

Uniwersytet Jagielloński

Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

Powstawanie osobliwości w semiliniowych
równaniach falowych

Radosław Antoni Kycia

Praca napisana pod kierunkiem dr hab. Tadeusz Chmaja
profesora IFJ PAN.

Kraków, 2012

Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej
Uniwersytet Jagielloński

Oświadczenie

Ja niżej podpisany Radosław Antoni Kycia (nr indeksu: 193) doktorant Wydziału Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej Uniwersytetu Jagiellońskiego oświadczam, że przedłożona przeze mnie rozprawa doktorska pt. „Powstawanie osobliwości w semiliniowych równaniach falowych“ jest oryginalna i przedstawia wyniki badań wykonanych przeze mnie osobiście, pod kierunkiem dr hab. Tadeusza Chmaja profesora IFJ PAN. Pracę napisałem samodzielnie.

Oświadczam, że moja rozprawa doktorska została opracowana zgodnie z Ustawą o prawie autorskim i prawach pokrewnych z dnia 4 lutego 1994 r. (Dziennik Ustaw 1994 nr 24 poz. 83 wraz z późniejszymi zmianami).

Jestem świadom, że niezgodność niniejszego oświadczenia z prawdą ujawnioną w dowolnym czasie, niezależnie od skutków prawnych wynikających z ww. ustawy, może spowodować unieważnienie stopnia nabytego na podstawie tej rozprawy.

Kraków, dnia

.....

Radosław A. Kycia

Chciałbym wyrazić głęboką wdzięczność, tym dzięki którym ta praca mogła powstać: mojej rodzinie i „nauczycielom” (znanym osobiście bądź przez ich prace - książki, publikacje, itp.), a w szczególności mojemu promotorowi dr hab. Tadeuszowi Chmajowi profesorowi IFJ PAN.

Radostaw A. Kycia

Rozprawa została wykonana na podstawie badań zrealizowanych z wykorzystaniem superkomputera „Deszno” zakupionego ze środków Europejskiego Funduszu Rozwoju Regionalnego w ramach Programu Operacyjnego Innowacyjna Gospodarka (projekt POIG.02.01.00-12-023/08). Praca nad wynikami zawartymi w niniejszej rozprawie była wsparta grantami Ministerstwa Nauki i Informatyzacji NN202 079235 oraz Narodowego Centrum Nauki NN202 030740.

Streszczenie

Praca zawiera oryginalne wyniki badań autora dotyczących rozwiązań samopodobnych semiliniowych równań falowych oraz ich uczestnictwa w ewolucji semiliniowych równań falowych i semiliniowych równań Klein-Gordona. Praca została opracowana na podstawie materiału zawartego w publikacjach autora [46], [47] oraz [48].

Spis treści

1	Wstęp	13
1.1	Tematyka badań	13
1.2	Cel i zakres badań	18
I	Rozwiązania samopodobne	21
2	Profile samopodobne	23
2.1	Wprowadzenie	23
2.2	Rozwiązania lokalne	24
2.2.1	Rozwiązanie wokół $\rho = 0$	24
2.2.2	Rozwiązanie wokół $\rho = 1$	25
2.3	Globalne istnienie	28
2.4	Metody numeryczne	33
2.5	Prawa skalowania	37
2.6	Przykład numeryczny	40
3	Ruchome osobliwości profili	41
3.1	Wprowadzenie	41
3.2	Rozwiązania lokalne wokół $\rho = 0$	43
3.3	Rozwiązania lokalne wokół $\rho = 1$	47
II	Semiliniowe równania falowe i Kleina-Gordona	53
4	Krytyczne i nadkrytyczne równania falowe i KG	55
4.1	Wprowadzenie	55
4.2	Analiza stabilności	57
4.3	Wybuch generyczny	60
4.4	Zachowanie na progu	63
4.4.1	Przypadki krytyczne	64
4.4.2	Przypadki nadkrytyczne	67

<i>SPIS TREŚCI</i>	12
4.5 Metody numeryczne	71
5 Podkrytyczne równanie KG	73
5.1 Wprowadzenie	73
5.2 Rozwiązanie statyczne	74
5.3 Spektrum zlinearyzowanego operatora	76
5.4 Asymptotyka na progu - teoria	79
5.5 Asymptotyka na progu - numeryka	80
6 Podsumowanie	84

Rozdział 1

Wstęp

„Podróż na tysiąc mil zaczyna się od pierwszego kroku.”

Laozi (ok. 604 p.n.e. - ok. 531 p.n.e.)

1.1 Tematyka badań

Wspólną cechą wielu nieliniowych cząstkowych równań różniczkowych jest powstawanie osobliwości/wybuch (ang. blowup) w skończonym czasie podczas ewolucji z regularnych danych początkowych. To zachowanie jest dowodem na niemożność sformułowania ogólnych twierdzeń o globalnym istnieniu dla tej klasy równań. Sytuacja jest tu drastycznie różna od intuicji wyniesionej z analizy liniowych równań cząstkowych [26], [63] i często powoduje zamieszanie. Powstawanie osobliwości jest zazwyczaj połączone z dramatycznymi zmianami w układzie opisywanym przez równanie i odpowiada faktowi, że w tym opisie nie zostały uwzględnione pewne elementy teorii. Bardzo ważnym przykładem takiej sytuacji jest problem osobliwości w Ogólnej Teorii Względności Alberta Einsteina [67]. Innym problemem z tego zakresu jest pytanie kiedy trójwymiarowe rozwiązanie równań Naviera-Stokesa może dać osobliwość [31]. Cel tej rozprawy jest skromniejszy - wpisuje się ona w analizę prostych nieliniowych równań cząstkowych, które posiadają ciekawe własności związane z powstawaniem osobliwości [66]. To pozwala analizować powstawanie osobliwości na prostych modelach (ang. toy models) bez wglębiania się w skomplikowane szczegóły, jednakże ostatecznym celem jest wykorzystanie wiedzy z tej analizy do skomplikowanych równań. Obecnie jest to duży dział na pograniczu matematyki, fizyki, informatyki i innych dziedzin nauk przyrodniczych, w których bardzo często stosuje się modele opisywane nieliniowymi równaniami różniczkowymi [25]. Skupiając się na klasycznej teorii pola wymienić należy modele Yanga-Millsa [20], [6], [12], czy mapy falowe [10].

Niniejsza rozprawa również wpisuje się w badania tego typu. Poświęcona jest ona analizie semiliniowych równań falowych z nieliniowością typu potęgowego (NLW):

$$U_{tt} - \Delta U - U^p = 0, \quad U = U(x, t), \quad x \in R^n. \quad (1.1)$$

Dwa parametry n - wymiar przestrzeni; $p > 1$ - wykładnik potęgi, są zmienne i poszczególne wartości prezentują różne zachowanie rozwiązań. W całej pracy zostanie założone, iż $p > 1$ jest liczbą naturalną nieparzystą, aby równanie (1.1) miało symetrię zmiany znaku. Jednak model ten może być zdefiniowany również dla nieparzystego $p > 1$ poprzez zamianę członu nieliniowego U^p na $|U|^{p-1}U$, co przywraca wspomnianą symetrię; a nawet dla rzeczywistego p [66]. Wymiar przestrzeni $n > 0$ jest domyślnie liczbą naturalną. Ze względu na to, iż zostaną tu w głównej mierze omówione wyniki uogólniające te z $n = 3$, więc w dalszej analizie będzie założone, że $n \geq 3$. Pozostałe ograniczenia na te parametry będą podawane w trakcie analizy.

Ze względu na ciekawe własności, których część zostanie omówiona poniżej, równanie to cieszy się ciągłym zainteresowaniem już od dłuższego czasu zarówno wśród matematyków, jak i fizyków. Matematyków interesują przede wszystkim jak najogólniejsze klasy rozwiązań w abstrakcyjnych przestrzeniach funkcyjnych, czy różnego rodzaju estymaty [43], [60], [55], [56], [41], [34], [40], [42], [57], [58], [45], [44], [14]. Fizycy natomiast często ograniczają się do regularnych, a zazwyczaj analitycznych funkcji, a w analizie posiłkują się wynikami symulacji komputerowych [11], [65], [50]. Obecnie symulacje komputerowe coraz bardziej przenikają badania z tego zakresu. Pomagają one w wyrobieniu sobie intuicji dotyczących możliwych typów zachowań, pozwalają formułować hipotezy badawcze, weryfikować je i na tej podstawie bardzo szybko formułować nowe, przez co dynamika badań w tej dziedzinie jest bardzo duża. Niniejsza rozprawa prezentuje takie właśnie podejście do problemu polegające na połączeniu metod analitycznych i numerycznych.

W tej pracy zostanie założone, że rozwiązania mają sferyczną symetrię; wtedy równanie (1.1) przyjmuje postać

$$U_{tt} - U_{rr} - \frac{n-1}{r}U_r - U^p = 0, \quad (1.2)$$

gdzie $U = U(r, t)$. Rezultaty pracy [50] sugerują, iż takie ograniczenie nie jest zbyt restrykcyjne - wyniki analizy przy założeniu sferycznej symetrii mogą być wykorzystane podczas analizy przypadku ogólnego. Związane jest to z faktem, iż skończona prędkość propagacji zaburzenia sprawia, że obszary, w których zachodzą dramatyczne i szybkie zmiany (np. wybuch) są w pewnym sensie „izolowane”, więc do każdego z takich obszarów można zastosować wyniki analizy w

sferycznej symetrii.

Nieocenionym narzędziem analizy równań nieliniowych jest zbadanie, jak zachowują się one przy skalowania czasu i przestrzeni. Podejście to ma swoje korzenie w analizie wymiarowej i jest często stosowane w inżynierii (hydrodynamika, aerodynamika) [31]. Częstym przypadkiem [25], [66] jest to, iż dla rozwiązania $U(t, x)$ jego przeskalowana forma

$$U_\lambda(t, x) = \lambda^a U\left(\frac{t}{\lambda^b}, \frac{x}{\lambda^c}\right), \quad (1.3)$$

gdzie a , b oraz c są stałymi, jest również rozwiązaniem. Równanie (1.2) posiada taką symetrię [11] postaci

$$U_\lambda(t, r) = \lambda^{-\alpha} U(t/\lambda, r/\lambda), \quad \alpha = \frac{2}{p-1}. \quad (1.4)$$

Zatem każde rozwiązanie ma stowarzyszone rozwiązanie dla małej skali $\lambda \ll 1$, które jest bardziej zwarte (osobliwe) i ewoluuje szybciej, jak i rozwiązanie wielkoskalowe dla $\lambda \gg 1$, które jest rozciągnięte przestrzennie i czasowo, a przez to gładzsze. W ogólnym przypadku taka symetria wiąże się również z prostym prawem skalowania dla pewnych funkcjonałów, które zazwyczaj powiązane są z właściwościami fizycznymi rozwiązania, jak masa lub energia. Takim funkcjonałem dla (1.2) jest funkcjonał energii zdefiniowany w następujący sposób [11]

$$E[U] = \int_{\mathbf{R}^n} \left(\frac{1}{2} U_t^2 + \frac{1}{2} (\nabla U)^2 - \frac{1}{p+1} U^{p+1} \right) d^n x. \quad (1.5)$$

Pod wpływem (1.4) skaluje się on jak

$$E[U_\lambda] = \lambda^\beta E[U], \quad (1.6)$$

gdzie $\beta = \frac{(n-2)p-(n+2)}{p-1}$. Patrząc jak skaluje się funkcjonał energii (1.5) wprowadza się pojęcie (energetycznych) klas krytyczności równań. Równanie jest krytyczne (energetycznie) [44], gdy symetria skalowania (1.4) nie wpływa na funkcjonał energii ($\beta = 0$), podkrytyczne dla $\beta < 0$, natomiast nadkrytyczne dla $\beta > 0$. Dla równania (1.1) warunek krytycznego skalowania jest postaci

$$p = p_Q = \frac{n+2}{n-2}. \quad (1.7)$$

Ta klasyfikacja jest niezwykle ważna, gdyż jak to będzie pokazane poniżej ewolucja rozwiązań równań należących do różnych przypadków krytycznych różni się znacznie. Intuicja, która za tym stoi jest następująca [66]. Dla przypadku nadkrytycznego rozwiązania wielkoskalowe mają duże energie, stąd oczekuje się, iż

główny wkład będą miały rozwiązania małoskalowe. W przypadku podkrytycznym jest odwrotnie. Szczególnie ciekawy z tego punktu widzenia jest przypadek krytyczny, w którym oba typy zachowań są na równi, zatem oczekuje się takiego samego zachowania na różnych skalach.

Skalowanie odgrywa nawet znacznie większą rolę w nieliniowych równaniach. Wiele modeli nieliniowych posiada specjalną klasę rozwiązań nazywanych rozwiązaniami samopodobnymi. Charakteryzują się one tym, że rozkład przestrzenny tego rozwiązania w danej chwili czasu jest przeskalowany przez funkcję zależną tylko od czasu. Zatem dwa takie rozwiązania dla różnych chwil czasu po odpowiednim przeskalowaniu (1.4) można na siebie nałożyć. Ich rolę w ewolucji równań nieliniowych doskonale oddaje cytat zaczerpnięty z [5]: „*W rzeczy samej reprezentują one (rozwiązania samopodobne) „asymptotykę pośrednią”, zachowanie rozwiązań szerszej klasy problemów początkowych, brzegowych i mieszanych, tj., opisują zachowanie rozwiązań z dala od brzegów obszaru zmiennej niezależnej lub, alternatywnie, w obszarze, gdzie rozwiązanie w pewnym sensie nie jest już zależne od szczegółów danych początkowych i/lub brzegowych, jednak układ jest ciągle daleko od stanu równowagi.*” Takie rozwiązania istnieją dla (1.2) [11], [14] w postaci

$$U(t, r) = (T - t)^{-\alpha} u(\rho), \quad \rho = \frac{r}{T - t}, \quad (1.8)$$

i dalej właśnie (1.8) będzie synonimem rozwiązań samopodobnych, z profilem samopodobnym $u(\rho)$. Są one niezmiennicze ze względu na skalowanie (1.4). Wybuch odpowiada współrzędnym $r = 0$, $t = T$, natomiast dla $t < T$ zakres $\rho \in [0; 1]$ stożkowi przeszłości tego wybuchu. Ze względu na skończoną prędkość propagacji punkty $\rho > 1$ nie mają wpływu na wybuch.

Prace [11], [14] pokazały, że dla $n = 3$ rozwiązania te uczestniczą w specjalny sposób w ewolucji (1.2). Istnienie profili samopodobnych dla pod- i nadkrytycznych przypadków dla $n = 3$ zostało udowodnione w pracach [13] oraz [7] - istnieje przeliczalna liczba rozwiązań tego typu. Profile są rozwiązaniami równania różniczkowego zwyczajnego postaci

$$(1 - \rho^2)u'' + \left(\frac{n-1}{\rho} - \frac{2(p+1)}{p-1}\rho \right) u' - \frac{2(p+1)}{(p-1)^2}u + u^p = 0, \quad (1.9)$$

które powstaje z podstawienia (1.8) do (1.2). Definicja zmiennej ρ pokazuje, że najbardziej interesujące są rozwiązania na półosi dodatniej. Punkty $\rho = 0$, jak i $\rho = 1$ są osobliwościami ustalonymi (ang. fixed singularities) (osobliwościami współczynników równania) dla tego równania i standardowe metody analizy dla równań różniczkowych [39], [36], jak twierdzenie o istnieniu, czy metoda Frobeniusa dla równań liniowych (grupa monodromii [70]) nie mogą być zastosowane w pobliżu tych punktów. Sprawia to, że analiza staje się odrobinę

bardziej skomplikowana. Dodatkowym stopniem komplikacji są osobliwości ruchome (ang. movable singularities) rozwiązań [39], [36]. Najprostszym przykładem, który ilustruje ideę ruchomych osobliwości jest równanie [39]

$$\frac{dy}{dx} + \frac{x}{y} = 0, \quad (1.10)$$

które posiada rozwiązanie

$$y = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 - x^2}, \quad (1.11)$$

gdzie x_0 oraz y_0 są stałymi całkowania. Ruchoma osobliwość rozwiązania (w tym przypadku punkt rozgałęzienia) może być umieszczona w dowolnym miejscu na płaszczyźnie zespolonej poprzez odpowiedni wybór danych początkowych. W przypadku, gdy rozwiązanie jest znane jedynie poprzez szereg Taylora, który nie może być zsumowany do prostszych funkcji określenie położenia ruchomych osobliwości w sposób analityczny jest zazwyczaj niemożliwe. Przykładem jest tutaj równanie Lane-Emdena [37] (z wyłączeniem szczególnych przypadków) omawiane szczegółowo w dalszej części rozprawy. Wówczas jedynym efektywnym podejściem analizy tych osobliwości są metody numeryczne. Dotychczas żadne badania dotyczące struktury ruchomych osobliwości rozwiązań samopodobnych NLW nie były przeprowadzone mimo, iż ta wiedza pozwala wyznaczyć promienie zbieżności szeregów Taylora dla tych rozwiązań.

Jednym z najprostszych rozwiązań samopodobnych, które nie zależy od zmiennej przestrzennej jest

$$U_0(t) = \frac{b_0}{(T-t)^\alpha}, \quad b_0 = \left(\frac{2(p+1)}{(p-1)^2} \right)^{\frac{1}{p-1}}, \quad T > 0. \quad (1.12)$$

Jest ono rozwiązaniem stabilnym (1.2) i co więcej, jest ono atraktorem dla rozwiązań, które wybuchają z generycznych danych początkowych, co udowodniono dla $n = 3$ w pracy [11]. Poza tym istnieje skomplikowana struktura związana z atraktorami pośrednimi - szczególnymi rozwiązaniami niestabilnymi, które „siedzą” na granicy pomiędzy wybuchem a dyspersją. Zgodnie z nazwą przyciągają one rozwiązania w swoje pobliże, jak to opisuje powyższy cytat z [5], a następnie odpychają zgodnie ze strukturą modów niestabilnych. Jedynie dane odpowiednio przygotowane trafiają dokładnie w atraktor pośredni. Atraktory pośrednie zbadane dla $n = 3$ w pracach [11], [14], [65]. Ta struktura silnie zależy od krytyczności. Dla przypadków nadkrytycznych w $n = 3$ rozwiązanie samopodobne stowarzyszone z profilem $u_1(\rho)$ - pierwszym rozwiązaniem samopodobnym jest atraktorem pośrednim. Dla krytycznego przypadku $n = 3$, $p = 5$ jedynym rozwiązaniem samopodobnym (poza trywialnym) jest (1.12), a rolę atraktora po-

średniego gra rozwiązanie statyczne

$$U_Q(r) = \frac{1}{(1 + br^2)^\alpha}, \quad b = \frac{p-1}{4n} \quad (1.13)$$

skalowane zgodnie z (1.4). Jednakże niedawno odkryto [45], że istnieje drugi typ wybuch (poza wybuchem generycznym) dla przypadku krytycznego - wybuch drugiego typu (ang. the type II blowup), który jest również opisany przez skalowane (1.4) rozwiązanie (1.13) z $\lambda(t) \rightarrow 0$, gdy t dąży do pewnej skończonej liczby T - czasu wybuchu. Niemniej jednak dokładne dane początkowe, które prowadzą do tego zachowania ani jego położenie względem wybuchu generycznego, dyspersji i atraktora pośredniego będącego rozwiązaniem statycznym, były nieznane.

W rozprawie oprócz równania (1.1) zostanie przeanalizowane odpowiadające mu równanie Kleina-Gordona (NLKG)

$$U_{tt} - \Delta U + U - U^p = 0, \quad U = U(x, t), \quad x \in R^n, \quad (1.14)$$

które w symetrii sferycznej, analogicznie do (1.2), przyjmuje postać

$$U_{tt} - U_{rr} - \frac{n-1}{r}U_r + U - U^p = 0. \quad (1.15)$$

Dla tego równania istniało przepuszczenie [9], że ponieważ w pewnych sytuacjach człon masowy jest jedynie małym zaburzeniem w porównaniu do członu nieliniowego, to ewolucja (1.15) i (1.2) powinny posiadać wiele wspólnych cech. Równanie to ma również rozwiązania, które wybuchają w skończonym czasie [49], [38], a więc występuje dychotomia pomiędzy wybuchem a dyspersją. Dla przypadku $n = 3$, $p = 3$ dla NLKG struktura asymptotyki pośredniej jest inna i pomimo, że dokładny matematyczny opis został wykonany w [53], jednak nie zaprezentowano żadnego przykładu numerycznego w duchu pracy [9].

1.2 Cel i zakres badań

Głównym celem rozprawy jest uogólnienie wyników opisanych w poprzedniej sekcji z $n = 3$ na $n > 3$, analiza ruchomych osobliwości analitycznych rozwiązań równania (1.9) oraz analiza przypadku krytycznego dla NLW z naciskiem na zbadanie wybuchu drugiego typu. Równolegle będzie prowadzone porównanie zachowań (1.2) oraz (1.15). Modele rozważane tutaj są oczywiście zbyt proste, aby opisywały interesujące układy fizyczne, jednakże mogą one służyć jako prototypy ilustrujące zachowania dla bardziej skomplikowanych równań. Sprawia to, że ich realizacja jest możliwa jedynie poprzez symulacje numeryczne, dla-

tę też metody te będą często stosowane w poniższej analizie. Wyniki płynące z danych uzyskanych przy użyciu komputera będą stanowiły również wskazówkę pozwalającą formułować nowe przypuszczenia i stanowiącą punkt startowy dla rozpoczęcia ścisłej analizy [31].

Praca została podzielona na dwie części, z których pierwsza opisuje analizę profili samopodobnych będących rozwiązaniami równania różniczkowego zwyczajnego (1.9), natomiast część druga opisuje analizę rozwiązań równań różniczkowych cząstkowych (1.2) oraz (1.15).

Pierwsza część tezy jest poświęcona analizie rozwiązań/profilu samopodobnych dla NLW w trzech i większej liczbie wymiarów, która uogólnia wyniki z [13]. W rozdziale pierwszym tej części - rozdziale 2 - zostaną będą rozwiązania analityczne równania zwyczajnego (1.9). Rozważania te są „niestandardowe” ze względu na fakt, iż rozwinięcia szeregów są rozważane wokół ustalonych osobliwości $\rho = 0$ i $\rho = 1$ równania, gdzie standardowe metody znane z teorii równań różniczkowych załamują się. Dla kilku wartości parametrów równania zostaną znalezione nowe rozwiązania. Te lokalne rozwiązania w postaci szeregów potęgowych będą następnie zsumowane, co spowoduje narzucenie warunku kwantyzacji na dane początkowe na obu końcach, a w rezultacie będzie prowadziło do przeliczalnej rodziny rozwiązań samopodobnych. Zostaną również opisane metody numeryczne pozwalające analizować te rozwiązania i pomagające zrozumieć ich strukturę oraz zachowanie. W ostatnim kroku zostaną obliczone prawa skalowania, które spełniają dane początkowe dla rozwiązań globalnych, a następnie prawa te będą zastosowane do pewnych szczególnych przypadków nie występujących w $n = 3$. Rozdział ten zawiera zaadaptowaną do celów rozprawy treść publikacji autora [46], której załączkiem była jego praca magisterska. Praca ta zawiera uogólnienie wyników z [13] na wyższe wymiary przestrzenne. Drugi rozdział tej części - rozdział 3 - poświęcony jest analizie promienia zbieżności szeregu dla lokalnych rozwiązań samopodobnych znalezionych w poprzednim rozdziale. Wykorzystana będzie teoria równań różniczkowych zwyczajnych na płaszczyźnie zespolonej. W części pierwszej rozdziału będą zidentyfikowane ruchome osobliwości połączone z rozwinięciami rozwiązań wokół początku układu współrzędnych, a następnie zostaną podane przybliżone wzory opisujące położenie i ruch tych osobliwości po płaszczyźnie zespolonej. W pozostałej części rozdziału uwaga będzie skupiona na strukturze osobliwości dla lokalnych rozwiązań wokół $\rho = 1$. Tutaj zostanie przedstawione i udowodnione kilka stwierdzeń określających asymptotykę tych rozwiązań przy ich przedłużaniu analitycznym poza stożek, wzdłuż osi rzeczywistej. Dla lokalnych rozwiązań analitycznych wokół $\rho = 0$ i $\rho = 1$ zostanie obliczony wiodący wkład do asymptotyki wokół ruchomych osobliwości, który następnie zostanie sprawdzony numerycznie. Również będzie potwierdzone, że profile samopodobne znalezione w poprzednim

rozdziale znikają dla $\rho \rightarrow \infty$, co ma fundamentalne znaczenie w zastosowaniach w kolejnych rozdziałach. Wyników dotyczących analizy ruchomych osobliwości jest mało dlatego, każdy następny jest cenny sam w sobie. Materiał zawarty w tym rozdziale jest rozszerzoną prezentacją autora z konferencji „Formal and Analytic Solutions of Differential and Difference Equations II” w Będlewie, Polska 2011 i został opublikowany przez autora w postępach z tej konferencji [48]. Rozdział 3 zamyka analizę rozwiązań samopodobnych. Metody użyte tam i w rozdziale 2 są bardzo ogólne i mogą być stosowane do wielu innych problemów brzegowych z osobliwościami na brzegu.

Kolejna część rozprawy skupia się na pokazaniu roli, jaką w pełnej ewolucji opisanej przez równania cząstkowe (1.8) oraz (1.15) pełnią rozwiązania samopodobne opisane w poprzednich rozdziałach. Część ta kontynuuje prace rozpoczęte w [11] i [9]. Rozdział 4 jest poświęcony sprawdzeniu podobieństwa w ewolucji dla semiliniowego równania falowego i Kleina-Gordona dla krytycznych i nadkrytycznych wartości parametrów równania falowego. Dla przypadku krytycznego dane numeryczne sugerują, że oba równania posiadają te same atraktory pośrednie i asymptotyki blisko wybuchu, związane z rozwiązaniami samopodobnymi. Jednak okazuje się, że najciekawszy jest przypadek krytyczny równania falowego. Dla niego będą znalezione zbiory na płaszczyźnie parametrów danych początkowych, które prowadzą do różnych asymptotyk pośrednich. Co więcej, jedna z tych asymptotyk została znaleziona również w analogicznym równaniu Kleina-Gordona. Materiał zawarty w tym rozdziale opiera się na publikacji autora [47]. Rozdział 5 jest poświęcony analizie asymptotyki pośredniej dla nadkrytycznego równania Kleina-Gordona w trzech wymiarach przestrzennych. Metody użyte w analizie są podobne do opisanych w pracy [9], jednakże natrafiono na rozbieżność analizy numerycznej i wyników analitycznych. Z tego powodu ten rozdział będzie służył jako punkt startowy do dalszych badań. Został on umieszczony w rozprawie ze względu na to, iż zawiera wiele ciekawych technik i wyników o bardzo ogólnych implikacjach. Dla kompletności należy zaznaczyć, iż odpowiadający analizowanemu w tym rozdziale równaniu przypadek podkrytycznego równania falowego został opisany w pracy [14]. Rozdział 6 - rozdział końcowy - przedstawia podsumowanie wyników otrzymanych poniżej.

Część I

Rozwiązania samopodobne

Rozdział 2

Profile samopodobne

„Jeśli myślisz, że wszystko jest łatwe, napotkasz tylko trudności.”

Laozi (ok. 604 p.n.e. - ok. 531 p.n.e.)

