

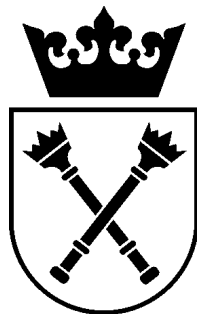
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej
Uniwersytetu Jagiellońskiego

Rozprawa doktorska pod tytułem

Aspekty dynamiki supersymetrycznych mechanik kwantowych z symetrią cechowania

Piotr Korcyl

Rozprawa doktorska
napisana pod kierunkiem
prof. dr. hab. Jacka Wośka
w Zakładzie Dyskretnej Teorii Pola
Instytutu Fizyki Uniwersytetu Jagiellońskiego



Kraków, 2010

*Tę pracę dedykuję Marcie,
bez której nie miałaby ona szans powstać.*

SPIS TREŚCI

1	Wprowadzenie	3
2	Zastosowania	9
2.1	Redukcja wymiarowa teorii Yanga-Millsa	10
2.2	Kwantowa teoria pola w małej objętości	11
2.3	Zregularyzowany opis membrany	13
2.4	Dynamika D0 bran	16
3	Modele i ich symetrie	17
3.1	Supersymetryczny oscylator anharmoniczny	18
3.2	Modele SYMQM	23
4	Omówienie użytych metod	25
4.1	Baza Focka	26
4.2	Algorytm rekurencyjny	35
4.3	Podsumowanie	37
5	Wyniki numeryczne	39
5.1	Zbieżność widm	40
5.2	Odtwarzanie supersymetrii	47
5.3	Supersymetria dla skończonego obciążenia	51
5.4	Prawa skalowania	56
5.5	Indeks Wittena	62
5.6	Podsumowanie	63
6	Wyniki analityczne	65
6.1	Dyskretyzacje w podejściu analitycznym	66
6.2	Rozwiązania dla modelu z symetrią $SU(2)$	67
6.3	Rozwiązania dla modelu z symetrią $SU(3)$	69

6.4	Widma dla modeli z symetrią $SU(N)$	83
6.5	Zastosowania rozwiązań dokładnych	87
6.6	Podsumowanie	95
7	Dyskusja	97
	Podziękowania	103
A	Uogólnione wielomiany Laguerre'a	105
B	Wyprowadzenie relacji rekurencyjnych	109
B.1	Model swobodny z symetrią $SU(3)$ - sektor bozonowy	110
B.2	Model swobodny z symetrią $SU(3)$ - sektory fermionowe	111
B.3	Model swobodny z symetrią $SU(N)$ - sektor bozonowy	113
B.4	Model swobodny z symetrią $SU(N)$ - sektory fermionowe	116
C	Rekurencje i uogólnione wielomiany Laguerre'a	119
C.1	Twierdzenie 1	120
C.2	Zastosowanie twierdzenia 1	121
C.3	Twierdzenie 2	122
C.4	Twierdzenie 3	123
C.5	Twierdzenie 4	124
C.6	Zastosowanie twierdzenia 4	127
C.7	Twierdzenie 5	129
C.8	Zastosowanie twierdzenia 5	132
C.9	Wniosek 1	135
D	Rozwiązania analityczne w dyskretyzacji superładunków	137
D.1	Model z symetrią $SU(2)$	138
D.2	Model z symetrią $SU(3)$ - sektory z $n_F = 0$ oraz $n_F = 1$	140
E	Własności rozwiązań modeli z symetrią $SU(2)$ i $SU(3)$	145
E.1	Własności rozwiązań modelu $SU(2)$	146
E.2	Własności rozwiązań modelu $SU(3)$	150
	Bibliografia	152

ROZDZIAŁ 1

WPROWADZENIE

Jednym z zadań właśnie uruchamianego Wielkiego Zderzacza Hadronów (w skrócie LHC z ang. Large Hadron Collider), czyli nowego akceleratora cząstek w CERN¹ pod Genewą, jest znalezienie odpowiedzi na pytanie: czy supersymetria [1][2][3] jest rzeczywistą symetrią Przyrody czy też jest to wyłącznie kolejna, piękna i abstrakcyjna koncepcja fizyki teoretycznej.

Supersymetria², czyli symetria pomiędzy bozonami i fermionami jest, zgodnie z twierdzeniem Haaga-Łopuszańskiego-Sohniusa [5], jedynym możliwym rozszerzeniem grupy symetrii przestrzennych Poincaré'go, które może się pojawić w kwantowej teorii pola. Zakłada ona, że dla każdej cząstki bozonowej powinien istnieć jej supersymetryczny partner - cząstka o tych samym liczbach kwantowych, lecz podlegająca statystyce Fermiego-Diraca. Analogicznie, każdej cząstce fermionowej odpowiadałaby cząstka bozonowa.

Modele fizyczne opisujące świat cząstek elementarnych, takie jak na przykład Model Standardowy [6], są oparte o formalizm kwantowej teorii pola. W konsekwencji są dość trudne w analizie zarówno analitycznej jak i numerycznej. Rozszerzenie ich o supersymetrię wymaga skonstruowania mechanizmu spontanicznego łamania supersymetrii [7][8][9]. Jest to konieczne, ponieważ hipotetyczni supersymetryczni partnerzy istniejących cząstek nie zostali odkryci w żadnym z dotychczasowych eksperymentów fizycznych. Aby zaproponować poprawne rozwiązanie problemu łamania supersymetrii niezbędne jest poznanie własności teorii supersymetrycznych. Uproszczonym, lecz praktycznym, laboratorium do badania takich teorii są supersymetryczne mechaniki kwantowe zaproponowane w [10]. Numeryczne i analityczne badanie tych ostatnich jest dużo łatwiejsze, ponieważ są to układy o skończonej liczbie stopni swobody. W wyniku wzmożonego zainteresowania, które wzbudziły, okazało się, że wykazują wiele ciekawych właściwości i zastosowań [11][12][13], co spowodowało, że stały się osobnym obiektem badań. W konsekwencji odkryto, że pewne supersymetryczne mechaniki kwantowe mają dużo większe znaczenie w fizyce teoretycznej niż przypuszczano; niektóre hipotezy sugerują nawet, że opisują one podstawowe stopnie swobody teorii wysuwanych jako najpoważniejsze kandydatki do miana Teorii Wszystkiego [14].

W niniejszej rozprawie przedstawiamy systematyczną analizę pewnej klasy supersymetrycznych układów kwantowo-mechanicznych o równej liczbie bozonowych i fermionowych stopni swobody. Z powodu związków z kwantowymi teoriami pola Yanga-Millsa nazywane one są supersymetrycznymi mechanikami kwantowymi Yanga-Millsa (w skrócie SYMQM z ang. Supersymmetric Yang-Mills Quantum Mechanics). Charakteryzują się globalną symetrią $SU(N)$ będącą pozostałością po lokalnej symetrii cechowania kwantowej teorii pola. Zmienne bozonowe powiązane z polem cechowania oraz ich supersymetryczni partnerzy fermionowi transformują się przy obrotach $SU(N)$ w reprezentacji dołączonej. Dodatkowo, fizyczna przestrzeń Hilberta składa się ze stanów niezmienniczych względem takich transformacji, co jest pozostałością prawa Gaussa w pełnej teorii.

