \sin \frac{p}{2}} \right). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Okazuje się, że w tych punktach nieparzyste wyrazy znikają $\chi^{(2m+1)}(x, y) = 0$, natomiast dla parzystych mamy

$$\chi^{(2m)}(x, y) = i(-1)^n \frac{(2m-2)!}{2^{4m-2} \pi^{2m}} \zeta(2m) \frac{1}{(a+b)^{2m-1}} \equiv \chi^{(2m)}(a+b). \quad (4.29)$$

Dzięki temu możemy zapisać, że wkład od wyższych wyrazów rozwinięcia dressing factora dany jest poprzez

$$\sigma_{n \geq 2}^2 = \exp \left(2i \sum_{n=1}^{\infty} \chi^{(2n)} \left(\frac{1}{2} \right) - \chi^{(2n)}(1) \right). \quad (4.30)$$

Powyzszy szereg okazuje się być asymptotyczny i jako taki jest rozbieżny. Jego wartość można jednak znaleźć używając resumacji borelowskiej! Prowadzi to do następującego wyniku

$$(4.30)_{\text{Borel}} = \exp \left(\int_0^\infty \frac{2 - \frac{t}{\sinh \frac{t}{2}}}{t^2} e^{-t} dt \right) = \frac{8}{e^2}. \quad (4.31)$$

Ostatecznie dostajemy wkład od pełnego dressinga factora w postaci

$$\sigma^2(x_{\bar{q}}, x_p) = -\frac{4g^2}{e^2} e^{-ip} \sin^4 \frac{p}{2}. \quad (4.32)$$

Jeśli teraz wstawimy wynik, który właśnie otrzymaliśmy z dressing factora do wzoru (4.23), to dostaniemy końcowy wynik na μ -term dla wielkiego magnonu w postaci

$$\delta \varepsilon_a^\mu = -g \cdot \frac{16}{e^2} \cdot \sin^3 \frac{p}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2g \sin \frac{p}{2}} J}. \quad (4.33)$$

Wynik ten po wybraniu cechowania na stożku świetlnym (czyli utożsamieniu $L \equiv J$) pokrywa się z wynikiem otrzymanym z klasycznych rozwiązań strunowych (4.10)!

¹ $(a, b) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ dla $(x_{\bar{q}}^-, x_p^-)$ oraz $(a, b) = (\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$ dla $(x_{\bar{q}}^+, x_p^-)$.

4.3 F -term

W poprzednim podrozdziale udało nam się potwierdzić zgodność wyniku otrzymanego z wzoru Lüschera opisującego μ -term z klasycznymi rachunkami strunowymi. W szczególności, potwierdza to, że użyty przez nas formalizm dobrze opisuje wiodące zachowanie wielkich magnonów w skończonej objętości. Teraz chcielibyśmy z kolei skoncentrować się na F -termie, który odpowiadać będzie za wiodące poprawki kwantowe do wielkich magnonów. Wyniki otrzymane w tym podrozdziale zostały znalezione oryginalnie w pracy [A4] (oraz niezależnie w [40]).

W chwili obecnej mamy wszystkie składniki potrzebne do policzenia go ze wzoru (3.46). Po pierwsze wiemy, że wiodący wkład w silnym sprzężeniu dany jest przez wzbudzenia elementarne w teorii zwierciadlanej. Wystarczy więc, że użyjemy relacji dyspersji w postaci

$$\varepsilon(p) = \sqrt{1 + 16g^2 \sin^2 \frac{p}{2}}. \quad (4.34)$$

Dodatkowo, znamy macierz rozpraszania wzbudzeń na wstędze świata, która jest opisana w Dodatku B. Zanim jednak przejdziemy do szczegółowych rachunków chcielibyśmy pokazać, że wynik otrzymany z F -termu odpowiada wkładowi pochodzącemu od kwantowych fluktuacji wokół wielkiego magnonu. Przypuszczenie, że jest to prawda, oparte jest na fakcie, że wykładnik dający wiodący wkład do F -termu w silnym sprzężeniu

$$\delta\varepsilon^F \propto e^{-\frac{L}{2g}} \quad (4.35)$$

dokładnie pokrywa się z wykładnikiem charakterystycznym dla kwantowych fluktuacji. W dalszej części rozdziału pokażemy, że także czynnik stojący przez wyrażeniem eksponencjalnym jest taki sam w obydwu przypadkach.

4.3.1 Kwadratowe fluktuacje

Jak widzieliśmy we wstępie do tego rozdziału, wielkie magnony wyglądają jak zlokalizowane solitony poruszające się po równiku sfery dwuwymiarowej. Z drugiej strony, ze względu na warunek $J \rightarrow \infty$, w języku współrzędnych na wstędze świata możemy je utożsamić z solitonami poruszającymi się po nieskończonej prostej. Będzie to punkt wyjściowy naszych rozważań. Weźmiemy soliton poruszający się po prostej i będziemy zainteresowani znalezieniem pierwszych poprawek kwantowych do energii tego solitonu. Oznacza to znalezienie wiodącego wkładu od fluktuacji wokół solitonu.

Korzystając z faktu, że w danej chwili czasu soliton zlokalizowany jest w pewnym punkcie przestrzeni, to gdy rozpatrzemy obszar znajdujący się daleko od jego centrum, będzie on miał wartość zbliżoną do wartości próżniowej. W takim przypadku fluktuacje daleko od centrum solitonu będą wyglądały jak fluktuacje wokół próżni – innymi słowy jak drugi soliton. Tak więc układ, który musimy rozważyć składa się z solitonu oraz "małego" solitonu (fluktuacji), obu poruszających się po prostej. Sytuacja ta odpowiada dokładnie przypadkowi $J = \infty$. My chcielibyśmy jednak znaleźć poprawki, gdy J jest bardzo duże, lecz nie nieskończone. Aby tego dokonać, nasz układ musi zostać włożony na cylinder o (bardzo dużym) obwodzie L , który utożsamiamy z wartością ładunku J .

Możemy teraz przejść do zagadnienia znalezienia pochodzących od fluktuacji poprawek do energii dla pojedynczego solitonu o pędzie p . Wyprowadzenie to oryginalnie znajduje się w [A4], ale wersja, którą przedstawiamy poniżej jest poprawiona, uproszczona oraz bardziej ogólna. W celu znalezienia poprawek do energii musimy znaleźć warunek kwantowania dla fluktuacji. Fluktuacje znajdują się na cylindrze i gdyby były one jedynym obiektem w naszym układzie, to mielibyśmy standardowy warunek kwantowania

$$k_n^{(0)} = \frac{2\pi n}{L}. \quad (4.36)$$

Jeśli jednak uwzględnimy inny soliton w układzie, to warunek kwantowania zostanie zmieniony ze względu na oddziaływanie pomiędzy tymi dwoma solitonami. Oddziaływanie to zaowocuje pojawieniem się dodatkowej fazy $\delta(k, p)$. Faza ta definiuje macierz rozpraszania obu solitonów

$$\mathcal{S}(k, p) = e^{i\delta(k, p)}. \quad (4.37)$$

Warunek kwantowania dla fluktuacji wygląda teraz następująco

$$k_n = \frac{2\pi n}{L} + \frac{\delta(k_n)}{L}, \quad (4.38)$$

gdzie pominęliśmy jawną zależność od p w fazie. Wystarczające okazuje się, jeśli we wzorze (4.38) faza rozpraszania wzięta będzie w $L = \infty$, gdyż poprawki skończonego rozmiaru do $\delta(k)$ dają wynik podwiodący w stosunku do tego, który otrzymamy.

Standardową metodą na policzenia poprawek od fluktuacji jest zsumowanie energii wszystkich modów drgań zredukowanych o wartość fluktuacji wokół próżni

$$\delta\varepsilon_{\text{naiwne}} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\varepsilon(k_n) - \varepsilon(k_n^{(0)})). \quad (4.39)$$

Okazuje się jednak, że wynik ten jest poprawny dla przypadku, gdy rozpatrywany soliton znajduje się w spoczynku. W naszym przypadku soliton porusza się natomiast z prędkością

$$v = \frac{d\varepsilon(p)}{dp}. \quad (4.40)$$

Wynika stąd, że aby nasz układ był periodyczny musimy uwzględnić jednocześnie przesunięcie czasowe $t \rightarrow t + \tau$ wraz z przesunięciem przestrzennym $x \rightarrow x + L$, gdzie okres dany jest poprzez $\tau = \frac{L}{v}$. W takim przypadku analogonem standardowych wyrażeń $\tau\varepsilon(k)$ występujących w wykładnikach są tzw. kąty stabilizujące (patrz [48])

$$\nu(k) = \tau\varepsilon(k) - kL \equiv \tau\varepsilon(k) - \delta(k) = \tau \left(\varepsilon(k) - \frac{v}{L}\delta(k) \right), \quad (4.41)$$

gdzie wykorzystaliśmy fakt, że $e^{2\pi i n} = 1$. Nasuwa to sugestię, że zamiast sumować wartości energii należy sumować kąty stabilizujące. Tak też uczynimy w naszych rozważaniach. W ten sposób dostajemy wzór na poprawkę do energii w postaci

$$\delta\varepsilon = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\varepsilon(k_n) - \frac{v}{L}\delta(k_n) \right) - \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon(k_n^{(0)}). \quad (4.42)$$

Ograniczymy się tutaj jedynie do teorii z jednym rodzajem wzbudzeń. Pozwoli nam to na uproszczenie zapisu w czasie obliczeń, nie zmieni jednak głównej idei, którą w prosty sposób można przenieść na teorię z dowolną ilością wzbudzeń w spektrum.

W celu wykonania sum znajdujących się w równości (4.42), wykorzystamy wzór na resumację Poissona

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{2\pi n}{L}\right) = \frac{L}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dt F(t) e^{-imLt}. \quad (4.43)$$

Chcemy odtworzyć wynik na F -term, dlatego też jesteśmy zainteresowani jedynie wiodącymi członami eksponencjalnymi, dlatego też zachowamy tylko wyrazy, dla których $m = \pm 1$. Zaczniemy nasze obliczenia od wykonania sumowania po energiach

$$\delta\epsilon_1 = \frac{L}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{iLt} (\epsilon(k(t)) - \epsilon(t)) + \frac{L}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-iLt} (\epsilon(k(t)) - \epsilon(t)). \quad (4.44)$$

Zauważmy, że druga całka jest po prostu sprzężeniem zespolonym pierwszej. Wynika to z faktu, że sumujemy po energiach, które są liczbami rzeczywistymi podczas, gdy wyrażenia w eksponentach są sprzężone do siebie. Możemy więc zamienić powyższą sumę na podwojoną część rzeczywistą jednej z całek. Następnie możemy zcałkować tak otrzymany wynik przez części

$$\delta\epsilon_1 = \Re\left(\frac{L}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-iLt} (\epsilon(k(t)) - \epsilon(t))\right) \quad (4.45)$$

$$= \Re\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{dk}{dt} e^{-iLt} \epsilon'(k(t)) - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-iLt} \epsilon'(t)\right), \quad (4.46)$$

a także zamienić zmienną całkowania w pierwszej całce z t na k

$$\Re\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{-iL(k - \frac{\delta(k)})} \epsilon'(k) - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-iLt} \epsilon'(t)\right). \quad (4.47)$$

Skorzystaliśmy tutaj z równości $t = k - \frac{\delta(k)}{L}$, pochodzącej ze wzoru (4.38). Ostatecznie możemy zapisać wynik na $\delta\epsilon_1$ w postaci

$$\delta\epsilon_1 = \Re\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \epsilon'(k) e^{-iLk} (\mathcal{S}(k, p) - 1)\right). \quad (4.48)$$

Skoncentrujmy się teraz na drugiej części wzoru (4.42). Podobnie jak poprzednio użyjemy wzoru na resumację Poissona i zachowamy wyłącznie wiodące człony, a następnie zauważymy, że druga całka jest ponownie sprzężeniem zespolonym pierwszej

$$\delta\epsilon_2 = \frac{\epsilon'(p)}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{iLt} \delta(k(t)) + \frac{\epsilon'(p)}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-iLt} \delta(k(t)) \quad (4.49)$$

$$= \Re\left(\frac{\epsilon'(p)}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-iLt} \delta(k(t))\right). \quad (4.50)$$

W celu policzenia tych całek należy użyć zależności

$$\delta(k(t)) = (k(t) - t)L, \quad (4.51)$$

a następnie scałkować przez części i zmienić zmienne, jak w poprzednim przypadku

$$\delta\epsilon_2 = \Re \left(\frac{\epsilon'(p)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{-iLk} (\mathcal{S}(k, p) - 1) \right). \quad (4.52)$$

Ostatecznie, łącząc ze sobą obydwa człony dostajemy wzór

$$\delta\epsilon_1 - \delta\epsilon_2 = \Re \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq_\star}{2\pi i} (\epsilon'(q_\star) - \epsilon'(p)) \cdot e^{-iq_\star L} \cdot (\mathcal{S}(q_\star, p) - 1) \right), \quad (4.53)$$

gdzie nazwaliśmy zmienną całkowania jako q_\star , w celu porównania wyniku z wyrażeniem na F -term. Całkowanie, z którym mamy do czynienia we wzorze (4.53), odbywa się po osi rzeczywistej. Z kolei wiemy, że we wzorze na F -term całkujemy po zmiennej w teorii zwierciadlanej. W celu porównania wzoru (4.53) z wzorem na F -term musimy przesunąć kontur całkowania. Podczas tej operacji możemy napotkać bieguny funkcji podcałkowej. Residua obliczone w tych biegunach odpowiadają μ -termom.

Ostatnim przekształceniem, prowadzącym do pełnej zgodności z wyrażeniem na F -term, będzie dokonanie zmiany zmiennych w całce z $q_\star = -i\tilde{\epsilon}(q)$ na q . Z uwagi na fakt, że

$$\frac{dq_\star}{dq} = \frac{-i}{\epsilon'(q_\star)}, \quad (4.54)$$

dostajemy wyrażenie (3.46) w przypadku, gdy rozpatrujemy teorię z jednym rodzajem cząstek w spektrum. Aby mieć teraz zgodność z teorią dla dowolnej ilości wzbudzeń zauważmy, że w tym przypadku musimy wysumować dodatkowo po wszystkich możliwych rodzajach fluktuacji. Należy przy tym pamiętać, że jeśli fluktuacja ma charakter fermionowy, to należy uwzględnić to, mnożąc wkład pochodzący od tych fluktuacji przez -1 . Prowadzi nas to do wzoru na energię

$$\delta\varepsilon = \sum_b (-1)^{F_b} \left(\frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\varepsilon(k_n) - \frac{v}{L} \delta_b(k_n) \right) - \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon(k_n^{(0)}) \right), \quad (4.55)$$

który, po analogicznych przekształceniach jak poprzednio, prowadzi dokładnie do wzoru (3.46). Wynika stąd, że wyrażenie na F -term bierze się z wiodących kwantowych fluktuacji wokół solitonu!

4.3.2 Obliczenie F -termu

W celu obliczenia poprawki energetycznej pochodzącej od fluktuacji wokół wielkiego magnonu użyjemy metody punktu siodłowego do obliczenia całki w (3.46). Wykładnik w wyrażeniu na F -term dany jest przez

$$e^{-2L \operatorname{arcsinh}\left(\frac{1}{4g} \sqrt{1+q^2}\right)}, \quad (4.56)$$

który po rozwinięciu do wyrazów kwadratowych daje

$$e^{-\frac{L}{2g} - \frac{L}{4g} q^2}. \quad (4.57)$$

Położenie punktu siodłowego jest więc dla punktu $q = 0$. Znając położenie punktu siodłowego możemy po pierwsze wykonać całkę gaussowską, która daje wynik

$$2\sqrt{\frac{\pi g}{L}} e^{-\frac{L}{2g}}, \quad (4.58)$$

oraz policzyć pozostałą część funkcji podcałkowej wstawiając $q = 0$. W tym punkcie jacobian staje się trywialny

$$\left(1 - \frac{\epsilon'(p)}{\epsilon'(q_*)}\right) \xrightarrow{q=0} 1. \quad (4.59)$$

Pozostaje więc policzenie elementów macierzy rozpraszania w punkcie siodłowym.

Podobnie jak w rachunku, w którym szukaliśmy μ -term, dzięki wzorowi (4.13) możemy obliczyć wiodące rozwinięcie dla wielkiego magnonu o pędzie p w silnym sprzężeniu

$$x_p^+ = e^{\frac{ip}{2}} \left(1 + \frac{1}{4g \sin \frac{p}{2}}\right), \quad x_p^- = e^{-\frac{ip}{2}} \left(1 + \frac{1}{4g \sin \frac{p}{2}}\right). \quad (4.60)$$

W celu policzenia rozwinięcia funkcji x_q^\pm w punkcie $q = 0$ musimy pamiętać, że zmienną q utożsamiamy z pędem w teorii zwierciadlanej, który odpowiada energii w teorii oryginalnej. Musimy więc analogicznie, jak zrobiliśmy to poprzednio dla pędu, wyrazić teraz zmienne x^\pm jako funkcje energii. Jeśli następnie skorzystamy z warunku $q = i\epsilon$, to dostaniemy wzór na x_q^\pm dla cząstek wirtualnych. Wstawiając położenie punktu siodłowego $q = 0$ do tak otrzymanych wzorów, dostajemy wiodące rozwinięcie w postaci

$$x_q^+ = i \left(1 + \frac{1}{4g}\right), \quad x_q^- = i \left(1 - \frac{1}{4g}\right). \quad (4.61)$$

Jedyne, co pozostaje do zrobienia, to obliczenie macierzy $\mathcal{S}(x_p^\pm, x_q^\pm)$ w punktach danych przez wzory (4.60) oraz (4.61). Ponownie, jak można znaleźć w Dodatku B, macierz rozpraszania może zostać zapisana jako iloczyn trzech czynników – części skalarnej, części macierzowej oraz dressing factora. Wkład pochodzący od dressing factora dany jest w tym przypadku jedynie poprzez jego wiodący wyraz w silnym sprzężeniu – fazę AFS, która w tym przypadku jest równa

$$e^{-2 \sin \frac{p}{2}} \frac{1 + \sin \frac{p}{2}}{1 - \sin \frac{p}{2}} e^{-ip}. \quad (4.62)$$

Pozostałe wyrazy dressing factora są podwiodące w punkcie siodłowym. Część skalarna może być łatwo policzona i daje

$$\frac{1 - \sin \frac{p}{2}}{1 + \sin \frac{p}{2}} e^{ip}. \quad (4.63)$$

Z kolei część macierzowa dana jest przez przesunięcia fazowe, które mogą być znalezione w [49]. Jeśli teraz połączymy wszystkie te fakty, to możemy znaleźć wyrażenia na elementy macierzy rozpraszania w postaci

$$\begin{aligned} (e^{i\delta})_{S^5} &= \frac{1 + \sin \frac{p}{2}}{1 - \sin \frac{p}{2}} \cdot e^{-2 \sin \frac{p}{2}}, \\ (e^{i\delta})_{AdS_5} &= 1 \cdot e^{-2 \sin \frac{p}{2}}, \\ (e^{i\delta})_{\text{fermiony}} &= \frac{\cos \frac{p}{4} + \sin \frac{p}{4}}{\cos \frac{p}{4} - \sin \frac{p}{4}} \cdot e^{-2 \sin \frac{p}{2}}. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Ostatecznie, sumując $\left(4 (e^{i\delta})_{S^5} + 4 (e^{i\delta})_{AdS_5} - 8 (e^{i\delta})_{fermions}\right)$ dostajemy wynik na F-term dla wielkiego magnonu

$$\delta\epsilon^F = -\sqrt{\frac{g}{\pi L}} \cdot \frac{16 \sin^2 \frac{p}{4}}{1 - \sin \frac{p}{2}} e^{-2 \sin \frac{p}{2}} e^{-\frac{L}{2g}}. \quad (4.65)$$

Tym sposobem udało nam się otrzymać obydwie wiodące poprawki eksponencjalne do energii wielkiego magnonu, dane przez formuły Lüschera.

Rozdział 5

Słabe sprzężenie

W poprzednim rozdziale zajmowaliśmy się problemem znalezienia wymiaru anomalnego dla wielkich magnonów w silnym sprzężeniu. Teraz chcielibyśmy z kolei zainteresować się, jak można obliczyć wymiar anomalny dla małej stałej sprzężenia, pozostając po strunowej stronie korespondencji AdS/CFT. Zazwyczaj uważano, że rachunki po stronie teorii strun możliwe są jedynie dla dużej stałej sprzężenia. Jednak dzięki własności całkowalności dwuwymiarowej teorii pola na strunie, dysponujemy np. macierzą \mathcal{S} dla tej teorii dla dowolnej wartości stałej 't Hoofta. Nic nie stoi więc na przeszkodzie, aby wzory Lüschera zastosować także w tym przypadku. Jest to o tyle interesujące, że umożliwia kontakt z perturbacyjnym obszarem teorii cechowania, dla której możliwe jest przeprowadzenie niezależnych rachunków perturbacyjnych, obliczając diagramy Feynmana.

W centrum naszych rozważań będą tzw. operatory twist- J . Wybieramy akurat te operatory, gdyż przy ich analizie po raz pierwszy zostało stwierdzone, że równania Asymptotycznego Ansatzu Bethgo załamują się, jeśli rozpatrywać będziemy wystarczająco wysoki rząd w rozwinięciu perturbacyjnym. Poza tym należą one do pewnego domkniętego podsektora pełnej teorii $\mathcal{N} = 4$ SYM, co znacznie ułatwia ich analizę. Domkniętość podsektora teorii znaczy w tym przypadku, że działanie operatora dylatacji nie wyprowadza nas z danego podsektora i dzięki temu możemy ograniczyć się tylko do niego, zapominając o wpływie pozostałych operatorów na wymiar anomalny. W szczególności równania ABA znacznie się upraszczają. W przypadku operatorów twist- J mamy do czynienia z sektorem $\mathfrak{sl}(2)$, którego domkniętość została udowodniona, przynajmniej perturbacyjnie, w pracy [12]. Stany o najwyższej wadze (ang. highest-weight states) należące do tego podsektora składają się z J skalarnych operatorów \mathcal{Z} oraz M pochodnych kowariantnych \mathcal{D} (w wybranym kierunku na stożku świetlnym)

$$\text{Tr} [\mathcal{Z}^J \mathcal{D}^M] + \dots, \quad (5.1)$$

gdzie kropki biorą się z faktu, że stany własne operatora dylatacji są kombinacjami liniowymi operatorów z różnym rozmieszczeniem pochodnych i pól skalarnych wewnątrz śladu. W obrazie łańcuchów spinowych operatory twist- J mogą być utożsamione z niezwartym łańcuchem spinowym o spinie $-\frac{1}{2}$, długości J oraz ilości wzbudzeń M , odpowiadającej wartości globalnego spinu.