2.1 Wprowadzenie

Rozdział ten zawiera analizę analitycznych rozwiązań równania (1.9) na przedziale $[0; 1]$. Pierwszym krokiem do dowodu istnienia analitycznych rozwiązań na wspomnianym przedziale jest znalezienie lokalnych rozwiązań na jego końcach. Te rozwiązania wyrażają się poprzez zbieżny szereg Taylora - każdy z nich zbieżny we właściwym dla siebie kole wokół końca przedziału $[0; 1]$. Analiza promienia zbieżności tych szeregów, co jest równoważne z analizą osobliwości występujących na brzegu koła zbieżności na płaszczyźnie zespolonej, została odłożona do następnego rozdziału. Kolejnym krokiem jest dowód faktu, iż szeregi z obu końców mogą być przedłużane w kierunku przeciwnego końca przedziału wzdłuż osi rzeczywistej. Jest on równoważny temu, iż we wnętrzu przedziału jednostkowego nie ma ruchomych osobliwości. Dzięki temu rozwiązania mogą być przedłużane aż do spotkania w pewnym punkcie wewnątrz przedziału. W tym punkcie zostają narzucone warunki zszycia - równość funkcji i ich pierwszych pochodnych. Ze względu na to, iż punkt wewnątrz przedziału jest punktem regularnym równania (1.9) zszycie to jest w rzeczywistości zszyciem analitycznym - różniczkowanie równania daje relacje rekurencyjne wiążące kolejne pochodne z poprzednimi, a przez to kolejne współczynniki szeregu Taylora są wyznaczone w jednoznaczny sposób przez dwa pierwsze. Takie zszycie daje pewne ograniczenia na wybór danych początkowych na obu końcach - jedynie dyskretne pary danych są dozwolone, co przekłada się na istnienie jedynie przeliczalnej rodziny rozwiązań. Okazuje się, że dane te spełniają pewne prawa skalowania będące uogólnieniem praw z pracy [13]. Wszystkie te kroki zostaną zrealizowane w ko-

lejných sekcjach tego rozdziału. Analiza ta opiera się na standardowych metodach matematyki stosowanej [54], [28], [32], [39], [36] oraz analizy numerycznej [59], [64].

Kolejna sekcja została poświęcona analizie lokalnych rozwiązań analitycznych wokół $\rho = 0$ i $\rho = 1$.

2.2 Rozwiązania lokalne

Analiza lokalnych rozwiązań analitycznych wokół końców będzie polegała na podstawianiu formalnego szeregu potęgowego do równania i otrzymywaniu relacji rekurencyjnych na współczynniki. Następnie zostanie naszkicowana idea dowodu, który pokaże, iż tak otrzymane szeregi mają niezerowy promień zbieżności, czyli że są rzeczywiście lokalnymi rozwiązaniami analitycznymi. W tej analizie znaczącą rolę odgrywa wzór Cauchy'ego [29]:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{l=0}^{\infty} a_l(x-x_0)^l\right)^k &= \sum_{l=0}^{\infty} c_l(x-x_0)^l, \\ c_0 &= a_0^k, \quad c_m = \frac{1}{ma_0} \sum_{l=1}^m (lk - m + l)a_l c_{m-l}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

dla $m > 0$, który pozwala przezwyciężyć komplikacje związane z nieliniowością równania i otrzymać rekurencję w zwartej formie. Wzór ten będzie stosowany jeszcze wielokrotnie i może być stosowany w każdym przypadku, w którym nieliniowości są typu potęgowego.

W dalszej analizie ważną rolę gra profil samopodobny postaci

$$u_{\infty}(\rho) = b_{\infty}\rho^{-\alpha} \quad b_{\infty} = \left(\frac{2(p(n-2) - n)}{(p-1)^2}\right)^{\frac{1}{p-1}}. \quad (2.2)$$

Jest to rozwiązanie osobliwe w $\rho = 0$ i odpowiada rozwiązaniu samopodobnemu równania (1.1) postaci

$$U_{\infty}(r) = b_{\infty}r^{-\alpha}. \quad (2.3)$$

2.2.1 Rozwiązanie wokół $\rho = 0$

W celu otrzymania rozwiązania formalnego wokół $\rho = 0$ należy podstawić formalny szereg potęgowy $u(\rho) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l \rho^l$ do (1.9) i wykorzystać wspomniany wzór Cauchy'ego. Rezultatem jest rekurencja na współczynniki

$$a_0 = c, \quad a_1 = 0, \quad a_{l+2} = \frac{(l(l-1) + l(2\alpha+2) + \alpha(\alpha+1))a_l - c_l}{(l+2)(l+n)}, \quad (2.4)$$

z c będącym wolnym parametrem - wartością $u(0)$. Wynikiem końcowym jest rozwiązanie w postaci parzystych potęg ρ

$$u(\rho) = c + \frac{1}{n} \left[c \frac{p+1}{(p-1)^2} - \frac{1}{2} c^p \right] \rho^2 + O(\rho^4). \quad (2.5)$$

Dowód faktu, że ten szereg formalny jest zbieżny (w pewnym kole o niezerowym promieniu na płaszczyźnie zespolonej) polega na zastosowaniu stwierdzenia 1 (ang. Proposition 1) z pracy [15]. Sprowadza się to do przepisania równania (1.9) w postaci układu równań pierwszego rzędu postaci wymaganej przez wspomniane stwierdzenie. Wówczas z podobieństwa tego zapisu do założeń wspomnianego stwierdzenia wynika automatycznie niezerowy promień zbieżności wspomnianego szeregu. Dla $\rho = 0$ ta część jest trywialnym ćwiczeniem [46]. Sytuacja komplikuje się dla rozwiązań wokół $\rho = 1$.

2.2.2 Rozwiązanie wokół $\rho = 1$

Aby rozpocząć analizę wokół $\rho = 1$ należy przesunąć początek układu współrzędnych do tego punktu poprzez zamianę $y = 1 - \rho$ w (1.9), co daje

$$y(2-y)u''(y) - \left[\frac{n-1}{1-y} - \frac{2(p+1)}{p-1}(1-y) \right] u'(y) - \frac{2(p+1)}{(p-1)^2} u(y) + u^p(y) = 0, \quad (2.6)$$

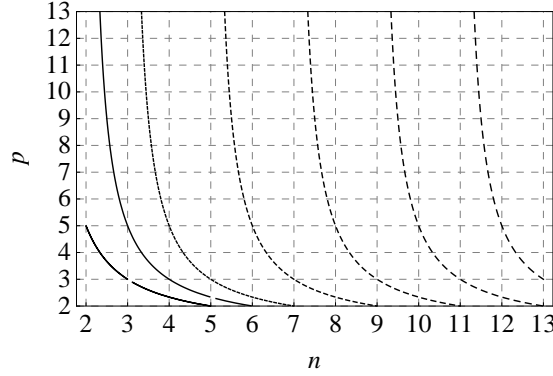
gdzie teraz $' = \frac{d}{dy}$. Kolejny krok polega na szukaniu formalnego rozwiązania - szeregu potęgowego, który spełnia dane równanie, podobnie jak to zostało przedstawione powyżej wokół $\rho = 0$. Jednak teraz w rekurencji pojawia się rezonans¹, który znacznie utrudnia analizę. Warunkiem rezonansu jest to, aby parametr

$$k = \frac{(n-1)p - n - 3}{2(p-1)} \quad (2.7)$$

przyjmował wartości naturalne. Rysunek 2.1 zaczerpnięty z pracy [46] pokazuje płaszczyznę parametrów $n - p$ z krzywymi całkowitego k oraz krzywą przypadków krytycznych $p = p_Q$ (1.7). Występują zatem dwa przypadki ze względu na zbiór do którego należą wartości k .

Jeżeli $k > 0$ jest liczbą niecałkowitą, wówczas nie ma rezonansu i podstawienie szeregu formalnego $u(y) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l y^l$ do (2.6) daje jednoznaczną rekurencję

¹Termin ten ma wiele znaczeń. Tutaj używany jest do oznaczania faktu, iż rekurencja się urywa. W żadnym wypadku nie powinien być mylony z rezonansem pojawiającym się w fizyce i rozdziale 5.

Rysunek 2.1: Od lewej: $k = 0$, $p = p_Q$, $k = 1$, $k = 2 \dots$

na współczynniki

$$a_0 = b, \quad a_1 = \frac{2(p+1)a_0 - (p-1)^2 c_0}{2(1-k)(p-1)^2},$$

$$a_{l+1} = \frac{\left(3l(l-1) + 2l \frac{2(p+1)}{p-1} + \frac{2(p+1)}{(p-1)^2}\right) a_{l-c_l} + c_{l-1} - \left((l-1)(l-2) + (l-1) \frac{2(p+1)}{p-1} + \frac{2(p+1)}{(p-1)^2}\right) a_{l-1}}{2(l+1)(l-k+1)}, \quad (2.8)$$

gdzie b jest parametrem, a $\{c_l\}_{l=0}^{\infty}$ mogą być wyznaczone z (2.1). Rozwiązanie ma w tym przypadku postać

$$u(y) = b + \frac{2(p+1)b - (p-1)^2 b^p}{2(1-k)(p-1)^2} y + O(y^2), \quad (2.9)$$

i jest prostym uogólnieniem przypadku $n = 3$ zaprezentowanego w [13].

Jeżeli natomiast k jest liczbą naturalną, wówczas zachodzi rezonans. Podstawienie szeregu formalnego do równania „separuje” rekurencję. Pierwsze k współczynników $\{a_0, \dots, a_{k-1}\}$ ma ściśle wyznaczoną wartość numeryczną będącą jednym z rozwiązań nieliniowego układu równań algebraicznych postaci

$$\begin{cases} 2(1-k)a_1 - \frac{2(p+1)}{(p-1)^2} a_0 + a_0^p = 0 \\ 4(2-k)a_2 - \left(\frac{4(p+1)}{p-1} + \frac{2(p+1)}{(p-1)^2}\right) a_1 + p a_1 a_0^{p-1} + \frac{2(p+1)}{(p-1)^2} a_0 - a_0^p = 0 \\ 6(3-k)a_3 - \left(6 + \frac{8(p+1)}{(p-1)} + \frac{2(p+1)}{(p-1)^2}\right) a_2 + p a_2 a_0^p + \frac{p(p-1)}{2} a_1^2 a_0^{p-2} + \\ + \left(\frac{2(p+1)}{(p-1)} + \frac{2(p+1)}{(p-1)^2}\right) a_1 - p a_1 a_0^{p-1} = 0 \\ \dots \\ 0 a_k + \dots = 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

wynikających z podstawienia wspomnianego szeregu formalnego do równania. W powyższym układzie ostatnie równanie nie określa a_k (współczynnik ten jest mnożony przez zero - jest to warunek rezonansu), a zatem jest to wolny parametr

rozwinęcia, który będzie w dalszej części oznaczany jako b . Kolejne współczynniki a_l dla $l > k$ są już wyznaczone w jednoznaczny sposób z rekurencji. Dlatego w przypadku naturalnego $k > 0$ rozwiązanie przyjmuje postać

$$u(y) = a_0 + \dots + a_{k-1}y^{k-1} + by^k + a_{k+1}(b, a_0, \dots, a_{k-1})y^{k+1} + \dots, \quad (2.11)$$

gdzie współczynniki $\{a_i\}_{i=0}^{k-1}$ są rozwiązaniami (2.10), a dane początkowe - parametr $a_k = b$ pojawia się dopiero przy członie y^k .

Analiza rysunku 2.1 oraz wzoru (2.7) wskazuje, iż punkty, dla których k jest całkowite na krzywej $k(n, p) = k_0$, dla całkowitego $k_0 > 0$, spełniają zależność

$$\begin{aligned} n = 4 + 2j, & \quad p = 5; \\ n = 5 + 2j, & \quad p = 3; \\ n = 7 + 2j, & \quad p = 2; \end{aligned} \quad (2.12)$$

dla $j = k_0 - 1$. Dla przykładu, $k_0 = 1$ generuje trzy przypadki $\{n = 4, p = 5\}$, $\{n = 5, p = 3\}$ oraz $\{n = 7, p = 2\}$, z których przez translację można otrzymać wszystkie pozostałe. W tej pracy przyjęto założenie, że p jest nieparzyste, jednak w części poniższych rozważań dotyczących całkowitych wartości k będą przedstawiane również wyniki dla równań z parzystą wartością parametru p .

Tabele 2.1 oraz 2.2 zaczerpnięte z [46] przedstawiają szczególnie istotne w dalszej analizie wartości $\{a_l\}_{l=0}^{k-1}$ odpowiednio dla $k = 2$ oraz dla $k = 3$. Należy zaznaczyć, że nie są to jednak wszystkie możliwe rozwiązania układu (2.10). Wyniki te pozwalają wysnuć następujące przypuszczenie

Przypuszczenie 2.1 *Układ równań (2.10) na $k > 0$ pierwszych współczynników lokalnego rozwiązania analitycznego wokół $\rho = 1$ ma zawsze rozwiązanie z*

$$a_l = (-1)^l \frac{u_\infty^{(l)}(\rho)|_{\rho=1}}{l!} \quad (2.13)$$

dla $0 \leq l < k$ oraz u_∞ zadanego przez (2.2). Rozwiązanie to ma największą możliwą wartość a_0 ze wszystkich rzeczywistych rozwiązań układu.

Przypuszczenie to jest prawdziwe dla $k = 1$, $k = 2$ oraz $k = 3$ jak to wynika ze wspomnianych tabel i zostanie wykorzystane do wyprowadzenia praw skalowania.

Szeregi powyższe dla całkowitego i niecałkowitego $k > 0$ są zbieżne, co można udowodnić stosując indukcyjnie (ze względu na k) odpowiednią zamianę zmiennych oraz wspomniane stwierdzenie 1. Dowód ten jest zawiły i nie wnosi niczego nowego do rozważań, dlatego zostanie pominięty - może on być znaleziony w dodatku pracy [46].

Otrzymane w tej sekcji rozwiązania lokalne zostaną teraz zsyte, aby otrzy-

$n = 6, p = 5$		$n = 7, p = 3$		$n = 9, p = 2$	
a_0	a_1	a_0	a_1	a_0	a_1
0	0	0	0	0	0
$b_0 = \frac{3^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}$	0	$b_0 = \sqrt{2}$	0	$b_0 = 6$	0
$b_\infty = \frac{7^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}$	$\frac{7^{\frac{1}{4}}}{2\sqrt{2}}$	$b_\infty = 2$	2	$b_\infty = 10$	20

Tablica 2.1: Wybrane wartości numeryczne a_0 oraz a_1 dla $k = 2$.

$n = 8, p = 5$			$n = 9, p = 3$			$n = 11, p = 2$		
a_0	a_1	a_2	a_0	a_1	a_2	a_0	a_1	a_2
0	0	0	0	0	0	0	0	0
$b_0 = \frac{3^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}$	0	0	$b_0 = \sqrt{2}$	0	0	$b_0 = 6$	0	0
$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$	$\frac{3\sqrt{3}}{8\sqrt{2}}$	$\frac{3\sqrt{3}}{64\sqrt{2}}$	$\sqrt{5}$	$\frac{3\sqrt{5}}{4}$	$\frac{3\sqrt{5}}{16}$	12	18	9
$b_\infty = \frac{11^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}$	$\frac{11^{\frac{1}{4}}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{3\cdot 11^{\frac{1}{4}}}{8\sqrt{2}}$	$b_\infty = \sqrt{6}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{6}$	$b_\infty = 14$	28	42

Tablica 2.2: Wybrane wartości numeryczne a_0 , a_1 oraz a_2 dla $k = 3$.

mać globalne rozwiązanie analityczne na przedziale $[0; 1]$.

2.3 Globalne istnienie

Rozwiązania lokalne otrzymane poprzednio są zbieżne w pewnym kole na płaszczyźnie zespolonej. Jeżeli osobliwość, która ogranicza promień koła zbieżności nie leży na osi rzeczywistej, wówczas poprzez analityczną kontynuację rozwiązania te mogą być przedłużone w kierunku przeciwnych punktów przedziału $[0; 1]$ aż do momentu spotkania w pewnym punkcie ρ_0 , a następnie zszyte do globalnego rozwiązania analitycznego na przedziale jednostkowym. W związku z tym najważniejszym zadaniem na drodze do udowodnienia istnienia globalnych rozwiązań na wspomnianym przedziale jest dowód braku osobliwości (rucho-myh) rozwiązań w tym przedziale podczas przedłużania.

Pierwszym krokiem udowodnienia braku osobliwości będzie wykazanie, że rozwiązanie uzyskiwane poprzez przedłużanie analityczne lokalnego rozwiązania analitycznego (2.5) określonego w otoczeniu $\rho = 0$ w kierunku $\rho = 1$ pozostaje w trakcie tego procesu ograniczone. Dowód wykorzystuje funkcję

$$H(\rho) = (1 - \rho^2) \frac{u'^2}{2} + \frac{u^{p+1}}{p+1} - \frac{p+1}{(p-1)^2} u^2, \quad (2.14)$$

która spełnia nierówności

$$H(\rho) \geq -\frac{1}{p-1} \left(\frac{2(p+1)}{(p-1)^2} \right)^{\frac{2}{p-1}} \quad \text{i} \quad H' = \left(\frac{p+3}{p-1} \rho - \frac{n-1}{\rho} \right) u'^2 \leq 0, \quad (2.15)$$

gdzie ostatnia część jest pochodną wzdłuż rozwiązań równania (1.9) tzw. pochodną Liego [3]. Pierwsza nierówność została otrzymana z (2.14) poprzez pominięcie dodatniego wyrazu zawierającego u' , a następnie minimalizację tak otrzymanego wielomianu zmiennej u . Ostatnia równość zachodzi gdy $p \geq p_Q$ - przypadek krytyczny zostanie rozpatrzony osobno poniżej. Z dalszych rozważań zostanie również wyłączony jedyny przypadek podkrytyczny $n = 3$, $p = 3$ spełniający założenia tego rozdziału, który zostanie omówiony później. Z faktu, że $H(\rho) \leq H(0)$ na rozwiązaniach (1.9) dla (2.5) wynika, że

$$H(\rho) \leq H(0) = \frac{c^{p+1}}{p+1} - \frac{(p+1)c^2}{(p-1)^2}, \quad (2.16)$$

co daje

$$\sqrt{1-\rho^2} |u'(\rho)| \leq c^{\frac{p+1}{2}} \quad (2.17)$$

przy warunku $c \geq (2(p+1)/(p-1)^2)^{1/(p-1)}$. Stąd wynika, że rozwiązanie jest ograniczone. Dodatkowo, można zauważyć, że $H(\rho)$, a stąd $u(\rho)$ ma skończoną granicę w $\rho = 1$.

Dla rozwiązań regularnych w $\rho = 1$ całkowanie nierówności

$$\frac{-H'}{1+H} \leq 2 \frac{n-1}{\rho} \quad (2.18)$$

od 1 do pewnego $0 < \rho < 1$ daje, że H , a więc u' oraz u są skończone w przedziale $0 < \rho \leq 1$.

To kończy dowód możliwości przedłużeń lokalnych rozwiązań. Kolejna część dotyczy już zszywania rozwiązań w pewnym punkcie wewnątrz przedziału jednostkowego. W tym celu potrzebna jest asymptotyka (2.5) dla dużych wartości danej początkowej $c = u(0)$ wokół $\rho = 0$. Aby ją wydobyć należy wprowadzić zmienne x oraz U powiązane z ρ oraz u poprzez $\rho = \frac{x}{c^{\frac{p-1}{2}}}$ oraz $U = u/c$; w tych zmiennych równanie (1.9) przechodzi w (teraz $' = \frac{d}{dx}$)

$$U'' + \frac{n-1}{x} U' + U^p = \frac{1}{c^{p-1}} (x^2 U'' + (2\alpha + 2)xU' + \alpha(\alpha + 1)U). \quad (2.19)$$

Wyrażając w tych zmiennych (2.5) asymptotyka dla dużego c faktoryzuje się do $u(\rho) = cU \left(\frac{x}{c^{\frac{p-1}{2}}} \right) = c \left[\left(1 - \frac{1}{2n} x^2 + O(x^4) \right) + o\left(\frac{1}{c}\right) \right]$, gdzie pierwszy człon szeregu w nawiasach kwadratowych nie zależy od c . Transformacja ta ma również fundamentalne znaczenie dla analizy ruchomych osobliwości rozwiązania (2.5),

jak zostanie to wyjaśnione w kolejnym rozdziale.

Pierwszy człon w nawiasie kwadratowym jest więc rozwiązaniem (2.19) dla $c \rightarrow \infty$, czyli rozwiązaniem równania Lane-Emdena [37]

$$U'' + \frac{n-1}{x}U' + U^p = 0. \quad (2.20)$$

Zbieżność tego fragmentu szeregu może być łatwo sprawdzona poprzez zastosowanie stwierdzenia 1 z [15] (zobacz kolejny rozdział).

Powyższa transformacja sprowadza asymptotykę dla dużego c do asymptotyki dla dużego x . Użycie kolejnej zamiany zmiennej: $\bar{U} = x^{\frac{2}{p-1}}U(x)$, $\tau = \ln(x)$ w (2.20) daje równanie postaci

$$\frac{d^2\bar{U}}{d\tau^2} - \frac{p(n-2) - n - 2}{p-1} \frac{d\bar{U}}{d\tau} + \frac{2((p+1) - (n-1)(p-1))}{(p-1)^2} \bar{U} + \bar{U}^p = 0, \quad (2.21)$$

dla którego funkcją Lapunowa [3] jest

$$h = \frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{U}}{d\tau} \right)^2 + \frac{\bar{U}^{p+1}}{p+1} - \frac{(p+1) - (n-1)(p-1)}{(p-1)^2} \bar{U}^2. \quad (2.22)$$

Analiza [46] pokazuje, iż w granicy $\tau \rightarrow \infty$ rozwiązanie $\bar{U}(\tau)$ dąży (asymptotyczna stabilność) do punktu stałego $\bar{U}_\infty = b_\infty$ równania (2.21). Uzasadniona jest zatem kolejna zamiana zmiennych $\bar{U} = b_\infty + y$ i $\frac{d\bar{U}}{d\tau} = z$, która daje

$$\begin{cases} \frac{dy}{d\tau} = z \\ \frac{dz}{d\tau} = -\frac{p(n-2) - n - 2}{p-1} z - \frac{2(p(n-2) - n)}{p-1} y + N(y), \end{cases} \quad (2.23)$$

gdzie $N(y) = O(y^2)$. Kolejny krok analizy tego układu równań polega na wykorzystaniu twierdzenia Hartmana-Grobmana [32] w celu pominięcia członu nieliniowego $N(y)$ w granicy $\tau \rightarrow \infty$, czyli dla $y \rightarrow 0$. Twierdzenie to jest bardzo często wykorzystywane podczas linearyzacji równań różniczkowych. W dużym skrócie i niezbyt ściśle pozwala ono porównywać lokalnie rozwiązania układu nieliniowego i zlinearyzowanego, pod warunkiem że wartości własne układu zlinearyzowanego nie są ściśle urojone - tylko wówczas oba układy są topologicznie równoważne.

Zlinearyzowany układ ma wartości własne

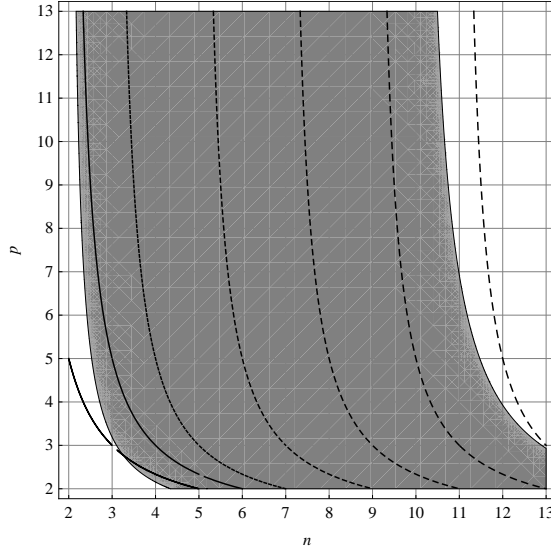
$$\lambda_{\pm} = \frac{-(p(n-2) - (n+2)) \pm \sqrt{f(n,p)}}{2(p-1)}, \quad (2.24)$$

gdzie

$$\begin{aligned} f(p, n) &= p^2(n^2 - 12n + 20) + p(-2n^2 + 16n - 8) + (n - 2)^2 = \\ &= p^2(n - 2)(n - 10) - 2p(n - 2(2 + \sqrt{3}))(n - 2(2 - \sqrt{3})) + (n - 2)^2. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Należy zauważyć, iż wykonana linearyzacja jest usprawiedliwiona gdy z rozważań wyłączy się przypadek krytyczny, jak to zostało zrobione powyżej.

Warunek $f(p, n) < 0$ jest istotny w celu otrzymania przeliczalnej rodziny rozwiązań globalnych i ta nierówność będzie założona w dalszym ciągu referowania dowodu z [46] - obszar na płaszczyźnie $n - p$, dla którego spełniona jest ta nierówność przedstawia rysunek 2.2 również zaczerpnięty z [46].



Rysunek 2.2: Rysunek 2.1 z naniesionym obszarem $f(p, n) < 0$.

Odwracając wszystkie zamiany zmiennych wykonane w dotychczasowym rozumowaniu uzyskuje się formułę opisującą asymptotykę rozwiązania regularnego w otoczeniu $\rho = 0$ dla dużych wartości parametru c postaci

$$u(\rho) = b_\infty \rho^{\frac{-2}{p-1}} \left(1 + c^{-\frac{p(n-2)-(n+2)}{4}} \rho^{-\frac{p(n-2)-(n+2)}{2(p-1)}} A_0 \sin(\omega \ln(c^{\frac{p-1}{2}} \rho) + \delta_0) \right), \quad (2.26)$$

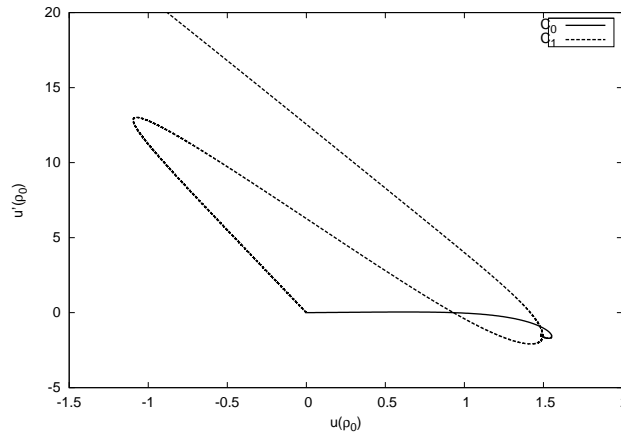
gdzie A_0 oraz δ_0 są parametrami, a

$$\omega = -i \frac{\sqrt{f(p, n)}}{2(p-1)}. \quad (2.27)$$

Pozostała część dowodu, zgodnie z [13] oraz [46], polega na zszyciu obu rozwiązań lokalnych w pewnym punkcie $0 < \rho_0 \ll 1$. Rozwiązanie regularne wokół $\rho = 0$ przedłużone do ρ_0 ma dla dużej wartości c postać (2.26). Jeżeli

teraz parametr c będzie zmieniany, wówczas na płaszczyźnie fazowej w punkcie ρ_0 , czyli zbiorze punktów $(u(\rho_0), u'(\rho_0))$ powstanie krzywa C_0 , która dla dużych c będzie miała postać spirali nawijającej się na pewien punkt $P(\rho_0)$ dla $c \rightarrow \infty$. Druga krzywa C_1 dla rozwiązania lokalnego wokół $\rho = 1$ przedłużonego do punktu szczytu ρ_0 będzie sparametryzowana przez b . Każde przecięcie tych dwóch krzywych wyznacza jedno globalne rozwiązanie - jest to dokładnie równość funkcji i pochodnych w punkcie ρ_0 , a ze względu na fakt, iż jest to punkt regularny równania również i wyższych pochodnych. Jeżeli teraz krzywa C_1 przechodzi przez $P(\rho_0)$ wówczas takich przecięć będzie przeliczalna liczba, a stąd przeliczalna liczba rozwiązań. Należy zauważyć, że liczba przecięć jest własnością topologiczną niezależną od wyboru punktu szczytu ρ_0 tak długo jak długo jest to punkt regularny równania. Przeliczalna rodzina przecięć daje przeliczalną rodzinę par danych początkowych $\{(c_l, b_l)\}_{l=l_0}^{\infty}$, które w jednoznaczny sposób identyfikują dane rozwiązanie globalne. Pierwszym rozwiązaniem z tej pary jest rozwiązanie stowarzyszone z (1.12), natomiast granicznym rozwiązaniem (2.2). Indeks l jest powiązany z liczbą oscylacji przeskalowanego rozwiązania wokół u_{∞} .