Celem pracy było zbadanie dynamiki supersymetrycznych mechanik kwantowych z symetrią cechowania $SU(N)$ stosując zarówno metody numeryczne jak i analityczne.

¹CERN - Europejskie Centrum Badań Jądrowych.

²Przystępnym wprowadzeniem do supersymetrii jest artykuł przeglądowy Sohniusa [4].

Poniżej przedstawiamy plan rozprawy streszczając poszczególne rozdziały.

W **rozdziale 2** omówimy pokrótce trzy zagadnienia fizyki teoretycznej, w których pojawiają się supersymetryczne mechaniki kwantowe Yanga-Millsa. Będą to: kwantowa teoria pola Yanga-Millsa w małej objętości (podrozdział 2.2), zregularyzowana dynamika kwantowej, nierelatywistycznej membrany (podrozdział 2.3) oraz opis D0-bran w teorii M (podrozdział 2.4).

W **rozdziale 3** wprowadzimy modele analizowane w dalszych częściach pracy. Należą do nich: supersymetryczny oscylator anharmoniczny z symetrią $SU(3)$ opisany w podrozdziale 3.1 oraz dwuwymiarowe modele SYMQM z symetrią $SU(N)$ dla różnych wartości N (podrozdział 3.2). Zamieszczamy również dyskusję ich symetrii: supersymetrii, symetrii skalowania, symetrii cząstka-dziura oraz parzystości.

W **rozdziale 4** przedstawimy metody wykorzystane do analizy badanych układów. W tym celu streścimy znane, lecz niezbędne dla spójności niniejszej rozprawy, informacje.

Podstawowym użytym narzędziem jest rekurencyjna konstrukcja bazy Focka dla modeli SYMQM przy pomocy operatorów nazywanych cegiełkami, które wprowadzimy w podrozdziale 4.1.1. Pozwala ona rozwiązać warunek niezmienniczości ze względu na transformacje $SU(N)$ wynikający z prawa Gaussa. Następnie, w podrozdziale 4.1.2 przypomnimy niezależną metodę obliczenia liczby liniowo niezależnych stanów bazowych pozwalającą jakościowo sprawdzić poprawność wyników numerycznych. W podrozdziale 4.1.3 zidentyfikujemy związki pomiędzy liczbami stanów bazowych o określonych liczbach kwantów będące u podstaw dynamicznych symetrii omawianych modeli.

Wykorzystana metoda numeryczna polega na znalezieniu elementów macierzowych Hamiltonianu oraz innych obserwabli w obciętej bazie Focka. Macierze te są następnie diagonalizowane numerycznie. Wyniki fizyczne, odpowiadające nieskończonej bazie, otrzymujemy poprzez ekstrapolację zależności od obciążenia rezultatów obliczonych dla skończonego obciążenia.

W podrozdziale 4.2 opiszemy zatem algorytm rekurencyjny, który pozwala efektywnie obliczać macierze zadanych operatorów. Możliwe jest wykorzystanie raz obliczonych i zapamiętanych elementów macierzowych do obliczeń elementów macierzowych przy większych obciążeniach. Przedstawimy rozszerzenie algorytmu umożliwiające prowadzenie obliczeń w dowolnym sektorze fermionowym. Podanie odpowiedniego zestawu komutatorów elementarnych operatorów pozwala otrzymać wyniki dla modeli o dowolnej symetrii $SU(N)$.

Nowe rezultaty przedstawione w tej pracy można podzielić się na dwie części. W **rozdziale 5** opiszemy analizę numeryczną badanych układów, natomiast w **rozdziale 6** wprowadzimy z nich wiele analitycznie.

Podstawowymi rezultatami podejścia numerycznego są widma energetyczne dla supersymetrycznego oscylatora anharmonicznego z symetrią $SU(3)$ oraz dla dwuwymiarowych modeli SYMQM z symetriami $SU(N)$, $N = 2, 3, 4, 5$. Ich analizę rozpoczynamy w podrozdziale 5.1 od zbadania zbieżności wyników podczas usuwania (zwiększania) obciążenia. Oczekujemy

szybkiej zbieżności energii odpowiadającym stanom zlokalizowanym oraz wolnej dla stanów niezlokalizowanych. W konsekwencji, przedstawione widmo supersymetrycznego oscylatora anharmonicznego otrzymane dla wystarczająco dużego, ale skończonego obciążenia, pokrywa się z wynikami w kontinuum. Podobna analiza dla modeli SYMQM potwierdza ciągłą naturę ich widm. Następnie, w podrozdziale 5.2 zbadamy odtwarzanie symetrii w granicy kontinuum. W szczególności dzięki rozszerzeniu algorytmu numerycznego na sektory fermionowe możliwe jest odkrycie struktury supersymetrycznej analizowanych modeli. W podrozdziale 5.3 omówimy metodę wprowadzenia obciążenia dla modeli z symetrią $SU(N > 2)$ pozwalającą na otrzymanie degeneracji supersymetrycznej dla dowolnego skończonego obciążenia. W kolejnym podrozdziale proponujemy uogólnienie prawa skalowania znanego dotychczas dla układów z symetrią $SU(2)$ do dowolnych symetrii $SU(N)$. Na koniec, w podrozdziale 5.5, zaprezentujemy indeks Wittena obliczony numerycznie dla omawianych modeli.

Podsumowując, w rozdziale 5 przedstawimy

- precyzyjne wyniki dla dużych obciążeń w dowolnych sektorach fermionowych otrzymane dzięki wykorzystaniu rozszerzonego algorytmu rekurencyjnego,
- opracowanie sposobu wprowadzenia obciążenia gwarantującego otrzymanie degeneracji supersymetrycznej dla skończonego obciążenia,
- uogólnienie prawa skalowania energii dla modeli $SU(N)$,
- numeryczne obliczenie indeksu Wittena dla supersymetrycznego oscylatora anharmonicznego z symetrią $SU(3)$ oraz modelu SYMQM z symetrią $SU(3)$.

W **rozdziale 6** omówimy wyniki analityczne. Dzięki przetłumaczeniu problemu własnego Hamiltonianu na relacje rekurencyjne możliwe było znalezienie dokładnych rozwiązań modeli SYMQM. W kolejnych podrozdziałach opiszemy wyrażenia na stany własne oraz widmo Hamiltonianu o stopniowo coraz bardziej skomplikowanej strukturze. Zaczniemy od przedstawienia rozwiązań dla modelu $SU(2)$ i pokażemy, że odpowiadają one funkcjom falowym Claudsona i Halperna (podrozdział 6.2). Następnie, w podrozdziale 6.3, zastosujemy tę samą metodę do wyprowadzenia rozwiązań dla modelu $SU(3)$. Przedstawimy strukturę rozwiązań zarówno w sektorze bozonowym jak i niektórych fermionowych. Udowodnimy, że jest to poprawne uogólnienie rozwiązań Claudsona i Halperna dla modelu z symetrią $SU(3)$. W końcu, w podrozdziale 6.4 omówimy wyrażenia na widma układów SYMQM dla dowolnej symetrii $SU(N)$ i w dowolnym sektorze fermionowym.

