
Recenzja pracy doktorskiej

Recenzent

dr hab. Andrzej Woszczyna, prof. PK
Instytut Fizyki Politechniki Krakowskiej

Autor rozprawy

mgr Krzysztof Głód
Obserwatorium Astronomiczne UJ

Tytuł rozprawy

Ewolucja pierwotnych fal grawitacyjnych w modelach kosmologicznych Friedmanna-Lemaître'a. Zastosowania języków obliczeń symbolicznych

Przedmiot pracy

Przedmiotem pracy są rozwiązania ściśle równania amplitud zaburzeń tensorowych w modelach Friedmanna-Lemaître'a-Robertsona-Walkera. Praca składa się z czterech rozdziałów, w których autor kolejno

1. Przedstawia historię problemu zaburzeń kosmologicznych od pracy Bonnora poczynając od odkrycia fluktuacji temperatury mikrofalowego promieniowania tła oraz robi szczegółowe matematyczne wprowadzenie do teorii słabych fal grawitacyjnych. Posługując się lematem Stewarta-Walkera wyodrębnia niezmiennicze względem cechowania wielkości perturbacyjne opisujące zaburzenie tensorowe i formułuje równanie (2.57) propagacji tych zaburzeń.
2. Ograniczając się do rozwiązań separowalnych bada czasową ewolucję amplitudy w modelach kosmologicznych FLRW z materią o różnych równaniach stanu: modeli próżniowych ze stałą kosmologiczną, dla ścian domenowych, dla strun kosmicznych, dla pyłu, dla promieniowania, dla materii ultralekkiej, dla materii sztywnej, jak również dla modeli wielopłynowych opartych na tych równaniach stanu. Analiza dotyczy modeli z różną krzywizną przestrzenną oraz ze stałą kosmologiczną lub bez.
3. Autor aplikuje niektóre z uzyskanych wyników do zagadnienia amplifikacji parametrycznej Grishchuka oraz do problemu Greena-Walda uśredniania zaburzeń.

Ostatni, czwarty rozdział stanowi podsumowanie.

Praca ponadto zawiera cztery dodatki poświęcone A) równaniom różniczkowym klasy Fuchsa i rozwiązaniom Frobeniusa, B) wykładnikom charakterystycznym Thomégo w nieregularnych punktach osobliwych niskich rzędów, C) transformacji zespolonej charakterystyki dla całki eliptycznej trzeciego rodzaju, D) Narzędziom algebry komputerowej dedykowanym do przekształceń równań różniczkowych.

Dodatki wydają się być równie istotną częścią pracy doktorskiej co rozdziały części zasadniczej, a o ich wydzieleniu decyduje odmienny matematyczny lub informatyczny charakter.

Uzyskane wyniki

Na szczególną uwagę w pracy zasługują:

Rozwinięcie podejścia Lyubushina i wskazanie nowej, opartej na tym podejściu zmiennej perturbacyjnej dla zaburzeń tensorowych. Przedstawiona jest szczegółowo konstrukcja tej zmiennej uzasadniająca taki wybór.

Znalezienie kompletu rozwiązań Liouville'owskich równania amplitud pierwotnych fal grawitacyjnych w modelach kosmologicznych Friedmanna-Lemaître'a z krzywizną i stałą kosmologiczną i z liniowym barotropowym równaniem stanu. Autor przedstawia metodę opartą na ansatzu Hermite'a-Darboux (podrozdział 3.3) gdzie proces poszukiwania rozwiązania redukuje się do znajdowania rozwiązań dwu prostszych równań dla odpowiednio skonstruowanej zmiennej zespolonej (definicja 3.19 i 3.20). Metoda należy do wyrafinowanych technik rozwiązywania równań różniczkowych, jest nieoczywista, a jej skuteczność jest włącz przedmiotem badań. Obszerny katalog rozwiązań dla równania amplitudy zaburzeń tensorowych znalezionych tą metodą zawierają podrozdziały (3.4.1- 3.4.5).

Wykazanie skuteczności niektórych znalezionych rozwiązań w zastosowaniu do problemu Greena-Walda uśredniania małych niejednorodności. Przedstawiony model oparty na pyłowym rozwiązaniu Friedmana jest bardziej realistyczny niż oryginalny model Greena-Walda. Prowadzi przy tym do ważnego negatywnego wyniku dla prób konstrukcji efektywnej stałej kosmologicznej generowanej przez uśrednioną reakcję zwrotną pola zaburzeń na dynamikę modelu tła.