Eksperymenty numeryczne, jak ten przedstawiony na rysunku 2.3, polegający na analizie przecięć krzywych C_0 i C_1 sugerują, iż krzywa C_1 zawsze przechodzi przez punkt nawinięcia spirali $P(\rho_0)$, co daje przeliczalną rodzinę globalnych rozwiązań analitycznych. Dla całkowitego $k > 0$ to stwierdzenie jest prawdziwe jedynie wtedy, gdy lokalna asymptotyka na końcu $\rho = 1$ ma pierwsze k współczynników rozwinięcia $\{a_l\}_{l=0}^{k-1}$ wybranych ze zbioru rozwiązań nieliniowego układu równań (2.10) tak, że $a_0 = b_{\infty}$. Pozostałe wybory generują tylko jedno globalne rozwiązanie, w szczególności b_0 lub rozwiązanie trywialne. Takie zachowanie będzie wyjaśnione w kolejnej sekcji.



Rysunek 2.3: Płaszczyzna $(u(\rho_0), u'(\rho_0))$ dla $\rho_0 = 0.5$, $n = 5$, $p = 5$, $k = 3/2$;

Przypadek podkrytyczny ($n = 3$, $p = 3$, $k = 0$) został omówiony w pracy [7], więc pozostaje jedynie rozważyć przypadek krytyczny ($p = p_Q$), który jest wykluczony przez powyższą analizę. W tym przypadku występują jedynie dwa globalne rozwiązania klasy C^2 (które są również analityczne) prostej postaci $u(\rho) = 0$ oraz $u_0(\rho) = b_0$. Wniosek ten wypływa z analizy funkcji

$$Q(\rho) = \frac{1}{2}(1 - \rho^2)\rho^n u'^2 + \frac{n-2}{2}\rho^{n-1}(1 - \rho^2)uu' + \left[\left(\frac{p+1}{p-1} - \frac{n}{2} \right) \frac{n+1}{2} - \frac{2}{(p-1)^2} \right] \rho^n u^2 + \frac{1}{p+1}\rho^n u^{p+1}. \quad (2.28)$$

zaproponowanej w pracy [43]. Jej pochodna na rozwiązaniach równania (1.9) przyjmuje postać

$$Q'(\rho) = \frac{(2-n)(p-p_Q)}{2(p-1)}\rho^n \left[2 \left(\frac{nu}{2} + \rho u' \right)^2 + \frac{np-n-4}{2(p-1)}u^2 + \frac{p-1}{p+1}u^{p+1} \right]. \quad (2.29)$$

Dla $p = p_Q$ zachodzi $Q'(\rho) = 0$, co oznacza, że Q jest całką pierwszą, a równość $Q(0) = 0 = Q(1)$ daje potwierdzenie powyższej hipotezy - są tylko dwa rozwiązania we wspomnianej klasie - $u_0(\rho) = b_0$ oraz rozwiązanie trywialne.

Metoda użyta do zszycowania rozwiązań może służyć jako punkt startowy do konstrukcji bardzo ogólnych metod analizy rozwiązań samopodobnych. To będzie stanowiło treść kolejnej sekcji.

2.4 Metody numeryczne

Jednym z głównych składników służących do konstrukcji metod numerycznych do analizy rozwiązań równań różniczkowych są metody całkujące. Przy przygotowaniu wyników zostały użyte metody całkowania typu Rungego-Kutty [19], jak osadzona metoda Cash-Karpa [59] oraz niezwykle dokładna metoda Bulirsch-Stoera [59], [64]. Nie pozwalają one jednak na rozpoczęcie całkowania z punktów startowych, które są jednocześnie punktami osobliwymi równania. Zatem, aby rozpocząć, należy przesunąć dane początkowe poza punkt osobliwy wykorzystując lokalne rozwiązania w postaci szeregu Taylora. Metoda, która realizuje takie przesunięcie powinna sumować wyrazy szeregu, aż do momentu, gdy reszta szeregu (pozostała, niezsumowana część zbieżnego szeregu) będzie mniejsza od zakładanego błędu. Taka strategia jest powszechnie używana, gdy punktem startowym całkowania jest punkt osobliwy.

Istnieje wiele metod rozwiązywania problemów brzegowych, jak metoda strzałów czy relaksacji [59], [64]. Metody te mogą być również zastosowane do problemów z osobliwościami na brzegach zgodnie z powyższym opisem przesuwania

nia danych początkowych poza punkt osobliwy. Jeżeli w przedziale całkowania występują dodatkowe osobliwości, to poprzez odpowiedni podział na podprze-
działy i zastosowanie metod w każdym elemencie tego podziału również można
otrzymać efektywną metodę dla problemów brzegowych. Sekcja ta ma za za-
danie opis innej metody zaproponowanej w [46], która wydaje się być idealnie
dopasowana do analizy problemu poruszanego w tym rozdziale. Podobnie jak
w metodzie zszywania rozwiązań zaproponowanej w poprzedniej sekcji również
otrzymuje się pewną krzywą, której punkty przecięcia z osią OX wyznaczają
parametry rozwiązań globalnych. Krzywa ta, parametryzowana przez daną po-
czątkową c jest rozwiązaniem równania wokół $\rho = 0$, ekstrapolowanym do $\rho = 1$.
Ze względu na to, iż $\rho = 1$ jest punktem osobliwym równania (1.9) metody cał-
kowania załamują się w pobliżu tego punktu [64]. Dlatego też należy zakończyć
w pobliżu, przy pewnym $\rho_{stop} < 1$, a następnie ekstrapolować rozwiązanie do
 $\rho = 1$ używając znanych metod nie obniżając dokładności całej metody. Z tak
ekstrapolowanego rozwiązania (wartości w $\rho = 1$, pierwszej i wyższych pochod-
nych) należy skonstruować pewną wielkość $d(c)$, która dla \bar{c} opisującego globalne
rozwiązanie analityczne spełnia równość $d(\bar{c}) = 0$. Stąd zera na wykresie $d(c)$ są
dokładnie takimi wartościami c , dla których otrzymuje się globalne rozwiązanie
analityczne. Z wartości funkcji i pochodnych uzyskanych przez ekstrapolację do
 $\rho = 1$ można również obliczyć wartość parametru b rozwiązania analitycznego
wokół $\rho = 1$, a co więcej, można skonstruować podobną zależność $d(b)$, która po-
zwoli wyznaczyć wartości b , dla których istnieje rozwiązanie globalne. Jedynym
wymaganiem jest odpowiedni dobór wielkości $d(c)$, jednak, jak to będzie poka-
zane poniżej, dla problemu rozważanego w tym rozdziale taki parametr daje się
łatwo zdefiniować.

Dla k niecałkowitego rozwiązanie nieanalityczne wokół $\rho = 1$ przyjmuje po-
stać

$$u_{nonanalytic}(y) = y^k d(1 + O(y)), \quad (2.30)$$

gdzie d jest parametrem. Postać ta wynika z podstawienia $u(y) = y^s \sum_{l=0}^{\infty} a_l y^l$,
gdzie s jest parametrem do równania (1.9). To właśnie współczynnik d z (2.30)
gra ważną rolę w definicji zależności $d(c)$ dla tego przypadku - można go odzys-
kać z następujących relacji (d - aproksymacja parametru d z równania (2.30)):

$$\begin{aligned} d &= -\frac{u'(\rho)}{k}(1-\rho)^{1-k} & \text{dla} & \quad 0 < k < 1; \\ d &= \frac{u''(\rho)}{k(k-1)}(1-\rho)^{2-k} & \text{dla} & \quad 1 < k < 2; \\ d &= -\frac{u'''(\rho)}{k(k-1)(k-2)}(1-\rho)^{3-k} & \text{dla} & \quad 2 < k < 3; \\ & \dots & & \end{aligned} \quad (2.31)$$

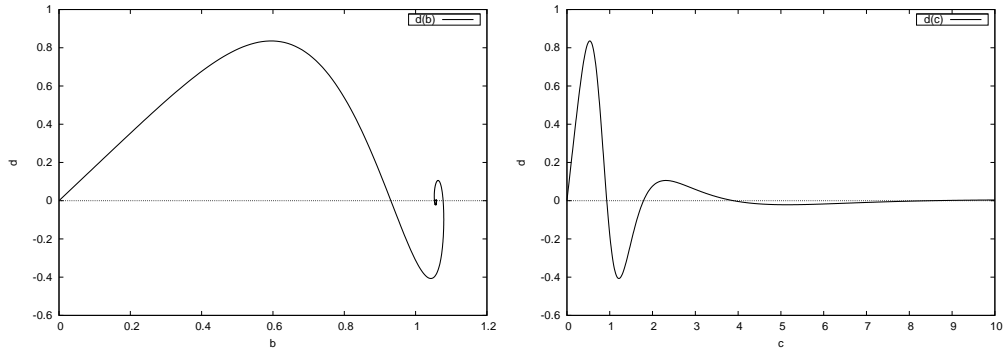
w granicy, gdy $\rho \rightarrow 1$. Jak to zaznaczono powyżej taka granica numerycznie jest
wykonywana poprzez procedurę ekstrapolacji. Dla tego przypadku, z rozwinię-

cia (2.9) wynika, że $b = u(1)$. Tej relacji należy użyć w punkcie (regularnym równania), w którym zakończono całkowanie ρ_{stop} , a następnie ekstrapolować do $\rho = 1$. Dodatkowo można zauważyć, iż wartość d można określić używając każdej z formuł (2.31) jeżeli tylko pochodna użyta w tej formule ma rząd wyższy niż $\lfloor k \rfloor$. Warto również zaznaczyć, iż pochodne wyższego rzędu niż dwa wymagane w (2.31) można otrzymać w prosty sposób z pochodnych niższego rzędu poprzez relację rekurencyjną wynikającą z różniczkowania równania (1.9).

Do przykładu ilustrującego działanie tej metody wybrano przypadek $n = 5$, $p = 5$, $k = 3/2$, który zaczerpnięto również z pracy [46]. Rysunek 2.4, pokazuje obie krzywe $d(c)$ oraz $d(b)$. Ich zera wyznaczają globalne rozwiązania na przedziale jednostkowym. Należy zauważyć, że drugie zero krzywej $d(b)$ odpowiada wartości $b = b_0$ i jest bliżej początku współrzędnych niż punkt nawinięcia spirali dla $b = b_\infty \frac{5^{1/4}}{\sqrt{2}}$. Dla przypadku $k < 1$ zależność między tymi punktami byłaby odwrotna ze względu na fakt, że

- $b_\infty < b_0$ dla $k < 1$;
- $b_\infty = b_0$ dla $k = 1$;
- $b_\infty > b_0$ dla $k > 1$;

a punkt, na który nawija się spirala $d(b)$ dla niecałkowitego k to $(b_\infty; 0)$.



Rysunek 2.4: Krzywe $d(b)$ oraz $d(c)$ dla $n = 5$, $p = 5$.

W przypadku, gdy $k > 0$ jest naturalne, wówczas rozwiązanie nieanalityczne ma inną postać i powyższa definicja parametrów d nie nadaje się do wykorzystania. Jednak w tym przypadku na lokalne rozwiązanie analityczne wokół $\rho = 1$ nałożony jest więz w postaci równości k pierwszych współczynników lokalnego rozwinięcia wokół $\rho = 1$ - współczynników $\{a_l\}_{l=0}^{k-1}$ - określonego rozwiązaniu nieliniowego układu równań algebraicznych (2.10). Wykorzystując ten fakt

natychmiast narzuca się następująca definicja

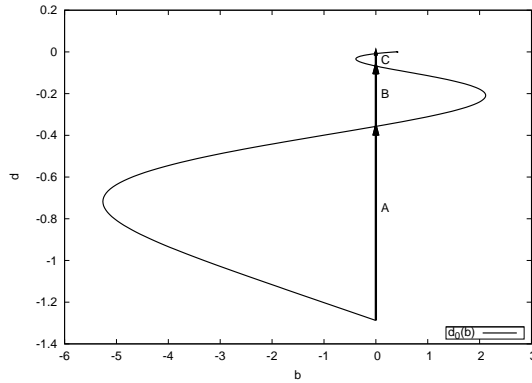
$$\begin{aligned}
 d_0 &= u(\rho_{stop}) - a_0, \\
 d_1 &= u'(\rho_{stop}) + a_1, \\
 &\dots \\
 d_{k-1} &= u^{(k-1)}(\rho_{stop}) - (-1)^{k-1}(k-1)!a_{k-1} \\
 b &= \frac{u^{(k)}(\rho_{stop})}{(-1)^k k!},
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

która spełnia założenia metody - wszystkie parametry $d_l = 0$ dla $0 \leq l < k$ gdy zostaje wzięta granica $\rho_{stop} \rightarrow 1$, a wartość c użyta do całkowania zadaje globalne rozwiązanie analityczne. W tej definicji jedynie dla przypadku $k = 1$ jest zdefiniowany tylko jeden parametr. W pozostałych przypadkach zgodność zer wszystkich krzywych $d_l(c)$ jest dodatkowym testem konsystencji metody. Ze względu na to, iż parametry d_l zależą w liniowy sposób od współczynników rozwinięcia $\{a_l\}_{l=0}^{k-1}$, dlatego ich zmiana powoduje jedynie pionową translację krzywych $d_l(c)$. Fakt ten zostanie wykorzystany poniżej.

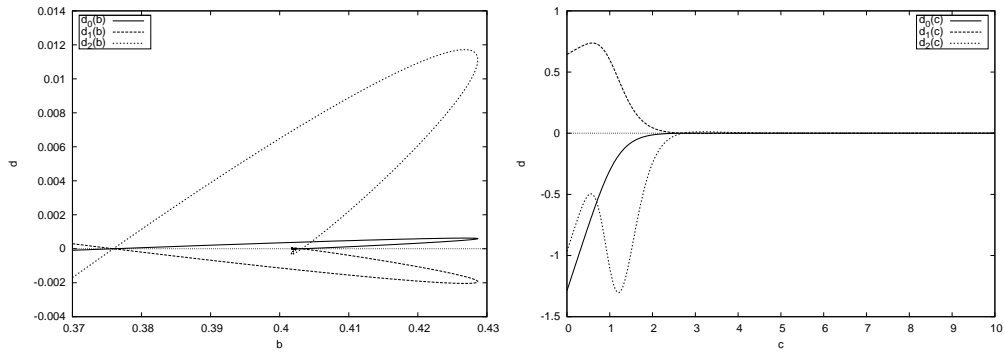
Przykład ilustrujący działanie metody, zaczerpnięty z [46], został przedstawiony na rysunkach 2.5 oraz 2.6 dla przypadku $n = 8$, $p = 5$, $k = 3$. W definicji parametrów d zostały użyte współczynniki z tabeli 2.2, dla których $a_0 = b_\infty$, czyli takie, które definiują przeliczalną rodzinę rozwiązań globalnych. Jak wspomniano powyżej, zmiana wartości parametru a_0 w definicji d_0 skutkuje pionowym przesunięciem krzywej $d_0(b)$ zaznaczonym na rysunku 2.5 przez wektory. Dla każdego z wyborów $a_0 = 0$, $a_0 = b_0$ lub $a_0 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ krzywa $d_0(b)$ ma tylko jedno zero w $b = 0$, co daje tylko jedno rozwiązanie globalne. Zatem jedynie gdy $a_0 = b_\infty$ krzywa ta ma przeliczalną rodzinę zer, a stąd przeliczalną rodzinę globalnych rozwiązań analitycznych. Rysunek 2.6 pokazuje konsystencję metody - wszystkie zera różnych krzywych d pokrywają się. Metoda ta daje jeszcze jedno potwierdzenie wyników dotyczących istnienia przeliczalnej rodziny globalnych rozwiązań analitycznych.

Metoda opisana w niniejszej sekcji ma przewagę nad standardowymi metodami, gdyż jest ona globalna - jako wynik daje globalną mapę zależności pomiędzy poszczególnymi globalnymi rozwiązaniami. Zaopatrzenie jej w wykrywanie miejsc zerowych pozwoliłoby otrzymać również metodę ilościową. Ciekawym zastosowaniem jest wykorzystanie tej metody w tandemie z jedną z metod lokalnych np. metodą strzału. Opisana metoda stanowiłaby wówczas pierwsze przybliżenie dla metody strzałów, która działa jedynie, gdy początkowe dane są blisko szukanego minimum.

Kolejna sekcja ma za cel wyprowadzenie zależności pomiędzy danymi brzegowymi na obu końcach przedziału jednostkowego odpowiadających kolejnym globalnym rozwiązaniom analitycznym.



Rysunek 2.5: Przesunięcie krzywej $d_0(b)$ dla $n = 8$, $p = 5$, $k = 3$ z $a_0 = b_\infty = \frac{11^{1/4}}{\sqrt{2}}$. Wektor $A + B + C$ odpowiada przesunięciu $a_0 = b_\infty \rightarrow a_0 = 0$, wektor $C + B$ przesunięciu $a_0 = b_\infty \rightarrow a_0 = b_0 = \frac{3^{1/4}}{\sqrt{2}}$, natomiast wektor C przesunięciu $a_0 = b_\infty \rightarrow a_0 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.



Rysunek 2.6: Krzywe $d_0(b)$, $d_1(b)$, $d_2(b)$ oraz $d_0(c)$, $d_1(c)$, $d_2(c)$ dla $n = 8$, $p = 5$, $k = 3$ z $a_0 = b_\infty = \frac{11^{1/4}}{\sqrt{2}}$.

2.5 Prawa skalowania

Dane $\{(c_l, b_l)\}_{l=0}^\infty$ opisują globalną rodzinę rozwiązań analitycznych. Z poprzednich rozdziałów wynika, że dla dużych wartości l wartości b_l z dobrym przybliżeniem leżą na spirali, co prowadzi do wniosku, iż pomiędzy kolejnymi wartościami b_l , jak i c_l powinny istnieć przybliżone zależności tym lepiej spełniane im większe jest l .

Do obliczenia wspomnianych zależności zostanie wykorzystany wzór (2.26) opisujący asymptotykę lokalnego rozwiązania analitycznego wokół $\rho = 0$ dla dużych wartości c oraz obliczona poniżej asymptotyka lokalnego rozwiązania wokół $\rho = 1$ przedłużonego w pobliże $\rho = 0$ i sparametryzowana przez b . Obie te asymptotyki łączą się tylko dla rozwiązań globalnych, czyli, gdy zachodzi

$c = c_l$ oraz $b = b_l$. To daje postać praw skalowania.

Pierwszym krokiem jest obliczenie asymptotyki lokalnych rozwiązań analitycznych wokół $\rho = 1$ dla $\rho \approx 0$. Podstawienie nowej zmiennej $w(\rho)$ zdefiniowanej przez

$$u(\rho) - u_\infty(\rho) = u_\infty(\rho)w(\rho), \quad (2.33)$$

transformuje (1.9) w

$$\begin{aligned} \rho^2(1 - \rho^2)w'' + \left(\frac{(n-1)p-n-3}{p-1}\rho - 2\rho^2 \right) w' \\ + \frac{2(p(n-2)-n)}{(p-1)^2}(1+w)((1+w)^{p-1} - 1) = 0, \end{aligned} \quad (2.34)$$

wraz z danymi początkowymi, które zostaną sprecyzowane poniżej.

Wyniki numeryczne sugerują, że rozwiązania globalne pozostają blisko $w = 0$ dla $\rho_0 \leq \rho \leq 1$, gdzie $0 < \rho_0 \ll 1$. Zatem linearyzacja (2.34) wokół rozwiązania zerowego daje

$$\rho^2(1 - \rho^2)w'' + \left(\frac{(n-1)p-n-3}{p-1}\rho - 2\rho^3 \right) w' + \frac{2(p(n-2)-n)}{p-1}w = 0. \quad (2.35)$$

Wspomniana asymptotyka dla $\rho \rightarrow 0$ może być otrzymana poprzez podstawienie $\tau = \ln(\rho)$ i wykonanie takich samych kroków jak w przypadku obliczeń prowadzących do (2.26). Końcowym wynikiem jest

$$w_a(\rho) = A_1 \rho^{-\frac{p(n-2)-(n-2)}{2(p-1)}} \sin(\omega \ln(\rho) + \delta_1), \quad (2.36)$$

gdzie A_1 oraz δ_1 są stałymi. Następnym krokiem jest uzależnienie parametru A_1 od b , co można zrobić przez naturalne żądanie, żeby pierwsza nieznikająca pochodna $w(\rho)$ była proporcjonalna do pochodnej tego samego rzędu $w_a(\rho)$ w $\rho = 1$. Dla niecałkowitego k z warunku $u(1) = b$ wynika $w(1) = \frac{b-b_\infty}{b_\infty}$, co na mocy powyższego żądania powinno być proporcjonalne do $w_a(1)$. To prowadzi do

$$A_1 = \frac{b - b_\infty}{b_\infty} B_0, \quad (2.37)$$

gdzie B_0 jest współczynnikiem proporcjonalności.

Dla naturalnego $k > 0$ każdy przypadek należy rozpatrzyć osobno. W przypadku $k = 1$ z $u(1) = b_\infty$ wynika $w(1) = 0$. Różniczkowanie (2.33) w $\rho = 1$ i użycie $u'(1) = -b$ oraz (2.13) daje $w'(1) = \frac{\frac{2}{p-1}b_\infty - b}{b_\infty}$, skąd przez postulowaną proporcjonalność wynika, że

$$A_1 = \frac{b - \frac{2}{p-1}b_\infty}{b_\infty} B_1, \quad (2.38)$$

gdzie B_1 jest współczynnikiem proporcjonalności. Dla $k = 2$ wymagane jest

dwukrotne różniczkowanie, a w ogólności dla dowolnego k przez k -krotne różniczkowanie i wykorzystanie przypuszczenia 2.1 otrzymuje się wynik

$$A_1 = \frac{k!b - (-1)^k u_\infty^{(k)}(\rho)|_{\rho=1}}{b_\infty} B_k, \quad (2.39)$$

gdzie B_k jest współczynnikiem proporcjonalności. Szukana asymptotyka przyjmuje ostatecznie postać

$$u(\rho) = b_\infty \rho^{\frac{-2}{p-1}} \left(1 + A_1 \rho^{-\frac{p(n-2)-(n-2)}{2(p-1)}} \sin(\omega \ln(\rho) + \delta_1) \right), \quad (2.40)$$

gdzie A_1 jest dane przez (2.37) dla nienaturalnego $k > 0$ oraz przez (2.39) dla naturalnego $k > 0$, a δ_1 jest stałą. Zależność od parametru k jest naturalna, gdyż asymptotyka jest obliczana dla rozwiązania wokół $\rho = 1$, które zależy od tego parametru.

Użycie faktu, że dwa sąsiednie rozwiązania u_{l+1} oraz u_l różnią się w fazie o π i wykorzystanie (2.26) daje następujące prawo skalowania

$$\frac{c_{l+1}}{c_l} = e^{\frac{2\pi}{(p-1)\omega}}, \quad (2.41)$$

gdzie l indeksuje rozwiązania globalne.

Obliczenie prawa skalowania dla b_l wymaga indukcji względem parametru k . Dla niecałkowitego k porównanie amplitud (2.26) oraz (2.40) oraz użycie (2.37) prowadzi do

$$\frac{b_{l+1} - b_\infty}{b_l - b_\infty} = -e^{-\frac{2\pi}{(p-1)\omega} \frac{p(n-2)-(n+2)}{2}}. \quad (2.42)$$

Dla $k = 1$ podobnie, lecz z użyciem (2.38) zamiast (2.37) można otrzymać

$$\frac{b_{l+1} - \frac{2}{p-1}b_\infty}{b_l - \frac{2}{p-1}b_\infty} = -e^{-\frac{2\pi}{(p-1)\omega} \frac{p(n-2)-(n+2)}{4}}. \quad (2.43)$$

Z prawa tego wynika, że dla $k = 1$ zachodzi $b_l \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \frac{2}{p-1}b_\infty$. Podobnie dla pozostałych naturalnych $k > 0$ przy założeniu przypuszczenia 2.1 wynika ogólne prawo skalowania

$$\frac{b_{l+1} - \frac{(-1)^k u_\infty^{(k)}(\rho)|_{\rho=1}}{k!}}{b_l - \frac{(-1)^k u_\infty^{(k)}(\rho)|_{\rho=1}}{k!}} = -e^{-\frac{2\pi}{(p-1)\omega} \frac{p(n-2)-(n+2)}{4}}, \quad (2.44)$$

z którego $b_l \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \frac{(-1)^k u_\infty^{(k)}(\rho)|_{\rho=1}}{k!}$, co daje punkt na wykresie $d(b)$ wokół którego nawija się spirala z metody numerycznej opisanej w poprzedniej sekcji.

W kolejnej sekcji podany jest przykład numeryczny ilustrujący prawa skalowania.

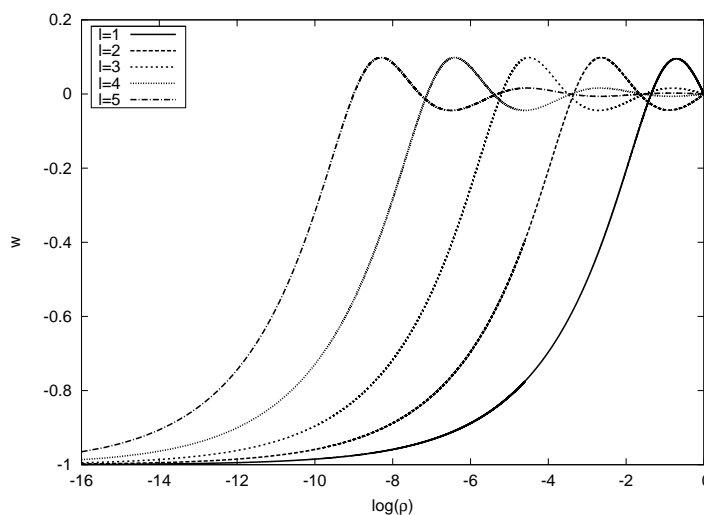
2.6 Przykład numeryczny

W sekcji tej, za pracą [46], zostaną sprawdzone prawa skalowania dla $n = 4$, $p = 5$, $k = 1$. Wartości danych brzegowych charakteryzujących kolejne rozwiązania globalne zostały przedstawione w tabeli 2.3. Parametry $\Delta b_l = -\frac{\frac{1}{2}b_\infty - b_{l+1}}{\frac{1}{2}b_\infty - b_l}$, $\Delta c_l = \frac{c_{l+1}}{c_l}$ są dopasowane do postaci praw skalowania dla przypadku $k = 1$. Można zauważyć, iż $\Delta c_l \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 2.57855$ oraz $\Delta b_l \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0.387815$, co zgadza się

l	b_l	c_l	Δc_l	Δb_l
1	0.6737489855	2.0910688721	2.7236	0.3684
2	0.3885063199	5.6951909608	2.5273	0.3957
3	0.4956893219	14.3935587303	2.5991	0.3848
4	0.4536101812	37.4108441464	2.5707	0.3891
5	0.4698517690	96.1705946601	2.5817	0.3871
6	0.4635414243	248.2798532928	2.5772	0.3887
7	0.4659869260	639.8768233077	2.5793	0.3859
8	0.4650382601	1650.4432079694	-	-

Tablica 2.3: $n=4$, $p=5$, $k=1$

z (2.41) oraz (2.43). Pięć pierwszych rozwiązań samopodobnych odpowiednio przeskalowanych przedstawia rysunek 2.7, na którym $w = \frac{u_l}{u_\infty} - 1$. Wykres ten pokazuje słusność podstawienia (2.33) z poprzedniej sekcji.