Przedstawione rozwiązania są poprawne zarówno dla skończonego jak i nieskończonego obciążenia. Dzięki temu, możemy porównać wyniki analityczne z numerycznymi. W każdym podrozdziale potwierdzimy poprawność wzorów analitycznych odtwarzając odpowiednie wyniki numeryczne omawiane w rozdziale 5.

Na zakończenie, w rozdziale 6.5 zaprezentujemy dwa zastosowania dokładnych rozwiązań modeli SYMQM. Najpierw analitycznie odtworzymy strukturę supermultipletów otrzymanych numerycznie w podrozdziale 5.2. Następnie, stosując tradycyjny rachunek zaburzeń obliczymy dwie najniższe bozonowe energie supersymetrycznego oscylatora anharmonicznego.

Podsumowując, w rozdziale 6 omawiamy

- wyprowadzenie analitycznych wzorów na widma i stany własne modelu z symetrią $SU(3)$ w sektorze bozonowym i sektorach fermionowych,
- własności wyprowadzonych rozwiązań, takich jak ortogonalność, normalizacja, zupełność,
- wyprowadzenie analitycznych wzorów na widma modeli z symetrią $SU(N)$ w sektorze bozonowym i sektorach fermionowych,
- praktyczne wykorzystanie otrzymanych rozwiązań: analiza struktury supermultipletów w modelu $SU(3)$ oraz wykorzystanie rachunku zaburzeń do wyprowadzenia przybliżonych bozonowych energii oscylatora anharmonicznego.

Rozdział 7 zawiera podsumowanie i dyskusję wniosków omówionych w poszczególnych rozdziałach. Proponowane są też problemy, dla których przedstawione wyniki mogą się okazać pożyteczne.

Aby zaprezentować wyniki analityczne w jak najbardziej przejrzysty sposób szczegółowe wyprowadzenia zostały przeniesione do pięciu dodatków znajdujących na końcu niniejszej pracy. Poniżej pokrótce omawiamy ich zawartość.

W **dodatku A** przypominamy podstawowe własności wielomianów Laguerre'a przy okazji zapoznając Czytelnika z zastosowanym zapisem.

W **dodatku B** wyprowadzamy relacje rekurencyjne spełniane przez współczynniki rozkładu stanów własnych badanych Hamiltonianów w bazie Focka. Konsekwentnie w kolejnym dodatku, **dodatku C**, znajdują się twierdzenia pozwalające rozwiązać powyższe rekurencje. Zaczynamy od rozwiązania prostych układów równań, a kończymy przedstawiając rozwiązania wielu sprzężonych relacji rekurencyjnych.

Zarówno podczas omawiania wyników numerycznych jak i analitycznych rozróżnione zostały dwa sposoby wprowadzenia obciążenia. W rozdziale 6 opisane zostały rezultaty otrzymane przy zastosowaniu dyskretyzacji Hamiltonianu. Natomiast krótką dyskusję analitycznych rozwiązań otrzymanych przy użyciu dyskretyzacji superładunków przedstawiamy w **dodatku D**.

W końcu, w **dodatku E** znajdują się wyprowadzenia własności otrzymanych rozwiązań analitycznych, takich jak ortogonalność, normalizacja i zupełność dla modeli z symetrią $SU(2)$ i $SU(3)$.

ROZDZIAŁ 2

ZASTOSOWANIA SUPERSYMETRYCZNYCH MECHANIK KWANTOWYCH

W tym rozdziale omówimy pokrótce związki supersymetrycznych mechanik kwantowych Yanga-Millsa z różnymi obszarami fizyki teoretycznej. Rozpocznijmy od przedstawienia redukcji wymiarowej teorii pola Yanga-Millsa do jednego punktu w wyniku której możemy formalnie otrzymać modele SYMQM w różnych wymiarach. Następnie, opiszemy poszczególne zastosowania takich mechanik kwantowych: analizę widma stanów związanych gluonów w teorii pola w granicy małej objętości, opis kwantowej dynamiki relatywistycznej membrany oraz badanie dynamiki D0-bran w teorii strun.

2.1 Redukcja wymiarowa teorii Yanga-Millsa

Działanie dla supersymetrycznej teorii Yanga-Millsa w $D = d + 1$ wymiarach czasoprzestrzennych jest dane wyrażeniem [15][16],

$$S = \int d^D x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} + \frac{i}{2} \bar{\lambda}^a \gamma^\mu D_\mu \lambda^a \right), \quad (2.1)$$

gdzie użyliśmy metryki $g_{\mu\nu} = \{+1, -1, \dots, -1\}$ oraz

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (2.2)$$

μ i ν są indeksami czasoprzestrzennymi o zakresie od 0 do $D - 1$, a, b, c są indeksami reprezentacji dołączonej grupy $SU(N)$, natomiast f_{abc} stałymi struktury tej grupy. g jest stałą sprzężenia. Pochodna kowariantna D_μ ma postać

$$(D_\mu \lambda)^a = \partial_\mu \lambda^a - g f_{abc} A_\mu^b \lambda^c. \quad (2.3)$$

Bezmasowe pole wektorowe ma $D - 2$ stopni swobody, podczas gdy spinor Diraca ma $2^{D/2}$ stopni swobody. Wynika z tego, że aby otrzymać supersymetryczne rozszerzenie teorii Yanga-Millsa niezbędne jest narzucenie warunków Majorany i/lub Weyla na zmienne fermionowe, tak aby liczby bozonowych i fermionowych stopni swobody były równe. Okazuje się [17], że takie teorie mogą istnieć tylko w czasoprzestrzeni o wymiarach $D = 2, 4, 6$ oraz 10.

Esktremum działania (2.1) względem wariacji A_μ^a pozwala wyprowadzić równania ruchu dla A_μ^a ,

$$(D_\mu F^{\mu\nu})^a = -\frac{i}{2} g f_{abc} \bar{\lambda}^b \gamma^\nu \lambda^c. \quad (2.4)$$

Po rozpisaniu (2.4) osobno dla składowej $\nu = 0$ i $\nu = i = 1, \dots, D - 1$, otrzymujemy dynamiczne równania ruchu oraz nieabelowe prawo Gaussa,

$$(\partial_0 F^{0i})^a - (D_j F^{ji})^a = -\frac{i}{2} g f_{abc} \bar{\lambda}^b \gamma^i \lambda^c, \quad (2.5)$$

$$-(D_j F^{j0})^a = -\frac{i}{2} g f_{abc} \bar{\lambda}^b \gamma^0 \lambda^c. \quad (2.6)$$

Dobierając wycechowanie czasowe, $A_0^a = 0$, oraz wprowadzając zapis $F_{i0}^a \equiv E_i^a$ możemy przepisać (2.6) do postaci

$$\partial_i E_i^a - g f_{abc} A_i^b E_i^c = -\frac{i}{2} g f_{abc} \bar{\lambda}^b \gamma^0 \lambda^c. \quad (2.7)$$