Naszym celem będzie policzenie wymiaru skalowania dla operatorów twist- J . W skład wymiaru skalowania wchodzi klasyczny wymiar operatora, który w tym przypadku wynosi

$J + M$ oraz wymiar anomalny γ odpowiadający za efekty kwantowe

$$\Delta(g, J, M) = J + M + \gamma(g, J, M). \quad (5.2)$$

W naszych rozważaniach będziemy zainteresowani jedynie rozwinięciem w słabym sprzężeniu. Wymiar anomalny można w zasadzie znaleźć, wyraz po wyrazie, licząc wkład pochodzący od diagramów Feynmana z coraz to wyższą ilością pętli. Rozwinięcie to ma postać

$$\gamma(g, J, M) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \gamma_{2\ell}(J, M) g^{2\ell}, \quad (5.3)$$

gdzie γ_2 jest wynikiem jednopętlowym, γ_4 – dwupętlowym, itd. Zasadniczo jednak policzenie wkładu od wszystkich grafów Feynmana jest zadaniem praktycznie niewykonalnym. Dlatego też będziemy używać metod znanych z całkowalnych teorii pola w celu wyznaczenia funkcji γ .

Skoncentrujemy się jedynie na dwóch najprostszych klasach operatorów twist- J . Będą to operatory twist-2 oraz twist-3¹. Zaczniemy od pierwszego rodzaju. W tym przypadku musimy wziąć dokładnie dwa operatory \mathcal{Z} i dowolną ilość pochodnych kowariantnych. Postać ogólna operatorów twist-2 wygląda następująco

$$\text{Tr} [\mathcal{Z}^2 \mathcal{D}^M] + \dots \quad (5.4)$$

Okazuje się, że dla nieparzystej ilości wzbudzeń M operatory twist-2 chronione są przez supersymetrię lub są supersymetrycznymi partnerami operatorów z mniejszym M , a co za tym idzie ich wymiar anomalny zeruje się lub nie niesie nowej informacji. Z kolei dla każdej parzystej wartości M istnieje dokładnie jeden niezależny stan o najwyższej wadze, którego wymiar skalowania nie jest zachowywany przez supersymetrię (ang. non-BPS state). Wymiar anomalny tych operatorów może być wyznaczony przy użyciu równań Asymptotycznego Ansatzu Bethego aż do trzech pętli. Jak zobaczymy jednak w dalszej części tego rozdziału, ABA nie daje poprawnego wyniku zaczynając od wyniku czteropętlowego. Okazuje się, że aby otrzymać poprawny wynik, należy uzupełnić go o wkład pochodzący od efektów skończonego rozmiaru, tzn. policzyć poprawki Lüschera.

Drugą grupą operatorów, których wymiarem anomalnym będziemy zainteresowani będą operatory twist-3

$$\text{Tr} [\mathcal{Z}^3 \mathcal{D}^M] + \dots \quad (5.5)$$

W tym przypadku mamy jedną zasadniczą różnicę w porównaniu do operatorów twist-2. Jeśli zajmujemy się operatorami twist-3, to dla danego parzystego M istnieje więcej niż jeden stan, który nie jest zachowywany przez supersymetrię. W naszych rozważaniach skupimy się jedynie na stanie o najniższym wymiarze anomalnym.

W rozdziale tym, na początku podamy kilka obserwacji dotyczących ogólnych własności wymiaru anomalnego dla operatorów twist- J , które pozwolą nam na wyznaczenie go aż do pięciu pętli w rozwinięciu perturbacyjnym dla operatorów twist-2 oraz twist-3. Własnościami tymi są zasada maksymalnej transcendentności oraz zasada parzystości. Następnie podamy, jaka powinna być asymptotyka wymiaru anomalnego dla dużych

¹Operatory twist-1 są w tym kontekście trywialne, gdyż są chronione przez supersymetrię. Ich wymiar skalowania dany jest jedynie przez wymiar klasyczny, który w tym przypadku wynosi $M + 1$.

wartości spinu oraz związek równania BFKL z wymiarem anomalnym przedłużonym analitycznie do niefizycznej ilości wzbudzeń $M = -1$. Pozwoli nam to na nietrywialny test otrzymanych przez nas wyników. Rachunek w celu znalezienia wymiaru anomalnego będzie składał się z dwóch części. Na początku opiszemy, jak można rozwiązać perturbacyjnie równania ABA, a następnie zobaczymy jaki wpływ na wynik otrzymany z ABA mają efekty wrapping.

5.1 Własności wymiaru anomalnego w słabym sprzężeniu

Naszym celem jest znalezienie rozwinięcia perturbacyjnego dla wymiaru anomalnego operatorów typu twist- J . Każdy wyraz tego rozwinięcia jest pewną funkcją liczby wzbudzeń M .

$$\gamma(g, M) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \gamma_{2\ell}(M) g^{2\ell}, \quad (5.6)$$

gdzie zaniedbaliśmy jawną zależność od J , gdyż wszystkie własności, które podamy są niezależne od tego parametru. Dla początkowych wyrazów rozwinięcia oraz małych wartości J nie jest trudno znaleźć ścisłą (analityczną) postać funkcji $\gamma_{2\ell}$. Jednak w miarę, jak jesteśmy zainteresowani wyższymi wyrazami, nie jesteśmy w stanie znaleźć rozwiązania tego problemu analitycznie. W ogólności, nic nie stoi na przeszkodzie, aby każdy współczynnik rozwinięcia był dowolną funkcją zmiennej M . Jeśli jednak przyglądnijemy się strukturze rozwiązań dla początkowych wyrazów, to możemy zauważyć pewne wspólne własności tych funkcji. Na podstawie tych obserwacji sformułowane zostały pewne hipotezy, jak powinien wyglądać dowolny wyraz rozwinięcia wymiaru anomalnego dla słabego sprzężenia.

Pierwszą obserwacją jest fakt, że rozwinięcie wymiaru anomalnego da się zapisać jako kombinacja ze współczynnikami wymiernymi pewnych specyficznych funkcji argumentu M . Funkcjami tymi są funkcje ζ -Riemanna oraz tzw. *zagnieżdżone sumy harmoniczne* zdefiniowane w następujący sposób: najprostsze z tych funkcji są dobrze znanymi funkcjami harmonicznymi

$$S_a(M) = \sum_{j=1}^M \frac{(\text{sgn}(a))^j}{j^{|a|}}, \quad a \in \mathbb{Z}. \quad (5.7)$$

Następnie, wykorzystując standardowe funkcje harmoniczne, możemy zbudować jednokrotnie zagnieżdżone sumy harmoniczne jako

$$S_{a_1, a_2}(M) = \sum_{j=1}^M \frac{(\text{sgn}(a_1))^j}{j^{|a_1|}} S_{a_2}(j), \quad a_1, a_2 \in \mathbb{Z}. \quad (5.8)$$

Każda następna, bardziej skomplikowana zagnieżdżona suma harmoniczna, zdefiniowana jest rekurencyjnie, używając funkcji z wcześniejszego poziomu, w analogiczny sposób

$$S_{a_1, \dots, a_n}(M) = \sum_{j=1}^M \frac{(\text{sgn}(a_1))^j}{j^{|a_1|}} S_{a_2, \dots, a_n}(j), \quad a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}. \quad (5.9)$$

Obserwacja ta daje nam pewną bazę funkcji, którą będziemy nazywać *bazą kanoniczną*, w języku których możemy zapisać wymiar anomalny. A priori, nie upraszcza to jednak znacząco problemu, gdyż istnieje nieskończenie wiele zagnieżdżonych sum harmoniczných i będziemy potrzebować dodatkowych warunków, aby móc zdeterminować, które z nich będą wchodzić w skład funkcji $\gamma_{2\ell}$. Sekcja ta w całości poświęcona jest opisaniu tych dodatkowych warunków, które musi spełniać wymiar anomalny. Chcielibyśmy jednak zaznaczyć, że część opisanych tu ograniczeń na wymiar anomalny bierze się jedynie z obserwacji dla początkowych argumentów i jak do tej pory są jedynie hipotezami. Niemniej, hipotezy te pracują bardzo dobrze i nie znaleziono jak do tej pory wyniku, który nie byłby z nimi w zgodzie.

W kolejnej części podrozdziału opiszemy po kolei własności funkcji $\gamma_{2\ell}(M)$. Zaczniemy od zasady maksymalnej transcendentności, która ogranicza ilość dopuszczalnych funkcji dających wkład do $\gamma_{2\ell}$ z nieskończenie wielu do skończonej ich ilości. Dla każdego ℓ będziemy więc mieli skończoną bazę funkcji harmoniczných rozpinających, ze współczynnikami wymiernymi, funkcje $\gamma_{2\ell}$. Następnie opiszemy zasadę parzystości znaną w kontekście (QCD) [50, 51] i zaadoptowaną do przypadku operatorów twist- J w teorii $N = 4$ SYM w [52]. Zasada parzystości wprowadza nową, mniej liczną, bazę funkcji, za pomocą których możemy wyrazić nasz wynik. Baza ta składa się z tzw. *sum binomialnych* zdefiniowanych poprzez

$$\mathbb{S}_{i_1, \dots, i_k}(M) = (-1)^N \sum_{j=1}^M (-1)^j \binom{M}{j} \binom{M+j}{j} S_{i_1, \dots, i_k}(j). \quad (5.10)$$

W dalszych rozważaniach będziemy zamiennie używać bazy kanonicznej oraz bazy binomialnej w zależności, która z nich będzie bardziej odpowiednia do opisanego problemu.

Zasada maksymalnej transcendentności jak i zasada parzystości posłużą w dalszych rachunkach do ograniczenia ilości funkcji, które musimy brać pod uwagę. Pozostałe dwa ograniczenia, które opiszemy mają na celu zweryfikowanie, czy otrzymany przez nas wynik jest wynikiem prawidłowym. Pierwszym testem, czy otrzymaliśmy poprawną funkcję $\gamma_{2\ell}$ będzie sprawdzenie, jaka jest asymptotyka wyniku dla dużych M i porównaniem jej z tzw. wierzchołkowym wymiarem anomalnym (ang. cusp anomalous dimension). Drugim, ważnym jedynie dla operatorów twist-2, będzie przedłużenie analityczne naszego wyniku do niefizycznej wartości ilości wzbudzeń $M = -1$, a następnie porównanie go z przewidywaniami z równania BFKL.

5.1.1 Zasada maksymalnej transcendentności

Zasada maksymalnej transcendentności została pierwotnie sformułowana w kontekście QCD, a następnie zaadoptowana w [53] do teorii $\mathcal{N} = 4$ SYM. Ostateczną postać, także prezentowaną tutaj, można znaleźć w [54]. Aby móc sformułować zasadę maksymalnej transcendentności, musimy wprowadzić pojęcie stopnia transcendentności funkcji. Z definicji, stopień transcendentności jest pewną liczbą naturalną. Zaczniemy od najprostszych funkcji, jakimi są funkcje stałe. W tym przypadku stopień przyjmuje wartość zerową dla wszystkich funkcji stałych równych pewnej liczbie algebraicznej oraz niezerową dla wartości przestępnych. W szczególności, wszystkie funkcje stałe równe pewnej liczbie

Funkcja (f)	Stopień transcendentalności $\#(f)$
$\frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z}$	0
$\zeta(n)$	n
π^n	n
$\log(n+1)$	n
$S_{a_1, \dots, a_n}(M)$	$a_1 + \dots + a_n$
$S_{i_1, \dots, i_k}(M)$	$i_1 + \dots + i_n$

Tabela 5.1: Stopień transcendentalności dla wybranych funkcji.

wymiernej mają stopień równy zero. Z kolei funkcje stałe równe $\zeta(n)$, $n > 1$, którymi będziemy się interesować w tym rozdziale, są przestępne i mają niezerowy stopień (w tym przypadku równy n). Stopień transcendentalności można zdefiniować także dla funkcji takich, jak zagnieżdżone sumy harmoniczne czy sumy binomialne. Wartości stopnia transcendentalności dla różnych funkcji podaje tabela 5.1.

Ponadto, zachodzi prosta relacja pozwalająca policzyć stopień transcendentalności dla iloczynu funkcji

$$\#(f \cdot g) = \#(f) + \#(g). \quad (5.11)$$

Zasada maksymalnej transcendentalności mówi o tym, że funkcje, występujące w rozwinięciu wymiaru anomalnego operatorów twist- J , dla ustalonego rzędu rozwinięcia mają ustalony stopień transcendentalności równy

$$\#(\gamma_{2\ell}) = 2\ell - 1. \quad (5.12)$$

Redukuje to w szczególności ilość funkcji, za pomocą których możemy wyznaczyć $\gamma_{2\ell}$ do skończonej liczby, gdyż dla danego ℓ istnieje tylko skończenie wiele zagnieżdżonych sum harmonicznym mających stopień transcendentalności mniejszy lub równy $2\ell - 1$.

5.1.2 Zasada parzystości

Zasada parzystości² daje nam dodatkowe ograniczenie na postać rozwinięcia perturbacyjnego wymiaru anomalnego. W celu sformułowania tej zasady musimy zdefiniować pewną nową funkcję \mathcal{P} , która jest bardziej odpowiednia do tych celów niż wymiar anomalny. Podobnie jak w [52] zdefiniujemy tę funkcję jako

$$\gamma(M) = \mathcal{P} \left(M + \frac{1}{2}\gamma(M) \right) \quad (5.13)$$

Jest to zależność, w której wymiar anomalny występuje w postaci uwikłanej. Jeśli uda nam się wyznaczyć postać funkcji \mathcal{P} , to będziemy mogli rozwiązać równanie (5.13) iteracyjnie względem γ .

²Nazwa ta wywodzi się z faktu, że we wzorze (5.14) występują jedynie parzyste potęgi J . W literaturze można także spotkać inną nazwę – zasada obopólności (ang. reciprocity principle), mającą swe podłoże we wzorze (5.13)

Samo zdefiniowanie funkcji \mathcal{P} , a priori, nie upraszcza problemu. Zasada parzystości mówi jednak, że asymptotyka funkcji \mathcal{P} musi być postaci

$$\mathcal{P}(M) = \sum_{\ell \geq 0} \frac{a_\ell(\log J^2)}{J^{2\ell}}, \quad J^2 = M(M+1) \gg 1, \quad (5.14)$$

gdzie funkcje $a_\ell(M)$ muszą być wielomianami. Jak można zauważyć, tylko parzyste potęgi J pojawiają się w rozwinięciu asymptotycznym, co tłumaczy nazwę zasady, którą tu prezentujemy.

Okazuje się, że dla ustalonego stopnia n , jedynymi funkcjami o transcendentalności n , spełniającymi warunek (5.14), są binomialne sumy harmoniczne, zdefiniowane w (5.10), w których wszystkie współczynniki są dodatnie. Ilość tych funkcji dla ustalonego stopnia transcendentalności n jest dokładnie równa 2^{n-1} i jest znacznie mniejsza od ilości wszystkich możliwych zagnieżdżonych sum harmonicznych stopnia n . Zasada parzystości mówi nam więc, że w celu znalezienia wyniku należy wyznaczyć funkcję \mathcal{P} w języku funkcji ζ oraz sum binomialnych, a następnie rozwiązać równanie (5.13) względem wymiaru anomального. Co jest bardzo ważne, wymiaru anomального nie da zapisać się używając jedynie sum binomialnych – są one w sposób istotny stowarzyszone z funkcją \mathcal{P} .

5.1.3 Ograniczenia na asymptotykę

W [55] Korchemsky zauważył, że dla operatorów twist- J w granicy dla dużej ilości wzbudzeń wiodąca rozbieżność wymiaru anomального jest pojedynczą rozbieżnością logarytmiczną ze współczynnikiem danym przez wierzchołkowy wymiar anomalny

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \gamma(g, M) = 2\gamma_{\text{cusp}}(g) \log M \quad (5.15)$$

w pełnym rozwinięciu perturbacyjnym. Wynik ten jest niezależny od J . Z kolei wierzchołkowy wymiar anomalny w teorii $\mathcal{N} = 4$ SYM może być znaleziony perturbacyjnie korzystając np. z równania BES (Beisert-Eden-Staudacher) [20]. Wynik do pięciu pętli dany jest przez

$$\begin{aligned} 2\gamma_{\text{cusp}}(g) = & 8g^2 - \frac{8}{3}\pi^2 g^4 + \frac{88}{45}\pi^4 g^6 - 16 \left(\frac{73}{630}\pi^6 + 4\zeta(3)^2 \right) g^8 \\ & + 32 \left(\frac{887}{14175}\pi^8 + \frac{4}{3}\pi^2 \zeta(3)^2 + 40\zeta(3)\zeta(5) \right) + \dots \end{aligned} \quad (5.16)$$

W celu sprawdzenia, czy otrzymany przez nas wynik na wymiar anomalny ma szansę być poprawny należy więc zbadać dla niego granicę $M \rightarrow \infty$, a następnie sprawdzić, czy odzwierciedla ona wierzchołkowy wymiar anomalny.

Dla operatorów twist- J jest jedna dodatkowa obserwacja dotycząca granicy $M \rightarrow \infty$. Okazuje się, że wystarczy wziąć jedynie asymptotykę rozwiązania pochodzącego od ABA i dostaniemy pełny wymiar wierzchołkowy. Wynika stąd, że wrapping nie ma żadnego wpływu na wiodącą asymptotykę dla dużych M . Dla przypadku operatorów twist-2 (dla czterech pętli) rachunek prezentujący to zachowanie znajduje się w Dodatku C.

5.1.4 Równanie BFKL

Ograniczenia pochodzące od równania BFKL [56, 57, 58] dotyczą jedynie operatorów twist-2. W celu znalezienia związku pomiędzy tymi, na pierwszy rzut oka całkowicie różnymi obiektami, zacznijmy od motywacji mającej swoje podłoże w QCD. W granicy Regge amplitudy rozpraszania cząstek nie niosących koloru są zdominowane przez wymianę dwóch efektywnych cząstek – zreggeizowanych gluonów. Kombinacja dwóch takich cząstek jest często nazywana pomeronem i odpowiada za wiodącą asymptotykę amplitud rozpraszania w granicy Regge. Równanie, którego rozwiązaniami są wartości własne hamiltonianu Reggego nosi nazwę równania BFKL od nazwisk jego odkrywców - Balitsky'ego, Fadina, Kuraeva oraz Lipatova. Chociaż formalnie w przypadku teorii $\mathcal{N} = 4$ SYM macierz \mathcal{S} nie może zostać zdefiniowana, to analiza amplitud rozpraszania wykazuje, że także w tym przypadku gluony reggeizują. W wiodącym rzędzie równanie BFKL dla QCD oraz dla teorii $\mathcal{N} = 4$ SYM jest identyczne. Z kolei w rzędzie podwiodącym równanie (NLO BFKL) dla QCD jest niesłychanie skomplikowane i znalezienie go zajęło prawie 10 lat pracy. W przypadku teorii $\mathcal{N} = 4$ SYM jednak, ze względu na dużą ilość symetrii, hamiltonian Reggego znacząco się upraszcza, a co za tym idzie również równanie NLO BFKL jest prostsze [53].

Relacja pomiędzy wymiarem anomalnym operatorów twist-2 a równaniem BFKL, oraz jego wersją dla poprawek podwiodących (NLO BFKL), może być znaleziona, gdy przeprowadzimy przedłużenie analityczne funkcji $\gamma(g, M)$ do zespolonych wartości M . Okazuje się, że w każdym rzędzie rozwinięcia perturbacyjnego, funkcje $\gamma_{2\ell}(M)$ będą miały osobliwości dla wszystkich ujemnych liczb całkowitych M . Pierwszy ze zbioru punktów osobliwych

$$M = -1 + \omega \quad (5.17)$$

okazuje się być związany ze wspomnianym już pomeronem. W powyższym wzorze ω powinno być rozpatrywane jako nieskończenie mała liczba. Gdy rozwiniemy teraz $\gamma_{2\ell}$ wokół tego punktu, to dostaniemy wyrażenia zawierające potęgi odwrotności ω . Co jednak najważniejsze, residua policzone w tym punkcie oraz rząd bieguna może być obliczone używając równania BFKL!

Uogólnione równanie BFKL może zostać zapisane w następującej postaci

$$\frac{\omega}{-4g^2} = \chi(\gamma) - g^2 \delta(\gamma), \quad (5.18)$$

gdzie

$$\chi(\gamma) = \Psi\left(-\frac{\gamma}{2}\right) + \Psi\left(1 + \frac{\gamma}{2}\right) - 2\Psi(1), \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} \delta(\gamma) = & 4\chi''(\gamma) + 6\zeta(3) + 2\zeta(2)\chi(\gamma) + 4\chi(\gamma)\chi'(\gamma) \\ & - \frac{\pi^3}{\sin\frac{\pi\gamma}{2}} - 4\Phi\left(-\frac{\gamma}{2}\right) - 4\Phi\left(1 + \frac{\gamma}{2}\right), \end{aligned} \quad (5.20)$$

natomiast funkcja $\Phi(\gamma)$ dana jest wzorem

$$\Phi(\gamma) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+\gamma)^2} \left[\Psi(k+\gamma+1) - \Psi(1) \right]. \quad (5.21)$$

We wszystkich powyższych wzorach przez $\Psi(x)$ oznaczyliśmy funkcję digamma zdefiniowaną jako pochodna logarytmiczna funkcji Gamma Eulera

$$\Psi(x) = \frac{d}{dx} \log \Gamma(x). \quad (5.22)$$

Możemy teraz rozwiązać iteracyjnie równanie BFKL względem γ , do dowolnego rzędu w rozwinięciu perturbacyjnym, w celu znalezienia struktury osobliwości wymiaru anomalnego operatorów twist-2 wokół $M = -1 + \omega$. W dalszej części tego rozdziału będziemy chcieli porównać przedłużenie analityczne wymiaru anomalnego do $M = -1 + \omega$ dla pierwszych pięciu rzędów w rozwinięciu perturbacyjnym. Dlatego też podajemy tutaj rozwiązanie równania (5.18) aż do tego rzędu

$$\begin{aligned} \gamma = & (2 + 0\omega + \mathcal{O}(\omega^2)) \left(\frac{-4g^2}{\omega} \right) - (0 + 0\omega + \mathcal{O}(\omega^2)) \left(\frac{-4g^2}{\omega} \right)^2 \\ & + (0 + \zeta(3)\omega + \mathcal{O}(\omega^2)) \left(\frac{-4g^2}{\omega} \right)^3 - \left(4\zeta(3) + \frac{5}{4}\zeta(4)\omega + \mathcal{O}(\omega^2) \right) \left(\frac{-4g^2}{\omega} \right)^4 \\ & - \left(0 + \left(2\zeta(2)\zeta(3) + 16\zeta(5) \right) \omega + \mathcal{O}(\omega^2) \right) \left(\frac{-4g^2}{\omega} \right)^5 \pm \dots \end{aligned} \quad (5.23)$$

Jest to podwójny szereg. Po pierwsze, mamy rozwinięcie w g^2 aż do piątego rzędu. Po drugie, dla każdej pętli mamy wiodące oraz podwiodące rozwinięcie w ω .