Rysunek 2.7: Globalne rozwiązania analityczne dla $n = 4$, $p = 5$, $k = 1$.

Rozdział 3

Ruchome osobliwości profili

„Naukowiec jest niczym mimoza, gdy sam popełni błąd, i niczym ryczący lew, gdy odkryje błąd zrobiony przez kogoś innego.”

Albert Einstein (1879-1955)

3.1 Wprowadzenie

W tej sekcji zostaną wprowadzone niezbędne w dalszej analizie pojęcia z teorii równań różniczkowych na płaszczyźnie zespolonej zilustrowane na przykładzie równania Lane-Emdena. Bardziej kompletne ujęcie zawarte jest w klasycznych podręcznikach [39] oraz [36].

Częstym przypadkiem podczas rozwiązywania równań różniczkowych jest znalezienie rozwiązania w postaci szeregu Taylora, który nie daje zsumować się do kombinacji funkcji elementarnych. Wówczas powstaje problem określenia promienia zbieżności tego szeregu. Wiadomo, że na płaszczyźnie zespolonej na brzegu koła zbieżności szeregu potęgowego leży przynajmniej jedna osobliwość i to właśnie ta osobliwość, która leży najbliżej punktu wokół którego rozwijany jest szereg Taylora określa promień zbieżności tego szeregu. W przypadku równań różniczkowych zwyczajnych, jak wspomniano na wstępie, możliwe są dwa typy osobliwości - ustalone, których położenie jest w punktach osobliwych współczynników równania oraz ruchome, których położenie jest cechą danego rozwiązania i może się zmieniać podczas zmian danych początkowych. To właśnie odległość od punktu rozwinięcia rozwiązania w postaci szeregu Taylora do najbliższej osobliwości ustalonej bądź ruchomej zadaje wartość promienia zbieżności tego szeregu. Wyznaczenie osobliwości ustalonych jest zazwyczaj prostym zadaniem - wystarczy inspekcja równania, jednak wyznaczenie położenia osobliwości ruchomych może okazać się zadaniem skomplikowanym, nierzadko wymagającym użycia metod numerycznych. Najpowszechniejszym, lecz najbardziej

kosztownym sposobem jest metoda siłowa polegająca na całkowaniu równania wzdłuż kierunków na płaszczyźnie zespolonej do momentu natrafienia na osobliwość. Nie jest to metoda zbyt efektywna i nigdy nie daje pewności uwzględnienia wszystkich osobliwości jednak jest najogólniejsza. Istnieją również pewne metody analityczne, które wykorzystują szczególne własności równań [22], [27]. Bardzo ciekawe metody analizy osobliwości ruchomych, szczególnie dla równań o nieliniowościach typu potęgowej, wynikają z metody geometrii potęgowej [16], [18],[17].

Przykładem ilustrującym wspomniane trudności jest równanie Lane-Emdena [37], [51]

$$y'' + \frac{n-1}{x}y' + y^p = 0, \quad y = y(x) \quad (3.1)$$

szeroko używane w astrofizyce do opisu statycznych struktur gwiazdowych. Rozwiązuje się je zwyczajowo ze znormalizowanymi warunkami początkowymi $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Tutaj parametr n ma również znacznie wymiaru przestrzennego i w zastosowaniach spotyka się najczęściej równanie z $n = 3$. Jest to równanie, które posiada ustalona osobliwość w punkcie, w którym zadane są warunki początkowe. Podstawienie formalnego szeregu potęgowej $y(x) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l x^l$ i wykorzystanie wzoru Cauchy'ego (2.1), jak w poprzednim rozdziale, daje lokalne rozwiązanie, którego współczynniki mogą być wyznaczone z następującej rekurencji

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad a_{l+2} = \frac{-c_l}{(l+1)(l+n)} \quad \text{dla } l \geq 2, \quad (3.2)$$

gdzie c_l wynikają ze wzoru Cauchy'ego. Ten szereg formalny jest zbieżny, co można udowodnić wykorzystując, podobnie jak poprzednio, stwierdzenie 1 z pracy [15]. Jak łatwo sprawdzić, oprócz $x = 0$ drugą ustaloną osobliwością jest punkt w nieskończoności (na uzwarconej osi rzeczywistej lub uzwarconej płaszczyźnie zespolonej - sferze Riemanna). Sugeruje to, iż promień zbieżności znajdującego szeregu jest nieskończony - jako odległość pomiędzy tymi dwoma ustalonymi osobliwościami. Zazwyczaj tak jednak nie jest, co można sprawdzić [51] stosując znane twierdzenie Cauchy'ego-Hadamarda lub test d'Alemberta dla szeregów [1] do współczynników szeregu. Wyjaśnienie tego paradoksu staje się oczywiste jeżeli z osi rzeczywistej przejdzie się na płaszczyznę zespoloną. Okazuje się [37], że w pobliżu początku układu współrzędnych, symetrycznie względem $x = 0$ na osi urojonej znajdują się dwie ruchome osobliwości i to one ograniczają promień zbieżności szeregu. Sytuacja ta jest podobna do przedstawianej w wielu podręcznikach analizy zespolonej zagadki rozbieżności szeregu definiującego $1/(1+x^2)$ poza kołem jednostkowym pomimo, że $x = \pm 1$ są punktami regularnymi tej funkcji - osobliwości znajdują się na brzegu koła

jednostkowego w punktach $x = \pm i$ - to właśnie przejście na płaszczyznę zespoloną wyjaśnia tą pozorną sprzeczność. Dla równania Lane-Emdena numerycznie wyznaczone położenie osobliwości jest znane z dużą dokładnością [37]; te dane zostaną wykorzystane do analizy osobliwości lokalnego rozwiązania (1.9) wokół $\rho = 0$.

3.2 Rozwiązania lokalne wokół $\rho = 0$

W poprzednim rozdziale została znaleziona rekurencja na współczynniki rozwiązania analitycznego wokół $\rho = 0$ (2.4), co więcej, zostało zasygnalizowane, iż szereg ten jest zbieżny w pewnym kole o środku w zerze i promieniu, który nie może być większy niż 1, ze względu na fakt, że najbliższymi punktu rozwinięcia ustalonymi osobliwościami równania są punkty $\rho = \pm 1$.

Wyniki eksperymentów numerycznych polegających na próbie estymacji promienia zbieżności wykorzystując test d'Alemberta sugerują, że promień ten jest zależny od wyboru wartości danej początkowej c i dla dużych wartości tego parametru jest on znacznie mniejszy od jedności. Świadczy to o fakcie, iż wpływ na ten promień ma dodatkowa struktura ruchomych osobliwości na płaszczyźnie zespolonej. Aby ją zidentyfikować należy zastosować rozumowanie z sekcji 2.3 przytoczone tutaj jeszcze raz. Podstawienie

$$\rho = \frac{x}{c^{\frac{p-1}{2}}} \quad (3.3)$$

wraz z

$$y = u/c, \quad (3.4)$$

transformuje lokalne rozwiązanie analityczne (1.9) wokół $\rho = 0$ w następujący szereg

$$u(\rho) = cy \left(\frac{x}{c^{\frac{p-1}{2}}} \right) = c \left[\left(1 - \frac{1}{2n}x^2 + O(x^4) \right) + o\left(\frac{1}{c}\right) \right] \quad (3.5)$$

natomiast równanie (1.9) w ($' = \frac{d}{dx}$)

$$y'' + \frac{n-1}{x}y' + y^p = \frac{1}{c^{p-1}} (x^2y'' + (2\alpha + 2)xy' + \alpha(\alpha + 1)y). \quad (3.6)$$

Taka transformacja pozwala wydobyć z rozwiązania asymptotykę dla dużego c . Co więcej, po przejściu do granicy $c \rightarrow \infty$ w (3.6) powstaje równanie Lane-Emdena, dla którego znana jest dokładna lokalizacja ruchomych osobliwości. Ta wiedza może być z łatwością wykorzystana do określenia przybliżonego położenia ruchomych osobliwości dla rozwiązania lokalnego wokół $\rho = 1$ dla (1.9). Ponowne wykorzystanie zamiany zmiennych (3.3) daje przybliżoną zależność pomiędzy promieniem zbieżności (odległością od $x = 0$ do najbliższej osobliwości)

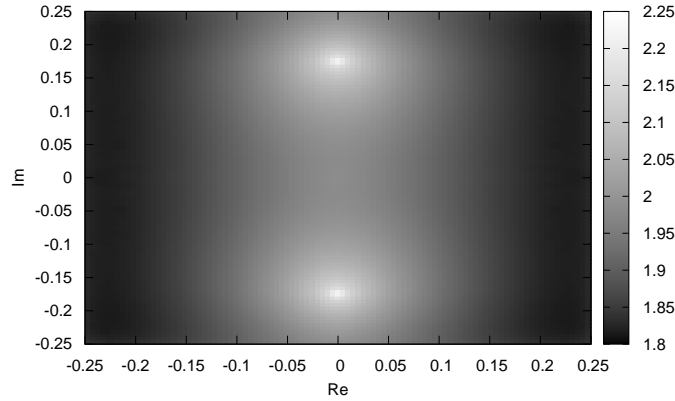
dla równania Lane-Emdena R_{LE} , a promieniem zbieżności R_W dla lokalnego rozwiązania analitycznego wokół $\rho = 0$ równania (1.9). Zachodzi mianowicie

$$R_{LE} \approx R_W c^{\frac{p-1}{2}} \quad (3.7)$$

lub w wygodniejszej postaci ze względu na to, iż oba szeregi definiują funkcje parzyste

$$R_{LE}^2 \approx R_W^2 c^{p-1}. \quad (3.8)$$

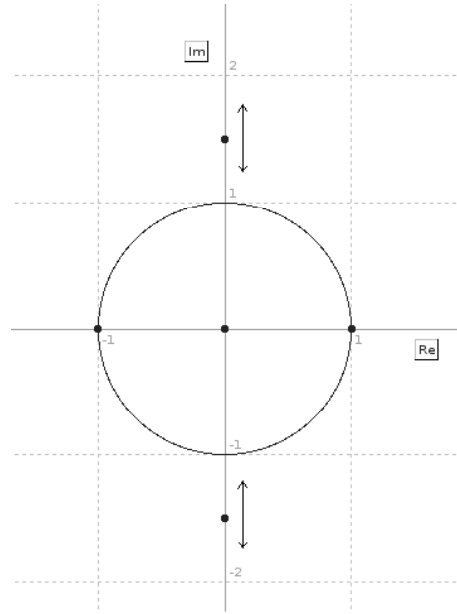
Należy przy tym zaznaczyć, iż wzory te mają coraz większą dokładność, gdy c jest coraz większe ze względu na to, iż (3.6) przechodzi w równanie Lane-Emdena w granicy $c \rightarrow \infty$. Poprzez numeryczne przedłużanie rozwiązania lokalnego dla (1.9) na płaszczyznę zespoloną okazuje się, iż dwie ruchome osobliwości, podobnie jak dla równania Lane-Emdena, również są położone symetrycznie względem początku układu współrzędnych na osi urojonej, jak to ilustruje rysunek 3.1 zaczerpnięty z [48]. Osobliwości te podczas zwiększania wartości c dążą do



Rysunek 3.1: Profil gęstości modułu rozwiązania dla $n = 3$, $p = 7$, $c = 2$. Osobliwości ruchome są położone w punktach $\rho \approx \pm 0.17487i$.

spotkania w początku układu współrzędnych, przez co mogą być nazwane osobliwościami koalescentnymi lub konfluentnymi. Takie zlanie osobliwości jest konsekwentne z faktem, iż w przeliczalnej rodzinie profili samopodobnych występuje jeden, mianowicie u_∞ , który jest również osobliwy i odpowiada danej c_l w $\rho = 0$ która dąży do nieskończoności.

Powyższy opis w zadowalający sposób pozwala wyjaśnić zmianę wspomnianego promienia zbieżności - szkic tej sytuacji został jeszcze raz przedstawiony schematycznie na rysunku 3.2 z [48].



Rysunek 3.2: Osobliwości lokalnego rozwiązania analitycznego wokół $\rho = 0$ na płaszczyźnie zespolonej ρ . Zostały zaznaczone ustalone osobliwości równania $\rho = 0$ oraz $\rho = \pm 1$ jak również ruchome osobliwości rozwiązania $\rho = 0$ zlokalizowane symetrycznie wokół $\rho = 0$ na osi urojonej. Narysowano również koło jednostkowe.

Wykonanie prostego eksperymentu numerycznego pokazuje, iż wzór (3.8) pracuje bardzo dobrze również dla małych wartości c , gdzie powyższe wyprowadzenie się załamuje. Sprawdzenie składa się z dwóch kroków. W pierwszym należy dla ustalonego n oraz p oszacować promień zbieżności równania Lane-Emdena. Można to zrobić poprzez obliczenie dużej liczby współczynników (3.2), utworzenie wielkości $R_{LE}^2(l) = \frac{a_{2l}}{a_{2l+2}}$, która w granicy $l \rightarrow \infty$ będzie zbiegała, zgodnie z testem d'Alemberta, do prawdziwego kwadratu promienia zbieżności, a następnie próby dopasowania $f(l) = \overline{R_{LE}^2} + \frac{a}{l^b}$ do $R_{LE}^2(l)$. Pozwoli to dać przybliżoną wartość kwadratu promienia zbieżności $\overline{R_{LE}^2}$. Drugi krok polega na zastosowaniu tego samego przepisu do lokalnego rozwiązania analitycznego równania na profile. Za [48] został wybrany przypadek $n = 3$, $p = 7$, dla którego oszacowano $\overline{R_{LE}^2} = 1.92916$. To pozwoliło utworzyć tabelę 3.1, również zaczerpniętą z [48], która pokazuje że wzór (3.8) dobrze pracuje nawet dla małych wartości c .

Ostatnim celem tej sekcji jest obliczenie asymptotyki wokół ruchomych osobliwości. Z praktycznego punktu widzenia najważniejszy jest wiodący wkład, który zostanie obliczony używając metody zwanej [36] testem potęgowym (ang. test-power test) lub testem Painlevé, ale również [37] zasadą równowagi szczegó-

c	$\overline{R_W^2}$	R_W^2 - theory	$\frac{\overline{R_W^2} - R_W^2}{R_W^2}$
0.5	1.0	NA	NA
1.0	1.0	NA	NA
1.5	1.838680E-001	1.693638E-001	8.56391E-002
2.0	3.058030E-002	3.014313E-002	1.45033E-002
2.5	7.931650E-003	7.901839E-003	3.77262E-003
3.0	2.649650E-003	2.646310E-003	1.26213E-003
3.5	1.049970E-003	1.049446E-003	4.99574E-004
4.0	4.710920E-004	4.709863E-004	2.24363E-004
4.5	2.323490E-004	2.323235E-004	1.09705E-004
5.0	1.234740E-004	1.234662E-004	6.28512E-005

Tablica 3.1: $n = 3$, $p = 7$; R_W^2 - Teoretyczne przewidywanie na promień zbieżności na podstawie (3.8). Komórki z wartością NA oznaczają, iż ruchome osobliwości wyszły poza koło jednostkowe i nie mają wpływu na zmianę promienia zbieżności. Uzupełnienie komórek oznaczonych NA wartościami liczbowymi sprowadzałoby się do użycia innej metody znajdowania położenia osobliwości ruchomych.

lowej (ang. detailed balance rule)¹. Mimo, iż metoda ma wielu autorów nie jest skomplikowana - polega na próbie szukania rozwiązań potęgowych, które spełniają najbardziej osobliwe względem podstawienia potęgowego człony równania. W przypadku równania (1.9), zanim zastosuje się tą metodę należy wykorzystać wiedzę o charakterze rozwiązania (2.5) - jest to szereg w parzystych potęgach argumentu. Stąd podstawienie $\xi = \rho^2$ w (1.9) daje

$$4\xi(1-\xi)\frac{d^2u}{d\xi^2} + \left(2n - 2\left(1 + \frac{2(p+1)}{p-1}\right)\xi\right)\frac{du}{d\xi} - \frac{2(p+1)}{(p-1)^2}u + u^p = 0. \quad (3.9)$$

Ruchome osobliwości zlokalizowane są na osi urojonej, co uzasadnia kolejne podstawienie $\rho_0 = i\sqrt{\zeta_0}$ dające równość przybliżoną pomiędzy najbardziej osobliwymi członami równania postaci

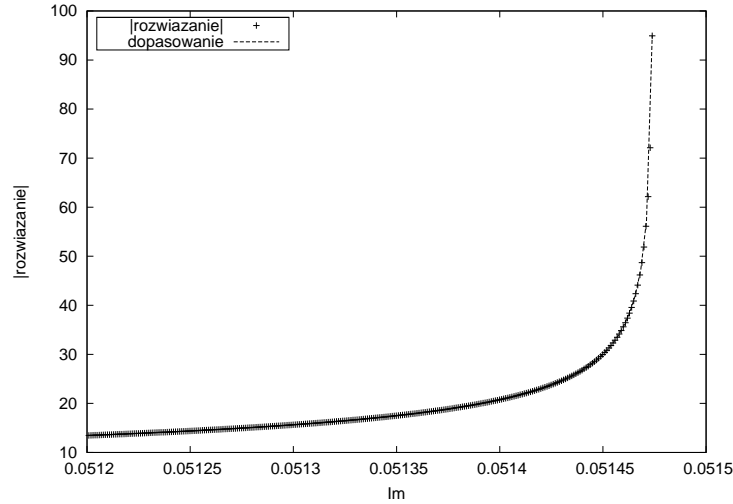
$$-4\zeta_0(1+\zeta_0)\frac{d^2u}{d\zeta^2} \approx u^p. \quad (3.10)$$

Podstawienie $u(\zeta) = A(\zeta_0 - \zeta)^\beta$ daje warunki na parametry A i β . Wynikiem końcowym jest asymptotyka postaci

$$u(\rho) \approx \frac{(4(1+\zeta_0)\zeta_0)^{1/(p-1)}b_0}{(\zeta_0 + \rho^2)^{2/(p-1)}}, \quad (3.11)$$

¹Metoda ta występuje również jako pierwszy krok szukania rozwiązań nieliniowych równań różniczkowych przy użyciu geometrii potęgowej [16], która uogólnia metodę Puisseux [36] wykorzystującą diagramy Newtona.

gdzie, jak zazwyczaj, b_0 jest wartością zerowego profilu samopodobnego (1.12). Metoda ta nie zawsze daje dobrą asymptotykę (zobacz dyskusję na stronie 90-91 w [36] lub w pracy [27]), dlatego przynajmniej numeryczne sprawdzenie jest konieczne. Za pracą [48] zaprezentowano takie sprawdzenie na rysunku 3.3.



Rysunek 3.3: Wykres modułu rozwiązania dla $n = 3$, $p = 7$, $c = 3$ wzdłuż osi urojonej blisko osobiwości ruchomej. Do danych numerycznych dopasowano $\frac{\bar{a}}{(b^2 - x^2)^{\bar{c}}}$, co dało $\bar{a} = 0.409609$, $\bar{b} = 0.0514747$ oraz $\bar{c} = 0.333333 \approx 1/3$ w bardzo dobrej zgodności ze wzorem (3.11). Parametr \bar{a} według (3.11) powinien zależeć od \bar{b} , co daje test poprawności dopasowania.

Kolejna sekcja przedstawia analizę ruchomych osobiwości dla lokalnego rozwiązania analitycznego wokół $\rho = 1$. Próbuje też, używając metod bliskich topologii w połączeniu z metodami numerycznymi, dać odpowiedź na pytanie: co się dzieje, gdy takie rozwiązanie będzie przedłużane do nieskończoności wzdłuż osi rzeczywistej. Jest to niezwykle ważne pytanie, gdyż tylko rozwiązania (w szczególności dotyczy to też profili samopodobnych), które znikają w nieskończoności mają szansę być akceptowane jako rozwiązania „fizyczne”.

3.3 Rozwiązania lokalne wokół $\rho = 1$

W sekcji tej, w przeciwieństwie do poprzedniej, uwaga będzie ograniczona do rozwiązań na osi rzeczywistej. Na początku zostaną zaprezentowane proste stwierdzenia [48], które pozwalają opisać jakościowo zachowanie rozwiązania dla $\rho > 1$. Pierwsze stwierdzenie wynika z jednoznaczności rozwiązań w punkcie regularnym równania.

Stwierdzenie 3.1 *W punkcie regularnym ρ_0 równania (1.9), jeżeli zachodzi*

jednocześnie $u'(\rho_0) = u''(\rho_0) = 0$ wówczas rozwiązanie jest postaci $u(\rho) = 0$ lub $u(\rho) = \pm b_0$.

Dowód polega na podstawieniu założeń do (1.9) i rozwiązaniu równania wielomianowego.

Kolejne stwierdzenia dotyczą już istnienia obszarów na płaszczyźnie $(\rho, u(\rho))$, w których rozwiązanie nie może przyjmować minimów bądź maksimów.

Stwierdzenie 3.2 *Rozwiązania (1.9) nie mają minimów w obszarze $\rho > 1$, $b_0 > u(\rho) > 0$.*

Za [48] zostanie przedstawiony prosty dowód nie wprost. Zakładając, że w danym obszarze jest jednak minimum czyli, że zachodzi $u'(\rho_0) = 0$ oraz $u''(\rho_0) > 0$ z (1.9) wynika $(1 - \rho_0^2)u''(\rho_0) = u(\rho_0)(b_0^{p-1} - u^{p-1}(\rho_0))$. Jednak według założeń jest $(1 - \rho_0^2) < 0$ oraz $u(\rho_0)(b_0^{p-1} - u^{p-1}(\rho_0)) > 0$, co daje sprzeczność $u''(\rho_0) < 0$ z założeniem dowodu nie wprost i kończy dowód.

Podobnie udowadnia się kolejne stwierdzenia

Stwierdzenie 3.3 *Rozwiązania (1.9) nie mają maksimów w obszarze $\rho > 1$, $b_0 < u(\rho)$.*

Stwierdzenie 3.4 *Rozwiązania (1.9) nie mają maksimów w obszarze $\rho > 1$, $-b_0 < u(\rho) < 0$.*

Stwierdzenie 3.5 *Rozwiązania (1.9) nie mają minimów w obszarze $\rho > 1$, $-b_0 > u(\rho)$.*

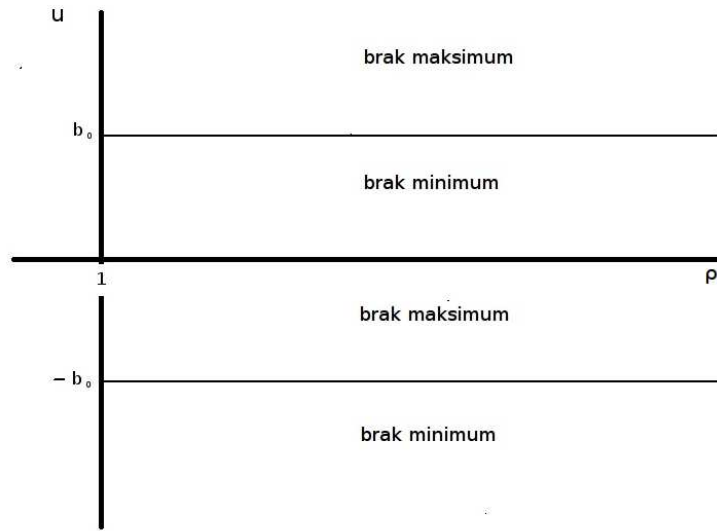
Te zależności przedstawia rysunek 3.4 z [48]. Już z tych prostych stwierdzeń można wysnuć wiele przypuszczeń na temat zachowania się rozwiązań dla $\rho > 1$ (zobacz również stwierdzenie (ang. proposition) 3.1 w [43]), mianowicie, jeżeli rozwiązanie rosnące, podczas całkowania do nieskończoności, wejdzie do obszaru, gdzie nie jest dozwolone maksimum np. $\rho > 1$, $b_0 < u(\rho)$, wówczas będzie musiało rosnąć. Jeżeli ten wzrost jest dostatecznie szybki, wówczas w pewnym skończonym ρ_0 może znajdować się osobliwość ruchoma. Ze względu na symetrię odbicia analogiczne rozważanie jest prawdziwe dla rozwiązania z przeciwnym znakiem.

Dodatkową informację o zachowaniu dla $\rho > 1$ można również uzyskać ze znaku pierwszej pochodnej rozwiązania dla $\rho = 1$. Zachodzi [48]

Stwierdzenie 3.6 *W $\rho = 1$ dla $k < 1$ oraz $0 < u(1) < b_0$ zachodzi $u'(1) < 0$.*

Dla dowodu wystarczy zauważyć, że w $\rho = 1$ równanie (1.9) przyjmuje postać

$$2(k-1)u'(1) = u(1)(b_0^{p-1} - u^{p-1}(1)). \quad (3.12)$$

Rysunek 3.4: „Topologia“ rozwiązań dla $\rho > 1$.

Założenia natomiast implikują, że $2(k-1) < 0$ oraz $u(1)(b_0^{p-1} - u^{p-1}(1)) > 0$, skąd wynika już $u'(1) < 0$.