W procedurze redukcji wymiarowej zakładamy, że pola w teorii zdefiniowanej w D -wymiarowej czasoprzestrzeni zależą jedynie od $d < D$ zmiennych. W efekcie otrzymujemy niżej wymiarową teorię. Szczególnym przypadkiem redukcji wymiarowej, jest redukcja D -wymiarowej teorii pola do jednego punktu, czyli założenie, że pola są stałe we wszystkich kierunkach przestrzennych. Prowadzi to do układu opisywanego mechaniką kwantową. Dla przykładu opiszemy wynik redukcji wymiarowej supersymetrycznej teorii pola Yanga-Millsa w $D = 10$. Składowe pola cechowania $A_i^a(t)$ oznaczmy przez $x_i^a(t), i = 1, \dots, D-1$, natomiast $p_i^a(t)$ będą sprzężonymi do nich pędami, $p_i^a(t) = E^{ia}(t)$. $\theta_\alpha^a(t), \alpha = 1, \dots, 16$ jest spinorem Majorany-Weyla. Zatem, prawo Gaussa (2.7) redukuje się do postaci,

$$gf_{abc}(x_i^b p_i^c - \frac{i}{2}\theta_\alpha^b \theta_\alpha^c) = 0. \quad (2.8)$$

Kwantowanie kanoniczne przeprowadzamy wprowadzając operatory odpowiadające zmiennym bozonowym x_i^a i p_i^b i spełniające kanoniczne relacje komutacji, oraz analogicznie operatory antykomutujące dla zmiennych fermionowych,

$$[x_i^a, p_j^b] = i\delta_{ij}\delta_{ab}, \quad \{\theta_\alpha^a, \theta_\beta^b\} = \delta_{\alpha\beta}\delta_{ab}. \quad (2.9)$$

Hamiltonian przyjmuje postać

$$H = \frac{1}{2}p_i^a p_i^a + \frac{g^2}{4}(f_{abc}x_i^b x_j^c)^2 + \frac{ig}{2}f_{abc}\theta_\alpha^a \Gamma_{\alpha\beta}^k \theta_\beta^b x_k^c, \quad (2.10)$$

i może być zapisany jako kwadrat superładunków danych poprzez

$$Q_\alpha = (\Gamma^k \theta^a)_\alpha p_i^a + igf_{abc}\Sigma_{\alpha\beta}^{jk}\theta_\beta^a x_j^b x_k^c, \quad \Sigma^{jk} = \frac{i}{4}[\Gamma^j, \Gamma^k], \quad (2.11)$$

mianowicie,

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = 2\delta_{\alpha\beta}H + g\Gamma_{\alpha\beta}^i x_i^a G_a, \quad (2.12)$$

gdzie

$$G_a = f_{abc}(x_i^b p_i^c - \frac{i}{2}\theta_\alpha^b \theta_\alpha^c). \quad (2.13)$$

Zauważamy, że operator (2.13) odpowiada operatorowemu wyrażeniu (2.8). Prawo Gaussa, jako dodatkowy więz, może być narzucone w postaci warunku spełnianego przez stany fizyczne [18]. Fizyczna przestrzeń Hilberta jest zatem złożona ze stanów, dla których średnia wartość operatora G_a znika. Równocześnie, G_a może być interpretowany jako operator 'kolorowego krętu' i jest generatorem transformacji $SU(N)$. Wobec tego fizyczna przestrzeń Hilberta jest niezmiennicza względem symetrii cechowania, a algebra supersymetrii zamyka się na stanach fizycznych. Hamiltonian (2.10) jest z definicji Hamiltonianem SYMQM.

2.2 Kwantowa teoria pola w małej objętości

W jednym ze swoich wykładów [19] Bjorken zaproponował, aby badania nieperturbacyjnych efektów w chromodynamice kwantowej¹ rozpocząć od analizy tej teorii w małej objętości.

¹Wprowadzenie do chromodynamiki kwantowej Czytelnik znajdzie w [20].

Sądził, że pełne zrozumienie dynamiki pola cechowania w 'pudełku' o rozmiarach 10^{-14} cm pozwoli, między innymi poprzez złożenie wielu takich małych 'pudełek', na znalezienie mechanizmu uwięzienia kwarków.

Przybliżony opis chromodynamiki kwantowej w małej objętości jest dany przez pola cechowania niezależne od położenia, dla których Hamiltonian może być otrzymany w prosty sposób poprzez redukcję wymiarową pełnej, czterowymiarowej teorii pola. W efekcie, rzeczywiste masy stanów związanych gluonów mogą być przybliżone poprzez energie własne bozonowej części Hamiltonianu SYMQM w $D = 4$, wprowadzonego w poprzednim podrozdziale. Zauważmy, że w przybliżeniu redukcji wymiarowej zakładamy, że można pominąć oddziaływanie pomiędzy modami pola o zerowym pędzie, a pozostałymi modami obecnymi w teorii.

Pełniejsze podejście zostało zaproponowane przez Lüschera [21][22], który systematycznie wydzielił Hamiltonian dla modów zerowych wraz z perturbacyjnymi poprawkami pochodzącymi od modów o niezerowym pędzie. Badania te zostały następnie rozwinięte przez van Baala [23][24][25][26].

Rozważmy nieabelową teorię pola Yanga-Millsa na trójwymiarowym torusie $S^1 \times S^1 \times S^1$. Obwód każdego z okręgów oznaczamy jako L . Składowe przestrzenne pola cechowania $A_k(x)$, $k = x, y, z = 1, 2, 3$, mogą być zapisane jako [21]

$$A_k(x) = A_k^a(x)T^a, \quad A_k(x + L\mathbf{j}) = A_k(x), \quad (2.14)$$

gdzie \mathbf{j} jest dowolnym wersorem, tzn. żądamy, aby pole cechowania było periodyczne. Symetria cechowania wymaga, aby pola $A_k(x)$ i

$$\tilde{A}_k(x) = \Lambda(x)A_k(x)\Lambda^{-1}(x) + \Lambda(x)\partial_k\Lambda^{-1}(x) \quad (2.15)$$

były utożsamione, pod warunkiem, że $\Lambda(x + L\mathbf{j}) = \Lambda(x)$. Po wprowadzeniu wycechowania czasowego, $A_0 = 0$, i po przeprowadzeniu kwantowania kanonicznego, H staje się operatorem działającym na funkcjonały falowe $\Psi[A_k]$. Operatory $E_k^a(x)$ i $B_k^a(x)$ w reprezentacji Schrödingera mają postać [21],

$$\begin{aligned} E_k^a(x) &\equiv \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta A_k^a(x)}, \\ B_k^a(x) &\equiv \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} (\partial_i A_j^a(x) - \partial_j A_i^a(x) + f_{abc} A_i^b(x) A_j^c(x)). \end{aligned} \quad (2.16)$$

W efekcie otrzymujemy Hamiltonian H

$$H = \int_0^L d^3x \left(\frac{1}{2} g_0^2 E_k^a(x) E_k^a(x) + \frac{1}{2g_0^2} B_k^a(x) B_k^a(x) \right), \quad (2.17)$$

gdzie g_0 jest gołą stałą sprzężenia. Warunek Gaussa, będący generatorem niezależnych od czasu transformacji cechowania G^a , jest narzucony na fizyczne funkcjonały falowe

$$G^a \Psi[A_k] = 0, \quad (2.18)$$

co jest równoważne stwierdzeniu, że fizyczne stany są niezmiennicze ze względu na transformacje cechowania

$$\Psi[\tilde{A}_k] = \Psi[A_k]. \quad (2.19)$$

Na poziomie klasycznym, rozwiązaniami o najniższej energii są konfiguracje nazywane *toronami*. Zauważmy, że gdy stała sprzężenia maleje, wyraz w Hamiltonianie (2.17), który można interpretować jako energia potencjalna, rośnie. A zatem, oczekujemy, że konfiguracje o najmniejszej energii spełniają warunek $B_k^a(x) = 0$.