Gdy uzyskamy już wynik na wymiar anomalny dla operatorów twist-2 (aż do pięciu pętli), dokonamy jego przedłużenia analitycznego do $M = -1 + \omega$, a następnie porównamy ze wzorem (5.23).

5.2 Asymptotyczny Ansatz Bethego

W tej części pracy będziemy zainteresowani znalezieniem, jakie przewidywania dają równania ABA dla operatorów twist- J . Skoncentrujemy się tutaj na operatorach twist-2 oraz twist-3. Dla operatorów twist-2 chcielibyśmy się głównie skupić na, bardzo nietrywialnych, wynikach dla czterech i pięciu pętli. Rozwiązanie równań Asymptotycznego Ansatzu Bethego dla czterech pętli można znaleźć w pracy [54] podczas, gdy wynik pięciopętlowy znajduje się w [A3]. Z kolei dla operatorów twist-3 będziemy zainteresowani jedynie wynikiem pięciopętlowym, który można znaleźć w [A5].

5.2.1 Operatory twist-2

Nasze rozważania rozpoczniemy od operatorów twist-2. Zainteresowanie wynikiem cztero- oraz pięciopętlowym ma zasadniczo różne podłoże. Okazuje się, że dla czterech pętli przedłużenie analityczne wymiaru anomalnego pochodzącego od ABA nie pokrywa się z przewidywaniami z równania BFKL. Dlatego też niezwykle ważne jest pokazanie, że jeśli wkład od ABA zostanie uzupełniony przez efekty skończonego rozmiaru, to dostajemy pełną zgodność. Pokazuje to w szczególności, że na poziomie czterech pętli asymptotyczna całkowalność zostaje złamana, lecz wciąż możemy znaleźć rozwiązanie używając metod całkowalnych teorii pola na cylindrze. Dodatkowo, potwierdza to, że nasze wzory na poprawkę Lüschera są poprawne.

Zainteresowanie wynikiem pięciopętlowym z kolei ma głównie na celu przygotowanie rezultatów, które umożliwią sprawdzenie poprawności równań TBA znalezionych w [29, 30, 31]. Wynik pięciopętlowy pozwala także w sposób bardziej dokładny zweryfikować poprawność wzorów na poprawki Lüschera. Jak zobaczymy później, w celu uzyskania czteropętlowego wymiaru anomalnego pochodzącego od efektów wrapping wystarczy, jeśli użyjemy jedynie części wzorów (3.93)-(3.96). W szczególności modyfikacja kwantowania pochodzącego z ABA daje wkład dopiero na poziomie pięciu pętli. Jeśli znajdziemy więc poprawny pięciopętlowy wynik ze wzorów (3.93)-(3.96), znaczyć to będzie, że także modyfikacja ABA została poprawnie zapostulowana. Na koniec wspomnimy także, że dressing factor zaczyna odgrywać rolę dopiero dla pięciu pętli. Dzięki temu mamy więc możliwość sprawdzenia poprawności jego rozwinięcia w słabym sprzężeniu.

Asymptotyczny Ansatz Bethego dla operatorów twist-2, należących do podsektora $\mathfrak{sl}(2)$ pełnej teorii, może być znaleziony bezpośrednio z równań ABA dla pełnej teorii, które można znaleźć w Tabeli 2.1. Przyjmuje on postać

$$\left(\frac{x_k^+}{x_k^-}\right)^2 = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^M \frac{x_k^- - x_j^+}{x_k^+ - x_j^-} \frac{1 - g^2/x_k^+ x_j^-}{1 - g^2/x_k^- x_j^+} e^{2i\theta(u_k, u_j)}. \quad (5.24)$$

Powyższy układ składa się z M równań dla $k = 1, \dots, M$, które muszą być rozwiązane względem wielkości u_k . Zmienne x_k^\pm wyrażone są poprzez u_k używając mapy Żukowskiego

$$x_k^\pm = x(u_k^\pm), \quad u^\pm = u \pm \frac{i}{2}, \quad x(u) = \frac{u}{2} \left(1 + \sqrt{1 - 4\frac{g^2}{u^2}}\right). \quad (5.25)$$

Funkcja $\theta(u, v)$ we wzorze (5.24) to tzw. dressing phase i jej definicję można znaleźć w Dodatku B. Jeśli uda nam się wyznaczyć rozwiązanie równania (5.24), to wtedy wymiar anomalny pochodzący od ABA dany jest wzorem

$$\gamma^{\text{ABA}}(g) = 2g^2 \sum_{k=1}^M \left(\frac{i}{x_k^+} - \frac{i}{x_k^-}\right). \quad (5.26)$$

Przejdźmy teraz do wytłumaczenia sposobu rozwiązania układu równań (5.24). W ogólności nie jesteśmy w stanie rozwiązać go dla dużej ilości M wzbudzeń. Po pierwsze dlatego, że wtedy prawa strona każdej z równości (5.24) staje się coraz bardziej skomplikowana – staje się iloczynem wielu czynników. A po drugie, bo ilość równań w naszym układzie także rośnie. Dostajemy więc układ wielu skomplikowanych równań nieliniowych. Możemy jednak poszukać rozwiązania perturbacyjnie dla małych wartości stałej sprzężenia g , startując od przypadku jednopętlowego, a następnie iteracyjnie dla kolejnych rzędów rozwinięcia.

Pierwszy wyraz rozwinięcia dostaniemy wstawiając po prostu $g = 0$ do równania (5.24). Dostaniemy wtedy jednopętlowe rozwinięcie w postaci

$$\left(\frac{u_k + \frac{i}{2}}{u_k - \frac{i}{2}}\right)^L = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^M \frac{u_k - u_j - i}{u_k - u_j + i}, \quad (5.27)$$

czyli dobrze znane równanie ABA dla lokalnego łańcucha Heisenberga z symetrią $\mathfrak{sl}(2)$ – łańcucha spinowego $XXX_{-\frac{1}{2}}$. Rozwiązanie tego problemu jest znane i dane poprzez pierwiastki funkcji hipergeometrycznej jako

$$N(M) \prod_{i=1}^M (u - u_k) = {}_3F_2 \left(\begin{matrix} -M, M+1, \frac{1}{2} + iu \\ 1, 1 \end{matrix} \middle| 1 \right), \quad (5.28)$$

gdzie $N(M)$ jest normalizacją, która nie będzie odgrywać znaczącej roli w dalszych rozważaniach, natomiast ${}_3F_2$ oznacza funkcję hipergeometryczną. Jeśli teraz obliczymy pochodną logarytmiczną wzoru (5.28) w punktach $\frac{i}{2}$ oraz $-\frac{i}{2}$, a następnie podstawimy do wzoru na wymiar anomalny (5.26), to otrzymamy, że

$$\gamma_2^{\text{ABA}}(M) = 8S_1(M). \quad (5.29)$$

Jak możemy zauważyć otrzymaliśmy wynik, który posiada poprawny stopień transcendentności $\#(\gamma_2^{\text{ABA}}(M)) = 1$. Spełnia też zasadę parzystości, ponieważ w tym przypadku $\mathcal{P}(M) = S_1(M) = \mathbb{S}_1(M)$ jest (jedyną) sumą binomialną z dodatnimi indeksami. Możemy teraz sprawdzić, czy wynik ten posiada odpowiednią asymptotykę dla dużych M oraz czy zgadza się z przewidywaniami z równania BFKL. Aby to zrobić należy skorzystać z wyników przedstawionych w Dodatkach D oraz C. W naszym przypadku

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow \infty} \gamma_2^{\text{ABA}}(M) &= 8 \log M + \mathcal{O}(1), \\ \gamma_2^{\text{ABA}}(-1 + \omega) &= 8 \left(-\frac{1}{\omega} + \omega \zeta(2) + \mathcal{O}(\omega^2) \right), \end{aligned} \quad (5.30)$$

co zgadza się z wymiarem wierzchołkowym (5.16) jak i z równaniem BFKL (5.23). Tak więc udało nam się, na poziomie jednej pętli, potwierdzić wszystkie własności, które wymiar anomalny powinien posiadać.

Wyniki analityczne na rozwiązania równania (5.24) znane są jeszcze dla dwóch oraz trzech pętli [59]. Nie będziemy tutaj przedstawiać ich dokładnej postaci, gdyż jest ona skomplikowana i nie jest istotna w naszych rozważaniach. Jedyne co zrobimy, to napiszemy, jaki wymiar anomalny możemy z nich otrzymać

$$\gamma_4^{\text{ABA}}(M) = 8 [S_3(M) + S_{-3}(M) - 2(S_{1,2}(M) + S_{2,1}(M) + S_{1,-2}(M))] \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} \gamma_6^{\text{ABA}}(M) &= 16 \left[2S_5(M) + 2S_{-5}(M) - S_{-3,2}(M) + 2 \left(S_{-2,-2,1}(M) + S_{-2,1,-2}(M) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + S_{1,-2,-2}(M) + S_{1,-2,2}(M) - S_{-3,-2}(M) - S_{-2,-3}(M) - S_{3,-2}(M) \right) \right. \\ &\quad \left. + 4 \left(S_{1,2,2}(M) + S_{2,1,2}(M) + S_{2,2,1}(M) + S_{3,1,1}(M) + S_{1,3,1}(M) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + S_{1,1,3}(M) + S_{1,2,-2}(M) + S_{2,1,-2}(M) - S_{1,4}(M) - S_{4,1}(M) - S_{-4,1}(M) \right) \right. \\ &\quad \left. - 5 \left(S_{2,3}(M) + S_{3,2}(M) \right) + 6S_{2,-2,1}(M) - 8 \left(S_{1,-4}(M) + S_{1,1,-2,1}(M) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - S_{1,-3,1}(M) \right) - 9S_{2,-3}(M) + 12S_{1,1,-3}(M) \right]. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Ponownie i w tym przypadku łatwo zauważyć, że wyniki te posiadają odpowiedni stopień transcendentności (odpowiednio 3 i 5). W celu sprawdzenia zasady parzystości

musimy wyznaczyć funkcję \mathcal{P} z równości (5.13), a następnie przepisać nasz wynik z bazy kanonicznej do bazy binomialnej. Dla przykładu wynik dwupętlowy ma postać

$$\mathcal{P}_4(M) = 8\mathbb{S}_{1,2}(M) - 8\mathbb{S}_{2,1}(M). \quad (5.33)$$

Jak łatwo zauważyć, w jego skład wchodzi jedynie sumy binomialne z dodatnimi indeksami, co potwierdza zasadę parzystości. Dodatkowo, możliwe jest sprawdzenie zarówno poprawność asymptotyki jak i zgodność z równaniem BFKL dla wyniku dwu- i trzypętlowego.

Jak do tej pory nie jest znany wynik analityczny na rozwiązanie równania (5.24) dla większej ilości pętli. W tym przypadku musimy zastosować zupełnie inne podejście do problemu znalezienia wymiaru anomalnego. Jak już zauważyliśmy, zasada maksymalnej transcendentalności oraz zasada parzystości ograniczają ilość funkcji za pomocą których wyrażają się funkcje $\mathcal{P}_{2\ell}$, a co za tym idzie $\gamma_{2\ell}$. W przypadku wyniku czteropętlowego mamy 64 sumy binomialne z dodatnimi indeksami oraz o transcendentalności 7. Dla pięciu pętli jest to już 256 sum o transcendentalności 9. Będą to jedyne przypadki, którymi będziemy się tutaj interesować. W obu przypadkach, jedyne co musimy zrobić, to znaleźć współczynniki, które stoją przed sumami binomialnymi. Możemy więc potraktować problem znalezienia \mathcal{P}_8 (\mathcal{P}_{10}), jako problem liniowy na 64 (256) współczynniki. W celu wyznaczenia tych współczynników wystarczy, że potrafimy znaleźć, ile wynosi wymiar anomalny dla dowolnych 64 (256) różnych wartości M . Dostaniemy wtedy układ równań liniowych, które następnie możemy łatwo rozwiązać. Znalezienie współczynników stojących przed sumami binomialnymi oznacza, że udało nam się uzyskać wymiar anomalny dla dowolnego M .

Wydaje się oczywistym, że należy wziąć możliwie najmniejsze wartości M , gdyż w tym przypadku znalezienie wymiaru anomalnego z równań ABA jest prostsze. Należy jednak zwrócić uwagę na fakt, o którym wspomnieliśmy na początku tego rozdziału, tzn. że operatory twist-2 posiadają nietrywialny wymiar anomalny jedynie dla parzystych wartości M . Wydaje się więc, że należy wziąć pierwszych 64 (256) parzystych wartości M i znaleźć dla nich wymiar anomalny. Jak jednak zostało zauważone w [54], jeśli dokonamy poprawnego przedłużenia analitycznego z parzystych wartości M na nieparzyste, to możemy także wykorzystać informacje, które dostajemy dla nieparzystych wartości spinu M . Pozwala nam to uprościć problem i jedyne, co musimy zrobić, to rozwiązać równania ABA dla $M = 1, \dots, 64$ (256).

Aby wyznaczyć rozwiązanie cztero- oraz pięciopętlowych równań ABA dla konkretnej wartości M należy rozwiązać je numerycznie z bardzo dużą dokładnością. Jako wynik otrzymujemy przybliżenie pewnej nieznannej liczby rzeczywistej. Zasada maksymalnej transcendentalności mówi nam, jakie własności ma tak otrzymana liczba. Po pierwsze, przyglądnijmy się strukturze funkcji \mathcal{P} koncentrując się na przypadku pięciopętlowym³. Korzystając z zasady maksymalnej transcendentalności wiemy, że wynik dla pięciu pętli będzie miał stopień transcendentalności równy 9. Oznacza to, że w jego skład mogą wchodzić binomialne sumy harmoniczne oraz funkcje ζ -Riemanna aż do $\zeta(9)$ oraz dowolne ich iloczyny tak, aby stopień się zgadzał. Jednak z obserwacji równań ABA można wynioskować, że dla pięciu pętli jedyne funkcjami Riemanna, które pojawią się w wyniku będą $\zeta(3)$ oraz $\zeta(5)$ – obie funkcje pochodzą od dressing factora. Możemy

³Dla przypadku czteropętlowego można przeprowadzić analogiczną dyskusję.

więc zapisać

$$\mathcal{P}_{10} = \mathcal{P}_{10}^{\text{rational}} + \mathcal{P}_{10}^{\zeta(3)} \zeta(3) + \mathcal{P}_{10}^{\zeta(5)} \zeta(5), \quad (5.34)$$

gdzie wartość stopnia transcendentalności funkcji $(\mathcal{P}_{10}^{\text{rational}}, \mathcal{P}_{10}^{\zeta(3)}, \mathcal{P}_{10}^{\zeta(5)})$ wynosi odpowiednio (9, 6, 4) i wszystkie są funkcjami jedynie sum binomialnych. W celu wyznaczenia funkcji $\mathcal{P}_{10}^{\zeta(3)}$ oraz $\mathcal{P}_{10}^{\zeta(5)}$ potrzebujemy niewielkiej ilości wyników i jest to zadanie stosunkowo proste

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{P}_{10}^{\zeta(3)}}{256} = & 3\mathbb{S}_{1,5} - 4\mathbb{S}_{2,4} - \mathbb{S}_{3,3} - \mathbb{S}_{4,2} + 3\mathbb{S}_{5,1} + 2\mathbb{S}_{1,1,4} - 4\mathbb{S}_{1,2,3} - 2\mathbb{S}_{1,3,2} + 2\mathbb{S}_{1,4,1} \\ & - \mathbb{S}_{2,1,3} + 5\mathbb{S}_{2,2,2} - 2\mathbb{S}_{2,3,1} - 2\mathbb{S}_{3,2,1} + 2\mathbb{S}_{4,1,1} - 3\mathbb{S}_{1,1,2,2} + \mathbb{S}_{1,1,3,1} - \mathbb{S}_{1,2,1,2} \\ & + 2\mathbb{S}_{1,3,1,1} - \mathbb{S}_{2,1,1,2} + \mathbb{S}_{2,1,2,1} + \mathbb{S}_{3,1,1,1}, \end{aligned} \quad (5.35)$$

$$\frac{\mathcal{P}_{10}^{\zeta(5)}}{640} = \mathbb{S}_1(\mathbb{S}_{2,1} - \mathbb{S}_3). \quad (5.36)$$

Z kolei wyznaczenie funkcji o transcendentalności 9 jest dużo bardziej skomplikowane. Z drugiej jednak strony wiemy, że funkcja $\mathcal{P}_{10}^{\text{rational}}$ da się zapisać jako kombinację liniową wyłącznie binomialnych sum harmonicznymi ze współczynnikami wymiernymi. Dla każdego M wartość $\mathcal{P}_{10}^{\text{rational}}$ jest więc pewną liczbą wymierną. Jeśli teraz odejmiemy od \mathcal{P}_{10} wkłady proporcjonalne do funkcji $\zeta(3)$ i $\zeta(5)$ oraz otrzymamy wystarczającą dokładność naszego wyniku, to możemy znaleźć tę liczbę wymierną używając programu Mathematica⁴. Dostaniemy w ten sposób dokładny (!) wynik dla dowolnego M . Mając dokładne wyniki dla wystarczającej ilości punktów, możemy rozwiązać problem liniowy na znalezienie współczynników wymiernych stojących przez sumami harmonicznymi.

Używając opisanej powyżej metody, odpowiedź czteropętłowa została znaleziona w [54], natomiast pięciopętłowa w [A3]. Po konkretny wynik dla czterech pętli odsyłamy do [54]. Z kolei wynik pięciopętłowy na funkcję \mathcal{P} zapisany w bazie binomialnej⁵ zamieszczamy w Tabeli 5.3 na końcu tego rozdziału. Aby znaleźć wymiar anomalny należy rozwiązać iteracyjnie równanie (5.13). Podobnie, jak poprzednio naszym następnym krokiem powinno być sprawdzenie asymptotyki dla dużych wartości spinu oraz zgodności z przewidywaniami równania BFKL. To pierwsze okazuje się być poprawne. Jeśli jednak sprawdzimy przedłużenie analityczne naszego wyniku do $M = -1 + \omega$, to czeka nas niespodzianka. Otóż wynik, zarówno cztero- jak i pięciopętłowy, nie pokrywa się z przewidywaniami pochodzącymi z równania BFKL! Okazuje się więc, że ABA nie daje poprawnych przewidywań startując od czterech pętli. W następnym podrozdziale policzymy wkład pochodzący od efektów wrapping dla operatorów twist-2. Okazuje się, że wrapping zaczyna dawać wkład startując dokładnie od czterech pętli. Jeśli teraz dodamy obydwa przyczynki, tzn. pochodzący od ABA oraz od efektów wrapping okaże się, że przedłużenie analityczne tej sumy daje poprawny wynik, zgodny z BFKL-em!

5.2.2 Operatory twist-3

Jak do tej pory znaleźliśmy rozwiązania równań ABA dla operatorów twist-2. Jednak, jak postulowaliśmy na początku tego rozdziału, cechy wymiaru anomalnego dla wszystkich

⁴Należy użyć funkcji `Rationalize`.

⁵Zapisanie pięciopętłowego wymiaru anomalnego w bazie kanonicznej zajmuje 10 stron maszynopisu. Można go znaleźć w [A3].

operatorów twist- J są bardzo podobne (z wyjątkiem przewidywań z równania BFKL, które odnoszą się jedynie do operatorów twist-2). W tej części pracy chcielibyśmy zwerfikować, czy także w przypadku operatorów twist-3 możemy odtworzyć wszystkie te cechy. W szczególności, chcielibyśmy sprawdzić zasadę maksymalnej transcendentalności oraz zasadę parzystości, jak również potwierdzić, że asymptotyka dla dużych wartości spinu M jest uniwersalna dla operatorów twist- J i dana przez wierzchołkowy wymiar anomalny. Będziemy zainteresowani wynikiem pięciopętlowym, gdyż jest to wyraz rozwinięcia perturbacyjnego dla operatorów twist-3, dla którego efekty skończonego rozmiaru zaczynają odgrywać rolę po raz pierwszy.