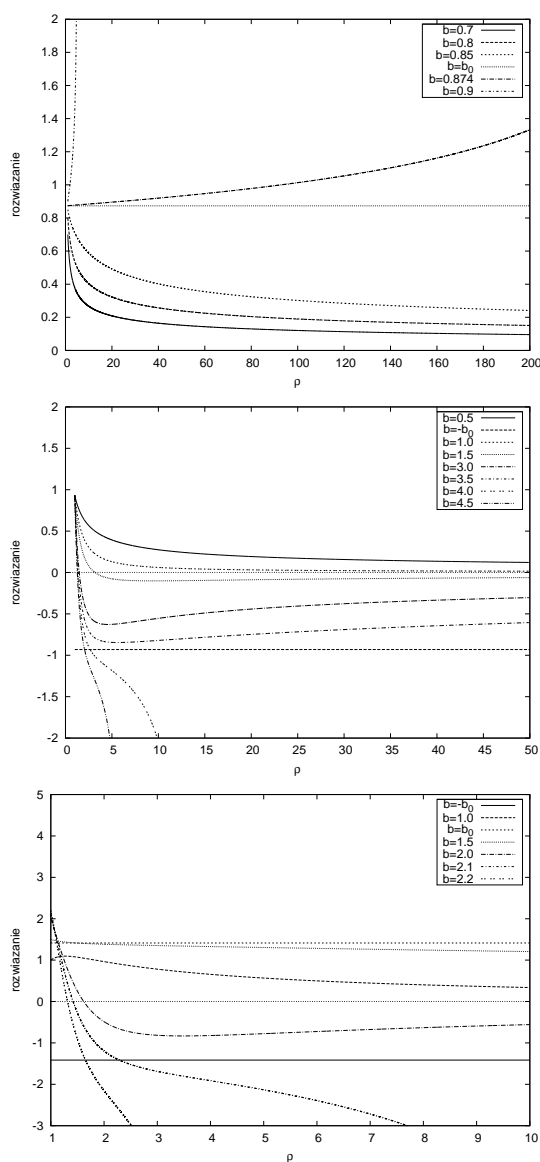
W ten sam sposób przebiegają dowody następujących stwierdzeń

Stwierdzenie 3.7 *W $\rho = 1$ dla $k < 1$ oraz $b_0 < u(1)$ zachodzi $u'(1) > 0$.*

Stwierdzenie 3.8 *W $\rho = 1$ dla $k < 1$ oraz $-b_0 < u(1) < 0$ zachodzi $u'(1) > 0$.*

Stwierdzenie 3.9 *W $\rho = 1$ dla $k < 1$ oraz $u(1) < -b_0$ zachodzi $u'(1) < 0$.*

Przypadek $k > 1$ może być otrzymany poprzez analogię - znak pierwszej pochodnej należy wówczas odwrócić w tematach stwierdzeń. Jedynym nieuwzględnionym przypadkiem jest $k = 1$. Dla tej wartości powyższa idea dowodu załamuje się, gdyż zeruje się lewa strona wzoru (3.12). Jednak ze względu na fakt, iż analiza dotyczy rozwiązań analitycznych postaci (2.11), więc można bezpośrednio zróżniczkować ten szereg otrzymując, że $u'(1) < 0$ dla $b > 0$. To sprawia, iż początkowo rozwiązanie wchodzi do obszaru, w którym ma szansę pozostać skończone. Jednak jak pokazuje numeryka jeżeli wartości b są zbyt duże to rozwiązanie ma osobliwość w pewnym skończonym $\rho_0 > 1$. Co więcej, osobliwość ta w miarę zwiększania wartości b porusza się po osi rzeczywistej od nieskończoności do $\rho = 1$. Z analizy przedstawionej w sekcji 2.5 wynika, że dla profili samopodobnych wartości b dla każdego kolejnego rozwiązania rodziny są coraz bliżej pewnej wartości proporcjonalnej do b_∞ . Jest to na tyle mała wartość, że profile samopodobne znikają w nieskończoności. Rysunek 3.5 zaczerpnięty z [48], przedstawia kontynuację rozwiązań lokalnych do nieskończoności dla kilku wybranych wartości b i ilustruje ideę obszarów opisanych powyżej.



Rysunek 3.5: Rozwiązania lokalne dla $\rho \geq 1$ w przypadku: $n = 3, p = 7, k = 2/3$ (górze); $n = 4, p = 5, k = 1$ (środek); $n = 6, p = 3, k = 3/2$ (dół).

Pozostała część tej sekcji zostanie poświęcona omówieniu asymptotyki rozwiązań dla $\rho > 1$. Pierwszymi na liście są asymptotyki znikające w nieskończoności, które znajduje się wykorzystując wspomnianą metodę równowagi szczególnej. Szuka się przybliżonych rozwiązań postaci $u(\rho) \approx \frac{1}{\rho^a}$ przy założeniu

$a > 0$ używając przybliżonego równania (1.9) postaci

$$-\rho^2 u'' - \left(\frac{2(p+1)}{p-1} \rho \right) u' - \frac{2(p+1)}{(p-1)^2} u \approx 0. \quad (3.13)$$

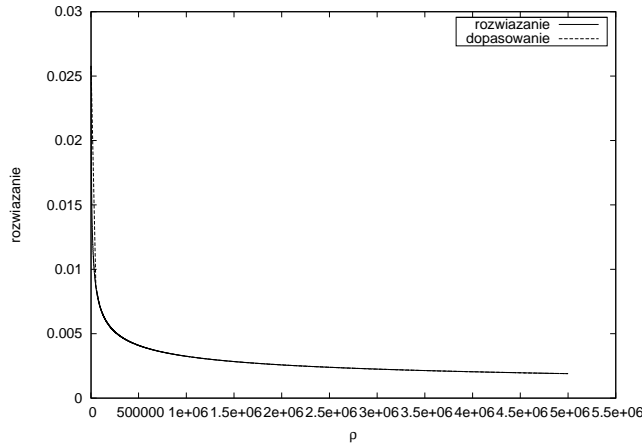
Ma ono dwa rozwiązania założonej postaci

$$u(\rho) \approx \rho^{-\frac{2}{p-1}} \quad (3.14)$$

oraz

$$u(\rho) \approx \rho^{-\frac{p+1}{p-1}}. \quad (3.15)$$

Obie asymptotyki można łatwo otrzymać dla małych wartości b ; przykład pokazuje rysunek 3.6 również zaczerpnięty z [48].



Rysunek 3.6: Asymptotyka $\rho \rightarrow \infty$ dla $n = 3$, $p = 7$, $b = 0.5$ w przypadku rozwiązania ograniczonego w $\rho \rightarrow \infty$. Dopasowanie $f(\rho) = \bar{a} + \frac{\bar{b}}{\rho^{\bar{c}}}$ daje $\bar{a} = 10^{-30}$, $\bar{b} = 0.324967$ i $\bar{c} = 0.333334 \approx 1/3$, w zgodzie z (3.14).

Ostatnim celem tej sekcji jest podanie asymptotyki wokół ruchomej osobliwości na osi rzeczywistej obserwowanej w wynikach numerycznych. Cel ten zostanie osiągnięty w taki sam sposób jak poprzednio. Na początku, zmiana zmiennej $y = \rho - 1$ w równaniu (1.9) daje

$$-y(2+y)u'' + \left(\frac{n-1}{1+y} - \frac{2(p+1)}{p-1}(1+y) \right) u' - \frac{2(p+1)}{(p-1)^2} u + u^p = 0. \quad (3.16)$$

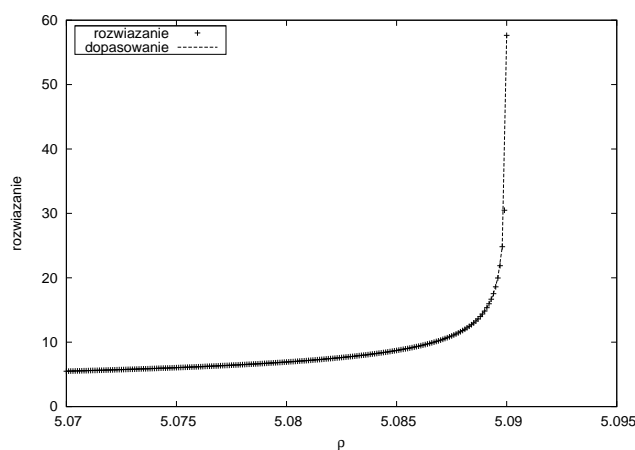
W pobliżu potencjalnej osobliwości, która dla ustalenia uwagi znajduje się w punkcie ρ_0 ($y_0 = \rho_0 - 1$) zachodzi

$$y_0(2+y_0)u'' \approx u^p. \quad (3.17)$$

Poszukiwanie rozwiązania w postaci potęgowej daje natychmiast

$$u(\rho) \approx \frac{((\rho_0 - 1)(\rho_0 + 1))^{1/(p-1)} b_0}{(\rho_0 - \rho)^{2/(p-1)}}. \quad (3.18)$$

Wynik numeryczny ilustrujący zgodność asymptotyki ze stanem faktycznym jest przedstawiony na rysunku 3.7.



Rysunek 3.7: Asymptotyka w pobliżu ruchomej osobliwości położonej na osi rzeczywistej dla $n = 3$, $p = 7$, $b = 0.9$. Dopasowanie $\frac{\bar{a}}{(b-x)^{\bar{c}}}$ daje wartości $\bar{a} = 1.49289$, $\bar{b} = 5.09002$, $\bar{c} = 0.333333 \approx 1/3$. wynik ten zgadza się z (3.18), a dodatkowo zgodność dopasowania daje się sprawdzić poprzez fakt, że parametr \bar{a} powinien zależeć od \bar{b} zgodnie z (3.18).

Część II

Semiliniowe równania falowe i Kleina-Gordona

Rozdział 4

Krytyczne i nadkrytyczne równania falowe i KG

*„Chcę wiedzieć, jak Bóg stworzył ten świat. Nie interesuje mnie to czy inne zjawisko.
Chcę znać Jego myśli, reszta to szczegóły.”*

Albert Einstein (1879-1955)

4.1 Wprowadzenie

Jak wspomniano we wstępie dla obu równań (1.2) oraz (1.15) odpowiednio „duże” dane początkowe prowadzą do osobliwości w skończonym czasie, natomiast „małe” dane początkowe podlegają dyspersji - propagują do nieskończoności przestrzennej. Równanie falowe jest pod tym względem dobrze przestudowane. Wybuch nazywamy generycznym jeżeli dane początkowe nie są specjalnie przygotowane, a jedynie wiadomo o nich, że wybuchają. Dla $n = 3$ pokazano [11] na przykładach numerycznych, iż asymptotyka generycznego wybuchu opisana jest przez rozwiązanie jednorodne (1.12). Powstaje interesujące pytanie na temat tego jakie rozwiązanie pojawi się jeżeli dane początkowe będą dobrane dokładnie na granicy pomiędzy tymi, które wybuchają, a tymi które podlegają dyspersji - co znajduje się na tzn. progu pomiędzy wybuchem a dyspersją. Tutaj również znana jest odpowiedź dla $n = 3$. Poniżej zostanie podane uogólnienie na wyższe wymiary. W przypadku nadkrytycznym atraktorem pośrednim jest rozwiązanie samopodobne stowarzyszone z profilem samopodobnym $u_1(\rho)$. Jedynie idealnie przygotowane dane początkowe mogą pozostać na tym atraktorze, inne, gorzej dopasowane, zostają odepchnięte ze względu na fakt, że dla u_1 występuje mod niestabilny odpychający rozwiązanie z tego atraktora i ostatecznie następuje dyspersja rozwiązania bądź wybuch. W rozdziale tym zostaną przedstawione

wyniki, które również potwierdzają powyższy opis przypadku nadkrytycznego w wyższej liczbie wymiarów, co więcej, okaże się, że specjalne profile dla parametru k -całkowitego (2.7) nie są niczym wyróżnione i idealnie zgadzają się z tym opisem.

Zupełnie inaczej sytuacja wygląda dla przypadków krytycznych, w których istnieją tylko dwa rozwiązania samopodobne, jak to zostało pokazane w sekcji 2.3. Tutaj, również w przypadku $n = 3$, zostało udowodnione [11], że rolę atraktora pośredniego gra rozwiązanie (1.13) przeskalowane przez (1.4). Przypadek ten okazał się jednak ciekawszy ze względu na odkrycie kolejnego - poza generycznym - typu wybuchu, który również charakteryzuje się asymptotyką opisaną przez przeskalowane rozwiązanie statyczne (1.13), jednak ze współczynnikiem skalowania λ , który zależy od czasu i znika w skończonym czasie. Wybuch ten nazywa się wybuchem drugiego typu (ang. type II blowup). Prace [45],[35] podają przepisy na to skalowanie

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= (T-t)e^{-\sqrt{|\log(T-t)|}(1+o(1))} & \text{dla } n=4, \quad p=3; \\ \lambda(t) &\sim \frac{(T-t)}{\sqrt{|\log(T-t)|}} & \text{dla } n=6, \quad p=2; \end{aligned} \tag{4.1}$$

w którym brakujący przypadek $n = 3, p = 5$ pozostaje do tej pory niezbadany (ale zobacz dyskusję w [35]). Ze względu na mnogość zachowań dla przypadku krytycznego pojawia się pytanie, jak spreparować dane początkowe, aby trafiły w każdy z opisanych przypadków - to będzie kolejny punkt rozważań tego rozdziału.

Równolegle rozważany będzie przypadek równania (1.15), dla którego okaże się, iż człon masowy w przypadku wybuchu może być z powodzeniem zaniebany. Symetria skalowania (1.4) leżąca u podstaw opisanych powyżej własności równania falowego jest łamana w równaniu Kleina-Gordona (1.15) właśnie przez obecność członu masowego. Jednak w wielu sytuacjach daje się odzyskać przybliżoną symetrię. Jest to bardzo płodne rozumowanie wykorzystywane w wielu dziedzinach fizyki, jak chociażby przy definicji izospinu. Dla równania Kleina-Gordona podobieństwo z równaniem falowym zostało sformułowane w pracy [9], a w niepełnej wersji również w [38]. Sformułowanie to zostanie podane za [47]

Przypuszczenie 4.1 *Asymptotyka wybuchu dla (1.2) jest strukturalnie stabilna pod wpływem zaburzeń związanych z dodaniem członu masowego.*

Początkiem rozważań jest analiza stabilności szczególnych rozwiązań podejrzewanych o bycie atraktorami (atraktorami pośrednimi). Metoda polega na podstawieniu do pełnego równania rozwinięcia wokół tego szczególnego rozwiązania. Sytuacja ta występuje w wielu analogicznych rozważaniach dla innych

modeli nieliniowych [25], [20], [8] - blisko szczególnego rozwiązania, którego stabilność jest badana $\bar{U}(x)$ rozwiązanie może być zapisane w postaci

$$U(x, t) = \bar{U}(x) + A(s - s^*)e^{\lambda_1 t} v_1(x) + \text{mody tłumione}, \quad (4.2)$$

gdzie s jest parametrem jednoparametrowej rodziny danych początkowych, s^* jest takim parametrem, który pozwala posłać dane początkowe dokładnie na rozwiązanie szczególne \bar{U} , a v_1 jest szukanym modem niestabilnym. Mod ten może być znaleziony poprzez podstawienie pierwszych dwóch członów do równania nieliniowego, a następnie linearyzację przy założeniu, że v_1 jest małe, gdyż rozpatrywany jest przypadek, w którym rozwiązanie jest blisko \bar{U} . Otrzymuje się problem własny, którego rozwiązanie daje zarówno mod niestabilny, jak i wartość własną λ_1 - szybkość narastania modu. Istnienie rozwiązania szczególnego w ewolucji jest nierozzerwalnie związane z jego modami niestabilnymi i rozsądnie jest założyć, iż \bar{U} przestaje istnieć, gdy mod niestabilny jest już duży, dla przykładu, gdy zachodzi dla pewnej chwili czasu T_L

$$|s - s^*|e^{\lambda_1 T_L} \sim O(1), \quad (4.3)$$

co pozwala wyznaczyć czas życia szczególnego rozwiązania jako

$$T_L \sim -\frac{1}{\lambda_1} \log(|s - s^*|). \quad (4.4)$$

Intuicyjnie je to wzór oczywisty - czas życia zależy od stopnia dopasowania oraz szybkości narastania modu niestabilnego. Ze względu na fakt, iż zależność od dopasowania danych jest zazwyczaj logarytmiczna, jak powyżej, eksperymenty numeryczne umożliwiające studiowanie takich specjalnych rozwiązań muszą cechować się dużą precyzją obliczeń.

Analiza stabilności dla rozwiązań samopodobnych oraz rozwiązania (1.13) w wyższych od trzech wymiarach przestrzennych zostanie podana w następnej sekcji.

4.2 Analiza stabilności

Pierwszy przypadek, który pozwala zilustrować idee analizy stabilności na prostym przykładzie jest stabilność rozwiązania statycznego w przypadku krytycznym. Dla $n = 3$ rozwiązanie to ma jeden mod niestabilny [65], [11], a poniższa analiza pokazuje, że jest to prawdą w pozostałych przypadkach krytycznych.

Podstawiając $U(t, r) = U_Q(r) + e^{ikt} v(r)$ do równania (1.2) oraz linearyzując

$n = 3, p = 5$	$\lambda_1 = 1.1001672$
$n = 4, p = 3$	$\lambda_1 = 0.7655592$
$n = 6, p = 2$	$\lambda_1 = 0.5307998$

Tablica 4.1: Wartości własne dla modu niestabilnego v_1 dla krytycznego NLW. Zachodzi $\lambda_1 = \sqrt{-k_1^2}$.

przy założeniu, że $v(r)$ jest małe otrzymuje się problem własny postaci

$$-v_{rr} - \frac{n-1}{r}v_r - \frac{p}{(1+br^2)^2}v = k^2v. \quad (4.5)$$

Warunkami brzegowymi jest znikanie rozwiązania w nieskończoności, które jest fizycznie uzasadnione, oraz analityczność w punkcie osobliwym $r = 0$. Punkt osobliwy równania $r = 0$ nie jest jednak problematyczny - ze względu na fakt, iż jest to równanie liniowe, a $r = 0$ jest regularnym punktem osobliwym, więc stosuje się metoda Frobeniusa. Zatem wokół $r = 0$ istnieje rozwiązanie (4.5) w postaci zbieżnego w pewnym kole szeregu Taylora. W celu rozwiązania problemu własnego zastosowano metodę strzałów z $r = 0$ w kierunku nieskończoności. Warunkiem sprawdzanym w tej metodzie był fakt, czy rozwiązanie, podczas całkowania do nieskończoności, staje się nieograniczone. Aby rozpocząć całkowanie z punktu $r = 0$ zastosowano metodę przesuwania danych początkowych omówioną w sekcji 2.4. Wynikiem jest tabela 4.1, zaczerpnięta z pracy [47], która uogólnia wyniki z pracy [11].

Dla przypadków nadkrytycznych, poprzez analogię do $n = 3$, szczególnie interesujące są rozwiązania samopodobne. Podstawiając $U(t, r) = e^{\alpha\tau}u(\tau, \rho)$, gdzie $\tau = -\ln(T-t)$, a ρ jest dane przez (1.8) do równania (1.2) otrzymuje się

$$u_{\tau\tau} + (1+2\alpha)u_{\tau} + 2\rho u_{\tau\rho} = (1-\rho^2)u_{\rho\rho} + \left(\frac{n-1}{\rho} + 2(\alpha+1)\rho\right)u_{\rho} - \alpha(\alpha+1)u + u^p. \quad (4.6)$$

Wówczas rozwiązania samopodobne odpowiadają rozwiązaniom niezależnym od τ , natomiast wybuch granicy $\tau \rightarrow \infty$. Analiza stabilności l -tego profilu samopodobnego z przeliczalnej rodziny tych rozwiązań wymaga podstawienia $u(\tau, \rho) = u_l(\rho) + e^{\lambda\tau}\xi(\rho)$ do (4.6) i linearyzacji w $\xi(\rho)$, co prowadzi do

$$(1-\rho^2)\xi'' + \left(\frac{n-1}{\rho} + 2(\alpha+1) - 2\rho\lambda\right)\xi' + (pu_l^{p-1} - \alpha(\alpha+1) - (1+2\alpha)\lambda - \lambda^2)\xi = 0. \quad (4.7)$$

Najprostsza do sprawdzenia i jedyna możliwa do wykonania w sposób analityczny jest stabilność profilu zerowego $u_0 = b_0$ ze względu na fakt, iż tylko jego postać jest znana dokładnie. Zakładając, że zaburzenie wokół $\rho = 0$ jest

analityczne $\xi(\rho) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l \rho^{2l}$ rekurencja na współczynniki jest postaci

$$a_{l+1} = \frac{\lambda^2 + \lambda \left(4l + \frac{p+3}{p-1}\right) + 2l \left(2l + \frac{p+3}{p-1}\right) - \frac{2(p+1)}{p-1}}{2(l+1)(2l+n)} a_l. \quad (4.8)$$

Test d'Alemberta pokazuje, że ten szereg potęgowy jest rozbieżny gdy $\rho > 1$. Szereg udaje się zsumować jedynie, gdy licznik zeruje się dla pewnego l , co prowadzi do wartości własnych

$$\lambda_l = 1 - 2l, \quad \bar{\lambda}_l = -2l - \frac{2(p+1)}{p-1}, \quad (4.9)$$

będących odtworzeniem wyników z pracy [11]. Jedyna dodatnia wartość własna ($\lambda = 1$) odpowiada swobodzie wyboru czasu wybuchu T w (1.12) i może być pominięta. Stad wynika wniosek, że w liniowym przybliżeniu profil zerowy jest stabilny dla dowolnego n . Poniżej zostanie pokazane na numerycznym przykładzie, że jest on asymptotyką rozwiązania, które wybucha w sposób generyczny. Do wykorzystania później zostanie podanych kilka początkowych członów rozwinięcia na mody własne wokół rozwiązania u_0 [47], [11]:

$$\begin{aligned} n = 3, p = 5: \quad \sqrt{\delta} U(r, t) &= \left(\frac{3}{4}\right)^{1/4} + c_1 \delta \left(1 - \frac{2r^2}{3\delta^2}\right) + O(\delta^3), \\ n = 3, p = 7: \quad \delta^{1/3} U(t, r) &= \left(\frac{2}{3}\right)^{1/3} + c_1 \delta \left(1 - \frac{5r^2}{9\delta^2}\right) + \bar{c}_0 \delta^{8/3} + O(\delta^3), \\ n = 4, p = 5: \quad \delta^{1/2} U(t, r) &= \left(\frac{3^{1/2}}{2}\right)^{1/2} + c_1 \delta \left(1 - \frac{r^2}{2\delta^2}\right) + O(\delta^3), \end{aligned} \quad (4.10)$$

gdzie $\delta = T - t$, a c_l oraz \bar{c}_l są wolnymi parametrami odpowiadającymi rozwiązaniom dla wartości własnych odpowiednio λ_l i $\bar{\lambda}_l$.

Stabilność pozostałych profili samopodobnych można sprawdzić jedynie numerycznie. Do tej analizy została użyta bisekcja względem możliwości gładkiego przedłużenia zaburzenia $\xi(\rho)$ przez punkt $\rho = 1$. Metoda startuje z $\rho = 0$ wykorzystując rozwinięcia analityczne dla $\xi(\rho)$ oraz dla profilu (2.5) i całkuje równanie (4.7) oraz (1.9) w kierunku $\rho = 1$ badając, kiedy rozwiązanie zaczyna być nieograniczone, tzn. kiedy przekroczy zadaną wartość ograniczenia - na tej podstawie ustalane są wartości startowe na wartość własną do kolejnego kroku całkowania. Dzieje się tak aż do uzyskania zadanej dokładności wyznaczenia wartości własnej. Taka analiza pozwala zauważyć, iż l -te rozwiązanie samopodobne ma l modów niestabilnych. Analogia do przypadku $n = 3$ [11] pozwala przypuszczać, że pierwsze rozwiązanie samopodobne, jako potencjalny atraktor pośredni dla przypadków nadkrytycznych, jest najciekawsze - tabela 4.2 z [47] przedstawia wartości własne dla pierwszego modu samopodobnego i kilku

nadkrytycznych wartości n i p .

W kolejnej sekcji zostanie przedstawiona obecność (1.12) w ewolucji jako asymptotyki wybuchu z generycznych danych początkowych.

4.3 Wybuch generyczny

W celu otrzymania wybuchu generycznego zostały wybrane dane początkowe

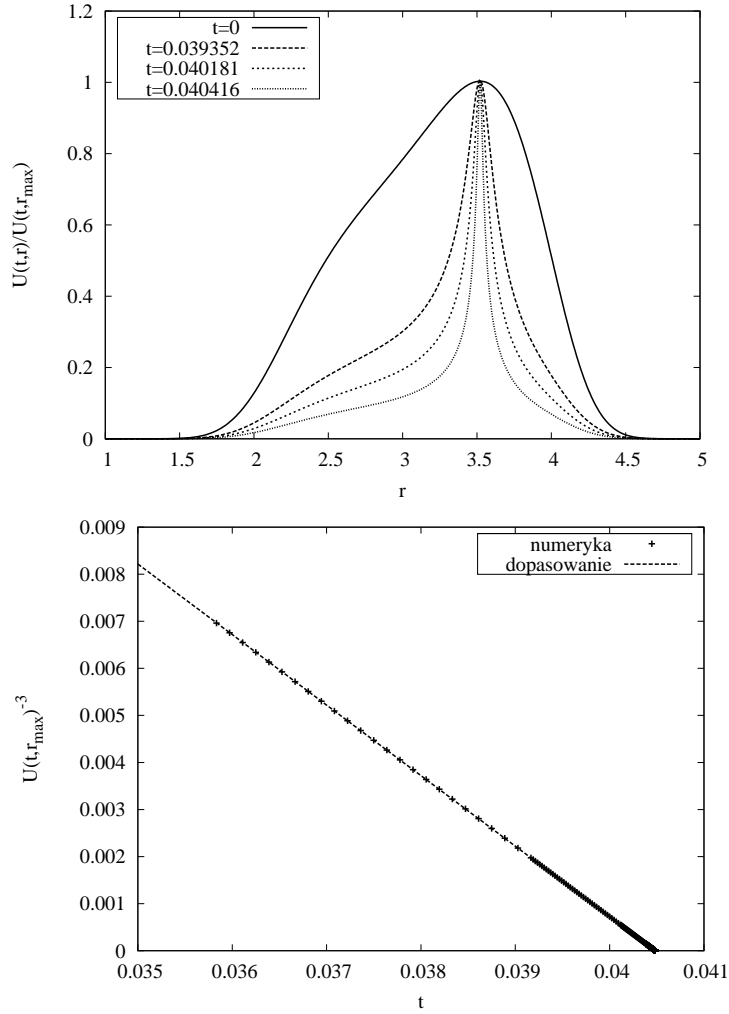
$$U(t=0, r) = Ar^2 e^{-\left(\frac{r-x_0}{s}\right)^4}, \quad U_t(t=0, r) = 0, \quad (4.11)$$

z parametrami $A > 0$, s oraz x_0 . Ustaliwszy parametry $x_0 > 0$ oraz $s > 0$ badano ewolucję danych przy różnych wartościach amplitudy A . Jeżeli była ona duża wybuch następował blisko maksimum rozkładu x_0 . Niech r_{max} oznacza położenie maksimum rozkładu - jest ono zależne od czasu lecz, gdy następuje wybuch, nie zmienia się ono zbyt wiele. Aby zilustrować hipotezę, że (1.12) jest asymptotyką takiego wybuchu - $U(t, r_{max}) \approx U_0(t)$ blisko czasu wybuchu w czasie T - można sprawdzić czy $U(t, r_{max})^{-1/\alpha}$ z danych numerycznych zgadza się z hipotetyczną zależnością liniową $U_0(t)^{-1/\alpha} = (T-t)/b_0^{1/\alpha}$ o nachyleniu równym $-b_0^{-1/\alpha}$. Wynik takiego eksperymentu przedstawiony na rysunku 4.1 za [47] potwierdza wspomnianą hipotezę. Podobna analiza wykonana dla NLKG i przedstawiona na rysunku 4.2 [47] daje taki sam rezultat, co świadczy o tym, że rozwiązanie (1.12) jest asymptotyką wybuchu generycznego. Z rysunków wynika, że wybuch jest tak szybki, że początkowo niesymetryczny rozkład szybko się symetryzuje wokół punktu wybuchu.