Dla $3N$ liczb rzeczywistych, ϕ_k^n , $k = 1, 2, 3$, $n = 1, \dots, N$ spełniających warunek $\sum_i \phi_k^i = 0$, definiujemy niezależne od położenia pole cechowania $A_k(x)$,

$$A_k(x) = \frac{1}{iL} \begin{pmatrix} \phi_k^1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \phi_k^n \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

$A_k(x)$ można rozłożyć jako $A_k(x) = A_k^a(x)T^a$ wykorzystując tylko $N - 1$ diagonalnych generatorów T^a . Łatwo można się przekonać, że w takim przypadku wyraz $f^{abc}A_i^b(x)A_j^c(x)$ znika dzięki własności tensora f_{abc} , a zatem $B_k^a(x) = 0$. Torony definiujemy jako wszystkie pola $A_k(x)$, które są równoważne konfiguracjom (2.20) poprzez transformację cechowania (2.15). Dodatkowo, utożsamiamy dwa rozwiązania (2.20), jeśli $\tilde{\phi}_k^i = \phi_k^{\sigma(i)} \pmod{2\pi}$ dla dowolnej permutacji $\sigma(i)$ indeksów i .

Możemy teraz zbadać fluktuacje wokół rozwiązania (2.20). W tym celu zapisujemy

$$A_k^a(x) = g_0^{\frac{2}{3}} L^{-\frac{d}{3}} c_k^a + g_0 q_k^a(x), \quad (2.21)$$

przy czym c_k^a nie zależą od położenia i mogą być jawnie sprowadzone do zmiennych ϕ_k^i poprzez transformację cechowania (2.15). Zakładamy, że średnia fluktuacji znika, $\int_0^L d^d x q_k^a(x) = 0$. Podobnie rozwijamy pęd,

$$\pi_k^a(x) = g_0^{-\frac{2}{3}} L^{-\frac{2d}{3}} e_k^a + g_0^{-1} p_k^a(x), \quad (2.22)$$

gdzie $e_k^a = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial c_k^a}$, oraz $\int_0^L d^d x p_k^a(x) = 0$

Lüscher wykazał, że w najniższym rzędzie w zrenormalizowanej stałej sprzężenia g , efektywny Hamiltonian w zmiennych c_i^a i e_i^a ma postać

$$H = g^{\frac{2}{3}} L^{-1} \left(\frac{1}{2} e_k^a e_k^a + \frac{1}{4} f^{abc} c_k^b c_l^c f^{ade} c_k^d c_l^e \right), \quad (2.23)$$

oraz wyprowadził wyrażenia na wyższe poprawki od pól $q_k^a(x)$ i $p_k^a(x)$. Hamiltonian (2.23) jest bozonową częścią Hamiltonianu SYMQM (2.10) w $D = 4$ po przeskalowaniu zmiennych $c_k^a \rightarrow g^{\frac{1}{3}} c_k^a$ i $e_k^a \rightarrow g^{-\frac{1}{3}} e_k^a$.

2.3 Zregulowany opis membrany

W pracy Goldstone'a i Hoppego [27] modele SYMQM zostały zaproponowane jako zregulowany opis dynamiki membran w D -wymiarowej czasoprzestrzeni. Regularyzacja ogranicza nieskończoną liczbę stopni swobody opisujących membranę do ich skończonego podzbioru, zachowując przy tym symetrie układu. Dzięki temu możliwe jest przeprowadzenie kwantowania

kanonicznego. Zilustrujemy powyższe idee opierając się na artykule przeglądowym Taylora [28], pracach [27] [29] [30] oraz książce [31].

Membrana jest obiektem dwuwymiarowym i jej ruch może być opisany trójwymiarową objętością w D -wymiarowej czasoprzestrzeni Minkowskiego. Każdy punkt tej objętości można oznaczyć poprzez podanie trzech liczb $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2\}$. Jego położenie w czasoprzestrzeni opisuje zatem D funkcji oznaczonych jako $X^\mu(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2)$, $\mu = 0, \dots, D-1$, będących współrzędnymi punktu w zadanym układzie współrzędnych wprowadzonym w czasoprzestrzeni. Podanie jawnych wyrażeń na funkcje X^μ jest równoznaczne z opisaniem pełnego ruchu membrany.

W mechanice klasycznej, aby znaleźć funkcje X^μ musimy rozwiązać równania ruchu, wynikające z zasady najmniejszego działania, dla zadanych warunków początkowych. Jako działanie najwygodniej jest użyć działania Polyakova, które można otrzymać wprowadzając metrykę $\gamma_{\alpha\beta}$ na objętości membrany

$$S = -\frac{T}{2} \int d^3\sigma \sqrt{-\gamma} (\gamma^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu} - 1). \quad (2.24)$$

Z wariacji $\delta\gamma^{\alpha\beta}$ otrzymujemy

$$\gamma_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu} \equiv h_{\alpha\beta}, \quad (2.25)$$

przy czym $\eta_{\mu\nu}$ jest metryką Minkowskiego o sygnaturze $\{-, +, \dots, +\}$, natomiast z wariacji δX^μ dostajemy równania ruchu dla X^μ

$$\partial_\alpha (\sqrt{-\gamma} \gamma^{\alpha\beta} \partial_\beta X^\mu) = 0. \quad (2.26)$$

Wykorzystując swobodę reparametryzacji zmiennych $\{\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2\}$, możemy usunąć z opisu część niefizycznych stopni swobody. W tym celu wprowadzamy następujące więzy,

$$\gamma_{0p} = 0, \quad \text{oraz} \quad \gamma_{00} = -\frac{4}{\nu^2} \text{deth}_{pq}, \quad (2.27)$$

gdzie $p, q = 1, 2$. Odpowiednio, wyrażenia (2.27) przetłumaczone na związki pomiędzy funkcjami X^μ przyjmują postać

$$\dot{X}^\mu \partial_p X^\nu \eta_{\mu\nu} = 0, \quad \text{oraz} \quad \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu \eta_{\mu\nu} = -\frac{2}{\nu^2} \{X^\mu, X^\nu\} \{X_\mu, X_\nu\}, \quad (2.28)$$

przy czym wprowadziliśmy zapis $\{X^\mu, X^\nu\} = \sum_{p,q} \epsilon^{pq} \partial_p X^\mu \partial_q X^\nu$, a ϵ^{pq} jest antysymetrycznym tensorem z $\epsilon^{12} = 1$. Po narzuceniu równań (2.27) dla działania (2.24) dostajemy

$$S = \frac{T\nu}{4} \int d^3\sigma (\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu - \frac{2}{\nu^2} \{X^\mu, X^\nu\} \{X_\mu, X_\nu\}). \quad (2.29)$$