Stworzenie zwartych eleganckich procedur do przetwarzania równań różniczkowych, napisanych w paradygmacie programowania funkcyjnego. Autor demonstruje wysoką klasę programowania i styl przypominający klasyczne podręczniki Trotta. Procedury zamieszczone w dodatku D powinny stać się przedmiotem niezależnej publikacji informatycznej np. w *The Mathematica Journal* i udostępnione w formie pakietu w Wolfram Library. Sugeruję aby demonstracja wybranej przez Autora procedury stała się częścią obrony publicznej.

Z lektury pracy jest jasne, że Autor, dysponując narzędziem, systematycznie przerachował w całości zagadnienie ewolucji fal grawitacyjnych w modelach wymienionych w Rozdziale 2, łącznie z wszystkimi zadaniami rozwiązywanymi wcześniej przez innych. Autor nie opiera się na niczym czego sam nie sprawdził. Rozwiązania nowe pojawiają się tu jako dopełnienie określonych klas rozwiązań, a nie jako uogólnienia ad hoc. Podsumowanie zawiera bardzo szczegółowe objaśnienia, które z przedstawionych rozwiązań nie były dotąd znane, ale kompleksowość przeprowadzonej tu analizy ma również niezależną wartość naukową.

Uwagi

1

W sekcji 2.4 *Zaburzenia w postaci fal grawitacyjnych* Autor pisze

"Forma równania (2.57) pozwala na rozseparowanie zmiennej czasowej i zmiennych przestrzennych x " poprzez wybór..."

W istocie Autor ma na myśli, że w dalszym ciągu ogranicza się jedynie do rozwiązań szczególnych, które takiej separacji podlegają. Z samej natury zjawiska fali, separacja taka dla rozwiązania ogólnego jest niewykonalna. Pozostaje więc rozstrzygnąć czy szczególne rozwiązania dyskutowane w dalszej części pracy stanowią bazę. Problem kompletności dla modeli o zerowej krzywiznie przestrzennej nie wydaje się istotnie odmienny od zagadnienia rozkładu spektralnego fali elektromagnetycznej w przestrzeni Minkowskiego, ale dla modeli z niezerową krzywizną przestrzenną problem, o ile wiem, jest wciąż otwarty. Warto w tym kontekście zauważyć, że Lifshitz i Khalatnikov (1963) nie przedstawiają rozkładu zaburzenia na harmoniki, a jedynie klasyfikują harmoniki według ich charakteru tensorowego. Problem kompletności leży poza zakresem tematycznym niniejszej rozprawy, ale dobrze byłoby to jawnie wyartykułować choćby przez stwierdzenie, że analiza dotyczy szczególnych rozwiązań.

Z tym zagadnieniem wiąże się również sformułowanie dotyczące widma operatora Laplace'a. Po wzorze (2.62) Autor zamieszcza notatkę

"Zostało ono zapostulowane już przez Lifshitz [104], a później potwierdzone w pracach Jansena [92], Rubina i Ordoneza [148] oraz Kalninsa i Millera [94,93]."

Zagadnienie spektralne leży wyraźnie na uboczu zainteresowań Autora, ale słabo to usprawiedliwia sugestię, że widmo operatora Laplace'a można postulować. Generalnie wzory typu (2.62) pochodzą z teorii Gelfanda (dla funkcji skalarnych) oraz z rozszerzenia tej teorii na funkcje tensorowe, i są przedmiotem matematycznych dowodów. Zwracam na to uwagę nie tylko ze względu na popełniony lapsus, ale również dlatego, że widmo wymienione w (2.62) dotyczy funkcji całkowalnych z kwadratem (zaburzenie lokalne), natomiast Rozprawa traktuje - podobnie zresztą jak prace Lifshitz - o pierwotnych zaburzeniach kosmologicznych (zaburzenie nielocalne). Dla przestrzeni o ujemnej krzywiznie baza rozwiązań dla

funkcji całkowalnych z kwadratem jest węższa (stąd dolna granica $3K$ dla wartości własnych operatora Laplace'a) niż baza dla pola stochastycznego, gdzie ograniczenia przez krzywiznę K nie występują. Dla zaburzeń skalarnych problem ten znany jest jako problem serii dodatkowej (nieoscylacyjnych, ograniczonych rozwiązań spełniających rygory teorii zaburzeń I rzędu, ale zbędnych w rozkładzie harmonicznym funkcji całkowalnych z kwadratem). Konkludując: klasa rozwiązań kosmologicznie interesujących jest szersza niż rozważana przez Autora i polecam uwadze te, które zostały dotychczas pominięte.