Jeżeli amplituda danych początkowych jest zmniejszana, to część rozkładu początkowego ma szansę dotrzeć do początku układu współrzędnych i tam wybuchnąć. Jeżeli znowu dane nie są specjalnie przygotowane, a jedynie wiadomo, że osobliwość powstaje w $r = 0$ wówczas jest to znowu wybuch generyczny i jest opisywany ciągle przez (1.12). W tym przypadku łatwo można sprawdzić, że wzory (4.10) opisują asymptotykę rozkładu przestrzennego. Ilustracja tego została przedstawiona na rysunkach 4.3 dla NLW oraz 4.4 dla NLKG zaczerpniętych z pracy [47]. Rysunki te zostały otrzymane w dwóch krokach. W pierwszym, z dopasowania zależności (4.10) do wartości rozwiązania w $r = 0$ otrzymano wolne parametry T i c_1 , które zostały następnie użyte do nałożenia tej samej zależności (4.10) na profil przestrzenny. Taki zabieg niezaprzeczalnie potwierdza fakt, że wybuch generyczny ma asymptotykę daną przez (1.12), a poprawki opisują zadowalająco profil przestrzenny. Analogiczny wynik dla NLKG pokazuje, że człon masowy blisko wybuchu generycznego jest zaniedbywalny. Sytuacja przedstawiona na powyższych przykładach jest ogólnie prawdziwa dla różnych wartości n oraz p .

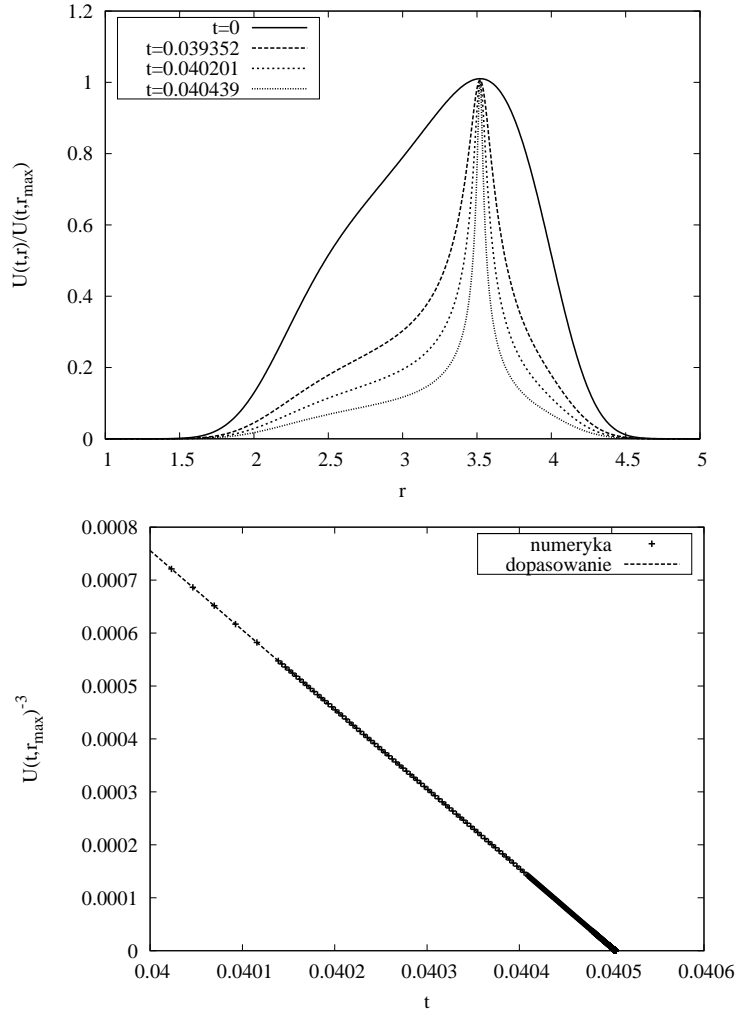
n	p	λ_1	$u_1(0)$
3	6	16.905107	2.852501
	7	11.644201	2.054390
	8	9.800137	1.727500
	9	8.846535	1.547485
4	4	5.660040	3.278278
	$5(k=1)$	4.782517	2.091069
	6	4.434760	1.676522
	7	4.245238	1.471611
	8	4.125325	1.351684
	9	4.042425	1.273997
5	$3(k=1)$	4.372135	5.656854
	4	3.687333	2.488346
	5	3.464635	1.788930
	6	3.351995	1.503346
	7	3.283620	1.353310
	8	3.237605	1.262745
	9	3.204488	1.203048
6	3	3.395242	4.472136
	4	3.112382	2.237600
	$5(k=2)$	3.0	1.670295
	6	2.939061	1.429078
	7	2.900705	1.300050
	8	2.874308	1.221452
	9	2.855021	1.169398
7	$2(k=1)$	4.0	56.0
	$3(k=2)$	3.0	4.0
	4	2.832549	2.111186
	5	2.760686	1.605961
	6	2.720902	1.387342
	7	2.696090	1.269481
	8	2.679553	1.197417
	9	2.668054	1.149616

Tablica 4.2: Wartości własne dla modu niestabilnego wokół profilu u_1 dla nadkrytycznego NLW. Dla kompletności podano również $u_1(\rho = 0)$. Wartości własne zmniejszają się gdy wzrasta n i p - rozwiązania, które trafiają w pobliże u_1 żyją dłużej dla większych n, p .



Rysunek 4.1: Wybuch poza centrum dla NLW $n = 3$, $p = 7$. Górny rysunek przedstawia znormalizowane rozwiązanie $\frac{U(t,r)}{U(t,r_{max})}$, natomiast dolny wynik sprawdzenia obecności rozwiązania U_0 blisko wybuchu. Z dopasowania funkcji $U(t, r_{max})^{-3} \approx a(T - t)$ wynikają wartości $T = 0.0404829$ oraz $a = 1.49855$. Ta ostatnia wartość jest równa w przybliżeniu oczekiwanej wartości $\frac{1}{b_0^3} = \frac{3}{2}$.

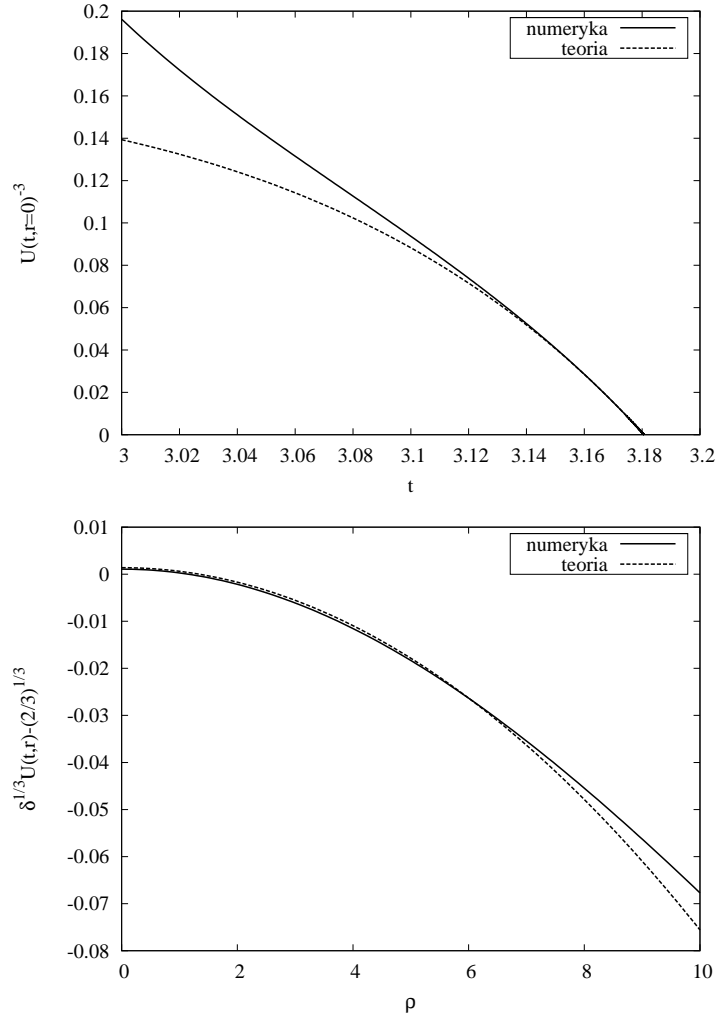
Zmniejszając dalej amplitudę rozkładu początkowego natrafia się na taką wartość, dla której zachodzi dyspersja. Rodzi się zatem pytanie co znajduje się na granicy - temu została poświęcona następna sekcja.



Rysunek 4.2: Wybuch poza centrum dla NLW $n = 3$, $p = 7$. Górny rysunek przedstawia znormalizowane rozwiązanie $\frac{U(t,r)}{U(t,r_{\max})}$, natomiast dolny wynik sprawdzenia obecności rozwiązania U_0 dla NLW blisko wybuchu. Z dopasowania $U(t, r_{\max})^{-3} \approx a(T - t)$ otrzymano $T = 0.0405039$ oraz $a = 1.49994$, co zgadza się $\frac{1}{b_0^3} = \frac{3}{2}$. Ta analiza pokazuje, że przypuszczenie 4.1 jest spełnione.

4.4 Zachowanie na progu

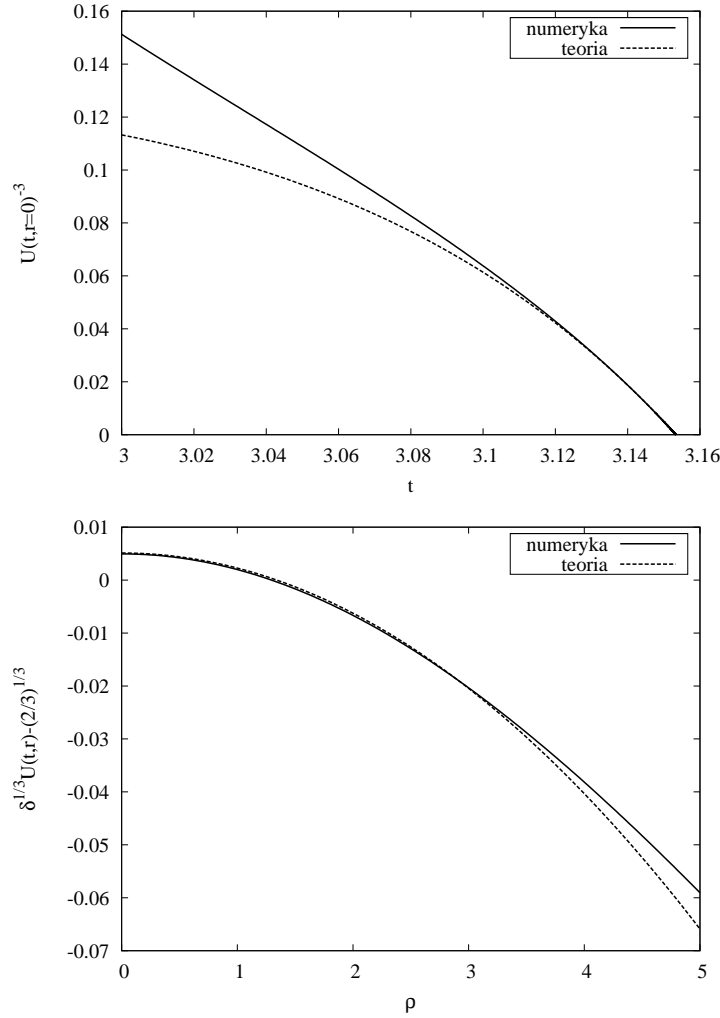
Jak wspomniano we wstępie ewolucja na progu pomiędzy wybuchem a dyspersją silnie zależy od krytyczności równania, dlatego obydwa przypadki krytyczny i nadkrytyczny zostaną omówione oddzielnie w kolejnych podsekcjach.



Rysunek 4.3: Wybuch w centrum dla NLW $n = 3$, $p = 7$. Górny rysunek pokazuje dopasowanie $U(t, r = 0)^{-3} \approx \frac{\delta}{((2/3)^{1/3} + c_1 \delta)^3}$, z którego wynika, że $c_1 = 1.20094$, $T = 3.18068$. Dolny rysunek pokazuje sprawdzenie następującej zależności $\delta^{1/3}U(t, r) - (2/3)^{1/3} \approx c_1 \delta (1 - \frac{5r^2}{9\delta^2})$ z wartościami T , c_1 oraz $\delta = 0.001154$ wziętymi z poprzedniego dopasowania.

4.4.1 Przypadki krytyczne

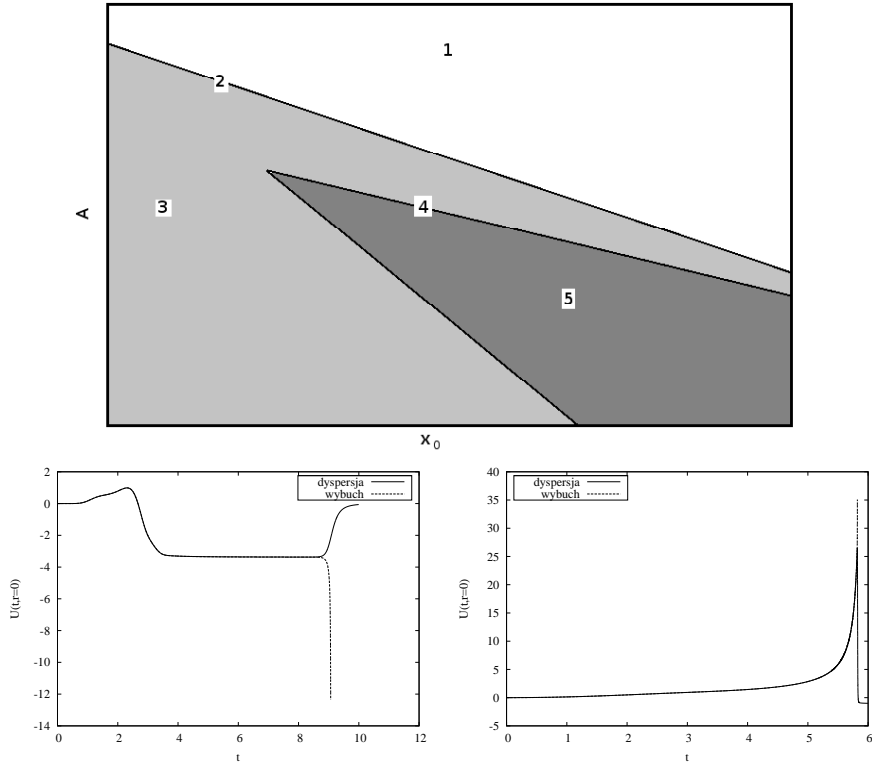
W ewolucji tego przypadku występuje kilka typów zachowań [11]: wybuch generyczny, dyspersja, atraktor statyczny oraz niedawno odkryty wybuch drugiego typu [45],[35]. Aby w łatwy sposób skonstruować dane początkowe postaci (4.11), które trafią w każdy z wymienionych typów potrzebna jest większa swoboda wyboru parametrów rozkładu początkowego. Najłatwiejszym sposobem jest niezależne zmienianie dwóch spośród trzech parametrów rodziny (4.11) da-



Rysunek 4.4: Wybuch w centrum dla NLKG $n = 3$, $p = 7$. Górny rysunek pokazuje dopasowanie $U(t, r = 0)^{-3} \approx \frac{\delta}{((2/3)^{1/3} + c_1 \delta)^3}$, z którego wynika że $c_1 = 1.51724$, $T = 3.15336$. Dolny rysunek pokazuje sprawdzenie następującej zależności $\delta^{1/3}U(t, r) - (2/3)^{1/3} \approx c_1 \delta (1 - \frac{5r^2}{9\delta^2})$ z wartościami T , c_1 oraz $\delta = 0.00337$ wziętymi z poprzedniego dopasowania.

nych początkowych. W poniższej analizie zostały wybrane parametry A , x_0 , natomiast s było ustalone. W taki sposób punktom płaszczyzny (A, x_0) przyporządkowano w jednoznaczny sposób dane początkowe. Następnie te dane ewoluowano metodami opisanymi w kolejnej sekcji, aż do momentu gdy będzie można w jednoznaczny sposób określić, jaki typ zachowania przejawia rozwiązanie - czy jest to wybuch, czy dyspersja. Na podstawie tego powstały obszary na płaszczyźnie danych początkowych, na których można było wyróżnić wspomniane zbiory punktów należących do tej samej klasy. Kolejnym krokiem była analiza

granic pomiędzy tymi zbiorami, które powiązane są z atraktorami pośrednimi - niestabilnymi rozwiązaniami siedzącymi na granicy dyspersja-wybuch. W oczywisty sposób dla innego wyboru danych początkowych inne będą kształty wspomnianych zbiorów, jednak nie zmieni się ich „topologia” - wzajemne zależności. Przykładowym wynikiem takiej analizy jest szkic 4.5 z [47]. Brzeg 4 składa się



Rysunek 4.5: Górny rysunek przedstawia szkic płaszczyzny parametrów dla krytycznego NLW $n = 3$, $p = 5$; $s = 2$. Granica 2 odpowiada wybuchowi typu drugiego, granica 4 rozwiązaniu statycznemu. Obszar 3 zawiera dane początkowe, które ulegają dyspersji, natomiast obszary 1 oraz 5 dane wybuchające w sposób generyczny. Blisko brzegu 4 rozwiązanie początkowo zbliża się do atraktora pośredniego będącego przeskalowanym rozwiązaniem statycznym (1.13), ale ze względu na istnienie modu niestabilnego następuje odejście i w końcu wybuch generyczny bądź dyspersja. Podobnie sytuacja wygląda w pobliżu brzegu 2, gdzie atraktorem pośrednim jest wybuch drugiego typu, który również jest niestabilny i w ostateczności daje również dyspersję lub wybuch generyczny dla niedopasowanych danych początkowych. Analiza brzegu z rozdzielczością 10^{-6} nie ujawniła żadnej egzotycznej struktury (np. fraktalnej). Dolna część przedstawia wartość rozwiązania numerycznego $U(t, r = 0)$ w pobliżu granicy 4 dla lewego rysunku oraz w pobliżu granicy 2 dla prawego.

z danych początkowych (A, x_0) , które po ewolucji zbliżają się do atraktora pośredniego, którym jest w tym przypadku przeskalowane rozwiązanie statyczne

(1.13), a następnie zostają tam dowolnie długo. W realizacji numerycznej tego przypadku należy wziąć pod uwagę fakt, że obliczenia zmiennopozycyjne nigdy nie są dokładne, dlatego ze względu na drobne błędy zaokrążeń, mod niestabilny zawsze zacznie działać (nawet jeżeli dane początkowe to dokładnie rozwiązanie statyczne) i nigdy nie pojawi się trwający nieskończenie długo epizod statyczny. Z takich sytuacji, będących wynikiem „falszowania” rzeczywistości przez wyniki numeryczne, należy sobie zdawać sprawę wszędzie tam gdzie bada się rozwiązanie niestabilne. Istnienie granicy 4 było znane już od dawna [11]. Faktem ujawnionym przez [47] jest to jak w ten obraz wpisuje się wybuch drugiego typu. Okazuje się, że jest on również rozwiązaniem na granicy, które wybucha. Weryfikacja faktu, że granicy tej rzeczywiście odpowiada drugi typ wybuchu polegała na sprawdzeniu, czy dla danych początkowych leżących blisko granicy (wyznaczonych przez bisekcję) dla czasów opisujących asymptotykę pośrednią odpowiednio skalowane rozwiązanie nakłada się na profil statyczny. Przedstawia to rysunek 4.6 z [47]. Rysunek ten nie daje żadnych wskazówek co do kształtu funkcji $\lambda(t)$ skalującej rozwiązanie (1.13) dla wybuchu drugiego typu. Co więcej, analiza tej funkcji okazała się niemożliwa przy wykorzystaniu nawet poczwórnej precyzji obliczeń zdefiniowanej przez standard IEEE 754 ze względu na fakt, iż atraktor pośredni miał krótki czas życia. Sugeruje to, że wyższa precyzja lub użycie innych metod analizy mogłoby dać lepsze rezultaty.

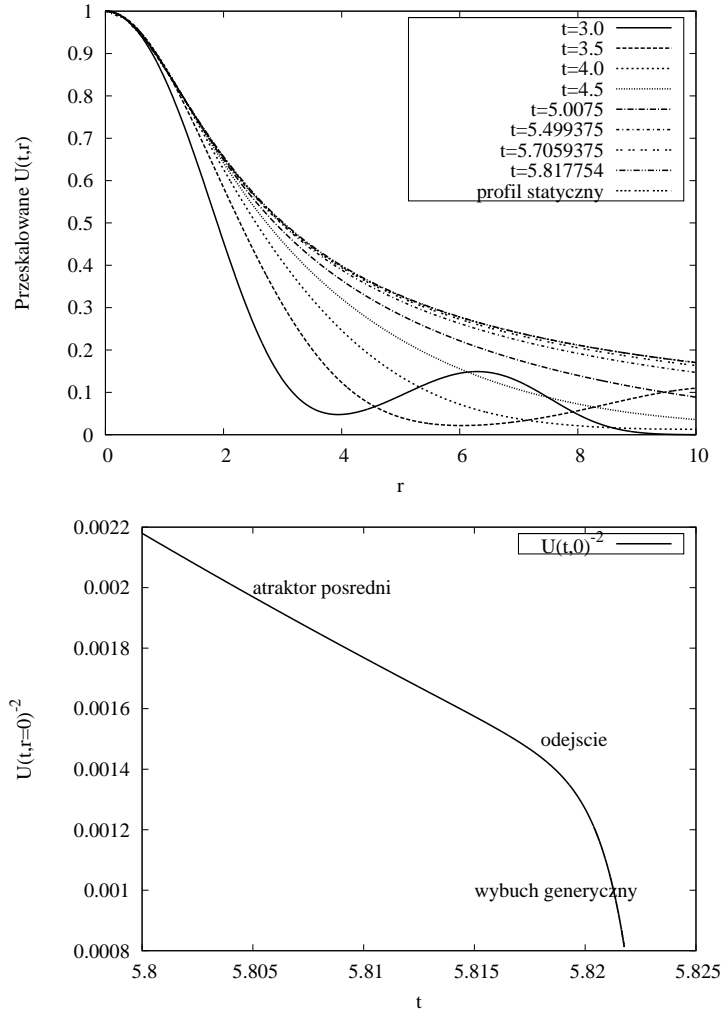
Dla rozwiązania NLKG znaleziono asymptotykę pośrednią, która jest powiązana z wybuchem drugiego typu dla NLW. Pozwala to rozszerzyć tezy zawarte w przypuszczeniu 4.1 na ten przypadek. Analogiczną sytuację jak rysunek 4.6 dla NLW, przedstawia rysunek 4.7 dla NLKG również z [47]. Tutaj również, ze względu na niedopasowanie danych początkowych, po pewnym czasie mod niestabilny powoduje odejście i rozwiązanie podlega dyspersji lub wybucha w generyczny sposób właściwy dla równania falowego (4.10).

Kolejna podsekcja ma za zadanie wyjaśnić co się dzieje na progu pomiędzy wybuchem a dyspersją dla przypadków nadkrytycznych.

4.4.2 Przypadki nadkrytyczne

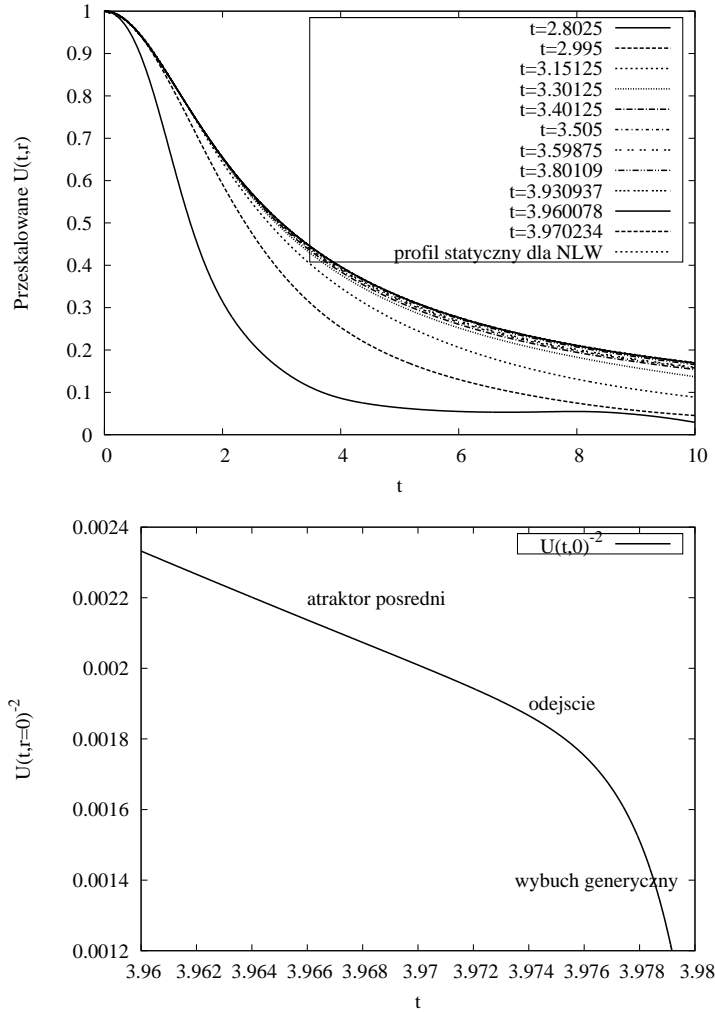
Dla przypadków nadkrytycznych hipotezą uogólniającą [11] jest to, iż atraktor pośredni jest pierwszym rozwiązaniem samopodobnym stowarzyszonym z profilem u_1 . Oznaczając przez ξ_1 mod niestabilny tego rozwiązania asymptotyka na progu przyjmie postać

$$U(t, r) = \frac{u_1(\rho)}{(T-t)^\alpha} + C \frac{\xi_1(\rho)}{(T-t)^{\lambda_1+\alpha}} + \text{mody tłumione}, \quad (4.12)$$



Rysunek 4.6: Górny rysunek przedstawia zbieżność znormalizowanego rozwiązania krytycznego NLW do profilu statycznego w pobliżu wybuchu drugiego typu dla $n = 3$, $p = 5$. Wszystkie profile przestrzenne zostały przeskalowane według $\sqrt{\lambda(t)}U(t, r\lambda(t))$, gdzie $\lambda(t) = 1/U(t, r = 0)^2$. Dolny rysunek przedstawia odejście z atraktora pośredniego - wybuchu drugiego typu. Atraktor ten wybuchu w skończonym czasie T_1 , jednak ze względu na odejście spowodowane niedokładnością dopasowania następuje wybuch generyczny, dla którego czas wybuchu T_2 spełnia $T_2 < T_1$.