Przechodząc do układu stożka świetlnego [30] możliwe jest jawne rozwiązanie równań więzów. W tym celu wybieramy cechowanie stożka, $X^+(\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2) = \sigma^0$, gdzie zmienne stożkowe są dane tradycyjnie przez $X^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(X^0 \pm X^{D-1})$, a pozostałe zmienne poprzeczne oznaczamy przez X^i , $i = 1, \dots, D-2$. Otrzymujemy wtedy dla pochodnych X^- ,

$$\partial_p X^- = \dot{X}^i \partial_p X^i, \quad \text{oraz} \quad \dot{X}^- = \frac{1}{2} \dot{X}^i \dot{X}^i + \frac{1}{\nu^2} \{X^i, X^j\} \{X^i, X^j\}. \quad (2.30)$$

Hamiltonian dla membrany w układzie stożka świetlnego wynosi

$$H = \frac{\nu T}{4} \int d^2\sigma (\dot{X}^i \dot{X}^i + \frac{2}{\nu^2} \{X^i, X^j\} \{X^i, X^j\}), \quad (2.31)$$

wraz z pozostałymi więzami

$$\{\dot{X}^i, X^i\} = 0. \quad (2.32)$$

Warto zauważyć, że H ciągle pozostaje niezmienniczy ze względu na grupę symetrii niezależnych od czasu i zachowujących pole związaną z dowolnością wyboru układu odniesienia w czasoprzestrzeni.

Następnym krokiem jest rozwinięcie funkcji X^i w zupełnej bazie ortonormalnych funkcji zdefiniowanych na membranie,

$$X^i(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2) = \sum_a X_a^i(\sigma_0) Y_a(\sigma_1, \sigma_2), \quad a = 0, 1, \dots \quad (2.33)$$

Przykładowo, dla membrany o topologii sfery, jako zbiór funkcji Y_a mogą być wybrane harmoniki sferyczne $Y_{lm}(\theta, \phi)$. Funkcje Y_a stanowią bazę zupełną, a zatem możemy rozłożyć nawias Poissona dwóch funkcji Y_a i Y_b w tej bazie,

$$\{Y_a, Y_b\} = g_{abc} Y_c. \quad (2.34)$$

Regularyzacja układu polega na pozostawieniu w opisie jedynie N pierwszych zmiennych X_a^i , osobno dla każdego i . Pierwotny układ będzie mógł być odtworzony w granicy $N \rightarrow \infty$. Taka procedura zredukuje grupę G przekształceń zachowujących pole do skończonej wymiarowej grupy G_N , takiej, że $\lim_{N \rightarrow \infty} G_N = G$. Stałe struktury g_{abc} grupy G są zastąpione nowymi stałymi f_{abc}^N , pod warunkiem, że $\lim_{N \rightarrow \infty} f_{abc}^N = g_{abc}$. Hoppe pokazał, że jeśli obcięcie na wyższe mody będzie postaci $N^2 - 1$ grupę G_N można utożsamić z grupą $SU(N)$.

Z (2.34) wynika, że funkcje Y_a transformują się w reprezentacji dołączonej grupy G . Wobec tego, w zregularyzowanym układzie zmienne X_a będą transformować się w reprezentacji dołączonej grupy $SU(N)$. Postępując zgodnie z regułami kwantowania kanonicznego zmienne X_a^i są zastępowane operatorami spełniającymi odpowiednie relacje komutacji, natomiast nawias Poissona jest zamieniony na komutator. W efekcie, kwantowy Hamiltonian zregularyzowanej membrany może być zapisany jako

$$H = T \left(P_i^a P_i^a + \frac{1}{2} (f_{abc} X_i^b X_j^c)^2 \right), \quad (2.35)$$

a więc dokładnie odpowiada bozonowej części Hamiltonianu SYMQM (2.10). Wprowadzając zmienne macierzowe $\mathbf{X}^i \equiv X_{mn}^i = \sum_a X_a^i T_{mn}^a$, gdzie T_{mn}^a są generatorami grupy $SU(N)$ w reprezentacji fundamentalnej, $m, n = 1, \dots, N$,

$$H = \frac{T}{2} \text{tr} \left(\mathbf{P}^i \mathbf{P}^i - \frac{1}{2} [\mathbf{X}^i, \mathbf{X}^j] [\mathbf{X}^i, \mathbf{X}^j] \right). \quad (2.36)$$

Wynikają z niego równania ruchu, które należy uzupełnić o równanie więzów,

$$\ddot{\mathbf{X}}^i + [[\mathbf{X}^i, \mathbf{X}^j], \mathbf{X}^j] = 0, \quad [\dot{\mathbf{X}}^i, \mathbf{X}^i] = 0. \quad (2.37)$$

2.4 Dynamika D0 bran

Trzecim zagadnieniem w którego opisie pojawiają się supersymetryczne mechaniki kwantowe Yanga-Millsa jest dynamika D0-bran, dynamicznych obiektów zawartych w teorii M [32].

Teoria M jest hipotetyczną teorią zdefiniowaną w $D = 11$ wymiarowej czasoprzestrzeni. Nie jest znane jej jawne sformułowanie. Znane są natomiast jej szczególne granice. Niskoenergetyczne widmo teorii M jest dane przez $D = 11$ wymiarową teorię supergrawitacji. Warto zauważyć, że $D = 11$ jest najwyższym wymiarem dla którego istnieją teorie supergrawitacji zawierające pola o spinie mniejszym lub równym niż 2. Okazuje się, że klasycznie można skonstruować tylko jedną taką teorię [33]. Rozważając inne granice, możliwe jest otrzymanie pięciu konsystentnych teorii strun zdefiniowanych w $D = 10$ wymiarowej czasoprzestrzeni. Na przykład, teoria M w czasoprzestrzeni z jednym z wymiarów skompaktyfikowanych na okręgu jest opisana przez teorię strun typu IIA.

Teoria M opisuje oddziaływanie wielu różnych obiektów. Przykładem takich obiektów są p -brany - p wymiarowe hiperpłaszczyzny na których struny mogą się kończyć. W szczególności, w teorii M istnieją punktowe brany, 0-brany.

Witten zauważył [34], że dynamika p -bran w teorii strun jest opisana poprzez redukcję wymiarową $D = 10$ wymiarowej supersymetrycznej teorii Yanga-Millsa do p -wymiarów. Wobec tego, dynamika 0-bran jest dokładnie opisana przez model $D = 10$ SYMQM wprowadzony w tym rozdziale wyrażeniem (2.10).

Jak wspomnieliśmy, rozważając teorię M skompaktyfikowaną na okręgu otrzymujemy teorię strun typu IIA. Okazuje się, że w układzie o nieskończonym pędzie w jednym z kierunków [35], dynamika jest dana wyłącznie poprzez opis 0-bran; pozostałe stopnie swobody odsprzęgają się. W takim układzie odniesienia możliwe jest sformułowanie hipotezy BFSS [14] (od nazwisk autorów: Banksa, Fischlera, Shenkera i Susskinda), mówiącej, że pełny opis teorii M jest dany przez model $D = 10$ SYMQM w granicy $N \rightarrow \infty$. Stopnie swobody modelu SYMQM odpowiadają stopniom swobody 0-bran w kierunkach prostopadłych do skompaktyfikowanego kierunku.