W celu znalezienia wymiaru anomального dla operatorów twist-3 pochodzącego z ABA należy rozwiązać układ równań analogiczny do (5.24) z tylko jedną różnicą – w tym przypadku długość operatorów jest równa $L = 3$, co prowadzi do innej potęgi w wykładniku lewej strony równań Bethego. Po dokonaniu tej niewielkiej zmiany pozostaje nam do rozwiązania następujący układ

$$\left(\frac{x_k^+}{x_k^-}\right)^3 = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^M \frac{x_k^- - x_j^+}{x_k^+ - x_j^-} \frac{1 - g^2/x_k^+ x_j^-}{1 - g^2/x_k^- x_j^+} e^{2i\theta(u_k, u_j)}, \quad k = 1, \dots, M. \quad (5.37)$$

Ponownie i w tym przypadku należy rozwinąć równania tego układu w szereg perturbacyjny, a następnie, dla ustalonego rzędu rozwinięcia, rozwiązać go numerycznie dla wystarczająco dużej liczby różnych wartości M . Następnie należy dopasować współczynniki stojące przed sumami harmonicznymi w celu uzyskania wyniku prawdziwego dla każdego M . Wynik aż do czterech pętli został znaleziony w [54] oraz [60]. Podamy tutaj jedynie rezultat dla jednej pętli, który przyda nam się w dalszej części pracy. Po pierwsze, jednopętlowe pierwiastki Bethego zakodowane są w funkcji

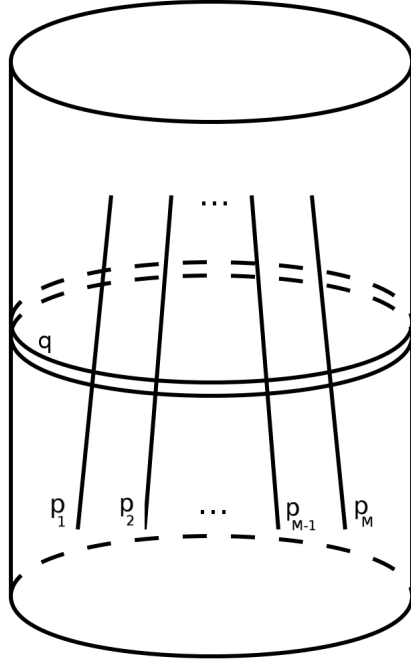
$$P_M^{\text{twist-3}}(u) = {}_4F_3 \left(\begin{matrix} -\frac{M}{2}, \frac{M}{2} + 1, \frac{1}{2} + iu, \frac{1}{2} - iu \\ 1, 1, 1 \end{matrix} \middle| 1 \right), \quad (5.38)$$

jako jej miejsca zerowe. Jeśli teraz wstawimy rozwiązania równania $P_M(u) = 0$ do równania (5.26), to dostaniemy jednopętlowy wymiar anomalny dla operatorów twist-3 w postaci

$$\gamma_2^{\text{ABA, twist-3}}(M) = 8S_1 \left(\frac{M}{2} \right). \quad (5.39)$$

Po wyniki dla wyższych pętli odsyłamy do oryginalnych prac. Tutaj przedstawimy jedynie wynik dla pięciu pętli znaleziony w [A5]. Jest on podany w bazie kanonicznej w Tabeli 5.4 na końcu tego rozdziału. Ciekawą własnością tego wyniku, odróżniającą go od przypadku operatorów twist-2, jest fakt, że wszystkie sumy znajdujące się w nim mają dodatnie indeksy oraz są funkcjami argumentu $\frac{M}{2}$.

Jak widać na przykładzie wyniku w Tabeli 5.4, zasada maksymalnej transcendentalności jest spełniona także dla operatorów twist-3. Można też sprawdzić, że wynik ten pozostaje w zgodzie z zasadą parzystości, jak zostało pokazane w [A5]. Poza tym, gdy rozważymy asymptotykę dla $M \rightarrow \infty$, to odtworzymy dokładnie wierzchołkowy wymiar anomalny dany przez (5.16).



Rysunek 5.1: Diagramatyczna interpretacja wzorów Lüschera dla operatorów twist- J . W pętli biegnącej wokół cylindra mogą się pojawiać zarówno wzbudzenia elementarne jak i stany związane.

5.3 Efekty skończonego rozmiaru

W celu policzenia efektów skończonego rozmiaru dla operatorów twist- J , będziemy musieli zastosować wzory (3.93)-(3.96). Po pierwsze, musimy być świadomi tego, że wzory Lüschera mogą być zastosowane jedynie do dwuwymiarowej teorii pola na cylindrze, którą w przypadku korespondencji AdS/CFT jest teoria strun na przestrzeni $AdS_5 \times S^5$. Tak więc musimy odejść od języka łańcuchów spinowych i zastanowić się, jak można opisać operatory twist- J w języku wielkości na wstędze świata struny. W tym przypadku długość obwodu cylindra L będzie zależała od cechowania, które wybierzemy na wstędze świata. Tak, jak robiliśmy to w przypadku silnego sprzężenia, wybierzemy cechowanie na stożku świetlnym, które daje nam utożsamienie $L = J$.

Sytuacja, którą będziemy rozważać w tej części pracy, może być zobrazowana za pomocą Rysunku 5.1. Rozpatrujemy M fizycznych wzbudzeń o pędach p_1, \dots, p_M , które oddziałują z wirtualnym wzbudzeniem lub stanem związanym, który porusza się dookoła cylindra. W przeciwieństwie do przypadku silnego sprzężenia, będziemy tutaj rozważać jedynie diagramy mające strukturę F -termu. Diagramy analogiczne do μ -termu są prowadzące w słabym sprzężeniu!

Wyniki dotyczące efektów skończonego rozmiaru mogą być znalezione w serii prac, z których pierwszą i najbardziej przełomową była praca Romualda Janika oraz Zoltana Bajnoka [25] na temat czteropętlowego wymiaru dla operatora Konishi. Następnie wynik ten został uogólniony na przypadek wszystkich operatorów twist-2 w pracy [A6]. Pięciopętłowy wynik dla operatora Konishiego został znaleziony w [A2], natomiast dla wszystkich operatorów twist-2 w [A3]. Z kolei wynik pięciopętłowy dla operatorów twist-3

można znaleźć w [A5].

5.3.1 Operatory twist-2

Dla operatorów twist-2 obwód cylindra występujący we wzorach Lüschera będzie równy $L = 2$. W celu policzenia poprawek Lüschera potrzebujemy relacji dyspersji dla wzbudzeń elementarnych jak i stanów związanych na strunie. Jest ona dana poprzez

$$\varepsilon_Q(p) = \sqrt{Q^2 + 16g^2 \sin^2 \frac{p}{2}}. \quad (5.40)$$

Możemy teraz znaleźć relację dyspersji w teorii zwierciadlanej, a następnie znaleźć jej wiodące rozwinięcie w słabym sprzężeniu.

$$\tilde{\varepsilon}_Q(q) = -i\varepsilon_Q^{-1}(iq) = 2 \operatorname{arcsinh} \left(\frac{1}{4g} \sqrt{Q^2 + q^2} \right) = -\log \frac{4g^2}{q^2 + Q^2} + \dots \quad (5.41)$$

Wynika stąd, że czynnik eksponencjalny występujący w wyrażeniu na poprawkę Lüschera ma postać

$$\left(\frac{4g^2}{q^2 + Q^2} \right)^L \quad (5.42)$$

i w przeciwieństwie do przypadku silnego sprzężenia, wszystkie stany związane dają wkład do ostatecznego wyniku, gdyż są tego samego rzędu w g , co wzbudzenia elementarne. Zależność od stałej sprzężenia, jaką widzimy we wzorze (5.42), pokrywa się z oczekiwaną zależnością dla poprawek wrapping, którą zasygnalizowaliśmy we wstępie tej pracy w kontekście operatora Konishiego. Ostatnią istotną informacją, której potrzebujemy, jest postać macierzy rozpraszania pomiędzy wzbudzeniem elementarnym a dowolnym stanem związanym. Można ją znaleźć w Dodatku B.

Przejdźmy teraz do bardziej szczegółowych rachunków. Będziemy zainteresowani zarówno cztero- jak i pięciopętlowym wynikiem pochodzącym od efektów wrapping. Ogólnie rzecz biorąc, obliczenie poprawki Lüschera dla operatorów twist-2 jest zadaniem trudniejszym od policzenia poprawek do wielkich magnonów. Komplikacje biorą się z kilku źródeł. Skoncentrujemy się najpierw na całce występującej we wzorze (3.93)

$$-\sum_{Q=1}^{\infty} \int \frac{dq}{2\pi} e^{-L\tilde{\varepsilon}_Q(q)} \operatorname{Str} \left[\prod_{i=1}^M \bar{\mathcal{S}}_Q(q, p_i) - 1 \right]. \quad (5.43)$$

Po pierwsze, w przypadku wielkiego magnonu musieliśmy policzyć ślad pojedynczej macierzy \mathcal{S} , co ograniczało się jedynie do wysumowania wyrazów diagonalnych. W przypadku operatorów twist-2 sytuacja jest inna. Ślad, który mamy policzyć, zawiera iloczyn wielu macierzy rozpraszania z różnymi pędami p_i . Dodatkowo, jak zostało opisane w Dodatku B, wymiar macierzy rozpraszania stanu związanego Q z elementarnym wzbudzeniem, rośnie wraz ze wzrostem numeru stanu związanego i dany jest poprzez $4Q \times 4Q$. Pamiętając o tym, że musimy wysumować wkład od wszystkich stanów związanych aż do nieskończoności, stoimy przed problemem pomnożenia (dużej ilości) M macierzy (dużego) wymiaru $4Q \times 4Q$ każda. Na końcu musimy wziąć ślad z tak otrzymanej macierzy. Okazuje się jednak, że istnieje sposób na obejście tego skomplikowanego rachunku. Pomysł polega na

zdiagonalizowaniu macierzy \mathcal{S} występujących we wzorze (5.43). W ogólności nie ułatwiłoby to zadania, gdyż macierze $\mathcal{S}(q, p_i)$ występujące w tym wzorze są różne od siebie i są diagonalizowane przez różne macierze przejścia. Okazuje się jednak, że w rozwinięciu perturbacyjnym w słabym sprzężeniu te macierze przejścia nie zależą od p_i aż do trzeciego wyrazu rozwinięcia, co w zupełności wystarcza do wyznaczenia poprawki Lüschera aż do pięciu pętli. Możemy więc zapisać

$$\bar{\mathcal{S}}_Q(q, p_i) = U^{-1} \bar{\mathcal{S}}_Q^{\text{diag}}(q, p_i) U + \mathcal{O}(g^8), \quad (5.44)$$

gdzie macierz U jest taka sama dla każdego p_i . Jeśli teraz skorzystamy z własności śladu dostaniemy

$$\text{Str} \left[\prod_{i=1}^M \bar{\mathcal{S}}_Q(q, p_i) \right] = \text{Str} \left[\prod_{i=1}^M U^{-1} \bar{\mathcal{S}}_Q^{\text{diag}}(q, p_i) U \right] + \mathcal{O}(g^8) \quad (5.45)$$

$$= \text{Str} \left[\prod_{i=1}^M \bar{\mathcal{S}}_Q^{\text{diag}}(q, p_i) \right] + \mathcal{O}(g^8) \quad (5.46)$$

$$= \sum_{j=1}^{4Q} \prod_{i=1}^M \bar{\mathcal{S}}_Q^{\text{diag}}(q, p_i)_{jj} + \mathcal{O}(g^8), \quad (5.47)$$

gdzie $\bar{\mathcal{S}}_Q^{\text{diag}}(q, p_i)_{jj}$ oznacza j -ty wyraz leżący na przekątnej zdiagonalizowanej macierzy $\bar{\mathcal{S}}$. W tym przypadku policzenie śladu upraszcza się do obliczenia niezależnie iloczynu M funkcji skalarnych dla każdego elementu diagonalnego macierzy \mathcal{S} . Oznacza to, że problem mnożenia przez siebie dużej ilości dużych macierzy, sprowadza się do mnożenia zwykłych liczb, co jest zdecydowanie prostsze.

Po drugie, w przypadku wielkich magnonów, jak również dla operatora Konishiego opisanego we wstępie, wartości pędów występujących w macierzy \mathcal{S} są znane dokładnie. Jeśli jednak chcemy wyznaczyć wartości pędów dla wzbudzeń w operatorach twist-2, to problem się komplikuje. Zasadniczo, w celu znalezienia wiodącej poprawki (czteropętlowej) pochodzącej z formuł Lüschera wystarczy, jeśli wstawimy do wzoru (5.43) wiodące rozwinięcie wyrażeń na pędy. W przypadku operatorów twist-2, pędy w zerowym rozwinięciu zadane są dla każdego M poprzez jednopętlowy wielomian Baxtera

$$P_M(u) = {}_3F_2 \left(\begin{matrix} -M, & M+1, & \frac{1}{2} + iu \\ & 1, & 1 \end{matrix} \middle| 1 \right), \quad (5.48)$$

jako jego miejsca zerowe. W powyższym wzorze zależność między parametrem spektralnym u a pędem p dana jest przez

$$u(p) = \frac{1}{2} \text{ctg} \frac{p}{2} \sqrt{1 + 16g^2 \sin^2 \frac{p}{2}}. \quad (5.49)$$

Stopień wielomianu P_M równy jest M i co za tym idzie rozwiązanie równania $P_M(u_k) = 0$ nie da się wyrazić analitycznie, nawet dla niewielkiej ilości wzbudzeń M . Powoduje to, że jeśli chcemy znaleźć wartości pędów, które należy wstawić do wzoru (5.43), mogą zostać one znalezione jedynie numerycznie, w sposób przybliżony. Z drugiej strony, dla każdego M , wielomian $P_M(u)$ jest łatwy do znalezienia i jego współczynniki są liczbami wymiernymi. Dlatego też, jeśli udałoby się wyrazić wyrażenie podcałkowe we wzorze (5.43) w języku

wielomianów Baxtera, to moglibyśmy dokonać całkowania po q , a następnie sumowania po Q w sposób ścisły, bez konieczności podstawiania konkretnych wartości pędów. Jak pokażemy poniżej jest to możliwe dla przypadku czteropętłowego. Dla rachunku pięciopętłowego będziemy potrzebowali dodatkowo znaleźć dwupętłowy wielomian Baxtera, ale także w tym przypadku da się wykonać dokładne obliczenia całki (5.43), bez znajdowania konkretnych wartości pędów.

Zajmijmy się teraz drugim członem we wzorze (3.93), tzn. członem pochodzącym od modyfikacji kwantyzacji ABA

$$\sum_{i=1}^M \varepsilon'(p_i) \delta p_i. \quad (5.50)$$

Po pierwsze, należy zauważyć, że wyrażenie zaczyna odgrywać rolę dopiero w rachunku pięciopętłowym (wynika to stąd, że δp_i jest rzędu g^8 , natomiast ε' daje dodatkowy czynnik g^2). W celu wyznaczenia wartości tego wyrażenia musimy rozwiązać układ równań liniowych (3.94). Najtrudniejszym elementem tego układu jest wyznaczenie wartości całki występującej w wyrażeniu na Φ_k

$$\Phi_k = \sum_{Q=1}^{\infty} \int \frac{dq}{2\pi i} \left[\bar{\mathcal{S}}_Q(q, p_1) \cdot \dots \cdot \partial_q \bar{\mathcal{S}}_Q(q, p_k) \cdot \dots \cdot \bar{\mathcal{S}}_Q(q, p_M) \right] e^{-L\bar{\varepsilon}_Q(q)} \quad (5.51)$$

Całka ta wygląda podobnie do tej, którą znajdujemy we wzorze (5.43) z tą różnicą, że występuje tutaj jedna pochodna macierzy \mathcal{S} . Nie zmienia to jednak sposobu postępowania. Podobnie, jak macierz rozpraszania, również jej pochodna może być zdiagonalizowana przez macierz niezależną od p_i (do trzeciego wyrazu w rozwinięciu perturbacyjnym) i możemy raz jeszcze zamienić problem mnożenia dużej ilości dużych macierzy na stosunkowo proste mnożenie funkcji skalarnych. Znając wartości dla wszystkich Φ_k możemy wyznaczyć wartości przesunięć w pędach i ostatecznie obliczyć wyrażenie (5.50).

Wynik czteropętłowy

W sekcji tej policzymy wkład, jaki dają efekty skończonego rozmiaru do czteropętłowego wymiaru anomalnego dla operatorów twist-2. Najważniejszym wynikiem tej części pracy jest potwierdzenie, że jeśli dodamy do siebie otrzymany tutaj wynik do czteropętłowego rozwiązania pochodzącego od ABA, a następnie dokonamy przedłużenia analitycznego do $M = -1 + \omega$, to dostaniemy pełną zgodność z równaniem BFKL. W celu znalezienia wyniku czteropętłowego wystarczy policzyć jedynie wartość całki (5.43) w wiodącym rzędzie. Jak już zauważyliśmy poprzednio, czynnik eksponencjalny dany jest w wiodącym rzędzie poprzez (5.42), które dla operatorów twist-2 w cechowaniu na stożku świetlnym ($L = 2$) daje

$$\frac{16g^4}{(q^2 + Q^2)^2}. \quad (5.52)$$

Poza tym, w przypadku teorii supersymetrycznych, ślad z macierzy jednostkowej znika, więc pozostaje nam do policzenia ślad iloczynu macierzy rozpraszania z równania (5.43). Ponownie rozłożymy macierz rozpraszania na trzy części jak w Dodatku B. W wiodącym rzędzie wkład od dressing factora jest trywialny, tzn. daje 1. Część skalarna daje nietrywialny wkład proporcjonalny do g^0 , z kolei w obu kopiach części macierzowej wiodący

wkład proporcjonalny do g^0 jest równy zero. Pierwszym nietrywialnym wyrazem jest ten proporcjonalny do g^2 . Ostatecznie dostajemy od macierzy rozpraszania wkład proporcjonalny do $g^2 \cdot g^2 \cdot g^0 = g^4$. Łącząc to z wkładem od części eksponencjalnej dostajemy, że wiodący przyczynek pochodzący ze wzoru (5.43) jest proporcjonalny do g^8 , czyli jest to wynik czteropętłowy!

Jeśli teraz przeprowadzimy szczegółowe rachunki (patrz [A6]), to możemy wyznaczyć funkcję podcałkową występującą w (5.43) w języku wielomianów Baxtera (5.48)

$$\Delta E = -64g^8 S_1^2(M) \sum_{Q=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \frac{T_M(q, Q)^2}{R_M(q, Q)} \frac{16}{(q^2 + Q^2)^2}. \quad (5.53)$$

W powyższym wzorze funkcje R_M oraz T_M zależą od jednopętłowego wielomianu Baxtera (5.48) w następujący sposób

$$\begin{aligned} R_M(q, Q) &= P_M\left(\frac{1}{2}(q - i(Q - 1))\right) \cdot P_M\left(\frac{1}{2}(q + i(Q - 1))\right) \times \\ &\quad \times P_M\left(\frac{1}{2}(q + i(Q + 1))\right) \cdot P_M\left(\frac{1}{2}(q - i(Q + 1))\right) \end{aligned} \quad (5.54)$$

oraz

$$T_M(q, Q) = \sum_{j=0}^{Q-1} \left[\frac{1}{2j - iq - Q} - (-1)^M \frac{1}{2(j+1) - iq - Q} \right] P_M\left(\frac{1}{2}(q - i(Q - 1)) + ij\right). \quad (5.55)$$

Wzór ten jest poprawny dla wszystkich, także nieparzystych⁶, wartości M . Dla każdego M funkcja podcałkowa jest funkcją wymierną. W celu obliczenia całki należy skorzystać z twierdzenia o residuach. Nasz kontur zamkniemy powyżej osi rzeczywistej i zorientujemy w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara. Nasza całka będzie równa sumie residuów w położeniach biegunów znajdujących się powyżej osi rzeczywistej. Mamy dwa rodzaje takich biegunów. Po pierwsze, mamy podwójny biegun w punkcie $q = iQ$, który pochodzi od wyrażenia eksponencjalnego we wzorze (5.43) – będziemy go nazywać biegunem kinematycznym. Poza tym, w mianowniku funkcji podcałkowej mamy iloczyn czterech wielomianów Baxtera, które pochodzą z macierzy rozpraszania. Każdy z tych wielomianów posiada dokładnie M zer. Położenia tych zer wyznaczają położenie biegunów funkcji podcałkowej – bieguny te będziemy nazywać biegunami dynamicznymi. Okazuje się, że dokładnie połowa biegunów dynamicznych leży powyżej osi rzeczywistej i właśnie te bieguny musimy wziąć pod uwagę licząc wartość całki. Podsumowując, dla danego M mamy $2M$ biegunów dynamicznych pochodzących z macierzy \mathcal{S} oraz jeden biegun kinematyczny pochodzący od wyrażenia eksponencjalnego.

Zacznijmy nasze rozważania od biegunów dynamicznych. Każdy z nich jest biegunem jednokrotnym i policzenie residuum w jego położeniu nie stanowi problemu. Jako wynik dostaniemy pewną funkcję wymierną zmiennej Q . Kolejnym krokiem jest wysumowanie

⁶Postać (5.53) dla nieparzystych wartości M dostaje się poprzez odpowiednie przedłużenie analityczne z wartości parzystych. Wprowadzenie czynnika $(-1)^M$ we wzorze (5.55) jest konieczne, żeby uzyskać poprawne skalowanie względem stałej sprzężenia. Jeśli nie wprowadziliśmy tego czynnika, to poprawka wyliczona dla nieparzystych M ze wzorów Lüschera byłaby rzędu g^4 . Tak więc, jeśli chcemy uzyskać poprawne przedłużenie analityczne, musimy go uwzględnić we wzorze (5.55).

tak otrzymanego wyniku dla $Q = 1, \dots, \infty$. Jeśli wykonamy tę sumę to okazuje się, że wynosi ona zero dla każdego M ! Jest to bardzo nietrywialny wynik. Można go zinterpretować w następujący sposób: jak zauważyliśmy powyżej, bieguny dynamiczne pochodzą z rozwinięcia macierzy rozpraszania. Bieguny takie interpretuje się przeważnie jako związane z istnieniem stanów związanych. Jak zauważyliśmy przy rozważaniach na temat silnego sprzężenia, bieguny te odpowiedzialne są za wartości μ -termu. Możemy więc zinterpretować znikanie wkładu od biegunów dynamicznych jako znak, że w słabym sprzężeniu nie ma w ogóle wkładu od μ -termów (co zostało zaproponowane w [A6]).

Do zakończenia naszych rachunków pozostaje policzenie wkładu pochodzącego od residuum w biegunie kinematycznym, a następnie wysumowanie po Q . Dla każdego M możemy znaleźć residuum używając programu Mathematica. Z kolei do sumowania lepiej nadaje się program Maple. Znaleźliśmy więc sposób na znalezienie czteropętłowej poprawki Lüschera dla dowolnej ilości wzbudzeń. Jedyne, co może nas teraz ograniczać, to zdolność obliczeniowa komputera.