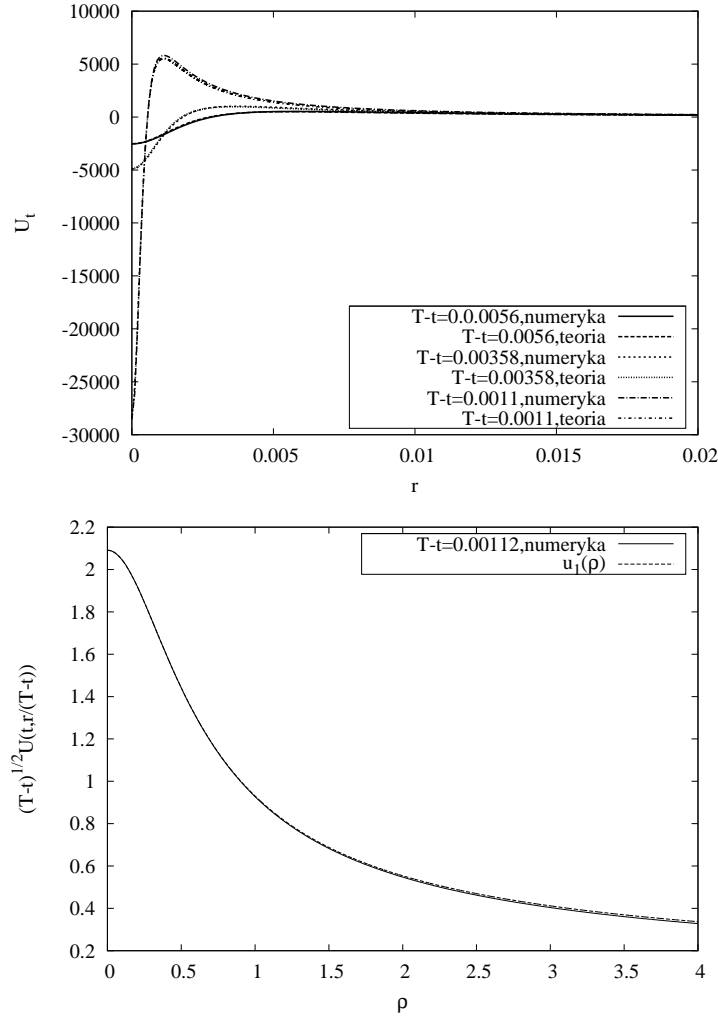
gdzie C jest stałą. Szczególnie ważnym przypadkami są te, dla których k zdefiniowane poprzez (2.7) jest liczbą całkowitą. Wtedy to lokalna postać szeregu definiującego profile samopodobne wokół $\rho = 1$ jest niestandardowa (2.11). Za pracą [47] zostanie omówiony jeden z takich przypadków, mianowicie $n = 4$, $p = 5$, dla którego $k = 1$. Rysunek 4.8 przedstawia dynamikę na progu porów-



Rysunek 4.7: Górny rysunek przedstawia zbieżność przeskalowanego rozwiązania NLKG dla $n = 3$, $p = 5$ w obszarze asymptotyki pośredniej do rozwiązania statycznego (1.13). Każdy profil został przeskalowany zgodnie ze wzorem $\sqrt{\lambda(t)}U(t, r\lambda(t))$, gdzie $\lambda(t) = 1/U(t, r = 0)^2$. Dolny rysunek przedstawia $U(t, r = 0)^{-2}$.

naną z przewidywaniami wynikającymi ze wzoru (4.12). Nie ma żadnej wątpliwości, że u_1 jest atraktorem pośrednim, a co więcej, odpowiednio przeskalowany profil przestrzenny rozwiązania zgadza się profilem samopodobnym w $\rho = 1$ oraz dalej. Ten wynik świadczy o tym, że parametr k ważny dla profili samopodobnych nie wpływa widocznie na kształt atraktora pośredniego dla przypadków nadkrytycznych.

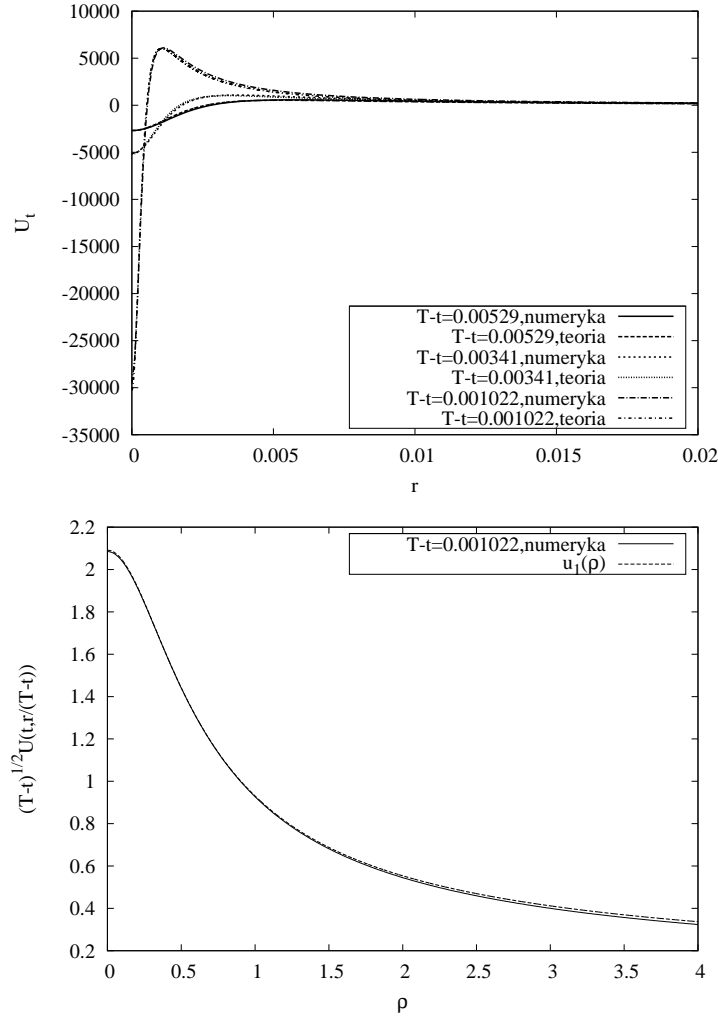
Wykonanie takiej samej analizy dla równania Kleina-Gordona $n = 4$, $p = 5$ daje takie same rezultaty, jak to zostało przedstawione na rysunku 4.9. Pierwszy



Rysunek 4.8: Górny rysunek przedstawia zbieżność rozwiązania nadkrytycznego NLW dla $n = 4$, $p = 5$ do przewidywania mówiącego o tym, iż profil samopodobny u_1 jest atraktorem pośrednim. Według tej hipotezy w obszarze pośrednim powinna zachodzić zależność $U_t \approx (T-t)^{-3/2}(u_1/2 + \rho u_1')$. Dolny rysunek przedstawia przeskalowane rozwiązanie NLW w obszarze progowym nałożone na pierwszy profil samopodobny - zachodzi $(T-t)^{1/2}U(t, r/(T-t)) \approx u_1(\rho)$.

profil samopodobny NLW jest ewidentnie widoczny w rozwiązaniu NLKG mimo, iż dla NLKG nie ma rozwiązań samopodobnych.

Kolejna sekcja opisuje metody numeryczne użyte w powyższej analizie.



Rysunek 4.9: Górny rysunek przedstawia przeskalowane rozwiązanie NLKG w obszarze progowym przy uwzględnieniu, że profil u_1 dla NLW jest atraktorem pośrednim. Podobnie jak na rysunku 4.8 jest zgodność z przewidywaniem $U_t \approx (T-t)^{-3/2}(u_1/2 + \rho u_1')$ jak dla NLW. Dolny profil przedstawia przeskalowane rozwiązanie NLKG na progu, nałożone na u_1 , która świadczy o tym, że $(T-t)^{1/2}U(t, r/(T-t)) \approx u_1(\rho)$.

4.5 Metody numeryczne

Przy rozwiązywaniu ewolucyjnych równań różniczkowych cząstkowych największą skutecznością cieszy się metoda linii [61], [62], [68]. W dużym skrócie polega ona na dyskretyzacji przestrzennej danego równania. W ten sposób otrzymuje się układ równań różniczkowych zwyczajnych na siatce przestrzennej. Ten układ można następnie całkować względem czasu (wzdłuż linii) metodami opisanymi

w sekcji 2.4. W konkretnej realizacji użyto klasycznej metody Rungego-Kutty [19],[59]. Równania opisane w tym i następnym rozdziale charakteryzują się występowaniem osobliwości, które powstają bardzo szybko. Przez to standardowe metody należy zaopatrzyć w dodatkowe elementy, które pozwalają przewidzieć takie sytuacje. Aby podczas całkowania nie „przeskoczyć” wybuchu, a jednocześnie podejść do niego tak blisko jak to tylko możliwe zastosowano adaptacyjny krok czasowy w całkowaniu wzdłuż linii. Długość tego kroku była sterowana wartością pochodnej czasowej rozwiązania. Gdy rozwiązanie bardzo szybko się zmieniało - pochodna czasowa była duża, krok był zmniejszany, aby nie stracić istotnych informacji. Podobnie sytuacja wyglądała w drugą stronę - jeżeli pochodna czasowa była mała, np. podczas dyspersji, następowało zwiększenie kroku czasowego. Istotnym ograniczeniem na zmianę kroku czasowego był warunek Couranta-Fredrichsa-Lewy’ego [59], który określa kiedy dany schemat numeryczny jest stabilny. Warunek ten był również w omawianej metodzie zaimplementowany. Kolejnym wymaganiem od metody było uwzględnienie faktu, że wybuch zachodzi na bardzo małym obszarze przestrzennym, aby więc nie stracić rozdzielczości należało zastosować kilka siatek przestrzennych o coraz to mniejszych odległościach oczek (dokładniejszych), zagnieżdżonych i przez to pokrywających coraz to mniejszy obszar. Symulacje były wykonywane w taki sposób, aby interesująca część ewolucji przebiegała w pobliżu początku układu współrzędnych. Wobec czego siatki miały wspólny punkt $r = 0$ na jednym końcu. Mniejsze siatki miały dodatkowe strefy zwane strefami duchami (ang. ghost zones), które umożliwiły właściwą implementację warunków brzegowych na drugim końcu. Technika ta jest wykorzystywana często w symulacjach używających wielu siatek [68]. Siatki od największej do najmniejszej były powiązane w podwójnie łączoną listę [21], co umożliwiało użycie rekurencyjnych algorytmów operacji na listach i poprawiało zwartość kodu. Zapewnienie spójności danych na obu siatkach odbywało się przed krokiem czasowym poprzez interpolację danych z siatki większej do strefy duchów siatki mniejszej, a po wykonaniu kroku czasowego poprzez wstrzykiwanie danych z siatki mniejszej (dokładniejszej) do siatki większej. Ze względu na użycie czteropoziomowej metody Rungego-Kutty operacje interpolacji, krok czasowy i wstrzykiwanie musiały odbywać się w skomplikowanej kolejności, która zapewniała spójność metody. Do realizacji algorytmu został użyty język FORTRAN 90/95, gdyż jego wsparcie dla wskaźników, paradygmatu modułowego i obliczeń numerycznych był wystarczający. Iteracje po dużego rozmiaru tablicach zostały zrównoleglone przy użyciu OpenMP, co pozwoliło zyskać na czasie obliczeń.

Rozdział 5

Podkrytyczne równanie KG

„Badanie podstawowe to jest, co robię, kiedy nie wiem, co robię.”

Werner Von Braun (1912-1977)

5.1 Wprowadzenie

Podobnie jak w poprzednim rozdziale, równanie (1.15) dla $n = p = 3$ postaci

$$U_{tt} - U_{rr} - \frac{2}{r}U_r + U - U^3 = 0, \quad (5.1)$$

posiada własność, iż z regularnych danych początkowych może powstać osobliwość w skończonym czasie ewolucji. Na granicy pomiędzy wybuchem a dyspersją również pojawia się atraktor pośredni. Niedawno został dokonany znaczny postęp w opisie dynamiki wokół tego atraktora [53], [9]. Metody i informacje z tych prac zostały użyte do analizy tego przypadku, aby opisać dynamikę na progu (5.1). Dobrze znanym faktem dla (5.1) jest to, że atraktorem pośrednim jest statyczne rozwiązanie NLKG, czyli rozwiązanie równania

$$S_{rr} + \frac{2}{r}S_r - S + S^3 = 0, \quad (5.2)$$

które znika w nieskończoności. Jednakże rozwiązanie takie jest znane w postaci analitycznej tylko w wymiarze przestrzennym równym jeden - gdy człon S_r w (5.2) jest nieobecny - dlatego w poniższej analizie będą szeroko stosowane metody numeryczne.

Na początku zostaną przeanalizowane rozwiązania (5.2). Następnie wykonana będzie analiza modów zlinearyzowanego NLKG wokół pewnego specjalnego rozwiązania równania (5.2). To specjalne rozwiązanie okaże się atraktorem pośrednim dla (5.1).

5.2 Rozwiązanie statyczne

W tej sekcji zostanie wykonana analiza rozwiązań ograniczonych dla równania (5.2). Równanie to ma ustaloną osobliwość w $r = 0$, jednakże wokół tego punktu istnieje rozwiązanie analityczne, co może być zauważone jeżeli (5.2) zostanie przepisane w postaci układu

$$\begin{cases} S_r = V \\ rV_r = -(n-1)V + rS - rS^p \end{cases} \quad (5.3)$$

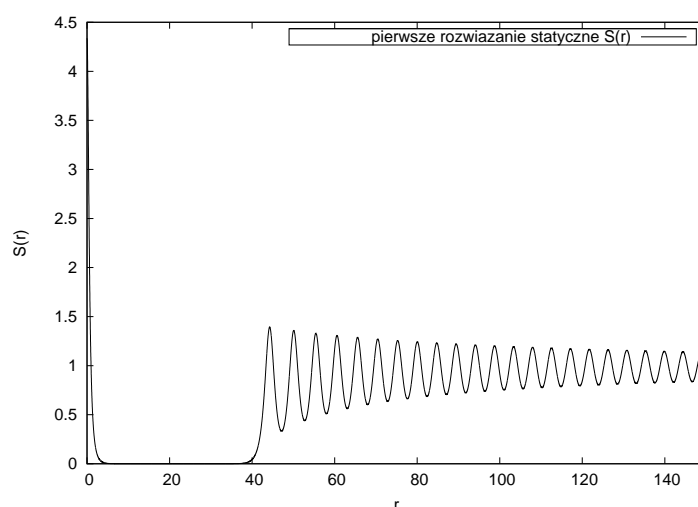
i zastosuje się stwierdzenie 1 z [15]. To pokazuje, że istnieje jednoparametrowa rodzina rozwiązań lokalnych postaci $S = c + O(r)$, gdzie c jest parametrem. Aby otrzymać te rozwiązania należy podstawić formalny szereg potęgowy $S(r) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k$ do równania, a następnie wykorzystać wzór Cauchy'ego (2.1); daje to jednoznaczną rekurencję na współczynniki szeregu postaci

$$a_0 = c, \quad a_1 = 0, \quad a_{k+2} = \frac{a_k - c_k}{(k+2)(k+n)}, \quad (5.4)$$

gdzie c jest wspomnianą daną początkową w $r = 0$.

Równanie (5.2) posiada również trzy rozwiązania stałe $S = \pm 1$ i $S = 0$. Analiza numeryczna wskazuje, że dwa z tych rozwiązań - $S = \pm 1$ - są asymptotycznie stabilne, podczas, gdy trzecie jest niestabilne dla $r \rightarrow \infty$. Generyczne dane początkowe c w $r = 0$ prowadzą do rozwiązania, które oscyluje wokół jednego ze stabilnych rozwiązań stałych. Zatem wykorzystując ciągłą zależność rozwiązań od danych początkowych (nieznacznie przesuniętych poza $r = 0$ poprzez użycie szeregu Taylora ze współczynnikami (5.4)) wypływa wniosek, iż istnieją wartości c , dla których rozwiązanie zbliża się do rozwiązania statycznego $S = 0$. Do znalezienia tych wartości można z powodzeniem zastosować metodę bisekcji; zmieniając c otrzymuje się rozwiązania z basenów przyciągania $S_{\pm 1}$. Szukane wartości c , dla których rozwiązanie dąży do $S = 0$ dla $r \rightarrow \infty$, powinny dawać rozwiązania na brzegach tych basenów. Bisekcja daje następujące wartości dla danych początkowych $c_1 = 4.337387679976994$, $c_2 = 14.1035844048690162$, itd. Do wartości tych należy również dodać ich ujemne odpowiedniki ze względu na symetrię zmiany znaku równania (5.2). Rozwiązanie dla $S(r=0) = c_1$ zostało przedstawione na rysunku 5.1 i, jak to będzie pokazane poniżej, jest ono atraktorem pośrednim dla NLKG. Szybkość zbiegania takiego rozwiązania do $S = 0$ jest eksponencjalna, co można łatwo zauważyć ze zlinearyzowanej postaci (5.2) wokół $S = 0$ dla dużych r (zobacz również [53] i referencje tam zawarte). Fakt ten został użyty w kolejnej sekcji.

Kolejnym krokiem jest analiza tłumionych oscylacji rozwiązania dla $r \rightarrow \infty$ wokół rozwiązań stabilnych $S = \pm 1$. Dla wygody została wprowadzona zmienna



Rysunek 5.1: Rozwiązanie statyczne dla c_1 . Dokładność wyznaczenia c_1 jest duża (10^{-31}), jednak skończona. Dlatego rozwiązanie dla dużych wartości r odchodzi od rozwiązania $S = 0$ i zaczyna oscylować wokół jednego ze stałych rozwiązań stabilnych, w tym przypadku wokół rozwiązania $S = 1$.

$x = r^2$ do (5.2), co daje

$$4xS'' + 6S' - S + S^3 = 0, \quad (5.5)$$

gdzie $' = \frac{d}{dx}$. Następną zamianą zmiennej $S = (\pm 1 + w)$ połączoną z linearyzacją wokół $w = 0$ daje

$$4xw'' + 6w' + 2w = 0. \quad (5.6)$$

Stąd wynika, iż asymptotyka oscylacji jest postaci

$$S_{asympt.}(r) = \pm 1 + A \frac{\sin(\sqrt{2r} + \delta)}{r}. \quad (5.7)$$

Dopasowanie asymptotyki do danych numerycznych zostało przedstawione na rysunku 5.2.

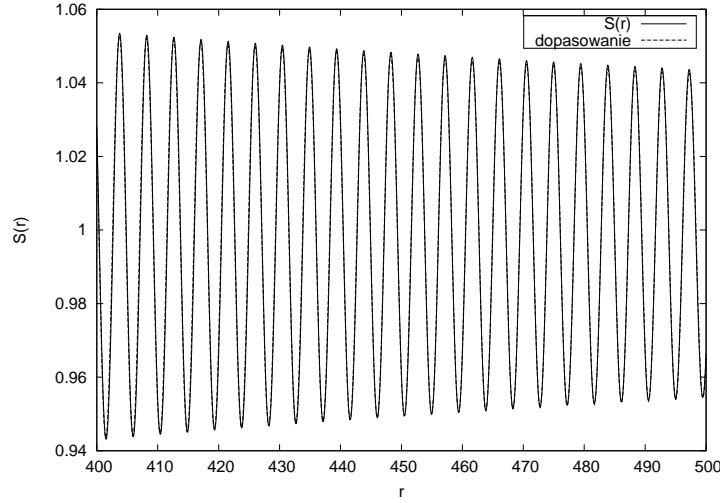
Stabilność rozwiązań stałych dla (5.5) może być łatwo sprawdzona analitycznie. Do tego celu zostanie użyta funkcja postaci

$$H(x) = 4x \frac{S'^2}{2} + \frac{S^4}{4} - \frac{S^2}{2}, \quad (5.8)$$

która spełnia

$$H(x) \geq -\frac{1}{4}, \quad H'(x) = -4(S')^2 \leq 0, \quad (5.9)$$

gdzie pochodna drugiej części została wzięta na rozwiązaniach (5.5). Stąd wy-



Rysunek 5.2: Asymptotyka dla $r \rightarrow \infty$. Dopasowanie zależności $f(r) = a + b \frac{\sin(cr+d)}{r}$ daje $a = 0.998319$, $b = 22.0002$, $c = 1.41031$, $d = 4.0016$. Jest to w zgodzie z (5.7).

nika, że (5.8) jest funkcją Lapunowa dla punktów ($S = \pm 1, S' = 0$) w przestrzeni fazowej - nieznikających rozwiązań stałych. Jednakże dla rozwiązania $S = 0$ funkcja $H(x)$ nie jest funkcją Lapunowa. Wynika to z podstawienia $S' = 0$ do (5.8), co daje „energię potencjalną”: $V(S) = \frac{S^4}{4} - \frac{S^2}{2}$, która ma minima w $S = \pm 1$, a maksimum w $S = 0$. Funkcja V również pokazuje, że w przestrzeni fazowej (S, S') dla (5.5) rozwiązanie trywialne przyciąga wzdłuż kierunku $S = 0$, jednakże odpycha wzdłuż kierunku $S' = 0$.

Następna część jest poświęcona analizie zaburzeń NLKG wokół rozwiązania statycznego z $S(r = 0) = c_1$.

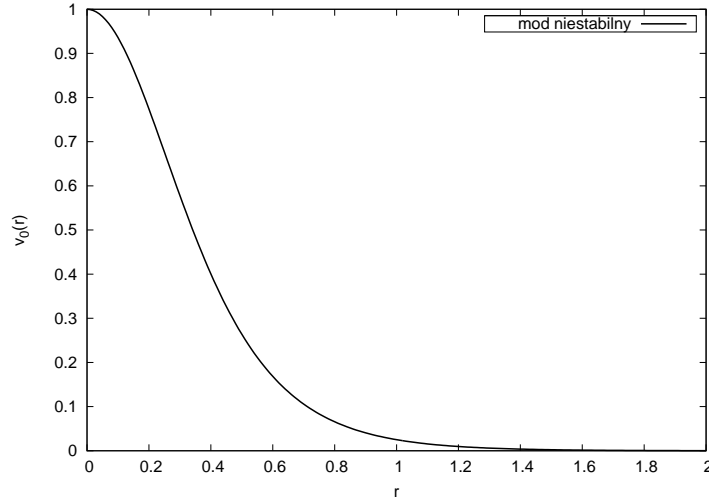
5.3 Spektrum zlinearyzowanego operatora

W kolejnym kroku, podobnie jak w [9], zaburzenia wokół rozwiązania statycznego $S(r)$ zostaną rozłożone na funkcje własne zlinearyzowanego równania. Podstawienie $U(t, r) = S(r) + f(t, r)$ do (5.1) oraz założenie, iż zaburzenie f jest małe daje

$$f_{tt} - f_{rr} - \frac{2}{r}f_r + f - 3S^2f = 0. \quad (5.10)$$

Jeżeli teraz zostanie podstawione $f(t, r) = e^{st}v(r)$, wówczas rezultatem będzie problem własny

$$v_{rr} + \frac{n-1}{r}v_r + pS^{p-1}v = \lambda^2v, \quad (5.11)$$



Rysunek 5.3: Funkcja własna odpowiadająca modowi niestabilnemu.

gdzie $\lambda^2 = 1 + s^2$. Równanie to często występuje w wielu kwantowomechanicznych zagadnieniach (dla przykładu zobacz [24] oraz referencje tam zawarte). Jest to problem na półprostej dodatniej $r \geq 0$ z regularnym punktem osobliwym w $r = 0$. Zadanie polega na znalezieniu rozwiązań normalizowanych numerowanych przez λ .

Pierwszym krokiem jest udowodnienie istnienia rozwiązań analitycznych wokół $r = 0$. Można to osiągnąć poprzez zastosowanie metody Frobeniusa - $r = 0$ jest regularnym punktem osobliwym, gdyż $S(r)$ jest analityczne w $r = 0$. W drugim kroku należy znaleźć postać tych rozwiązań przez podstawienie szeregu formalnego, który jest zbieżny, jak to wynika z poprzedniego kroku. Podstawienie formalnego szeregu potęgowego $v(r) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k r^k$ do równania (5.11) skutkuje jednoznaczną rekurencją na współczynniki b_k , która daje lokalne rozwiązanie postaci

$$v(r) = 1 + \frac{\lambda^2 - p a_0^{p-1}}{2n} r^2 + O(r^4), \quad (5.12)$$

gdzie a_0 jest zadane przez (5.4). Rozwiązanie lokalne (5.12) pozwala przesunąć dane początkowe z punktu osobliwego równania $r = 0$, a przez to rozpocząć procedurę całkowania numerycznego w metodzie bisekcji dla (5.11). Bisekcja w λ daje funkcję własną $v_0(r)$ z wartością własną $\lambda_0 = 4.036394796722005$ ($s_0 = 3.910560440014254$), która odpowiada modowi niestabilnemu, rosnącemu w czasie jak $e^{s_0 t}$. Mod ten został przedstawiony na rysunku 5.3.

W dalszej analizie ważne będzie również rozwiązanie odpowiadające $\lambda = 0$ - należy zweryfikować czy to rozwiązanie jest rezonansem. Odpowiedź jest negatywna, jak zostało to ściśle udowodnione w pracy [23], jednakże intuicyjne

wyjaśnienie tego faktu zostało przedstawione poniżej. Z pojęciem rezonansu fizyk spotyka się często, czy to przy opisie oscylatora harmonicznego, czy w teorii rozpraszania, jednak wszystkie te przypadki unifikuje model opisujący spektrum operatorów (różniczkowych) (zobacz dodatek w [2] lub książkę [52]) - wprowadzenie do matematycznej teorii przedstawia zwięzły artykuł [69], natomiast podejście z punktu widzenia fizyki kwantowej [33]. Poniższy opis stawia na intuicję, nie na matematyczną precyzję.

Podstawienie $w(r) = rv(r)$ w (5.11) daje

$$w_{rr} + 3S(r)^2w = \lambda^2w, \quad (5.13)$$

z węzłem w $r = 0$, czyli $w(r) \approx ar + O(r^2)$ dla $a \neq 0$. Pierwszym kokiem jest obliczenie asymptotyki wokół $r = 0$ przy wykorzystaniu $S(r) = c_0 + O(r^2)$. Rozwiązanie asymptotyczne ma postać

$$w_{r=0}(r; \lambda = 0) = A_0 \sin(\sqrt{3c_0^2}r + \delta). \quad (5.14)$$

Z istnienia węzła wynika, że $\delta = 0$, co daje ostatecznie

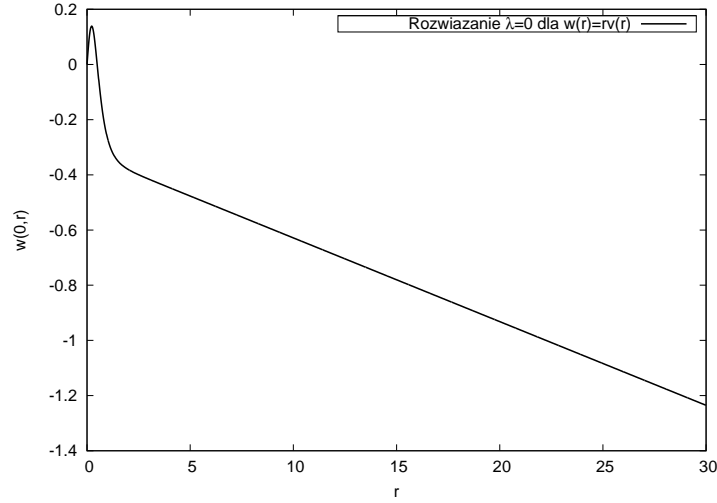
$$w_{r=0}(r; \lambda = 0) = A_0 \sin(\sqrt{3c_0^2}r). \quad (5.15)$$

Ze względu na eksponencjalny spadek S , drugi człon lewej strony ¹ (5.13) może zostać pominięty dla $r \rightarrow \infty$, co daje rozwiązanie

$$w_{r=\infty}(r; \lambda = 0) = A_1 + B_1r, \quad (5.16)$$

które ze względu na transformację $v = rw$ jest nienormowalne gdy $B_1 \neq 0$. Rozwiązanie $\lambda = 0$ zostało przedstawione na rysunku 5.4. Argumentacja, która prowadzi do wniosku, że rezonans nie istnieje jest następująca [4]. Wokół $r = 0$ oraz nieskończoności istnieje dwuwymiarowa przestrzeń liniowa rozwiązań liniowego równania różniczkowego drugiego rzędu (5.11). Rezonans zachodzi gdy jedno rozwiązanie z , dla ustalenia uwagi, $r = 0$ po przedłużeniu do nieskończoności przechodzi w tylko jedno rozwiązanie z drugiego końca. Operacja, która łączy te dwie asymptotyki jest wówczas osobliwa. Stosując to do powyższej sytuacji w $r = 0$ dwuwymiarowa przestrzeń rozwiązań jest rozpięta przez funkcje $\sin()$ i $\cos()$, jednakże węzeł w $r = 0$ wybiera jedynie rozwiązanie z funkcją sinus (5.15). Ta asymptotyka dla dużego r staje się wektorem danym przez (5.16), z przestrzeni rozpiętej przez jednomiany 1 oraz r . Z liniowej części rysunku 5.4 łatwo można zauważyć, nawet bez dopasowania zależności liniowej, że współ-

¹Rozumowanie, które daje podobny wynik przy użyciu funkcji Bessela polega na zastąpieniu S poprzez eksponentę w rozważanej granicy.