2

Wydzielając rozwiązania oscylujące od monotonicznie malejących lub monotonicznie rosnących Autor napotyka na zagadnienie nieliniowych relacji dyspersyjnych, ale *termin relacja dyspersyjna* w Pracy się nie pojawia. Analiza relacji dyspersyjnych mogłaby być szczególnie interesująca w kontekście prędkości grupowej fal grawitacyjnych w modelach z krzywizną przestrzenną.

Dość swobodnie odrzucane są mody narastające jako niefizyczne, tymczasem rozwiązania te mogą stanowić klucz do analizy stabilności przestrzeni FLRW ze względu na zaburzenia tensorowe. Dość powszechnie przyjmuje się, że źródłem niestabilności mogą być jedynie zaburzenia skalarne. Niektóre przedstawione w Rozprawie rozwiązania sugerują co innego. To interesujący punkt wart bardziej wnikliwego objaśnienia.

3

Wież (4.5) dla amplitudy fal wzmacnianych w przejściu fazowym (amplifikacja parametryczna Grishchuka) jest niezależny od dynamiki przestrzeni w epokach przed i po przejściu fazowym. Opierając się na tym Autor konstruuje paradoks: epoki można przenieść otrzymując ten sam efekt wzmacniania wstecz w czasie i konkluduje, że w obrębie klasycznej mechaniki falowej efekt jest "sztuczny". Autor wyraża przekonanie, że problem jest poprawnie rozwiązywany dopiero na gruncie mechaniki kwantowej.

Zgadzam się z Autorem, że na formułę (4.5) należy zwrócić baczniejszą uwagę i że jej niezależność od dynamiki tła nie jest jasna. W oparciu o nią można konstruować więcej paradoksów, np. taki, że warunki Darmon-Israela, które spełnione są na dowolnej powierzchni Cauchyego (a nie tylko w przejściu fazowym), będą na mocy (4.5) amplifikować fale stojące na każdej hiperpowierzchni przestrzennopodobnej.

Zagadnienie to wymaga ponownej analizy od podstaw. Nie oczekuję, że Doktorant odpowie na ten zarzut na publicznej obronie, bo to wymaga czasu.

Podsumowanie

Byłbym skłonny twierdzić, że przedmiotem Rozprawy są przede wszystkim techniki znajdowania rozwiązań równań różniczkowych, głównie klasy Fuchsa (techniki matematyczne i techniki algebry komputerowej) i w tym zakresie Rozprawa jest na bardzo wysokim poziomie. Autor podchodzi do trudnego zagadnienia w sposób systematyczny tworząc najpierw narzędzia algebry komputerowej właściwe dla rozwiązywanego problemu. Autor ma świadomość, że wkracza w obszar złożoności obliczeniowej przy której formuły wyrażone w analitycznej (symbolicznej) formie stają się materiałem do komputerowego przetwarzania tak samo jak dane pomiarowe dla przetwarzania numerycznego i statystycznego. Praca jest dobrą ilustracją faktu, że fizyka teoretyczna oparta na rachunku ręcznym może obejmować znikomą część problemów możliwych do rozwiązania na drodze analitycznej.

Praca domyka kilka ważnych zagadnień związanych z propagacją zaburzeń tensorowych w ekspandujących przestrzeniach jednorodnych i izotropowych. Praca stawia kilka nowych pytań (klasyczny sens amplifikacji parametrycznej, stabilność modeli FLRW ze względu na zaburzenia tensorowe.)

Uważam rozprawę za bardzo dobrą i wnioskuję o dopuszczenie Doktoranta do obrony publicznej. Wnioskuję też o wyróżnienie pracy.

Andrzej Woszczyna