prof. dr hab. Jacek Jezierski
Katedra Metod Matematycznych Fizyki
Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski

Recenzja pracy doktorskiej mgr. Macieja Maliborskiego

pt.

„Dynamics of Nonlinear Waves on Bounded Domains"

Treść rozprawy doktorskiej mgr. Macieja Maliborskiego jest zgodna z tytułem, dotyczy kilku ważnych aspektów związanych z opisem nieliniowej dynamiki pola w obszarze ograniczonym. Głównie są to problemy opisane kwaziliniowym równaniem różniczkowym cząstkowym w dwóch wymiarach (1+1) pochodzące ze sferycznie symetrycznych rozwiązań problemów wielowymiarowych. Rozważane są dwa scenariusze ewolucji w czasie: kwaziperiodyczne albo turbulentne. Rozwój zależy od konkretnego równania i od warunków początkowych.

Rozprawa składa się z wprowadzenia oraz z dwóch obszernych części, uzupełnionych krótkim podsumowaniem, czterema technicznymi dodatkami oraz spisem literatury. (Przydałby się skorowidz oznaczeń.)

Część pierwsza zawiera motywacje oraz podstawowe definicje i własności wspólne dla rozważanych potem szczegółowych modeli. Zwykle jest to problem początkowo-brzegowy na $\mathbb{R} \times [a, b]$ dla kwaziliniowego równania drugiego rzędu, w którym część czasowa jest typu $\partial_t \partial_t$, a część przestrzenna po linearyzacji wokół stacjonarnego rozwiązania prowadzi do operatora Sturma–Liouville'a L na odcinku $[a, b]$.

Część druga, podzielona na dwa rozdziały, obejmuje szczegółowy przegląd modeli.
W rozdziale czwartym autor porównuje dwa modele. Pierwszy z nich to problem początkowo-brzegowy dla układu równań wynikających z równań Einsteina sprzężonych z polem skalarnym (Einstein-Klein-Gordon) przy założeniu sferycznej symetrii oraz dla skończonego obszaru przestrzennego. Jest on analizowany numerycznie na dwa sposoby. Dla zredukowanego układu równań cząstkowych (1+1), w obu przypadkach, czas jest ciągły, a

współrzędna radialna dyskretna, co prowadzi do układu równań różniczkowych zwyczajnych. Te dwa sposoby, metoda różnic skończonych i dyskretyzacja pseudospektralna, różnią się metodą wyboru jednowymiarowej siatki na odcinku odpowiadającym współrzędnej radialnej.
Okazuje się, że dla warunków brzegowych Dirichleta skalar Ricciego rośnie w czasie dla dowolnie małych danych początkowych, natomiast przy warunkach Neumanna tak jest jedynie dla dużych wartości ϵ. Wyniki te mają wskazywać na niestabilność tego modelu, przy czym dla warunków Neumanna prawdopodobnie występuje próg (bifurkacja) dla danych początkowych.

Drugi model to dynamika sferycznie symetrycznego pola Yanga-Millsa z grupą SU(2) w czasoprzestrzeni opisanej metryką (3.82), tzw. metryką Einsteina. Rozważane są dwa przypadki perturbacji: wokół próżni ($S = 1$) oraz wokół statycznego rozwiązania $S = \cos x$ (tzw. „kink"). Numeryczna analiza problemu Cauchy'ego dla perturbacji polega na przybliżaniu rozwiązania skończoną kombinacją funkcji własnych operatora L. Prowadzi to znowu do układu równań różniczkowych zwyczajnych. Następnie autor próbuje z sukcesem uwzględnić nieliniowość równania (3.94). Stosuje metodę Poincaré–Lindstedta polegającą na analitycznej deformacji rozwiązania kontrolowanej rzeczywistym parametrem ϵ przy założeniu małych danych początkowych kontrolowanych tym samym parametrem. Ze względu na złożoność problemu autor najpierw ogranicza się do deformacji jednego modu, tzn. warunek początkowy (4.66) opisany jest jedną funkcją własną operatora L. Potem również analizuje perturbacje typu gaussowskiego (4.107), których rozkład na funkcje własne $e_j(x)$ opisany jest szybko (eksponencjalnie) zbieżnym szeregiem.
Tutaj nie ma żadnych osobliwości, ale porównanie próżni z „kinkiem" daje szybszy (w czasie) równowagowy rozkład energii modów, z których składa się dana perturbacja dla przypadku $S = \cos x$.

Rozdział piąty poświęcony jest szukaniu i analizie rozwiązań, które są stacjonarne lub okresowe w czasie, dla różnych sytuacji opisanych w rozdziale trzecim.

Jako pierwszy model autor wybrał do analizy przypadek pola skalarnego sprzężonego z polem grawitacyjnym opisanym metryką (3.7) reprezentującą sferycznie symetryczną czasoprzestrzeń asymptotycznie AdS. Oprócz ogólnych rozważań w dowolnym wymiarze $d+1$ przestudiowano dokładnie przypadek $d = 3$ i $d = 4$ dla rzeczywistego pola skalarnego oraz $d = 4$ dla pola o wartościach zespolonych.

Następnie poddano analizie metrykę (3.35) opisującą $4+1$-wymiarową czasoprzestrzeń asymptotycznie AdS ze zdeformowaną metryką na S^3 za pomocą jednej dodatkowej funkcji B. W tym modelu równania Einsteina prowadzą do podobnego układu równań cząstkowych jak dla pola skalarnego. Funkcja B przejmuje rolę pola skalarnego z poprzedniego modelu.