Rysunek 5.4: Rozwiązanie $\lambda = 0$ przy $w(r) = rv(r)$.

czynniki A_1 oraz B_1 nie znikają; zatem $\lambda = 0$ nie jest rezonansem. Co więcej, rozwiązanie $\lambda = 0$ jako $v = w/r$ jest nienormowalne.

Powyższe rezultaty zostały wykorzystane w poniższej sekcji w celu otrzymania przewidywań na asymptotyke rozwiązań w pobliżu atraktora pośredniego.

5.4 Asymptotyka na progu - teoria

Analiza przedstawiona w tej części jest analogiczna do tej wykonanej w [9] w jednym wymiarze przestrzennym. Procedura ta jest używana również do analizy modów kwazi-normalnych. Podstawienie $h(t, r) = rf(t, r)$ do (5.10) daje

$$h_{tt} - h_{rr} + h - pS^{p-1}h = 0, \quad (5.17)$$

z węzłem $h(t, r) = a(t)r + O(r^2)$, ($a \neq 0$) dla $r \approx 0$. Równanie (5.17) może zostać rozwiązane przy użyciu transformaty Laplace'a [1]

$$H(s, r) = \int_0^\infty e^{-st} h(t, r). \quad (5.18)$$

Przetransformowane równanie przyjmuje postać

$$s^2 H - H_{rr} + H - 3S^2 H = sh(t=0, r) + \partial_t h(t=0, r) =: j(s, r), \quad (5.19)$$

gdzie prawa strona definiuje człon źródłowy $j(s, r)$. Jeżeli teraz zostanie skonstruowana funkcja Greena $g(s, r, r')$ dla

$$H_{rr} + 3S^2H = \lambda^2H, \quad (5.20)$$

gdzie $\lambda^2 = 1 + s^2$, wówczas rozwiązanie przyjmie postać

$$H(s, r) = \int g(s, r, r')j(s, r')dr', \quad (5.21)$$

Należy zauważyć, że (5.20) zgadza się z (5.13), przez co można wykorzystać rezultaty poprzedniej sekcji do konstrukcji funkcji Greena. Funkcja $H(s, r)$ jest analityczna dla $Re(s) \geq \sqrt{1 + \lambda_{max}^2}$ gdzie λ_{max} jest wartością własną (5.20), dla której moduł jest największy. Użycie odwrotnej transformaty Laplace'a daje

$$h(t, r) = \int \partial_t g(t, r, r')h(t=0, r')dr' + \int g(t, r, r')\partial_t h(t=0, r')dr'. \quad (5.22)$$

Funkcję Greena można skonstruować podobnie jak w [9]. Dla $\lambda = 0$ nie ma rezonansu, zatem funkcja Greena wokół $\lambda = 0$ ma rozwinięcie postaci

$$g(\lambda, r, r') = c_1(r, r')\lambda + O(\lambda^2). \quad (5.23)$$

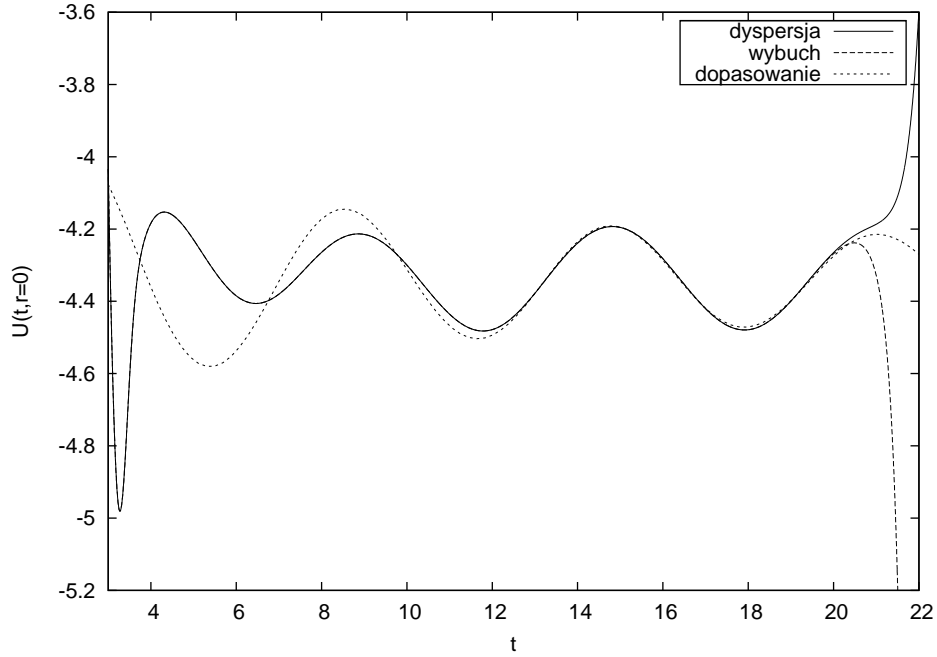
Z $\lambda^2 = 1 + s^2$ wynika, że funkcja Greena $g(s, r, r')$ ma punkty rozgałęzienia w $s = \pm i$, jak również biegun związany z wartością własną. Całkowanie (5.21) wokół podobnego konturu jak w [9] prowadzi do rozwiązania w pobliżu atraktora pośredniego $S(r)$ następującej postaci

$$U(t, r) \approx S(r) + A_0 e^{s_0 t} v_0(r) + C \frac{\sin(t + \delta)}{t^{3/2}} v(\lambda = 0, r). \quad (5.24)$$

Ważnym faktem jest to, że całkowanie wzdłuż cięć rozpoczynających się w $s = \pm i$ daje wkład postaci $\frac{\sin(t + \delta)}{t^{3/2}}$; całka może być obliczona metodą opisaną w [1], rozdział 6.2. Co więcej, gdyby $\lambda = 0$ byłoby rezonansem, wówczas wkład do całki od cięć dałby czynnik $\frac{\sin(t + \delta)}{\sqrt{t}}$, zamiast $\frac{\sin(t + \delta)}{t^{3/2}}$. Jak to będzie wyjaśnione w następnej sekcji dane numeryczne wskazują na to pierwsze zachowanie pomimo, że jest ono teoretycznie wykluczone.

5.5 Asymptotyka na progu - numeryka

W celu sprawdzenia słuszności (5.24) została wykonana ewolucja (5.1) używając jednoparametrowej (A) rodziny danych początkowych (4.11). Pozostałe parametry, x_0 i s były ustalone. Wykonując bisekcję w A ze względu na warunek dyspersja-wybuch, dobrano dane początkowe w taki sposób, aby ewoluowały w



Rysunek 5.5: Dopasowanie zależności $f(t) = a + b \frac{\sin(ct+d)}{\sqrt{t}}$ z $a = -4.338$, $b = -0.566051$, $c = 1.00934$ i $d = 8.60982$.

poblizie atraktora pośredniego. Odległość pomiędzy idealnie dopasowanymi danymi A^* , które zostają na atraktorze pośrednim dla $t \rightarrow \infty$ oraz najlepszym wynikiem bisekcji \bar{A} to $|\bar{A} - A^*| \sim 10^{-31}$ - obliczenia o poczwórnej precyzji.

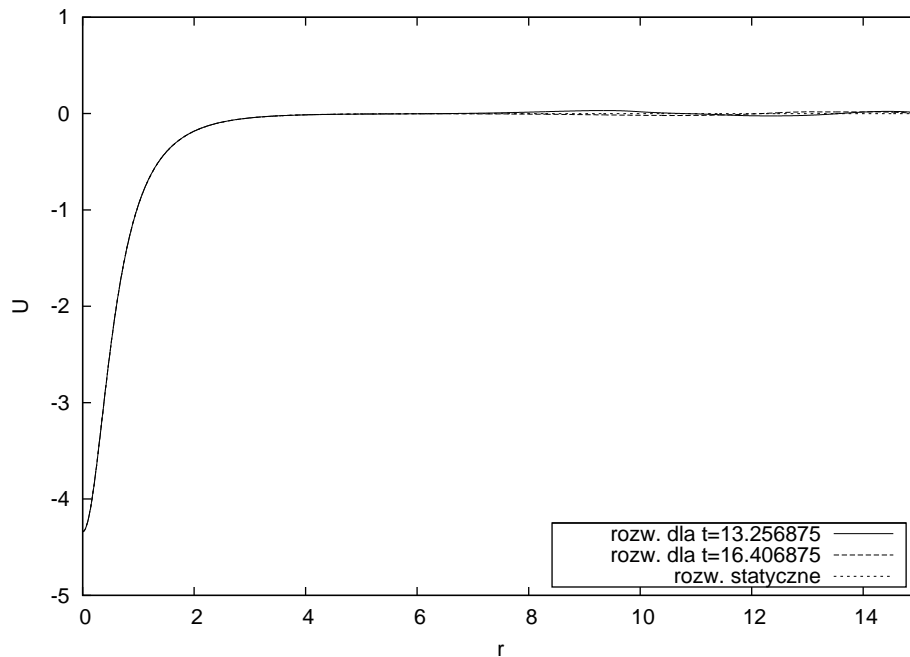
Dane w $r = 0$ powinny spełniać

$$U(r = 0, t) = a + b \frac{\sin(ct + d)}{t^{3/2}},$$

jednakże, najlepsze dopasowanie zachodzi dla

$$U(r = 0, t) = a + b \frac{\sin(ct + d)}{\sqrt{t}},$$

z $c = 1$. Rysunek 5.5 przedstawia to dopasowanie. Parametry $a \approx S(r = 0)$ oraz $c \approx 1$ zgadzają się z teoretycznym opisem z poprzedniej sekcji, jednak tłumienie postaci $\sim 1/\sqrt{t}$ występuje jedynie w przypadku występowania rezonansu, a to nie zachodzi tutaj. Przestrzenny profil również dobrze pasuje do rozwiązania statycznego. Na rysunku 5.6 zostały zaprezentowane dwa takie profile. Odległość czasowa pomiędzy nimi została tak dobrana, aby była równa połowie okresu (π) oscylacji rozwiązania wokół rozwiązania statycznego. Sprawdzenie przewidywania, że rozwiązanie dla $\lambda = 0$ również pojawia się podczas ewolucji

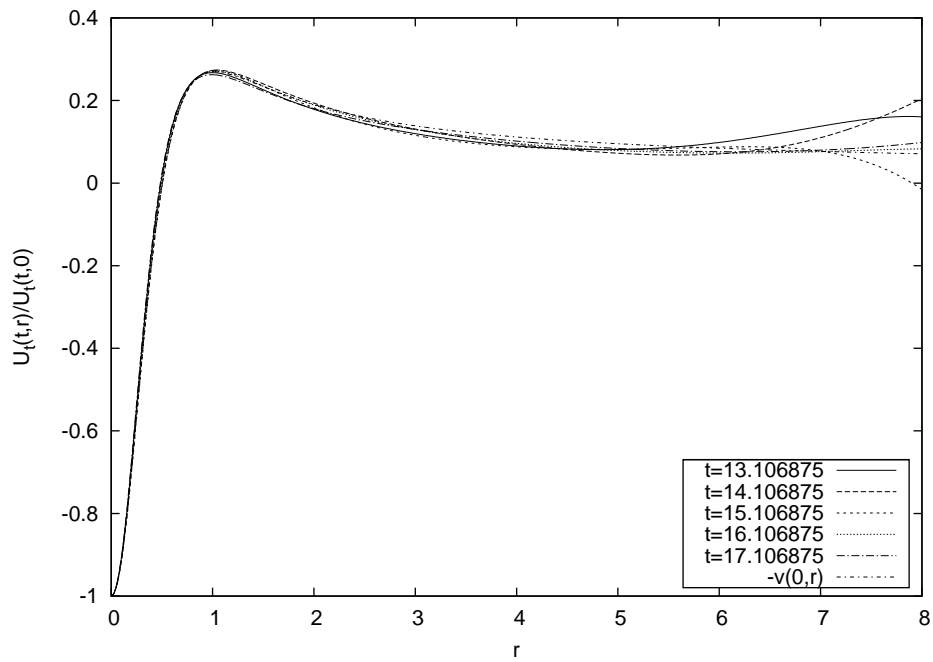


Rysunek 5.6: Dwa przestrzenne profile odległe od siebie w czasie o pół okresu oscylacji wokół rozwiązania statycznego oraz rozwiązanie statyczne.

na progu zostało zaprezentowane na rysunku 5.7.

Eksperymenty numeryczne zostały przeprowadzone przy użyciu metody linii przy różnych sposobach dyskretyzacji i rozdzielczościach. Wszystkie symulacje prowadziły do tego samego rezultatu zaprezentowanego powyżej.

Podsumowując, sekcja ta prezentuje dwa podejścia do problemu wytłumaczenia asymptotyki na progu dla (5.1). Wyniki analityczne wskazują asymptotykę dla przypadku, w którym rozwiązanie $\lambda = 0$ nie jest rezonansem, natomiast wyniki numeryczne sugerują, iż asymptotyka na progu jest taka jakby rozwiązanie $\lambda = 0$ było rezonansem. Ta rozbieżność wymaga dalszej analizy.

Rysunek 5.7: Rozwiązanie dla $\lambda = 0$ w ewolucji na progu.

Rozdział 6

Podsumowanie

„Nic nie jest skończone, dopóki się nie skończy.”

Lawrence Peter „Yogi” Berra (1973)

W rozprawie zastały zaprezentowane następujące zagadnienia:

1. dowód istnienia analitycznych profili samopodobnych dla semiliniowych równań falowych postaci (1.2) oraz ich charakterystyka;
2. opis metod analitycznych i numerycznych analizy tych rozwiązań;
3. wyznaczenie osobliwości i ich wpływ na promień zbieżności szeregów opisujących rozwiązania lokalnie wokół $\rho = 0$ i $\rho = 1$ równania (1.9);
4. omówienie znaczenia rozwiązań samopodobnych jako atraktorów pośrednich i asymptotyk wybuchu dla semiliniowych równań falowych (1.2) i Kleina-Gordona (1.15) dla krytycznych i nadkrytycznych przypadków;
5. charakterystyka danych początkowych, które prowadzą do dwóch różnych typów asymptotyk pośrednich dla krytycznego semiliniowego równania falowego (1.2);
6. próba opisu asymptotyki pośredniej dla podkrytycznego semiliniowego równania Kleina-Gordona (1.15) w trzech wymiarach przestrzennych i wykładnika potęgowego równego trzy;

Praca nad tym materiałem pozwoliła autorowi zapoznać się z metodami matematyki stosowanej i analizy nieliniowej. Autor ma nadzieję, że jego mały wkład pozwoli popchnąć nasze zrozumienie odrobinę dalej.

„Nadajemy światu znaczenia przez odwagę naszych pytań i głębię naszych odpowiedzi.”

Carl E. Sagan (1934 - 1996)

Bibliografia

- [1] Mark J. Ablowitz, Athanassios S. Fokas „*Complex variables: introduction and applications*”, Cambridge University Press, Second edition (2003)
- [2] N. I. Akheizer, I. M. Glazman „*Theory of linear operators in Hilber space*”, Dover Publications (1993)
- [3] Vladimir I. Arnold „*Ordinary differential equations*”, The MIT Press (1978)
- [4] Vladimir I. Arnold „*Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations*”, Springer-Verlag, First edition (1988)
- [5] Grigory I. Barenblatt, Yakov B. Zel’dowich „*Self-similar solutions as intermediate asymptotics*”, Annual Review of Fluid Mechanics **4** 285-312 (1972)
- [6] Piotr Bizoń „*Formation of singularities in Yang–Mills equations*”, Acta Phys. Polon. B **33** 1893-1922 (2002); arXiv:math-ph/0206004v1
- [7] Piotr Bizoń, Peter Breitenlohner, Dieter Maison, Arthur Wasserman „*Self-similar solutions of the cubic wave equation*”, Nonlinearity **23** 225-236 (2010); arXiv:math.AP/0905.3834v1
- [8] Piotr Bizoń, Tadeusz Chmaj „*First order phase transitions in gravitational collapse*”, Acta Phys. Polon. B **29** 1071-1078 (1998); arXiv:gr-qc/9802002v1
- [9] Piotr Bizoń, Tadeusz Chmaj, Nikodem Szpak „*Dynamics near the threshold for blowup in the one-dimensional focusing nonlinear Klein-Gordon equation*”, J. Math. Phys. **52**, 103703 (2011); arXiv:1012.1033v2 [math-ph]
- [10] Piotr Bizoń, Tadeusz Chmaj, Zbislaw Tabor „*Formation of singularities for equivariant 2+1 dimensional wave maps into the 2-sphere*”, Nonlinearity **14** 1041-1053 (2001); arXiv:math-ph/0011005v2
- [11] Piotr Bizoń, Tadeusz Chmaj, Zbislaw Tabor „*On blowup for semilinear wave equations with focusing nonlinearity*”, Nonlinearity **17** 2187-2201 (2004); arXiv:math-ph/0311019

- [12] Piotr Bizoń, Zbislaw Tabor „*On blowup of Yang-Mills fields*”, Phys. Rev. D **64** 121701 (R) (2001)
- [13] Piotr Bizoń, Dieter Maison, Arthur Wasserman „*Self-similar solutions of semilinear wave equations with a focusing nonlinearity*”, Nonlinearity **20** 2061-2074 (2007); arXiv:math.AP/0702156v1
- [14] Piotr Bizoń, Anıl Zenginoğlu „*Universality of global dynamics for the cubic wave equation*”, Nonlinearity **22** 2473–2485 (2009); arXiv:0811.3966v2 [math.AP]
- [15] Peter Breitenlohner, Peter Forgács, Dieter Maison „*Static spherically symmetric solutions of the Einstein-Yang-Mills equations*”, Commun. Math. Phys. **163** 141-172 (1994)
- [16] Alexander D. Bruno „*Local methods in nonlinear differential equations*”, Springer-Verlag (1989)
- [17] Alexander D. Bruno, Irina V. Goryuchkina „*All expansions of solutions to the sixth Painlevé equation near its nonsingular point*”, Doklady Mathematics **79** 3 397-402 (2009)
- [18] Alexander D. Bruno, Anastasia V. Parusnikova „*Expansions of solutions to the fifth Painlevé equation near its nonsingular point*”, Doklady Mathematics **83** 3 348-352 (2011)
- [19] John C. Butcher „*Numerical methods for ordinary differential equations*”, John Wiley & Sons, Inc., Second edition (2008)
- [20] Matthew W. Choptuik, Piotr Bizoń, Tadeusz Chmaj „*Critical behavior in gravitational collapse of a Yang-Mills field*”, Phys. Rev. Lett. **77** 424-427 (1996)
- [21] Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, Clifford Stein „*Introduction to algorithms*“, McGraw-Hill (1990)
- [22] Ovidiu Costin, Rodica D. Costin „*On the formation of singularities of solutions of nonlinear differential systems in antistokes directions*”, Invent. math. **145** 425–485 (2001)
- [23] Ovidiu Costin, Min Huang, Wilhelm Schlag „*On the spectral properties of L_{+-} in three dimensions*”, Nonlinearity **25** 125 (2012); arXiv:1107.0323v1
- [24] Laurent Demanet, Wilhelm Schlag „*Numerical verification of a gap condition for a linearized nonlinear Schrödinger equation*”, Nonlinearity **19** 829-852 (2006); arXiv:math/0508235v1 [math.AP]

- [25] Jens Eggers, Marco A. Fontelos „*The role of self-similarity in singularities of partial differential equations*”, *Nonlinearity* **22** R1-R44 (2009)
- [26] Lawrence C. Evans „*Partial differential equations*”, American Mathematical Society, Second edition (2010)
- [27] Galina Filipuk, Rod G. Halburd „*Movable algebraic singularities of second-order ordinary differential equations*”, *J. Math. Phys.* **50** 023509 (2009); arXiv:0804.2859v1 [math.CV]
- [28] Mikhail V. Fedoryuk „*Asymptotic analysis: linear ordinary differential equations*”, Springer (1993)
- [29] I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik „*Table of integrals, series and products*”, Academic Press, Fifth edition (1994)
- [30] Carsten Gundlach, José M. Martín-García „*Critical phenomena in gravitational collapse*”, *Living Rev. Relativity* **10** 5 (2007), <http://www.livingreviews.org/lrr-2007-5>
- [31] Karl E. Gustafson „*Introduction to partial differential equations and Hilbert space methods*”, Dover Publications, Inc., Third Edition (1999)
- [32] Philip Hartman „*Ordinary differential equations*”, John Wiley & Sons, Inc. (1964)
- [33] Naomichi Hatano, Keita Sasada, Hiroaki Nakamura, Tomio Petrosky „*Some properties of the resonant state in quantum mechanics and its computation*”, *Prog. Theor. Phys.* **119** 2 187-222 (2008); arXiv:0705.1388v2 [quant-ph]
- [34] Kunio Hidano „*Scattering and self-similar solutions for the nonlinear wave equation*”, *Differential Integral Equations* **15** 4 405-462 (2002)
- [35] Matthieu Hillairet, Pierre Raphaël „*Smooth type II blow up solutions to the four dimensional energy critical wave equation*”, (2010); arXiv:1010.1768v1 [math.AP]
- [36] Einar Hille „*Ordinary differential equations in the complex plane*”, John Wiley & Sons, Inc. (1976)
- [37] C. Hunter „*Series solutions for polytropes and the isothermal sphere*”, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **328** 839-847 (2001)
- [38] Slim Ibrahim, Nader Masmoudi, Kenji Nakanishi „*Scattering threshold for the focusing nonlinear Klein-Gordon equation*”, *Analysis & PDE* **4** 3 405-460 (2011); arXiv:1001.1474v3 [math.AP]

- [39] Edward L. Ince „*Ordinary differential equations*”, Dover Reprint edition (1956)
- [40] Jun Kato, Tohru Ozawa „*Weighted Strichartz estimates and existence of selfsimilar solutions for semilinear wave equations*”, Indiana Univ. Math. J. **52** 6 1615-1630 (2003)
- [41] Jun Kato, Tohru Ozawa „*On solutions of the wave equation with homogeneous Cauchy data*”, Asymptotic Analysis **37** 93-107 (2004)
- [42] Jun Kato, Makoto Nakamura, Tohru Ozawa „*A generalization of the weighted Strichartz estimates for wave equations and an application to self-similar solutions*”, Comm. Pure Appl. Math. **60** 2 164-186 (2007)
- [43] Otared Kavian, Fred B. Weissler „*Finite energy self-similar solutions of a nonlinear wave equation*”, Commun. PDE **15** 1381-1421 (1990)
- [44] Joachim Krieger, Kenji Nakanishim, Wilhelm Schlag „*Global dynamics away from the ground state for the energy-critical nonlinear wave equation*”, (2010); arXiv:1010.3799v1 [math.AP]
- [45] Joachim Krieger, Wilhelm Schlag, Daniel Tataru „*Slow blow-up solutions for the $H^1(\mathbb{R}^3)$ critical focusing semilinear wave equation*”, Duke Math. J. **147** 153 (2009)
- [46] Radosław Kycia „*On self-similar solutions of semilinear wave equations in higher space dimensions*”, Appl. Math Comput. **217** 9451-9466 (2011)
- [47] Radosław Kycia „*On similarity in the evolution of semilinear wave and Klein-Gordon equations: Numerical surveys*”, J. Math. Phys. **53** (2012)
- [48] Radosław Kycia „*On movable singularities of self-similar solutions of semilinear wave equations*”, accepted to the Proceedings from the Conference „Formal and Analytic Solutions of Differential and Difference Equations II“, August 8-13, 2011, Będlewo, Polska
- [49] Howard Levine „*Instability and nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations of the form $Pu_{tt} = -Au + F(u)$* ”, Trans. Amer. Math. Soc **192** 1-21 (1974)
- [50] Steven L. Liebling „*Threshold of singularity formation in the semilinear wave equation*”, Phys. Rev. D **71** 4 044019 (2005); arXiv:gr-qc/0502056v1
- [51] C. Mohan, A. R. Al-Bayaty „*Power series solutions of the Lane-Emden equation*”, Astrophysics and Space Science **73** 227-239 (1980)

- [52] Mark A. Naimark „*Linear differential operators*”, Dover Publications, Inc. (2012)
- [53] Kenji Nakanishi, Wilhelm Schlag „*Global dynamics above the ground state energy for the focusing nonlinear Klein-Gordon equation*” *Journal of Differential Equations* **250** 5 2299–2333 (2011); arXiv:1005.4894v2 [math.AP]
- [54] Frank W. J. Olver „*Asymptotics and special functions*”, Academic Press New York and London (1974)
- [55] Hartmut Pecher „*Self-similar and asymptotically self-similar solutions of nonlinear wave equations*”, *Math. Ann.* **316** 259-281 (2000)
- [56] Hartmut Pecher „*Sharp existence results for self-similar solutions of semi-linear wave equations*”, *Nonlinear differ. equ. appl.* **7** 323-341 (2000)
- [57] Fabrice Planchon „*Self-similar solutions and semi-linear wave equations in Besov spaces*”, *J. Math. Pures Appl.* **79** 8 809-820 (2000)
- [58] Fabrice Planchon „*On self-similar solutions, well-posedness and the conformal wave equation*”, *Commun. Contemp. Math.* **4** 2 211-222 (2002)
- [59] William H. Press, Brian P. Flannery, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling „*Numerical recipes in FORTRAN 77: the art of scientific computing*”, Cambridge University Press, Second edition (1992)
- [60] Francis Ribaud, Abdellah Youssfi „*Global solutions and self-similar solutions of semilinear wave equation*”, *Math. Z.* **239** 231-262 (2002)
- [61] William E. Schiesser „*The numerical method of lines: integration of partial differential equations*”, Academic Press, Inc. (1991)
- [62] William E. Schiesser, Graham W. Griffiths „*A compendium of partial differential equation models: method of lines analysis with matlab*”, Cambridge University Press, First edition (2009)
- [63] Ralph E. Showalter „*Hilbert space methods in partial differential equations*”, Dover Publications, Inc. (2010)
- [64] Josef Stoer, Roland Bulirsch „*Introduction to numerical analysis*”, Springer-Verlang New York, Inc. (1980)
- [65] Nikodem Szpak „*Relaxation to intermediate attractors in nonlinear wave equations*”, *Theor. Math. Phys.* **127** 817-826 (2001)

- [66] Terence Tao „*Global behaviour of nonlinear dispersive and wave equations*”, Current developments in mathematics, 255–340 (2008); arXiv:math/0608293v1 [math.AP]
- [67] Robert M. Wald „*General relativity*”, University Of Chicago Press; First Edition edition (1984)
- [68] Alan Vande Wouwer, Philippe Saucez, William E. Schiesser „*Adaptive method of lines*”, Chapman and Hall/CRC (2001)
- [69] Maciej Zworski „*Resonances in physics and geometry*”, Notices of AMS **46** 3 (1999)
- [70] Henryk Żołądek „*The monodromy group*”, Monografie Matematyczne 67, Birkhauser, Basel (2006)