Koniecznym kryterium poprawności hipotezy BFSS jest istnienie odpowiedniości pomiędzy stanami w obydwóch teoriach, teorii strun i modelu SYMQM. A zatem, w modelu SYMQM w $D = 10$ musi istnieć normalizowalny stan odpowiadający grawitonowi [36]. Istnienie takich stanów zostało wykluczone w modelach o liczbie wymiarów $D < 10$ [37][38], natomiast dla $D = 10$ wiele prac wskazuje, że taki stan faktycznie istnieje [39]. Jego konstrukcja okazuje się być bardzo nietrywialna [40][41][42].

ROZDZIAŁ 3

MODELE I ICH SYMETRIE

Zgodnie z argumentami przedstawionymi w poprzednim rozdziale z fizycznego punktu widzenia interesujące są modele SYMQM w $D = 4$ i $D = 10$ dla różnych $SU(N)$. Ich analiza, zarówno numeryczna jak i analityczna, jest trudna. Celem niniejszej rozprawy jest poznanie i zrozumienie dynamiki najprostszych układów SYMQM. Tak zdobyta wiedza będzie mogła być następnie wykorzystana w badaniach bardziej skomplikowanych przypadków. W związku z tym, przedstawiamy systematyczną dyskusję modeli SYMQM zdefiniowanych w $D = 2$. Okazuje się, że są to modele swobodne. Niemniej jednak ze względu na dodatkowy więz będący zredukowanym prawem Gaussa ich rozwiązanie nie jest trywialne. Aby dodatkowo sprawdzić metody analityczne i numeryczne w przypadku układów z nietrywialnym oddziaływaniem wybraliśmy model supersymetrycznego oscylatora anharmonicznego. Jak wykażemy poniżej, jego potencjał ma wiele cech wspólnych z potencjałami wyżej wymiarowych modeli SYMQM.

W obecnym rozdziale definiujemy konkretną postać operatorów Hamiltona dla układów analizowanych w dalszych częściach pracy oraz dyskutujemy ich symetrie.

3.1 Supersymetryczny oscylator anharmoniczny

W celu skonstruowania supersymetrycznej wersji oscylatora anharmonicznego posiadającego symetrię cechowania zaczniemy od definicji superładunków (szczegółowe omówienie konstrukcji supersymetrycznych mechanik kwantowych poprzez uogólnione operatory kreacji i anihilacji można znaleźć np. w [43]). Przykładowo, dla supersymetrycznego oscylatora harmonicznego są one dane poprzez

$$Q^\dagger = f^\dagger a, \quad Q = f a^\dagger. \quad (3.1)$$

Spełniają one relacje antykomutacji,

$$\begin{aligned} \{Q, Q^\dagger\} &= 2H, \\ [Q, H] &= [Q^\dagger, H] = 0, \\ \{Q, Q\} &= \{Q^\dagger, Q^\dagger\} = 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

gdzie H jest Hamiltonianem układu. W tym przypadku otrzymujemy

$$H = \frac{1}{2}\{Q^\dagger, Q\} = \frac{1}{2}(a^\dagger a + f^\dagger f). \quad (3.3)$$

Widmo w sektorze bozonowym jest równe $E_0 = \frac{1}{2}n$ z $n \in \mathbb{Z}$, natomiast w sektorze z jednym kwantem fermionowym mamy $E_1 = \frac{1}{2}(n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$. Zatem, w sektorze bozonowym istnieje niezdegenerowany stan o zerowej energii będący próżnią supersymetryczną. Wszystkie pozostałe energie są podwójnie zdegenerowane.

Zapisując bozonowe operatory kreacji za pomocą operatorów pędu i położenia otrzymujemy

$$Q^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}f^\dagger(ip+x), \quad Q = \frac{1}{\sqrt{2}}f(-ip+x). \quad (3.4)$$

Uogólnieniem powyższego modelu, zaproponowanym przez Wittena [10], jest zastąpienie operatora położenia poprzez dowolną jego funkcję $W(x)$ nazywaną *superpotencjałem*. Mamy zatem

$$Q^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}f^\dagger(-ip+W(x)), \quad Q = \frac{1}{\sqrt{2}}f(ip+W(x)). \quad (3.5)$$

Aby powyższy układ lepiej imitował modele SYMQM wprowadzamy zbiór $N^2 - 1$ operatorów położenia i pędu x_a i p_a oraz fermionowych operatorów kreacji i anihilacji, f_a^\dagger i f_a , transformujących się w reprezentacji *dołączonej* grupy $SU(N)$. Hamiltonian musi być niezmiennikiem względem globalnej symetrii $SU(N)$, co możemy otrzymać postulując następującą postać superładunków¹ (stosujemy zapis, w którym powtórzony indeks jest wysumowany),

$$Q^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} f_a^\dagger (ip_a + W_a), \quad Q = \frac{1}{\sqrt{2}} f_a (-ip_a + W_a). \quad (3.6)$$

Łatwo można się przekonać, że powyższe superładunki spełniają relacje komutacji (3.2). Hamiltonian wynosi więc

$$H = \frac{1}{4} (p_a p_a + W_a W_a) + \frac{1}{8} (\partial_a W_b + \partial_b W_a) [f_a^\dagger, f_b]. \quad (3.7)$$

Aby dodatkowo upodobnić ten układ do modeli SYMQM narzucamy na przestrzeń Hilberta warunek Gaussa, tzn. żądamy aby fizyczna przestrzeń Hilberta składała się wyłącznie ze stanów niezmienniczych ze względu na symetrię $SU(N)$. Zauważmy, że w przypadku modeli SYMQM warunek niezmienniczości jest związany z procedurą kwantowania teorii z cechowaniem, tutaj jest arbitralnie dodanym więzem.

Ułatwieniem konstrukcji operatorów singletowych jest wprowadzenie zapisu macierzowego. Dzięki niemu każdy niezmienniczy operator może być zapisany jako ślad [44]. Wprowadzamy zatem

$$x_{i,j} = \sum_{a=1}^{N^2-1} x_a T_{i,j}^a, \quad p_{i,j} = \sum_{a=1}^{N^2-1} p_a T_{i,j}^a, \quad f_{i,j}^\dagger = \sum_{a=1}^{N^2-1} f_a^\dagger T_{i,j}^a, \quad f_{i,j} = \sum_{a=1}^{N^2-1} f_a T_{i,j}^a, \quad (3.8)$$

gdzie $T_{i,j}^a$ są generatorami grupy $SU(N)$ w reprezentacji *fundamentalnej*, $i, j = 1, \dots, N$. Wszystkie operatory stają się wobec tego macierzami o elementach operatorowych. Wprowadzamy również uproszczony zapis na ślady, mianowicie, $\text{tr}(O) \equiv (O)$. Będziemy jednak z niego korzystać tylko gdy pełny zapis będzie zbyt uciążliwy.