W celu znalezienia ogólnej postaci poprawki Lüschera wykorzystamy metody, której używaliśmy do wyznaczenia wymiaru anomalnego pochodzącego z równań ABA. W szczególności, wymiar anomalny pochodzący z poprawki Lüschera można zapisać używając jedynie funkcji ζ -Riemanna oraz zagnieżdżonych sum harmoniczných. Poza tym wykorzystamy zasadę maksymalnej transcendentalności, która ograniczy ilość potrzebnych funkcji do skończonej ilości. Jesteśmy zainteresowani tutaj wynikiem czteropętłowym, więc szukana przez nas funkcja będzie funkcją transcendentalną o stopniu transcendentalności równym $2 \cdot 4 - 1 = 7$. Jeśli jednak przyjrzymy się wzorowi na poprawkę Lüschera (5.53), to możemy zauważyć, że przed całką znajduje się już suma harmoniczných $S_1^2(M)$. Pamiętając o tym, że mnożenie funkcji transcendentalnych równoważne jest dodawaniu ich stopni transcendentalności otrzymujemy, że całka we wzorze (5.53) powinna być funkcją transcendentalną o stopniu 5. W celu wyznaczenia tej funkcji musimy znaleźć wystarczającą ilość początkowych wartości całki (5.43). Podobnie jak dla wyniku z równań ABA, użyjemy także nieparzystych wartości ilości wzbudzeń M . Już otrzymany wynik został dodatkowo sprawdzony przez wyliczenie wartości dla kilku wyższych M , które nie były wykorzystywane do otrzymania współczynników.

Ostateczny wynik na poprawkę czteropętłową pochodzącą z formuł Lüschera dany jest poprzez

$$\begin{aligned} \gamma_8^{\text{wrapping}} = & 128S_1^2(-5\zeta(5) - 4S_{-2}\zeta(3) - 2S_5 + 2S_{-5} \\ & + 4S_{4,1} - 4S_{3,-2} + 4S_{-2,-3} - 8S_{-2,-2,1}) . \end{aligned} \quad (5.56)$$

Z założenia, wynik ten ma poprawny stopień transcendentalności. Spełnia także zasadę parzystości, jak zostało sprawdzone w [61]. Poza tym, jeśli sprawdzimy asymptotykę dla dużych M , to znajdziemy, że nie daje ona wkładu do wierzchołkowego wymiaru anomalnego, jak zostało pokazane w Dodatku C. Jedyne co pozostaje, to dokonanie przedłużenia analitycznego do $M = -1 + \omega$. Wykorzystując informacje z Dodatku D (oraz C) możemy znaleźć przedłużenie analityczne dla wszystkich sum występujących w wyniku (5.56)

$$\begin{aligned} S_1(-1 + \omega) &= -\frac{1}{\omega} + \omega\zeta(2) - \omega^2\zeta(3) + \omega^3\zeta(4) + \dots , \\ S_5(-1 + \omega) &= -\frac{1}{\omega^5} + \dots , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{4,1}(-1 + \omega) &= -\frac{1}{\omega^4} (\zeta(2)\omega - \zeta(3)\omega^2 + \zeta(4)\omega^3 + \dots) + \dots, \\
S_{-5}(-1 + \omega) &= \frac{1}{\omega^5} + \dots, \\
S_{3,-2}(-1 + \omega) &= -\frac{1}{\omega^3} \left(-\zeta(2) + \frac{3}{2}\zeta(3)\omega - \frac{21}{8}\zeta(4)\omega^2 + \dots \right) + \dots, \\
S_{-2,-3}(-1 + \omega) &= -\frac{1}{\omega^2} \left(-\frac{21}{8}\zeta(4)\omega + \frac{3}{2}\zeta(3) + \dots \right) + \dots, \\
S_{-2,-2,1}(-1 + \omega) &= -\frac{1}{\omega^2} \left(\frac{5}{4}\zeta(3) + \omega \left(-\frac{37}{16} + \frac{1}{2}\zeta(2)\zeta(2) \right) + \dots \right) + \dots.
\end{aligned}$$

Jeśli teraz wstawimy te rozwinięcia do wyniku (5.56), to dostaniemy wiodące rozwinięcie wokół $M = -1 + \omega$ w postaci

$$\gamma_8^{\text{wrapping}}(\omega) \sim 256 \left(\frac{2}{\omega^7} - \frac{8\zeta(2)}{\omega^5} + \frac{9\zeta(3)}{\omega^4} + \frac{59\zeta(4)}{4\omega^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega^2}\right) \right). \quad (5.57)$$

Łącząc to z przedłużeniem analitycznym wyniku czteropętłowego znalezione z ABA (patrz [54])

$$\gamma_8^{\text{ABA}}(\omega) \sim 256 \left(\frac{-2}{\omega^7} + \frac{0}{\omega^6} + \frac{8\zeta(2)}{\omega^5} - \frac{13\zeta(3)}{\omega^4} - \frac{16\zeta(4)}{\omega^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega^2}\right) \right), \quad (5.58)$$

dostaniemy ostatecznie

$$\gamma_8(\omega) \sim -256 \left(\frac{4\zeta(3)}{\omega^4} + \frac{5}{4}\frac{\zeta(4)}{\omega^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega^2}\right) \right), \quad (5.59)$$

co zgadza się z przewidywaniami (5.23), znalezionymi z równania BFKL! Wynik ten w jasny sposób pokazuje, że równania ABA przestają poprawnie opisywać operatory twist-2 startując od czterech pętli i muszą zostać uzupełnione przez poprawki Lüschera.

Wynik pięciopętłowy

Znalezienie pięciopętłowych poprawek Lüschera jest znacznie trudniejsze od przypadku czteropętłowego. Komplikacje biorą się z faktu, że stopień transcendentalności wyniku będzie wynosił w tym przypadku 9. Powoduje to, że musimy znaleźć większą ilość współczynników niż w poprzednim przypadku. Co za tym idzie, musimy wyznaczyć poprawkę Lüschera dla wyższych wartości ilości wzbudzeń M . Dodatkowo, aby uzyskać wynik pięciopętłowy, musimy znaleźć nie tylko wiodący, ale także podwiodący wyraz rozwinięcia całki (5.43). Poza tym musimy tutaj uwzględnić po raz pierwszy modyfikację kwantyzacji pędów (5.50). Na szczęście wystarczy znać jedynie wiodący wkład od tej modyfikacji.

Uważny czytelnik może zapytać dlaczego używamy wyrażenia na wiodącą poprawkę Lüschera w celu znalezienia podwiodącego wkładu do wymiaru anomalnego? Mogłoby się wydawać, że należy pójść krok dalej i uwzględnić kolejny wyraz w rozwinięciu równań TBA (3.63) oraz (3.64). Należy jednak zwrócić uwagę na fakt, że ten kolejny wyraz byłby

proporcjonalny do $e^{-2\tilde{\varepsilon}(q)L}$. Dla operatorów twist-2 wyraz ten daje wkład g^8 i zważywszy, że mamy dodatkowe g^4 pochodzące z macierzy rozpraszania, to podwiódące poprawki Lüschera dla operatorów twist-2 będą odgrywały rolę nie wcześniej niż w rachunku sześciopętlowym!

Zacznijmy nasze rozważania od znalezienia rozwinięcia wzoru (5.43) do drugiego wyrazu znaczącego. Dla uproszczenia notacji zapiszmy

$$\begin{aligned}
(5.43) &= - \sum_{Q=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \Upsilon(q, Q) S_0(M, q, Q) S_{\sigma}(M, q, Q) S_{\boxplus}(M, q, Q)^2 \\
&\equiv - \sum_{Q=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} Y_Q(M, q), \tag{5.60}
\end{aligned}$$

gdzie oznaczyliśmy przez Υ część eksponencjalną, występującą w funkcji podcałkowej, natomiast wkład od macierzy rozpraszania podzieliśmy na trzy części ($S_0, S_{\sigma}, S_{\boxplus}$), oznaczające odpowiednio część skalarną, część pochodzącą od dressing factora oraz część macierzową macierzy rozpraszania. Całą funkcję podcałkową oznaczyliśmy przez Y_Q . Należy pamiętać, że wszystkie powyższe wyrażenia są również funkcjami fizycznych pędów p_1, \dots, p_M – pominieliśmy jawną zależność od nich w celu uproszczenia notacji.

Z poprzednich rozważań wiemy, że wiodący wkład od Y_Q jest proporcjonalny do g^8 . Z kolei tutaj będziemy zainteresowani współczynnikiem, który stoi przez g^{10} . Użytecznym okazuje się znalezienie rozwinięcia funkcji Y_Q w dwóch krokach. Na początku weźmiemy jedynie wiodący (proporcjonalny do 1) wyraz rozwinięcia wszystkich pędów i rozwiniemy wszystkie pozostałe źródła występowania zależności od g . Następnie weźmiemy pod uwagę, że pędy także są zależne od g .

Zacznijmy więc od rozwinięcia wszystkich czynników występujących w Y_Q zachowując pędy w wiodącym rzędzie. Mamy wtedy

$$\begin{aligned}
\Upsilon(q, Q) &= g^4 \Upsilon^{(4)}(q, Q) + g^6 \Upsilon^{(6)}(q, Q) + \dots, \\
S_0(M, q, Q) &= S_0^{(0)}(M, q, Q) + g^2 S_0^{(2)}(M, q, Q) + \dots, \\
S_{\sigma}(M, q, Q) &= 1 + g^2 S_{\sigma}^{(2)}(M, q, Q) + \dots, \\
S_{\boxplus}(M, q, Q) &= g^2 S_{\boxplus}^{(2)}(M, q, Q) + g^4 S_{\boxplus}^{(4)}(M, q, Q) + \dots \tag{5.61}
\end{aligned}$$

Teraz możemy zapisać zarówno wiodące

$$Y_Q^{(8)}(M, q) = S_0^{(0)}(M, q, Q) S_{\boxplus}^{(2)}(M, q, Q)^2 S_{\sigma}^{(4)}(M, q, Q), \tag{5.62}$$

jak i podwiódące rozwinięcie funkcji podcałkowej

$$\begin{aligned}
Y_Q^{(10)}(M, q) &= Y_Q^{(8)}(M, q) \left[2 \frac{S_{\boxplus}^{(4)}(M, q, Q)}{S_{\boxplus}^{(2)}(M, q, Q)} + \frac{S_0^{(2)}(M, q, Q)}{S_0^{(0)}(M, q, Q)} + \frac{\Upsilon^{(6)}(q, Q)}{\Upsilon^{(4)}(q, Q)} \right. \\
&\quad \left. + S_{\sigma}^{(2)}(M, q, Q) \right]. \tag{5.63}
\end{aligned}$$

Wydzieliliśmy tutaj wiodącą funkcję podcałkową w celu ułatwienia dalszych obliczeń. Możemy teraz dokonać drugiego kroku, tzn. rozwinać wzory (5.62) oraz (5.63) wstawiając

w miejsce każdego pędu jego rozwinięcie $p = p_0 + g^2 p_2 + \dots$. Otrzymamy wtedy

$$\begin{aligned} Y_Q^{(8)}(M, q) &= Y_Q^{(8,0)}(M, q) + g^2 Y_Q^{(8,2)}(M, q) + \dots, \\ Y_Q^{(10)}(M, q) &= Y_Q^{(10,0)}(M, q) + \dots \end{aligned} \quad (5.64)$$

Tutaj $Y_Q^{(8,0)}$ odpowiada dokładnie funkcji podcałkowej (5.53), którą policzyliśmy w rachunku czteropętlowym. Z kolei dla rachunku pięciopętlowego musimy znaleźć

$$Y_Q^{(8,2)}(M, q) + Y_Q^{(10,0)}(M, q). \quad (5.65)$$

Postać wszystkich ilorazów występujących we wzorze (5.63) dane są w [A3]. Z kolei, w celu policzenia $Y_Q^{(8,2)}$, musimy użyć dwupętłowy wielomian Baxtera, który może być znaleziony w [59].

Okazuje się teraz, że dla każdego M w pięciopętłowej funkcji podcałkowej (5.65) mogą zostać wyszczególnione dwie części. Pierwsza z nich jest bardzo skomplikowaną funkcją wymierną. Z kolei druga jest iloczynem pewnej stosunkowo prostej funkcji wymiernej oraz pewnych funkcji polygamma. Komplikacje w policzeniu wkładu pięciopętlowego od (5.43) biorą się z obu tych części. Po pierwsze, funkcja wymierna jest bardzo trudna do znalezienia dla dużych wartości M . Po drugie, mimo tego, że znalezienie postaci wkładu zawierającego funkcje polygamma jest stosunkowo łatwe, to późniejsze policzenie całki sprawia sporo trudności. Wynika to z faktu, że funkcja polygamma ma nieskończenie wiele biegunów, które trzeba będzie uwzględnić w naszych rachunkach.

W dalszych rachunku przyda nam się dodatkowa informacja, której nie wykorzystywaliśmy w przypadku czterech pętli. Otóż szereg, w którym sumujemy po Q jest niesłychanie szybko zbieżny. Okazuje się, że wystarczy wziąć tylko kilka pierwszych wyrazów⁷, aby uzyskać pożądaną przez nas precyzję wyniku. Przyjmijmy więc, że udało nam się już znaleźć postać funkcji podcałkowej (5.65) dla ustalonego M oraz pewnego małego Q . Musimy teraz wykonać całkowanie po q . Możemy to dokonać w dwojaki sposób. Albo skorzystamy z metody residuów, którą użyliśmy poprzednio. Podobnie jak w poprzednim wypadku, mamy jeden biegun kinematyczny naszej funkcji podcałkowej oraz bardzo dużo biegunów dynamicznych. Na szczęście, podobnie jak poprzednio, wkład od biegunów dynamicznych jest zerowy⁸. Musimy jednak pamiętać, że w tym przypadku należy uwzględnić jeszcze biegunki funkcji polygamma, których jest nieskończenie wiele. Z drugiej strony, możemy wykonać całkę (5.65) numerycznie z bardzo dużą precyzją⁹ i tak też zrobiliśmy w celu uzyskania ostatecznego wyniku.

Do uzyskania ostatecznego wyniku dla dowolnego M brakuje nam tylko policzenie wkładu od modyfikacji kwantyzacji pochodzącej z ABA. W tym przypadku potrzebujemy jedynie wiodącego rozwinięcia wzoru (5.51). Zadanie to polega na znalezieniu wartości numerycznych całek występujących w wyrażeniu (5.51) na Φ , a następnie rozwiązaniu (numerycznie) układu równań (3.95). Pozwala nam to wyznaczyć przesunięcia w pędach, które następnie możemy podstawić do wzoru (3.93).

⁷Liczba wyrazów, które musimy wziąć pod uwagę rośnie wraz z M .

⁸Zostało to sprawdzone dla kilku pierwszych wartości M , a następnie przyjęte jako założenie dla wyższych M .

⁹Duża precyzja oznacza w tym przypadku precyzję wystarczającą, aby nasz ostateczny wynik dał się uwymiernić, jak robiliśmy to szukając rozwiązania równań ABA.

Tym sposobem udało nam się znaleźć z dużą precyzją przybliżoną wartość pięciopętłowego wymiaru anomalnego dla dowolnie wybranego M . Korzystając teraz z zasady maksymalnej transcendentalności (oraz obserwacji dla małych wartości M) możemy zapisać wymiar anomalny w postaci

$$\gamma_{10}^{\text{wrapping}}(M) = A_7(M)\zeta(7) + A_6(M)\zeta(3)^2 + A_5(M)\zeta(5) + A_3(M)\zeta(3) + B(M), \quad (5.66)$$

gdzie funkcje A_i oraz B zawierają jedynie zagnieżdżone sumy harmoniczne. Wyznaczenie wszystkich funkcji A_i jest zadaniem stosunkowo prostym i może zostać zrobione dysponując niewielką ilością wyników dla różnych M (przykładowo, aby wyznaczyć A_7 oraz A_6 wystarczy znać tylko jeden wynik dla dowolnego M), ze względu na mały stopień transcendentalności tych funkcji. Z kolei funkcja B jest dużo trudniejsza do znalezienia. Potrzeba aż 48 wyników¹⁰ dla różnych M , aby móc ją wyznaczyć. Ostateczny wynik na pięciopętłową poprawkę Lüschera ma postać przedstawioną w Tabeli 5.2.

$$\begin{aligned} \gamma_{10}^{\text{wrapping}} = & 13440 \zeta(7)S_1^2 - 1536 \zeta(3)^2 S_1^3 + 2560 \zeta(5)S_1 \left(3 S_1(2 S_{-2} + S_2) - S_1^3 \right. \\ & \left. + S_{-3} + S_3 - 2 S_{-2,1} \right) + 1024 \zeta(3)S_1 \left(- 2 S_1^3 S_{-2} + 2 S_1^2(2 S_{-3} + 3 S_3) \right. \\ & \left. + S_1(4 S_{-2}^2 + 6 S_2 S_{-2} + 3 S_{-4} - S_4 + 1024 \zeta(3)S_1 \left(- 2 S_1^3 S_{-2} \right. \right. \\ & \left. \left. + 2 S_1^2(2 S_{-3} + 3 S_3) + S_1(4 S_{-2}^2 + 6 S_2 S_{-2} + 3 S_{-4} - S_4 - 2(S_{-3,1} \right. \right. \\ & \left. \left. - 2 S_{-2,-2} + S_{-2,2} + S_{3,1} - 2 S_{-2,1,1})) + 2 S_{-2}(S_{-3} + S_3 - 2 S_{-2,1}) \right) \right) \\ & - 1024 S_1 \left((S_1(3 S_2 + 2 S_{-2}) + S_{-3} + S_3 - 2 S_{-2,1} - S_1^3)(S_{-5} - S_5 \right. \\ & \left. + 2 S_{-2,-3} - 2 S_{3,-2} + 2 S_{4,1} - 4 S_{-2,-2,1}) + 2 S_1^2(2 S_{-6} - 2 S_6 - S_{-4,-2} \right. \\ & \left. + 2 S_{-3,-3} + 3 S_{-2,-4} + S_{-2,4} - 2 S_{3,-3} - 2 S_{4,-2} + S_{4,2} + 4 S_{5,1} \right. \\ & \left. - 4 S_{-3,-2,1} - 4 S_{-2,-3,1} - 2 S_{-2,-2,-2} - 2 S_{-2,-2,2}) + S_1(5 S_{-7} \right. \\ & \left. - 5 S_7 - 4 S_{-6,1} + 4 S_{-5,-2} - S_{-5,2} + 3 S_{-4,-3} + S_{-3,-4} - S_{-3,4} \right. \\ & \left. + 8 S_{-2,-5} - 6 S_{-2,5} - 4 S_{3,-4} + 2 S_{3,4} - 8 S_{4,-3} + 3 S_{4,3} - 6 S_{5,-2} \right. \\ & \left. + S_{5,2} + 6 S_{6,1} + 2 S_{-5,1,1} - 6 S_{-4,-2,1} - 2 S_{-3,-3,1} + 2 S_{-3,-2,-2} \right. \\ & \left. - 2 S_{-3,1,-3} - 8 S_{-2,-4,1} + 6 S_{-2,-3,-2} - 2 S_{-2,-3,2} + 14 S_{-2,-2,-3} \right. \\ & \left. - 6 S_{-2,-2,3} - 2 S_{-2,1,-4} + 2 S_{-2,1,4} - 2 S_{-2,2,-3} - 4 S_{-2,3,-2} + 10 S_{-2,4,1} \right. \\ & \left. + 2 S_{3,-3,1} - 4 S_{3,-2,-2} + 2 S_{3,-2,2} + 2 S_{3,1,-3} + 2 S_{3,2,-2} + 10 S_{4,-2,1} \right. \\ & \left. + 6 S_{4,1,-2} - 2 S_{4,1,2} - 2 S_{4,2,1} - 2 S_{5,1,1} + 4 S_{-3,1,-2,1} + 4 S_{-2,-3,1,1} \right. \\ & \left. - 20 S_{-2,-2,-2,1} - 8 S_{-2,-2,1,-2} + 4 S_{-2,-2,1,2} + 4 S_{-2,-2,2,1} + 4 S_{-2,1,-3,1} \right. \\ & \left. - 4 S_{-2,1,-2,-2} + 4 S_{-2,1,1,-3} + 4 S_{-2,2,-2,1} - 4 S_{3,-2,1,1} - 4 S_{3,1,1,-2} \right. \\ & \left. + 4 S_{4,1,1,1} - 8 S_{-2,-2,1,1,1} - 8 S_{-2,1,1,-2,1}) \right). \end{aligned}$$

Tabela 5.2: Pochodzący z wzorów Lüschera pięciopętłowy wynik dla operatorów twist-2.

¹⁰Co prawda, do wyznaczenia rozwiązania pięciopętłowego z ABA potrzebowaliśmy aż 256 różnych wyników, ale liczenie poprawek Lüschera jest wielokrotnie bardziej skomplikowane.

Ostatnim krokiem w naszych rozważaniach jest sprawdzenie, czy całkowity pięciopętłowy wymiar anomalny (będący sumą składników pochodzących z ABA oraz z poprawek Lüschera) spełnia wszystkie warunki, które powinien spełniać. Zostało to sprawdzone w [A3] i okazało się, że zarówno asymptotyka jak i zgodność z równaniem BFKL jest perfekcyjna. Jest to silna przesłanka, że zaprezentowany przez nas wynik jest poprawny!

5.3.2 Operatory twist-3

Na zakończenie rozważań na temat słabego sprzężenia będziemy chcieli zaprezentować wiodącą poprawkę skończonego rozmiaru do operatorów twist-3. Jak już zasygnalizowaliśmy wcześniej, poprawka ta będzie proporcjonalna do g^{10} , będąc tym samym wynikiem pięciopętłowym. Podobnie, jak w równaniach ABA, mamy tylko nieznaczną zmianę w porównaniu do przypadku operatorów twist-2. Możemy napisać wzór analogiczny do (5.43), który będzie obowiązywał dla operatorów twist-3

$$\Delta E = -64g^{10} S_1 \left(\frac{M}{2}\right)^2 \sum_{Q=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \frac{T_M(q, Q)^2}{R_M(q, Q)} \frac{64}{(q^2 + Q^2)^3}. \quad (5.67)$$

Jedynymi zmianami w porównaniu do wzoru (5.43) jest zmiana wynikająca z rozwinięcia czynnika eksponencjalnego

$$e^{-\tilde{\varepsilon}_Q(q)L} = \frac{4^L g^{2L}}{(q^2 + Q^2)^L} \stackrel{L=3}{=} \frac{64g^6}{(q^2 + Q^2)^3} \quad (5.68)$$

oraz zmiana $S_1^2(M) \rightarrow S_1^2(\frac{M}{2})$. We wzorze (5.67) funkcje T_M oraz R_M zdefiniowane są jak w (5.55) oraz (5.54), gdzie jako wielomian Baxtera weźmiemy funkcję (5.38). Ostatnią różnicą w stosunku do operatorów twist-2 jest fakt, że tym razem możemy użyć jedynie parzystych wartości M .