Jako trzeci model wybrano pole skalarne w skończonym obszarze przestrzennym, a na końcu poddano analizie przypadek pola Yanga-Millsa. Oba modele były już analizowane w rozdziale czwartym. Dla obu przypadków podano konstrukcję rozwiązań okresowych.

W rozdziale szóstym autor podsumowuje swoją rozprawę oraz podaje możliwości dalszych badań.

Rozprawa uzupełniona jest czterema technicznymi dodatkami zawierającymi informacje o niektórych wielomianach ortogonalnych czy konkretnych całkach użytych w pracy, jak również szczegóły niektórych metod numerycznych zastosowanych przy obliczeniach.

Na zakończenie mam kilka uwag i pytań szczegółowych.

- Punkt iii) na str. 13 słabo wyjaśnia definicję zbiorów $\mathbb{N}$ i $\mathbb{N}_0$.
- Co to jest „NLW equation" na str. 15?
- $F(u)$ we wzorze (2.1) sugeruje, że jest to równanie zwyczajne z parametrem x. Należałoby bardziej wyspecyfikować zależność od pochodnych u_{xx}, u_x, jak się to robi dla równania cząstkowego. Wtedy wzór (2.5) stałby się bardziej poprawny. Oznaczenie $F'(S)$ budzi kontrowersje. Wzór (2.7) nie specyfikuje, jak numerujemy spektrum – dowolna permutacja $\mathbb{N}_0$ jest dozwolona. Ponadto $\dfrac{\mathrm{d}\omega_j}{\mathrm{d}j}$ nie ma sensu (nie można różniczkować na zbiorze dyskretnym).
- Co to jest f w (2.13)?
- po wzorze (2.22): błędna argumentacja, że symetria równania pociąga symetrię rozwiązania. Równanie ma symetrię, ale rozwiązanie niekoniecznie, tu się traci ogólność, założenie $\partial_\tau v = 0$ jest dodatkowym warunkiem początkowym na rozwiązanie. Oczywiście przesunięcie w fazie dla tego szczególnego rozwiązania daje już wszystkie rozwiązania.
- Po co jest zamieszczona sekcja 2.3?
- Dlaczego iloczyn skalarny jest rzeczywisty? por. (2.32), (3.32), (3.53), (3.72) oraz (3.100). Czy przestrzenie Hilberta L^2 rozważane w pracy nie są nad $\mathbb{C}$?
- Co to jest G i jak wygląda równanie Einsteina (3.4) w wyższych wymiarach? $8\pi G \longrightarrow \frac{d-1}{d-2}|S^{d-1}|G$ np. dla wymiaru $d = 4$ stała $6\pi^2 G$ mnoży tensor energii-pędu w równaniach Einsteina.
- str. 26: Czy V jest funkcją zmiennej $|\phi|^2$? Jeśli tak, to lepiej jest pisać $V(|\phi|^2) = \sqrt{|\phi|^2}$, a nie $V(|\phi|^2) = |\phi|$.
- Gładkość funkcji nie oznacza jej analityczności! (3.24) str. 29, mam wrażenie, że to są dodatkowe założenia.
- Czy $'$ oznacza d/dx czy d/dt? por. (3.25).
- Niezręczny zapis we wzorach (3.26-27), (3.34), (3.47), (3.56), lepiej jest chyba pisać $\phi(t, \frac{\pi}{2} - z)$.
- str. 30: „orthonormal base" czy raczej „orthonormal basis"?

- str. 30: Skąd wiadomo, że operator L jest samosprzężony? Operatory różniczkowe na ogół bywają tylko formalnie samosprzężone, a jak się poda małą dziedzinę, to mogą być symetryczne. Często warunki brzegowe dookreślają dobry operator. Tutaj brakuje tych warunków.
- str. 34: Tym razem L jest istotnie samosprzężony, ale też brakuje warunków brzegowych.
- str. 35 pierwsze zdanie: S^3 czy S^2?
- Chyba $e_j(r)$ dane wzorem (3.71) nie stanowią bazy, a jedynie układ wektorów ortonormalnych. Brakuje funkcji stałej.
- str. 39: T_a nie są generatorami rzeczywistej algebry su(2).
- str. 40: appropriet? Niefortunnie dobrane oznaczenia we wzorach (3.91-92), trzeba brać lupę, żeby je odróżnić.
- str. 42 drugie zdanie: Co to jest $G(u)$ w (3.95)? Dlaczego L jest samosprzężony? Jakie warunki brzegowe?
- Dlaczego dane początkowe (4.66) i (4.107) są niekompatybilne? Raz kładziemy prędkość, a raz położenie równe zeru.
- Jaki sens ma umieszczanie (nieczytelnych) wzorów (5.133), (5.258-261)?

Uwagi te oczywiście nie podważają dorobku autora, gdyż nie tylko poprawnie stosuje on wybrany przez siebie aparat matematyczny, ale wykazał przy tym kompetencję i dużą sprawność w posługiwaniu się wyrafinowanymi narzędziami numerycznymi. Jestem również pełen podziwu dla wytrwałości autora przy pisaniu tej rozprawy.

W tej sytuacji stwierdzam, że doktorant spełnił wymagania nałożone przez odpowiednie przepisy o stopniach naukowych. W moim przekonaniu jest to praca dobra i z przyjemnością wnoszę o dopuszczenie magistra Macieja Maliborskiego do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Warszawa, 30 grudnia 2014 roku

Jacek Jurkiewicz