Znając wzór (5.67), jedyne co musimy zrobić, to powtórzyć procedurę, którą zastosowaliśmy dla przypadku operatorów twist-2, tzn. skorzystać z zasady maksymalnej transcendentności oraz zasady parzystości i jako wynik na pięciopętłową poprawkę pochodzącą ze wzorów Lüschera dostaniemy

$$\begin{aligned} \gamma^{\text{wrapping, twist-3}}(M) = & -64g^{10} S_1^2 \left(35\zeta(7) - 40S_2\zeta(5) + (-8S_4 + 16S_{2,2})\zeta(3) \right. \\ & \left. + 2S_7 - 4S_{2,5} - 2S_{3,4} - 4S_{4,3} - 2S_{6,1} + 8S_{2,2,3} + 4S_{3,3,1} \right). \end{aligned} \quad (5.69)$$

gdzie wszystkie argumenty sum harmoniczných są równe $\frac{M}{2}$.

Możemy teraz sprawdzić, że wynik (5.69), podobnie jak było dla operatorów twist-2, nie daje wkładu do wierzchołkowego wymiaru anomalnego, gdyż

$$\gamma^{\text{wrapping, twist-3}} \sim - \left(786\zeta(3) - \frac{16\pi^4}{15} \right) \frac{\log^2 M}{M^2}, \quad \text{dla } M \rightarrow \infty \quad (5.70)$$

Bezpośrednią motywacją do przeprowadzenia rachunku dla operatorów twist-3 było, poza chęcią sprawdzenia hipotez dotyczących własności wymiaru anomalnego, przekonanie się, jak dokładnie efekty wrapping wpływają na asymptotykę wymiaru anomalnego dla dużego M . W szczególności interesujące było pytanie, czy efekty te mają wpływ na wyraz podwiodący względem wierzchołkowego wymiaru anomalnego, zwany wirtualną funkcją skalowania (ang. virtual scaling function), który jest proporcjonalny do M^0 . Jak można się przekonać na podstawie wzoru (5.70), również w tym przypadku cała informacja zakodowana jest w wyniku pochodzącym z równań Bethego.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathcal{P}_{10}^{\text{rational}}}{128} = & -5\mathbb{S}_{2,2,5} - \mathbb{S}_{2,6,1} + 19\mathbb{S}_{3,1,5} - 20\mathbb{S}_{3,2,4} + 21\mathbb{S}_{4,1,4} - 24\mathbb{S}_{4,2,3} + 25\mathbb{S}_{5,1,3} \\
& -18\mathbb{S}_{5,2,2} + 7\mathbb{S}_{6,1,2} - 4\mathbb{S}_{6,2,1} - 2\mathbb{S}_{1,1,2,5} + 2\mathbb{S}_{1,1,6,1} - 2\mathbb{S}_{1,2,1,5} - \mathbb{S}_{1,2,2,4} \\
& + \mathbb{S}_{1,2,3,3} + \mathbb{S}_{1,2,4,2} - 6\mathbb{S}_{1,2,5,1} + 23\mathbb{S}_{1,3,1,4} - 24\mathbb{S}_{1,3,2,3} - \mathbb{S}_{1,3,4,1} + 23\mathbb{S}_{1,4,1,3} \\
& -20\mathbb{S}_{1,4,2,2} - \mathbb{S}_{1,4,3,1} + 13\mathbb{S}_{1,5,1,2} - 12\mathbb{S}_{1,5,2,1} + 6\mathbb{S}_{1,6,1,1} - 2\mathbb{S}_{2,1,1,5} + 5\mathbb{S}_{2,1,2,4} \\
& + \mathbb{S}_{2,1,3,3} + \mathbb{S}_{2,1,4,2} - 5\mathbb{S}_{2,1,5,1} - 16\mathbb{S}_{2,2,1,4} + 17\mathbb{S}_{2,2,2,3} - 2\mathbb{S}_{2,2,3,2} + 14\mathbb{S}_{2,2,4,1} \\
& -29\mathbb{S}_{2,3,1,3} + 25\mathbb{S}_{2,3,2,2} + 4\mathbb{S}_{2,3,3,1} - 19\mathbb{S}_{2,4,1,2} + 20\mathbb{S}_{2,4,2,1} - 12\mathbb{S}_{2,5,1,1} \\
& +20\mathbb{S}_{3,1,1,4} - 22\mathbb{S}_{3,1,2,3} - 8\mathbb{S}_{3,1,3,2} + 6\mathbb{S}_{3,1,4,1} - 26\mathbb{S}_{3,2,1,3} + 36\mathbb{S}_{3,2,2,2} \\
& -5\mathbb{S}_{3,2,3,1} - 6\mathbb{S}_{3,3,1,2} + 5\mathbb{S}_{3,3,2,1} - 2\mathbb{S}_{3,4,1,1} + 22\mathbb{S}_{4,1,1,3} - 24\mathbb{S}_{4,1,2,2} + 6\mathbb{S}_{4,1,3,1} \\
& -18\mathbb{S}_{4,2,1,2} + 18\mathbb{S}_{4,2,2,1} - 2\mathbb{S}_{4,3,1,1} + 14\mathbb{S}_{5,1,1,2} - 10\mathbb{S}_{5,1,2,1} - 14\mathbb{S}_{5,2,1,1} \\
& +8\mathbb{S}_{6,1,1,1} + 4\mathbb{S}_{1,1,1,1,5} - 6\mathbb{S}_{1,1,1,2,4} - 2\mathbb{S}_{1,1,1,3,3} - 2\mathbb{S}_{1,1,1,4,2} + 6\mathbb{S}_{1,1,1,5,1} \\
& -4\mathbb{S}_{1,1,2,1,4} + 4\mathbb{S}_{1,1,2,2,3} + 5\mathbb{S}_{1,1,2,3,2} - 13\mathbb{S}_{1,1,2,4,1} + 24\mathbb{S}_{1,1,3,1,3} - 20\mathbb{S}_{1,1,3,2,2} \\
& -5\mathbb{S}_{1,1,3,3,1} + 16\mathbb{S}_{1,1,4,1,2} - 19\mathbb{S}_{1,1,4,2,1} + 12\mathbb{S}_{1,1,5,1,1} - 4\mathbb{S}_{1,2,1,1,4} + 7\mathbb{S}_{1,2,1,2,3} \\
& +4\mathbb{S}_{1,2,1,3,2} - 8\mathbb{S}_{1,2,1,4,1} - 19\mathbb{S}_{1,2,2,1,3} + 9\mathbb{S}_{1,2,2,2,2} + 24\mathbb{S}_{1,2,2,3,1} - 22\mathbb{S}_{1,2,3,1,2} \\
& +31\mathbb{S}_{1,2,3,2,1} - 22\mathbb{S}_{1,2,4,1,1} + 22\mathbb{S}_{1,3,1,1,3} - 24\mathbb{S}_{1,3,1,2,2} + 6\mathbb{S}_{1,3,1,3,1} - 20\mathbb{S}_{1,3,2,1,2} \\
& +23\mathbb{S}_{1,3,2,2,1} - 6\mathbb{S}_{1,3,3,1,1} + 16\mathbb{S}_{1,4,1,1,2} - 11\mathbb{S}_{1,4,1,2,1} - 22\mathbb{S}_{1,4,2,1,1} + 16\mathbb{S}_{1,5,1,1,1} \\
& -4\mathbb{S}_{2,1,1,1,4} + 7\mathbb{S}_{2,1,1,2,3} + 4\mathbb{S}_{2,1,1,3,2} - 8\mathbb{S}_{2,1,1,4,1} + 3\mathbb{S}_{2,1,2,1,3} - 11\mathbb{S}_{2,1,2,2,2} \\
& +14\mathbb{S}_{2,1,2,3,1} - 9\mathbb{S}_{2,1,3,1,2} + 16\mathbb{S}_{2,1,3,2,1} - 12\mathbb{S}_{2,1,4,1,1} - 16\mathbb{S}_{2,2,1,1,3} + 13\mathbb{S}_{2,2,1,2,2} \\
& +5\mathbb{S}_{2,2,1,3,1} + 28\mathbb{S}_{2,2,2,1,2} - 67\mathbb{S}_{2,2,2,2,1} + 32\mathbb{S}_{2,2,3,1,1} - 22\mathbb{S}_{2,3,1,1,2} + 15\mathbb{S}_{2,3,1,2,1} \\
& +31\mathbb{S}_{2,3,2,1,1} - 23\mathbb{S}_{2,4,1,1,1} + 20\mathbb{S}_{3,1,1,1,3} - 22\mathbb{S}_{3,1,1,2,2} + 6\mathbb{S}_{3,1,1,3,1} - 8\mathbb{S}_{3,1,2,1,2} \\
& +2\mathbb{S}_{3,1,2,2,1} + 6\mathbb{S}_{3,1,3,1,1} - 20\mathbb{S}_{3,2,1,1,2} + 15\mathbb{S}_{3,2,1,2,1} + 25\mathbb{S}_{3,2,2,1,1} - 7\mathbb{S}_{3,3,1,1,1} \\
& +16\mathbb{S}_{4,1,1,1,2} - 11\mathbb{S}_{4,1,1,2,1} - 11\mathbb{S}_{4,1,2,1,1} - 23\mathbb{S}_{4,2,1,1,1} + 16\mathbb{S}_{5,1,1,1,1} \\
& -4\mathbb{S}_{1,1,1,1,2,3} - 4\mathbb{S}_{1,1,1,1,3,2} + 8\mathbb{S}_{1,1,1,1,4,1} + 4\mathbb{S}_{1,1,1,2,2,2} - 13\mathbb{S}_{1,1,1,2,3,1} \\
& +18\mathbb{S}_{1,1,1,3,1,2} - 25\mathbb{S}_{1,1,1,3,2,1} + 16\mathbb{S}_{1,1,1,4,1,1} + 3\mathbb{S}_{1,1,2,1,2,2} - 5\mathbb{S}_{1,1,2,1,3,1} \\
& -20\mathbb{S}_{1,1,2,2,1,2} + 53\mathbb{S}_{1,1,2,2,2,1} - 33\mathbb{S}_{1,1,2,3,1,1} + 18\mathbb{S}_{1,1,3,1,1,2} - 11\mathbb{S}_{1,1,3,1,2,1} \\
& -25\mathbb{S}_{1,1,3,2,1,1} + 20\mathbb{S}_{1,1,4,1,1,1} + 3\mathbb{S}_{1,2,1,1,2,2} - 5\mathbb{S}_{1,2,1,1,3,1} + 14\mathbb{S}_{1,2,1,2,2,1} \\
& -17\mathbb{S}_{1,2,1,3,1,1} - 18\mathbb{S}_{1,2,2,1,1,2} + 11\mathbb{S}_{1,2,2,1,2,1} + 52\mathbb{S}_{1,2,2,2,1,1} - 27\mathbb{S}_{1,2,3,1,1,1} \\
& +16\mathbb{S}_{1,3,1,1,1,2} - 11\mathbb{S}_{1,3,1,1,2,1} - 11\mathbb{S}_{1,3,1,2,1,1} - 27\mathbb{S}_{1,3,2,1,1,1} + 20\mathbb{S}_{1,4,1,1,1,1} \\
& +3\mathbb{S}_{2,1,1,1,2,2} - 5\mathbb{S}_{2,1,1,1,3,1} + 14\mathbb{S}_{2,1,1,2,2,1} - 17\mathbb{S}_{2,1,1,3,1,1} + 16\mathbb{S}_{2,1,2,2,1,1} \\
& -11\mathbb{S}_{2,1,3,1,1,1} - 16\mathbb{S}_{2,2,1,1,1,2} + 11\mathbb{S}_{2,2,1,1,2,1} + 11\mathbb{S}_{2,2,1,2,1,1} + 45\mathbb{S}_{2,2,2,1,1,1} \\
& -27\mathbb{S}_{2,3,1,1,1,1} + 16\mathbb{S}_{3,1,1,1,1,2} - 11\mathbb{S}_{3,1,1,1,2,1} - 11\mathbb{S}_{3,1,1,2,1,1} - 11\mathbb{S}_{3,1,2,1,1,1} \\
& -27\mathbb{S}_{3,2,1,1,1,1} + 20\mathbb{S}_{4,1,1,1,1,1} - 16\mathbb{S}_{1,1,1,1,2,2,1} + 24\mathbb{S}_{1,1,1,1,3,1,1} - 28\mathbb{S}_{1,1,1,2,2,1,1} \\
& +20\mathbb{S}_{1,1,1,3,1,1,1} - 20\mathbb{S}_{1,1,2,2,1,1,1} + 20\mathbb{S}_{1,1,3,1,1,1,1} - 20\mathbb{S}_{1,2,2,1,1,1,1} \\
& +20\mathbb{S}_{1,3,1,1,1,1,1} - 20\mathbb{S}_{2,2,1,1,1,1,1} + 20\mathbb{S}_{3,1,1,1,1,1,1}.
\end{aligned}$$

Tabela 5.3: Funkcja $\mathcal{P}_{10}^{\text{rational}}(M)$ dająca wkład do wyniku pięciopętlowego dla operatorów twist-2 pochodzący z równań Bethego.

$$\begin{aligned}
\gamma_{10}^{\text{ABA,twist-3}} = & 136S_9 + 368S_{1,8} + 2832S_{2,7} + 4272S_{3,6} + 848S_{4,5} - 3024S_{5,4} - 2736S_{6,3} \\
& - 1168S_{7,2} - 496S_{8,1} - 5376S_{1,1,7} - 12352S_{1,2,6} - 8832S_{1,3,5} + 1600S_{1,4,4} + 3968S_{1,5,3} \\
& - 64S_{1,6,2} - 1344S_{1,7,1} - 12352S_{2,1,6} - 13760S_{2,2,5} - 2112S_{2,3,4} + 4288S_{2,4,3} - 960S_{2,5,2} \\
& - 5440S_{2,6,1} - 9088S_{3,1,5} - 2432S_{3,2,4} + 5120S_{3,3,3} + 2688S_{3,4,2} - 4160S_{3,5,1} \\
& + 1280S_{4,1,4} + 5824S_{4,2,3} + 6400S_{4,3,2} + 2112S_{4,4,1} + 5120S_{5,1,3} + 6208S_{5,2,2} \\
& + 5312S_{5,3,1} + 3904S_{6,1,2} + 3904S_{6,2,1} + 1728S_{7,1,1} + 21504S_{1,1,1,6} + 22784S_{1,1,2,5} \\
& + 5632S_{1,1,3,4} - 1280S_{1,1,4,3} + 6912S_{1,1,5,2} + 11520S_{1,1,6,1} + 22784S_{1,2,1,5} + 9088S_{1,2,2,4} \\
& - 1024S_{1,2,3,3} + 6784S_{1,2,4,2} + 17152S_{1,2,5,1} + 5504S_{1,3,1,4} - 3456S_{1,3,2,3} - 1536S_{1,3,3,2} \\
& + 7680S_{1,3,4,1} - 4480S_{1,4,1,3} - 6272S_{1,4,2,2} - 3584S_{1,4,3,1} - 3840S_{1,5,1,2} - 3840S_{1,5,2,1} \\
& + 768S_{1,6,1,1} + 22784S_{2,1,1,5} + 9088S_{2,1,2,4} - 1024S_{2,1,3,3} + 6784S_{2,1,4,2} + 17152S_{2,1,5,1} \\
& + 9088S_{2,2,1,4} - 2688S_{2,2,2,3} + 640S_{2,2,3,2} + 13440S_{2,2,4,1} - 3456S_{2,3,1,3} - 7040S_{2,3,2,2} \\
& - 768S_{2,3,3,1} - 4480S_{2,4,1,2} - 4480S_{2,4,2,1} + 2816S_{2,5,1,1} + 6272S_{3,1,1,4} - 2944S_{3,1,2,3} \\
& - 1536S_{3,1,3,2} + 7936S_{3,1,4,1} - 2944S_{3,2,1,3} - 7296S_{3,2,2,2} - 768S_{3,2,3,1} - 6656S_{3,3,1,2} \\
& - 6656S_{3,3,2,1} - 1024S_{3,4,1,1} - 3968S_{4,1,1,3} - 6528S_{4,1,2,2} - 3584S_{4,1,3,1} - 6528S_{4,2,1,2} \\
& - 6528S_{4,2,2,1} - 4864S_{4,3,1,1} - 5376S_{5,1,1,2} - 5376S_{5,1,2,1} - 5376S_{5,2,1,1} - 4608S_{6,1,1,1} \\
& - 32768S_{1,1,1,1,5} - 10240S_{1,1,1,2,4} - 3072S_{1,1,1,3,3} - 17920S_{1,1,1,4,2} - 30720S_{1,1,1,5,1} \\
& - 10240S_{1,1,2,1,4} - 8704S_{1,1,2,3,2} - 24064S_{1,1,2,4,1} + 1024S_{1,1,3,1,3} + 2560S_{1,1,3,2,2} \\
& - 4096S_{1,1,3,3,1} - 512S_{1,1,4,1,2} - 512S_{1,1,4,2,1} - 10240S_{1,1,5,1,1} - 10240S_{1,2,1,1,4} \\
& - 8704S_{1,2,1,3,2} - 24064S_{1,2,1,4,1} + 3072S_{1,2,2,2,2} - 6656S_{1,2,2,3,1} + 512S_{1,2,3,1,2} \\
& + 512S_{1,2,3,2,1} - 10752S_{1,2,4,1,1} + 1024S_{1,3,1,1,3} + 3072S_{1,3,1,2,2} - 3584S_{1,3,1,3,1} \\
& + 3072S_{1,3,2,1,2} + 3072S_{1,3,2,2,1} - 2560S_{1,3,3,1,1} + 3072S_{1,4,1,1,2} + 3072S_{1,4,1,2,1} \\
& + 3072S_{1,4,2,1,1} + 3072S_{1,5,1,1,1} - 10240S_{2,1,1,1,4} - 8704S_{2,1,1,3,2} - 24064S_{2,1,1,4,1} \\
& + 3072S_{2,1,2,2,2} - 6656S_{2,1,2,3,1} + 512S_{2,1,3,1,2} + 512S_{2,1,3,2,1} - 10752S_{2,1,4,1,1} \\
& + 3072S_{2,2,1,2,2} - 6656S_{2,2,1,3,1} + 3072S_{2,2,2,1,2} + 3072S_{2,2,2,2,1} - 5632S_{2,2,3,1,1} \\
& + 3072S_{2,3,1,1,2} + 3072S_{2,3,1,2,1} + 3072S_{2,3,2,1,1} + 3072S_{2,4,1,1,1} + 3072S_{3,1,1,2,2} \\
& - 4096S_{3,1,1,3,1} + 3072S_{3,1,2,1,2} + 3072S_{3,1,2,2,1} - 2560S_{3,1,3,1,1} + 3072S_{3,2,1,1,2} \\
& + 3072S_{3,2,1,2,1} + 3072S_{3,2,2,1,1} + 4608S_{3,3,1,1,1} + 3072S_{4,1,1,1,2} + 3072S_{4,1,1,2,1} \\
& + 3072S_{4,1,2,1,1} + 3072S_{4,2,1,1,1} + 3072S_{5,1,1,1,1} + 16384S_{1,1,1,1,3,2} + 32768S_{1,1,1,1,4,1} \\
& + 8192S_{1,1,1,2,3,1} + 4096S_{1,1,1,3,1,2} + 4096S_{1,1,1,3,2,1} + 20480S_{1,1,1,4,1,1} + 8192S_{1,1,2,1,3,1} \\
& + 12288S_{1,1,2,3,1,1} + 8192S_{1,2,1,1,3,1} + 12288S_{1,2,1,3,1,1} + 8192S_{2,1,1,1,3,1} + 12288S_{2,1,1,3,1,1} \\
& - 16384S_{1,1,1,1,3,1,1} + \zeta(3) (896S_6 - 2304S_{1,5} - 1792S_{2,4} - 768S_{3,3} - 1792S_{4,2} \\
& - 2304S_{5,1} + 2560S_{1,1,4} + 512S_{1,2,3} + 1536S_{1,3,2} + 3584S_{1,4,1} + 512S_{2,1,3} + 1536S_{2,3,1} \\
& + 512S_{3,1,2} + 512S_{3,2,1} + 2560S_{4,1,1} - 2048S_{1,1,3,1} - 2048S_{1,3,1,1}) \\
& + 1280\zeta(5) (S_{1,3} + S_{3,1} - S_4)
\end{aligned}$$

Tabela 5.4: Wynik na pięciopętłowy wymiar anomalny dla operatorów twist-3 pochodzący z ABA. Wszystkie występujące tutaj sumy są funkcjami argumentu $\frac{M}{2}$.

Część III
Podsumowanie

Rozdział 6

Podsumowanie oraz problemy otwarte

Mimo tego, że korespondencja AdS/CFT ma zaledwie 12 lat, a jej zagadnienie spektralne było intensywnie eksplorowane jedynie przez połowę tego czasu, to jesteśmy u progu jego całkowitego rozwiązania. Idea całkowalności, obecna w teoriach występujących po obu stronach korespondencji, przyczyniła się do tego w niepodważalnym stopniu. W zasięgu ręki wydaje się już być zapisanie równań typu Destriego-de Vegi, które pozwolą odtworzyć pełne spektrum teorii w granicy planarnej. W proces dochodzenia do ostatecznej odpowiedzi, w sposób bardzo istotny, wkomponowuje się badanie poprawek skończonego rozmiaru danych przez uogólnione wzory Lüschera. W szczególności, badanie ich umożliwiło zwerifikowanie poprawności równań TBA, które są ostatnim krokiem przed sformulowaniem ostatecznej odpowiedzi.

W powyższej rozprawie doktorskiej skupiliśmy się na przedstawieniu wyników badań ostatnich trzech lat, dotyczących poprawek skończonego rozmiaru w korespondencji AdS/CFT. W szczególności, po krótkim wstępie, wyprowadziliśmy diagramatycznie uogólnione wzory Lüschera dla pojedynczego wzbudzenia, które były pierwszym krokiem w kierunku zrozumienia spektrum korespondencji AdS/CFT w skończonej objętości. Następnie, podaliśmy także wyprowadzenie wzorów Lüschera dla dowolnej ilości cząstek, startując z równań TBA. Tym sposobem udało nam się znaleźć narzędzia, które umożliwiły nam badanie spektrum obiektów występujących w korespondencji zarówno w silnym jak i w słabym sprzężeniu. Po pierwsze, odtworzyliśmy wiodące klasyczne poprawki do wielkiego magnonu w silnym sprzężeniu, używając do tego wzoru na μ -term. Następnie, znaleźliśmy pierwszą poprawkę pochodzącą od kwantowych fluktuacji wokół wielkiego magnonu, daną przez F -term. Zaowocowało to znalezieniem wiodącego opisu dla pojedynczego wzbudzenia w skończonej objętości i w silnym sprzężeniu.

Z kolei w ostatniej części pracy skupiliśmy się na znalezieniu wiodących poprawek do wymiaru anomalnego łańcucha spinowego występującego w teorii $\mathcal{N} = 4$ SYM. Przewidywania pochodzące z Asymptotycznego Ansatzu Bethego okazały się być niepoprawne dla wyższych rzędów rozwinięcia perturbacyjnego i musiały zostać uzupełnione przez poprawki skończonego rozmiaru dane wzorami Lüschera. Istotnym okazało się więc użycie opisu dualnego w celu uzyskania poprawnego opisu łańcucha spinowego. W rozważaniach tych w sposób istotny wykorzystywaliśmy własność całkowalności dwuwymiarowej teorii pola na wstędze świata struny. Skupiliśmy się operatorach twist-2 oraz twist-3, dla których znaleźliśmy wymiar anomalny do piątego rzędu w rozwinięciu perturbacyjnym w słabym sprzężeniu. Pozwoliło nam to między innymi potwierdzić własności, jakie powinien mieć

ten wymiar anomalny. Przede wszystkim jednak, użycie poprawek skończonego rozmiaru pozwoliło nam odtworzyć zgodność z przewidywaniami pochodzącymi z równania BFKL, co pokazało załamanie się asymptotycznej całkowalności i potwierdziło potrzebę użycia wzorów Lüschera w celu uzyskania poprawnego wyniku. Wynik pięciopętłowy pozwolił dodatkowo na weryfikację zaproponowanych wcześniej równań TBA.

Problemy otwarte

Istnieje wiele pytań, które można sobie zadać w kontekście poprawek Lüschera, na które nie znane są do dziś zadowalające odpowiedzi. W szczególności, jak już wspomnieliśmy w głównym tekście tej pracy, nie istnieje diagramatyczne wyprowadzenie wzorów na poprawki Lüschera dla dwóch lub większej ilości wzbudzeń. Byłoby więc wskazane zaatakowanie problemu znalezienia ich, przynajmniej w przypadku dwóch cząstek. Pozwoliłoby to z całą pewnością potwierdzić wzory, które otrzymaliśmy z równań TBA. Poza tym, sensowne wydaje się być pójście w naszych rozważaniach o krok dalej, tzn. znalezienie podwiodących poprawek Lüschera, które pozwoliłyby rozszerzyć analizę spektrum obu teorii. W tym przypadku w zasięgu ręki wydaje się znalezienie diagramatycznego wyprowadzenia podwiodących poprawek dla pojedynczego wzbudzenia.

Mimo tego, że pójście w naszej analizie o krok dalej i rozważenie poprawek podwiodących jest zagadnieniem wielce interesującym, to jednak ostatecznym celem pozostaje znalezienie równań DdV dla korespondencji AdS/CFT. Znalezienie tych równań oznacza otrzymanie pełnego spektrum dla dowolnej stałej sprzężenia. Samo jednak znalezienie równań nie oznacza końca zainteresowań tą tematyką. Przede wszystkim musimy być świadomi, że równania DdV nie będą wyprowadzone z zasad pierwszych, lecz raczej odgadnięte, co pozostawia problem potwierdzenia ich poprawności sprawą pierwszej wagi. W szczególności, używając tych równań należy potwierdzić wszystkie znane do tej pory wyniki, które zostały znalezione w ciągu ostatnich lat. Poza tym, zadaniem trudnym okazuje się być otrzymanie poprawnego opisu wszystkich stanów teorii. Przykładowo, człony źródłowe występujące w równaniach TBA zostały poprawnie zaproponowane do tej pory jedynie dla operatorów twist-2. Problem znalezienia poprawnego opisu każdego stanu w teorii będzie także stał przed równaniami DdV.

Na koniec chcielibyśmy wspomnieć o jeszcze jednym kierunku badań, który się przed nami otwiera. Chodzi o odejście od granicy planarnej i rozpatrzenie poprawek do energii/wymiaru anomalnego w kolejnych rzędach rozwinięcia w $\frac{1}{N}$. Kluczowe pytanie, na które do tej pory nie jest znana odpowiedź brzmi, czy całkowalność jest także obecna w tym przypadku. Odpowiedź na to pytanie pomoże nam z pewnością poszerzyć nasze rozumienie dualności pomiędzy teoriami pola oraz teoriami strun.

Część IV

Dodatki

Dodatek A

Krzywe algebraiczne zmiennej rapidity

A.1 Teorie relatywistyczne

W teoriach relatywistycznych zależność pomiędzy energią oraz pędem dla cząstki leżącej na powłoce masy dana jest poprzez relację dyspersji

$$E^2 - p^2 = m^2. \quad (\text{A.1})$$

W powyższym wzorze m jest z góry zadaną liczbą rzeczywistą podczas, gdy zarówno energia E jak i pęd p są zmiennymi zespolonymi. Mamy więc do czynienia z dwiema zmiennymi zespolonymi połączonymi relacją (A.1). Relacja ta definiuje pewną krzywą zespoloną (w tym przypadku jest to sfera) w dwuwymiarowej przestrzeni zespolonej. Krzywa dana przez (A.1) może być sparametryzowana za pomocą pojedynczej zmiennej zespolonej – zmiennej rapidity – w następujący sposób

$$E(\theta) = m \cosh \theta, \quad p(\theta) = m \sinh \theta, \quad \theta \in \mathbb{C}. \quad (\text{A.2})$$

Wynika stąd, że nakryciem uniwersalnym krzywej zdefiniowanej w (A.1) jest płaszczyzna zespolona. Przypadek, gdy wartości θ są rzeczywiste odpowiada wzbudzeniom fizycznym, gdyż w tym przypadku pęd i energia są liczbami rzeczywistymi oraz energia jest dodatnia. Tak więc oś rzeczywista na płaszczyźnie zespolonej odpowiada teorii fizycznej. Można zauważyć, że parametryzacja (A.2) jest okresowa, z urojonym okresem równym $\omega = 2\pi i$. Wynika stąd, że także każda prosta postaci $\theta = x + 2\pi in$, gdzie $x \in \mathbb{R}$ odpowiada teorii rzeczywistej. W dalszych rozważaniach wystarczy, że skoncentrujemy się na wycinku płaszczyzny zespolonej zdefiniowanym poprzez $\Im(\theta) \in [0, 2\pi]$, gdyż własności na pozostałej części płaszczyzny mogą być odtworzone używając periodyczności.

Zbadajmy teraz własności zmiennej rapidity dla zdefiniowanego przed chwilą wycinka płaszczyzny zespolonej. Po pierwsze, jeśli rozpatrzmy prostą $\theta = x + i\pi$, $x \in \mathbb{R}$, to możemy zauważyć, że

$$E(x + i\pi) = -E(x), \quad p(x + i\pi) = -p(x). \quad (\text{A.3})$$

Przekształcenie $x \rightarrow x + i\pi$ definiuje więc transformację cząstka-antycząstka. Innymi słowy, prosta $\theta = x + i\pi$ odpowiada za antycząstki fizyczne naszej teorii. Co więcej, jeśli dokonamy przekształcenia $x \rightarrow x + i\frac{\pi}{2}$, to dostaniemy

$$E(x + i\frac{\pi}{2}) = ip(x), \quad p(x + i\frac{\pi}{2}) = iE(x), \quad (\text{A.4})$$

które odpowiada przejściu do teorii zwierciadlanej. Tak więc prosta $\theta = x + i\frac{\pi}{2}$ definiuje cząstki fizyczne w teorii zwierciadlanej. Przy naszym wyborze, prosta $\theta = x + i\frac{3\pi}{2}$ odpowiada za antycząstki w teorii zwierciadlanej. Ogólnie mamy więc zdefiniowane cztery charakterystyczne proste zdefiniowane, należące do wyróżnionego przez nas obszaru.

A.2 Teoria superstrun w $AdS_5 \times S^5$

W przypadku teorii strun zdefiniowanej na przestrzeni $AdS_5 \times S^5$ zależność pomiędzy energią i pędem jest bardziej skomplikowana i dana jest poprzez

$$E^2 - 16g^2 \sin^2 \frac{p}{2} = 1. \quad (\text{A.5})$$

Ponownie relacja ta wyznacza pewną krzywą zespoloną – w tym przypadku jest to torus [16]. Można znaleźć pojedynczy parametr zespolony – $z \in \mathbb{C}$ – który parametryzuje energię oraz pęd w następujący sposób [44]

$$p(z) = am(z, -16g^2), \quad E(z) = dn(z, -16g^2). \quad (\text{A.6})$$

Tutaj $am(z, k)$ oraz $dn(z, k)$ są eliptycznymi funkcjami Jakobiego zdefiniowanymi z użyciem niekompletnych całek eliptycznych pierwszego rodzaju

$$z = F(\phi, k) = \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1 + k \sin^2 \theta}}, \quad (\text{A.7})$$

w następujący sposób

$$\begin{aligned} am(z, k) &= F^{-1}(z, k), \\ dn(z, k) &= \sqrt{1 + k \sin^2(am(z, k))}. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Parametryzacja (A.6) jest funkcją okresową zmiennej z z dwoma okresami ω_1 i ω_2 , gdzie pierwszy z nich jest rzeczywisty, a drugi urojony. Dane są one wzorami

$$\omega_1 = 4K(-16g^2), \quad \omega_2 = 4iK(1 + 16g^2) - 4K(-16g^2). \quad (\text{A.9})$$

Pomimo tego, że szczegóły w tym przypadku są dużo bardziej skomplikowane niż w przypadku relatywistycznym, to możemy jednak znaleźć, że okres ω_2 odgrywa tutaj podobną rolę, jak okres $2\pi i$ w poprzednim przypadku. Podobnie jak poprzednio, możemy wyznaczyć cztery charakterystyczne proste w obszarze zdefiniowanym przez warunek $\Im(z) \in [0, \omega_2]$. W szczególności teoria fizyczna wyznaczona jest przez rapidity leżące na osi rzeczywistej. Poza tym, możemy zidentyfikować wartość zmiennej rapidity cząstek w teorii zwierciadlanej jako te leżące na prostej $z = x + i\frac{\omega_2}{4}$, a te należące do prostej $z = x + \frac{\omega_2}{2}$ definiują antycząstki.

Dodatek B

Struktura macierzy \mathcal{S}

B.1 Rozpraszanie $1 + 1 \rightarrow 1 + 1$

Kanoniczna macierz \mathcal{S} będąca niezmiennicza względem algebry $\mathfrak{su}(2|2)^2$, opisująca zarówno rozpraszanie wzbudzeń na łańcuchu spinowym jak i tych na wstędze świata struny, może być zapisana w następującej postaci

$$\mathcal{S}(p_1, p_2) = S_0(p_1, p_2)^2 \cdot S_{\mathfrak{su}(2|2)}(p_1, p_2) \otimes S_{\mathfrak{su}(2|2)}(p_1, p_2), \quad (\text{B.1})$$

gdzie $S_{\mathfrak{su}(2|2)}(p_1, p_2)$ można wyznaczyć z dokładnością do czynnika skalarnego używając jedynie reguł komutacji z generatorami algebry $\mathfrak{su}(2|2)$ i może być znaleziona w [15]. Część skalarna $S_0(p_1, p_2)^2$ oraz tzw. *dressing factor* σ mogą być z kolei wyznaczone z unitarności macierzy S oraz z równania crossing [16]. Wtedy część skalarna przyjmuje postać

$$S_0(p_1, p_2)^2 = \frac{x_1^- - x_2^+}{x_1^+ - x_2^-} \frac{1 - \frac{1}{x_1^+ x_2^-}}{1 - \frac{1}{x_1^- x_2^+}} \cdot \sigma^2(x_1, x_2), \quad (\text{B.2})$$

gdzie przez $\sigma(x_1, x_2) = e^{i\theta(x_1, x_2)}$ oznaczyliśmy dressing factor. Z kolei $\theta(x_1, x_2)$ jest tzw. *dressing phase*. Ogólna postać dressing factora dana jest przez

$$\sigma(x_q, x_p) = e^{i(\chi(x_q^-, x_p^-) - \chi(x_q^+, x_p^-) + \chi(x_q^+, x_p^+) - \chi(x_q^-, x_p^+))}, \quad (\text{B.3})$$

gdzie funkcje $\chi(x, y) = \tilde{\chi}(x, y) - \tilde{\chi}(y, x)$ są antysymetryczne i mogą być zapisane w dwojaki sposób prezentowany w kolejnych podrozdziałach.

B.1.1 Dressing factor jako szereg

W naszych rozważaniach będziemy potrzebować zarówno rozwinięcia w silnym jak i w słabym sprzężeniu. W obu przypadkach można jednak zapisać postać funkcji $\tilde{\chi}(x, y)$ jako szereg podwójny

$$\tilde{\chi}(x, y) = \sum_{r=2}^{\infty} \sum_{s=r+1}^{\infty} \frac{-c_{r,s}(g)}{(r-1)(s-1)} \frac{1}{x^{r-1} y^{s-1}}. \quad (\text{B.4})$$

Teraz w zależności od tego, która granica nas interesuje, mamy różne rozwinięcia funkcji $c_{r,s}(g)$.

Słabe sprzężenie

Dla małej wartości stałej sprzężenia zbieżne rozwinięcie zostało znalezione w [20] i może być zapisane z użyciem funkcji Bessela jako

$$c_{r,s}(g) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}(s-r-1)\right) (r-1)(s-1) \int_0^\infty dt \frac{J_{r-1}(2gt)J_{s-1}(2gt)}{t(e^t-1)}. \quad (\text{B.5})$$

W naszych rozważaniach wystarczająca jest informacja na temat rozwinięcia funkcji Bessela dla małych parametrów, które jest postaci

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n n!} \left(1 - \frac{1}{n+1} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \dots\right). \quad (\text{B.6})$$

Silne sprzężenie

Dla silnego sprzężenia sytuacja jest trochę bardziej skomplikowana. Funkcje $c_{r,s}$ można rozwinąć w następujący szereg w stałej sprzężenia [19]

$$c_{r,s} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{g^{n-1}} c_{r,s}^{(n)}, \quad (\text{B.7})$$

gdzie dla $n \geq 2$ mamy

$$c_{r,s}^{(n)} = \frac{(1 - (-1)^{r+s})\zeta(n)}{2(-2\pi)^n \Gamma(n-1)} (r-1)(s-1) \frac{\Gamma(\frac{1}{2}(s+r+n-3))\Gamma(\frac{1}{2}(s-r+n-1))}{\Gamma(\frac{1}{2}(s+r-n+1))\Gamma(\frac{1}{2}(s-r-n+3))}. \quad (\text{B.8})$$

Z kolei wyraz zerowy szeregu (B.7) znaleziony został w [17] i jest równy

$$c_{r,s}^{(0)} = g\delta_{r+1,s}. \quad (\text{B.9})$$

Jeśli teraz wysumujemy szereg (B.7), to otrzymamy wiodące rozwinięcie funkcji χ , nazywane fazą AFS, w postaci

$$\chi^{(0)}(x, y) = \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) \left(1 - (1 - xy) \log\left(1 - \frac{1}{xy}\right)\right). \quad (\text{B.10})$$

Pierwszy wyraz podwiodący w (B.7), będący poprawką jednopętlową, został znaleziony przez Hernandeza i Lopeza w [18] i wynosi

$$c_{r,s}^{(1)} = \frac{(-1)^{r+s} - 1}{\pi} \frac{(r-1)(s-1)}{(r+s-2)(s-r)}. \quad (\text{B.11})$$

Może on zostać wysumowany dając pierwszy podwiodący wkład do funkcji χ w postaci

$$\begin{aligned} \chi^{(1)}(x, y) = & -\frac{1}{2\pi} \text{Li}_2 \frac{\sqrt{x} - 1/\sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} - \frac{1}{2\pi} \text{Li}_2 \frac{\sqrt{x} + 1/\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \\ & + \frac{1}{2\pi} \text{Li}_2 \frac{\sqrt{x} + 1/\sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} + \frac{1}{2\pi} \text{Li}_2 \frac{\sqrt{x} - 1/\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}. \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

gdzie Li_2 oznaczają funkcję dilogarytmiczną.

B.1.2 Dressing factor jako całka

Postać całkowa funkcji $\chi(x, y)$ została znaleziona w [21] i dana jest wyrażeniem

$$\tilde{\chi}(x, y) = -i \int_{|z_1|=1} \frac{dz_1}{2\pi} \int_{|z_2|=1} \frac{dz_2}{2\pi} \frac{1}{x - z_1} \frac{1}{y - z_2} \times \\ \times \log \Gamma \left(1 + ig \left(z_1 + \frac{1}{z_1} - z_2 - \frac{1}{z_2} \right) \right). \quad (\text{B.13})$$

B.2 Rozpraszanie $Q + 1 \rightarrow Q + 1$

Macierz rozpraszania pojedynczego magnonu na stanie związanym Q została znaleziona w [25]. Będzie nas interesowała sytuacja, gdy stan związany znajduje się w reprezentacji antysymetrycznej (stan związany z reprezentantem w sektorze $\mathfrak{sl}(2)$), co jest równoważne temu, że będziemy rozpraszać fizyczną cząstkę na zwierciadlanym stanie związanym. Każdy stan związany w teorii zwierciadlanej, podobnie jak wzbudzenia elementarne, opisywany jest przez dwie liczby z^\pm powiązane ze sobą relacją

$$z^+ + \frac{1}{z^+} - z^- - \frac{1}{z^-} = \frac{Qi}{g}. \quad (\text{B.14})$$

Macierz rozpraszania ponownie można zapisać jako iloczyn trzech części (skalarną, pochodzącą od dressingu oraz macierzową)

$$\mathcal{S}_Q(z^\pm, x^\pm) = S_Q^0(z^\pm, x^\pm) S_Q^\sigma(z^\pm, x^\pm) S_Q^m(z^\pm, x^\pm). \quad (\text{B.15})$$

Część skalarna dana jest poprzez

$$S_Q^0(z^\pm, x^\pm) = \prod_{i=1}^Q S_{\mathfrak{sl}(2)}^0(z_i^\pm, x^\pm), \quad (\text{B.16})$$

gdzie

$$S_{\mathfrak{sl}(2)}^0(z^\pm, x^\pm) = \frac{z^- - x^+}{z^+ - x^-} \frac{1 - \frac{1}{z^+ x^-}}{1 - \frac{1}{x^- x^+}}. \quad (\text{B.17})$$

Aby znaleźć położenie punktów z_i^\pm postępujemy następująco: z_1^- utożsamiamy z z^- . Aby znaleźć z_1^+ rozwiązujemy równanie (B.14) z $Q = 1$. Następnie, korzystając z warunku na położenie bieguna macierzy rozpraszania między dwoma wzbudzeniami elementarnymi, otrzymujemy $z_2^- = z_1^+$. W analogiczny sposób możemy generować kolejne punkty. Na końcu dostaniemy, że $z_Q^+ = z^+$.

Część pochodząca od dressingu ma podobną strukturę

$$S_Q^\sigma(z^\pm, x^\pm) = \prod_{i=1}^Q \sigma^2(z_i^\pm, x^\pm), \quad (\text{B.18})$$

gdzie ponownie użyliśmy punktów z_i^\pm , natomiast σ dane jest przez (B.3).

Z kolei część macierzowa może być znaleziona w [25] i jest ona macierzą o wymiarach $4Q \times 4Q$.

Dodatek C

Asymptotyka sum harmoniczych

Znalezienie wiodącej asymptotyki zagnieżdżonych sum harmoniczych dla dużych wartości argumentu nie jest zadaniem prostym. Zasadniczo nie jest znana ogólna metoda jej wyznaczania. Dla naszych celów najlepsze byłoby wyznaczenie tej asymptotyki w języku funkcji ζ -Riemanna. Jesteśmy w stanie to zrobić dla standardowych sum harmoniczych, gdyż w tym przypadku

$$\begin{aligned} S_a(M) &= \zeta(a) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{M}\right), \quad \text{dla } a \geq 2, \\ S_1(M) &= \log M + \mathcal{O}(1). \end{aligned} \tag{C.1}$$

Jeśli z kolei rozpatrzmy sumy z ujemnymi indeksami to dostaniemy

$$S_{-a}(M) = (2^{1-a} - 1) \zeta(a) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{M}\right), \quad \text{dla } a > 1. \tag{C.2}$$

Gdy jednak weźmiemy pod uwagę sumy z większą ilością indeksów, to jedynym sposobem na znalezienie wiodącej asymptotyki są rozważania numeryczne. Jeśli uda się znaleźć wartość numeryczną $S_{a_1, \dots, a_n}(\infty)$ z dostatecznie dużą dokładnością, to istnieją algorytmy, które pozwalają zapisać tę wartość jako sumę iloczynów funkcji ζ -Riemanna ze współczynnikami wymiernymi. Jednym z programów, który korzysta z tych algorytmów i który był często wykorzystywany w naszych obliczeniach jest program EZ-Face [62]. Z jego pomocą można znaleźć zależność pomiędzy dowolnymi potrzebnymi nam zagnieżdżonymi sumami harmonicznymi w $M = \infty$ a funkcjami Riemanna.

C.1 "Wrapping" dla operatorów twist-2 – 4 pętla

Jako przykład obliczania asymptotyki pokażemy, że asymptotyka dla dużych M czteropętlowej poprawki Lüschera (5.56) nie daje wkładu do wierzchołkowego wymiaru anormalnego. Musimy więc udowodnić, że gdy weźmiemy $M \rightarrow \infty$, to otrzymany wynik jest podwładny w stosunku do $\log M$. Z drugiej strony, jeśli przyjrzymy się wzorowi (5.56), to ma on postać

$$\gamma_8^{\text{e.P.}}(M) = 128S_1^2(M) \times A(M), \tag{C.3}$$

gdzie $A(M)$ jest skończone w granicy nieskończonego M . Jeśli teraz zauważymy, że

$$S_1^2(M) \xrightarrow{M \rightarrow \infty} \log^2(M), \tag{C.4}$$

to jedyna sytuacja, w której wynik $\gamma_8^{\text{e.p.}}(M)$ jest podwiodący względem $\log M$ będzie wtedy, gdy $A(M) = 0 + \mathcal{O}(\frac{1}{M})$. W celu pokazania, że tak w istocie jest, podamy explicite asymptotykę wszystkich sum występujących w wyrażeniu $A(M)$

$$\begin{aligned}
S_{-2}(\infty) &= -\frac{1}{2}\zeta(2), \\
S_{-5}(\infty) &= -\frac{15}{16}\zeta(5), \\
S_5(\infty) &= \zeta(5), \\
S_{4,1}(\infty) &= -\zeta(2)\zeta(3) + 3\zeta(5), \\
S_{3,-2}(\infty) &= \frac{1}{4}\zeta(2)\zeta(3) - \frac{51}{32}\zeta(5), \\
S_{-2,-3}(\infty) &= \frac{21}{8}\zeta(2)\zeta(3) - \frac{67}{16}\zeta(5), \\
S_{-2,-2,1}(\infty) &= \frac{15}{16}\zeta(2)\zeta(3) - \frac{29}{32}\zeta(5).
\end{aligned}$$

Jeśli teraz wstawimy to do wyrażenia

$$\begin{aligned}
A(M) &= -5\zeta(5) - 4S_{-2}\zeta(3) - 2S_5 + 2S_{-5} + 4S_{4,1} - 4S_{3,-2} + 4S_{-2,-3} - 8S_{-2,-2,1} \\
&= 0 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{M}\right)
\end{aligned} \tag{C.5}$$

co potwierdza nasze przypuszczenia, że efekty wrapping nie mają wpływu na czteropętłowy wierzchołkowy wymiar anomalny.

Dodatek D

Przedłużanie sum harmoniczych

Jest znacząca różnica pomiędzy przedłużaniem zagnieżdżonych sum harmoniczych w przypadku, kiedy wszystkie indeksy są dodatnie, a przypadkiem, gdy co najmniej jeden z nich jest ujemny. Dla pierwszych możliwe jest opisanie tej procedury systematycznie podczas, gdy dla drugiej grupy potrzebna jest analiza każdego przypadku z osobna.

D.1 Przedłużanie sum z dodatnimi indeksami

Dla dodatnich indeksów możliwe jest podanie metody indukcyjnej. Startujemy z najprostszego przypadku $S_a(n)$. Standardową metodą jest przeniesienie zmiennej n z granicy górnej sumy do wyrażenia znajdującego się pod sumą w następujący sposób

$$S_a(n) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^a} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} - \sum_{j=n+1}^{\infty} \right) \frac{1}{j^a} = S_a(\infty) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+n)^a}. \quad (\text{D.1})$$

W naszych rozważaniach jesteśmy zainteresowani przedłużeniem analitycznym wokół wartości -1 , dlatego też oddzielimy teraz część osobliwą oraz część regularną wokół tego punktu

$$S_a(-1+x) = -\frac{1}{x^a} + S_a(\infty) - d_a(x), \quad (\text{D.2})$$

gdzie zdefiniowaliśmy funkcję

$$d_a(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+x)^a}. \quad (\text{D.3})$$

Funkcja ta jest regularna wokół $x = 0$ i posiada następujące rozwinięcie

$$\begin{aligned} d_a(x) &= \zeta(a) - xa\zeta(a+1) + x^2 \binom{a+1}{2} \zeta(a+2) + \dots \\ &\quad + (-1)^n x^n \binom{a+n-1}{n} \zeta(a+n) + \dots \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

Przypuśćmy teraz, że już udało nam się dokonać przedłużenia analitycznego funkcji $S_{b,\dots,c}(n)$ i teraz chcemy dokonać przedłużenia funkcji $S_{a,b,\dots,c}(n)$. Używając podobnej

strategii jak poprzednio możemy zapisać

$$S_{a,b,\dots,c}(n) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} - \sum_{j=n+1}^{\infty} \right) \frac{1}{j^a} S_{b,\dots,c}(j) = S_{a,b,\dots,c}(\infty) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+n)^a} S_{b,\dots,c}(k+n). \quad (\text{D.5})$$

Jeśli teraz chcemy rozwinąć powyższe wyrażenie wokół $n = -1$, to wystarczy się skoncentrować na wyrazie $k = 1$. Wtedy mamy

$$S_{a,b,\dots,c}(-1+x) = -\frac{1}{x^a} [S_{b,\dots,c}(x)] + \text{reg}, \quad (\text{D.6})$$

gdzie przez "reg" oznaczyliśmy część regularną, którą nie będziemy zainteresowani w naszym przypadku.

D.2 Sumy z co najmniej jednym ujemnym indeksem

W przypadku, gdy mamy do czynienia z sumą harmoniczną, w której co najmniej jeden indeks jest ujemny, musimy być bardziej ostrożni w naszych rozważaniach. Wynika to z faktu, że w tym przypadku sumy harmoniczne definiują dwie różne funkcje analityczne w zależności od tego, czy będziemy przedłużać z parzystych czy z nieparzystych wartości n . W naszym przypadku startujemy z wartości parzystych. Oznacza to, że na początku musimy poprawnie zdefiniować funkcję także dla wartości nieparzystych, a dopiero później możemy ją przedłużyć analitycznie. W najprostszym przypadku przyjmiemy w naszych rozważaniach funkcję określoną jako

$$\bar{S}_{-a}^+(n) = (-1)^n S_{-a}(n) + (1 - (-1)^n) S_{-a}(\infty), \quad (\text{D.7})$$

która jest równa funkcji $S_{-a}(n)$ dla parzystych wartości n . W celu przedłużenia analitycznego wokół punktu -1 , użyjemy ponownie metodę przeniesienia zmiennej n z granicy górnej sumowania do funkcji pod sumą

$$\bar{S}_{-a}^+(-1+x) = \frac{1}{x^a} + S_{-a}(\infty) + d_{-a}(x), \quad (\text{D.8})$$

gdzie funkcja $d_{-a}(x)$ jest regularna wokół zera i posiada rozwinięcie

$$d_{-a}(x) = \zeta(-a) - xa\zeta(-a-1) + x^2 \binom{a+1}{2} \zeta(-a-2) + \dots \quad (\text{D.9})$$

Podobnie możemy zdefiniować rozszerzenie funkcji harmoniczej w przypadku, gdy pierwszy indeks jest ujemny, a wszystkie kolejne są dodatnie

$$\bar{S}_{-a,b,\dots,c}^+(n) = (-1)^n S_{-a,b,\dots,c}(n) + (1 - (-1)^n) S_{-a,b,\dots,c}(\infty). \quad (\text{D.10})$$

Osobliwa część przedłużenia analitycznego tej funkcji wokół -1 dana jest wzorem

$$\bar{S}_{-a,b,\dots,c}^+(-1+x) = \frac{1}{x^a} [S_{b,\dots,c}(x)] + \text{reg}. \quad (\text{D.11})$$

Przedłużenie pozostałych funkcji z ujemnymi indeksami jest dużo bardziej skomplikowana i wymaga wiedzy na temat zależności funkcyjnych pomiędzy różnymi sumami harmonicznymi. Na przykład, dla przypadku funkcji $S_{a,-b}$, definiujemy rozszerzenie na wartości nieparzyste w następujący sposób

$$\bar{S}_{a,-b}^+(n) = (-1)^n S_{a,-b}(n) + (1 - (-1)^n)(S_{a,-b}(\infty) - S_b(\infty)(S_a(\infty) - S_a(n))). \quad (\text{D.12})$$

Wtedy osobliwa część wokół -1 ma postać

$$\bar{S}_{a,-b}^+(-1+x) = -\frac{1}{x^a}(2S_{-b}(\infty) - \bar{S}_{-b}^+(x)) = -\frac{1}{x^a}(S_{-b}(\infty) + d_{-b}(x)). \quad (\text{D.13})$$

Publikacje własne

- [A1] R. A. Janik and T. Łukowski, “Wrapping interactions at strong coupling – the giant magnon,” *Phys. Rev.* **D76** (2007) 126008, [arXiv:0708.2208](#) [hep-th].
- [A2] Z. Bajnok, A. Hegedus, R. A. Janik, and T. Łukowski, “Five loop Konishi from AdS/CFT,” *Nucl. Phys.* **B827** (2010) 426–456, [arXiv:0906.4062](#) [hep-th].
- [A3] T. Łukowski, A. Rej, and V. N. Velizhanin, “Five-Loop Anomalous Dimension of Twist-Two Operators,” *Nucl. Phys.* **B831** (2010) 105–132, [arXiv:0912.1624](#) [hep-th].
- [A4] M. P. Heller, R. A. Janik, and T. Łukowski, “A new derivation of Luscher F-term and fluctuations around the giant magnon,” *JHEP* **06** (2008) 036, [arXiv:0801.4463](#) [hep-th].
- [A5] M. Beccaria, V. Forini, T. Łukowski, and S. Zieme, “Twist-three at five loops, Bethe Ansatz and wrapping,” *JHEP* **03** (2009) 129, [arXiv:0901.4864](#) [hep-th].
- [A6] Z. Bajnok, R. A. Janik, and T. Łukowski, “Four loop twist two, BFKL, wrapping and strings,” *Nucl. Phys.* **B816** (2009) 376–398, [arXiv:0811.4448](#) [hep-th].

Bibliografia

- [1] J. M. Maldacena, “The large N limit of superconformal field theories and supergravity,” *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 231–252.
- [2] G. ’t Hooft, “A planar diagram theory for strong interactions,” *Nuclear Physics B* **72** (1974) 461–473.
- [3] J. Dai, R. G. Leigh, and J. Polchinski, “New Connections Between String Theories,” *Modern Physics Letters A* **4** (1989) 2073–2083.
- [4] J. Polchinski, “Dirichlet-Branes and Ramond-Ramond Charges,” *Phys. Rev. Lett.* **75** (1995) 4724–4727, [arXiv:hep-th/9510017](#).
- [5] E. Witten, “Small Instantons in String Theory,” *Nucl. Phys.* **B460** (1996) 541–559, [arXiv:hep-th/9511030](#).
- [6] G. ’t Hooft, “Dimensional reduction in quantum gravity,” [arXiv:gr-qc/9310026](#).
- [7] R. R. Metsaev and A. A. Tseytlin, “Type IIB superstring action in AdS(5) x S(5) background,” *Nucl. Phys.* **B533** (1998) 109–126, [arXiv:hep-th/9805028](#).
- [8] D. E. Berenstein, J. M. Maldacena, and H. S. Nastase, “Strings in flat space and pp waves from N = 4 super Yang Mills,” *JHEP* **04** (2002) 013, [arXiv:hep-th/0202021](#).
- [9] R. Penrose, “Any spacetime has a plane wave as a limit,” *Differential Geometry and Relativity* (1976) .
- [10] J. A. Minahan and K. Zarembo, “The Bethe-ansatz for N = 4 super Yang-Mills,” *JHEP* **03** (2003) 013, [arXiv:hep-th/0212208](#).
- [11] I. Bena, J. Polchinski, and R. Roiban, “Hidden symmetries of the AdS(5) x S**5 superstring,” *Phys. Rev.* **D69** (2004) 046002, [hep-th/0305116](#).
- [12] N. Beisert, “The complete one-loop dilatation operator of N = 4 super Yang-Mills theory,” *Nucl. Phys.* **B676** (2004) 3–42, [arXiv:hep-th/0307015](#).
- [13] N. Beisert, C. Kristjansen, and M. Staudacher, “The dilatation operator of N = 4 super Yang-Mills theory,” *Nucl. Phys.* **B664** (2003) 131–184, [arXiv:hep-th/0303060](#).

- [14] H. Bethe, “Zur Theorie der Metalle. Eigenwerte und Eigenfunktionen der linearen Atomkette,” *Z. Phys.* **71** (1931) 205.
- [15] N. Beisert, “The $su(2|2)$ dynamic S-matrix,” *Adv. Theor. Math. Phys.* **12** (2008) 945, [arXiv:hep-th/0511082](#).
- [16] R. A. Janik, “The $AdS(5) \times S^5$ superstring worldsheet S-matrix and crossing symmetry,” *Phys. Rev.* **D73** (2006) 086006, [arXiv:hep-th/0603038](#).
- [17] G. Arutyunov, S. Frolov, and M. Staudacher, “Bethe ansatz for quantum strings,” *JHEP* **10** (2004) 016, [arXiv:hep-th/0406256](#).
- [18] R. Hernandez and E. Lopez, “Quantum corrections to the string Bethe ansatz,” *JHEP* **07** (2006) 004, [arXiv:hep-th/0603204](#).
- [19] N. Beisert, R. Hernandez, and E. Lopez, “A crossing-symmetric phase for $AdS(5) \times S^5$ strings,” *JHEP* **11** (2006) 070, [arXiv:hep-th/0609044](#).
- [20] N. Beisert, B. Eden, and M. Staudacher, “Transcendentality and crossing,” *J. Stat. Mech.* **0701** (2007) P021, [arXiv:hep-th/0610251](#).
- [21] N. Dorey, D. M. Hofman, and J. M. Maldacena, “On the singularities of the magnon S-matrix,” *Phys. Rev.* **D76** (2007) 025011, [arXiv:hep-th/0703104](#).
- [22] N. Beisert and M. Staudacher, “Long-range $PSU(2,2|4)$ Bethe ansatz for gauge theory and strings,” *Nucl. Phys.* **B727** (2005) 1–62, [arXiv:hep-th/0504190](#).
- [23] J. Ambjorn, R. A. Janik, and C. Kristjansen, “Wrapping interactions and a new source of corrections to the spin-chain / string duality,” *Nucl. Phys.* **B736** (2006) 288–301, [arXiv:hep-th/0510171](#).
- [24] M. Lüscher, “Volume dependence of the energy spectrum in massive quantum field theories. I. Stable particle states,” *Comm. Math. Phys.* **104** (1986) 177–206.
- [25] Z. Bajnok and R. A. Janik, “Four-loop perturbative Konishi from strings and finite size effects for multiparticle states,” *Nucl. Phys.* **B807** (2009) 625–650, [arXiv:0807.0399 \[hep-th\]](#).
- [26] F. Fiamberti, A. Santambrogio, C. Sieg, and D. Zanon, “Wrapping at four loops in $N=4$ SYM,” *Phys. Lett.* **B666** (2008) 100–105, [arXiv:0712.3522 \[hep-th\]](#).
- [27] V. N. Velizhanin, “The Four-Loop Konishi in $N=4$ SYM,” [arXiv:0808.3832 \[hep-th\]](#).
- [28] A. B. Zamolodchikov, “Thermodynamic Bethe ansatz in relativistic models: Scaling 3-state potts and Lee-Yang models,” *Nuclear Physics B* **342** (1990) 695–720.
- [29] D. Bombardelli, D. Fioravanti, and R. Tateo, “Thermodynamic Bethe Ansatz for planar AdS/CFT : a proposal,” *J. Phys.* **A42** (2009) 375401, [arXiv:0902.3930 \[hep-th\]](#).

- [30] N. Gromov, V. Kazakov, A. Kozak, and P. Vieira, “Exact Spectrum of Anomalous Dimensions of Planar $N = 4$ Supersymmetric Yang-Mills Theory: TBA and excited states,” *Lett. Math. Phys.* **91** (2010) 265–287, [arXiv:0902.4458 \[hep-th\]](#).
- [31] G. Arutyunov and S. Frolov, “Thermodynamic Bethe Ansatz for the $AdS(5) \times S^{*5}$ Mirror Model,” *JHEP* **05** (2009) 068, [arXiv:0903.0141 \[hep-th\]](#).
- [32] J. Balog and A. Hegedus, “The Bajnok-Janik formula and wrapping corrections,” [arXiv:1003.4303 \[hep-th\]](#).
- [33] J. Balog and A. Hegedus, “5-loop Konishi from linearized TBA and the XXX magnet,” [arXiv:1002.4142 \[hep-th\]](#).
- [34] A. Rej, “Integrability and the AdS/CFT correspondence,” *J. Phys.* **A42** (2009) 254002, [arXiv:0907.3468 \[hep-th\]](#).
- [35] D. Serban, “Integrability and the AdS/CFT correspondence,” [arXiv:1003.4214 \[hep-th\]](#).
- [36] B. Sutherland, *Beautiful Models: 70 Years of Exactly Solved Quantum Many-Body Problems*. World Scientific Publishing, 2004.
- [37] P. Dorey, “Exact S matrices,” [arXiv:hep-th/9810026](#).
- [38] R. Shankar and E. Witten, “S matrix of the supersymmetric nonlinear sigma model,” *Phys. Rev. D* **17** (1978) no. 8, 2134–2143.
- [39] T. R. Klassen and E. Melzer, “On the relation between scattering amplitudes and finite-size mass corrections in QFT,” *Nuclear Physics B* **362** (1991) 329–388.
- [40] N. Gromov, S. Schafer-Nameki, and P. Vieira, “Quantum Wrapped Giant Magnon,” *Phys. Rev.* **D78** (2008) 026006, [arXiv:0801.3671 \[hep-th\]](#).
- [41] Y. Hatsuda and R. Suzuki, “Finite-Size Effects for Dyonically Giant Magnons,” *Nucl. Phys.* **B800** (2008) 349–383, [arXiv:0801.0747 \[hep-th\]](#).
- [42] C. Destri and H. J. De Vega, “Unified approach to thermodynamic Bethe Ansatz and finite size corrections for lattice models and field theories,” *Nucl. Phys.* **B438** (1995) 413–454, [arXiv:hep-th/9407117](#).
- [43] V. V. Bazhanov, S. L. Lukyanov, and A. B. Zamolodchikov, “Quantum field theories in finite volume: Excited state energies,” *Nucl. Phys.* **B489** (1997) 487–531, [arXiv:hep-th/9607099](#).
- [44] G. Arutyunov and S. Frolov, “On String S-matrix, Bound States and TBA,” *JHEP* **12** (2007) 024, [arXiv:0710.1568 \[hep-th\]](#).
- [45] P. Dorey and R. Tateo, “Excited states by analytic continuation of TBA equations,” *Nucl. Phys.* **B482** (1996) 639–659, [arXiv:hep-th/9607167](#).
- [46] D. M. Hofman and J. M. Maldacena, “Giant magnons,” *J. Phys.* **A39** (2006) 13095–13118, [arXiv:hep-th/0604135](#).

- [47] G. Arutyunov, S. Frolov, and M. Zamaklar, “Finite-size effects from giant magnons,” *Nucl. Phys.* **B778** (2007) 1–35, [arXiv:hep-th/0606126](#).
- [48] R. F. Dashen, B. Hasslacher, and A. Neveu, “Particle spectrum in model field theories from semiclassical functional integral techniques,” *Phys. Rev. D* **11** (1975) 3424–3450.
- [49] H.-Y. Chen, N. Dorey, and R. F. Lima Matos, “Quantum Scattering of Giant Magnons,” *JHEP* **09** (2007) 106, [arXiv:0707.0668 \[hep-th\]](#).
- [50] Y. L. Dokshitzer, G. Marchesini, and G. P. Salam, “Revisiting parton evolution and the large-x limit,” *Phys. Lett.* **B634** (2006) 504–507, [arXiv:hep-ph/0511302](#).
- [51] Y. L. Dokshitzer and G. Marchesini, “ $N = 4$ SUSY Yang-Mills: Three loops made simple(r),” *Phys. Lett.* **B646** (2007) 189–201, [arXiv:hep-th/0612248](#).
- [52] B. Basso and G. P. Korchemsky, “Anomalous dimensions of high-spin operators beyond the leading order,” *Nucl. Phys.* **B775** (2007) 1–30, [arXiv:hep-th/0612247](#).
- [53] A. V. Kotikov, L. N. Lipatov, A. I. Onishchenko, and V. N. Velizhanin, “Three-loop universal anomalous dimension of the Wilson operators in $N = 4$ SUSY Yang-Mills model,” *Phys. Lett.* **B595** (2004) 521–529, [arXiv:hep-th/0404092](#).
- [54] A. V. Kotikov, L. N. Lipatov, A. Rej, M. Staudacher, and V. N. Velizhanin, “Dressing and Wrapping,” *J. Stat. Mech.* **0710** (2007) P10003, [arXiv:0704.3586 \[hep-th\]](#).
- [55] G. P. Korchemsky, “Asymptotics of the Altarelli-Parisi-Lipatov Evolution Kernels of Parton Distributions,” *Mod. Phys. Lett. A* **4** (1989) 1257.
- [56] L. N. Lipatov, “Reggeization of the vector meson and the vacuum singularity in nonabelian gauge theories,” *Sov. J. Nucl. Phys.* **23** (1976) 338.
- [57] É. A. Kuraev, L. N. Lipatov, and V. S. Fadin, “The Pomeron singularity in nonabelian gauge theories,” *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics* **45** (1977) 199–+.
- [58] I. I. Balitsky and L. N. Lipatov, “The Pomeron singularity in Quantum Chromodynamics,” *Sov. J. Nucl. Phys.* **28** (1978) 822.
- [59] A. V. Kotikov, A. Rej, and S. Zieme, “Analytic three-loop Solutions for $N=4$ SYM Twist Operators,” *Nucl. Phys.* **B813** (2009) 460–483, [arXiv:0810.0691 \[hep-th\]](#).
- [60] M. Beccaria, “Anomalous dimensions at twist-3 in the $sl(2)$ sector of $N=4$ SYM,” *JHEP* **06** (2007) 044, [arXiv:0704.3570 \[hep-th\]](#).
- [61] M. Beccaria and V. Forini, “Four loop reciprocity of twist two operators in $N=4$ SYM,” *JHEP* **03** (2009) 111, [arXiv:0901.1256 \[hep-th\]](#).
- [62] EZ-Face. <http://oldweb.cecm.sfu.ca/projects/EZFace/>.