Pozostało doprecyzować postać superpotencjału W_a . W przypadku $W_a = 0$ otrzymujemy model SYMQM, dla $W_a = x_a$ otrzymujemy zbiór $N^2 - 1$ supersymetrycznych oscylatorów harmoniczych. Nietrywialny przypadek może być otrzymany postulując

$$W_a = \frac{g}{2} d_{abc} x_b x_c, \quad (3.9)$$

gdzie g jest stałą sprzężenia, a d_{abc} jest całkowicie symetrycznym tensorem grupy $SU(N)$. Hamiltonian (3.7) redukuje się do

$$H = \frac{1}{4} (p_a p_a + \frac{g^2}{4} d_{abe} d_{ecd} x_a x_b x_c x_d) + \frac{g}{4} d_{abc} x_a [f_b^\dagger, f_c]. \quad (3.10)$$

Superładunki przyjmują odpowiednio formę

$$Q^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} f_a^\dagger (ip_a + \frac{g}{2} d_{abc} x_b x_c), \quad Q = \frac{1}{\sqrt{2}} f_a (-ip_a + \frac{g}{2} d_{abc} x_b x_c). \quad (3.11)$$

¹Dziękuję J. Woškowi za sugestię.

Interesującym elementem tego modelu jest bozonowy potencjał czwartego stopnia, który dla grupy $SU(3)$ ma prostą postać

$$d_{abe}d_{ecd}x_ax_bx_cx_d = \frac{1}{3}(x_ax_a)^2. \quad (3.12)$$

Wobec tego, oczekujemy, że widmo układu (3.10) jest czysto dyskretne. Aby zapisać Hamiltonian w języku śladów, wykorzystujemy następujące związki prawdziwe dla dowolnej grupy $SU(N)$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}p_ap_a &= \text{tr } p^2, \\ \frac{1}{8}x_ax_bx_cx_d d_{abe}d_{ecd} &= \text{tr } x^4 - \frac{1}{N}(\text{tr } x^2)^2, \\ \frac{1}{2}x_af_b^\dagger f_c d_{abc} &= \text{tr}(xf^\dagger f) - \text{tr}(xf f^\dagger), \end{aligned} \quad (3.13)$$

i ostatecznie otrzymujemy

$$H = \frac{1}{2}\text{tr } p^2 + \frac{1}{2}g^2\left(\text{tr } x^4 - \frac{1}{N}(\text{tr } x^2)^2\right) + g \text{tr}(x[f^\dagger, f]). \quad (3.14)$$

Warto zwrócić uwagę na fakt, że $d_{abc}x_a[f_b^\dagger, f_c] = 2d_{abc}x_af_b^\dagger f_c$, gdzie wykorzystaliśmy równość $\sum_b d_{abb} = 0$ prawdziwą dla wszystkich grup $SU(N)$.

Na koniec zauważmy, że z zakazu Pauliego wynika, że stan kwantowy może posiadać co najwyżej $N^2 - 1$ kwantów fermionowych; $f_a^\dagger f_1^\dagger f_2^\dagger \dots f_{N^2-1}^\dagger = 0$. Rozważmy fermionowy operator liczby cząstek,

$$\text{tr}(f^\dagger f) = f_a^\dagger f_a. \quad (3.15)$$

Oczywiście, $\text{tr}(f^\dagger f)|0\rangle = 0$, gdzie $|0\rangle$ jest próżnią Focka. Hamiltonian supersymetrycznego oscylatora anharmonicznego zachowuje fermionową liczbę kwantów, tzn. komutuje z operatorem $\text{tr}(f^\dagger f)$. W związku z tym, jego analizę możemy prowadzić niezależnie w sektorach o ustalonej liczbie kwantów fermionowych n_F .

3.1.1 Symetria cząstka-dziura

Hamiltonian (3.10) jest niezmienniczy względem następującej transformacji

$$x \rightarrow -x, \quad p \rightarrow -p, \quad f \rightarrow f^\dagger, \quad f^\dagger \rightarrow f. \quad (3.16)$$

Superładunki przy (3.16) wymieniają się rolami, $Q \rightarrow Q^\dagger$ oraz $Q^\dagger \rightarrow Q$. Kanoniczne relacje komutacji i antykomutacji pozostają niezmienione,

$$[x_a, p_b] \rightarrow [-x_a, -p_b] = i\delta_{a,b}, \quad \{f_a, f_b^\dagger\} \rightarrow \{f_a^\dagger, f_b\} = \delta_{a,b}. \quad (3.17)$$

A zatem, istnieje operator unitarny U realizujący tę transformację w przestrzeni Hilberta. Łatwo się przekonać, że $U^2 = \mathcal{I}$. Wobec tego, $U^\dagger = U$. Mamy więc,

$$Uf_a^\dagger U = f_a, \quad Uf_a U = f_a^\dagger, \quad Ux_a U = -x_a, \quad Up_a U = -p_a. \quad (3.18)$$

Sprawdzimy teraz czy obraz próżni Focka poprzez U jest stanem własnym operatora $\text{tr}(f^\dagger f)$, wprowadzonego w (3.15),

$$\text{tr}(f^\dagger f)U|0\rangle = f_a^\dagger f_a U|0\rangle = U f_a U U f_a^\dagger U U|0\rangle = U f_a f_a^\dagger|0\rangle = (N^2 - 1)U|0\rangle, \quad (3.19)$$

gdzie wykorzystaliśmy fakt, że $a = 1, \dots, N^2 - 1$. Widzimy więc, że stan $U|0\rangle$ jest stanem własnym $\text{tr}(f^\dagger f)$ i zawiera maksymalną, dopuszczalną przez zakaz Pauliego, liczbę kwantów fermionowych. W związku z tym, oznaczmy ten stan przez $|1\rangle \equiv U|0\rangle$.

Ogólny stan bozonowy $|E\rangle_0$ może być zapisany jako

$$|E\rangle_0 = \sum_{n_B=0}^{\infty} f_{n_B}(a^\dagger; E)|0\rangle, \quad (3.20)$$

przy czym współczynniki $f_{n_B}(a^\dagger; E)$ są operatorami zbudowanymi z n_B -tej potęgi operatora a^\dagger , a ich czynniki liczbowe są tak dobrane, aby $H|E\rangle_0 = |E\rangle_0$. Zatem,

$$|E\rangle_{N^2-1} \equiv U|E\rangle_0 = \sum_{n_B=0}^{\infty} (-1)^{n_B} f_{n_B}(a^\dagger; E)|1\rangle. \quad (3.21)$$

Uogólnienie powyżej obserwacji dla stanu z sektora z n_F kwantami fermionowymi jest następujące. Dla stanu $|E\rangle_{n_F}$ z takiego sektora mamy

$$|E\rangle_{n_F} = \sum_{n_B=0}^{\infty} f_{n_B, n_F}(a^\dagger, f^\dagger; E)|0\rangle, \quad (3.22)$$

odpowiadający stan poprzez symetrię cząstka-dziura będzie mieć rozwinięcie,

$$|E\rangle_{N^2-1-n_F} \equiv U|E\rangle_{n_F} = \sum_{n_B=0}^{\infty} (-1)^{n_B} f_{n_B, n_F}(a^\dagger, f; E)|1\rangle. \quad (3.23)$$

Jeśli $|E\rangle_{n_F}$ jest stanem własnym Hamiltonianu o energii E ,

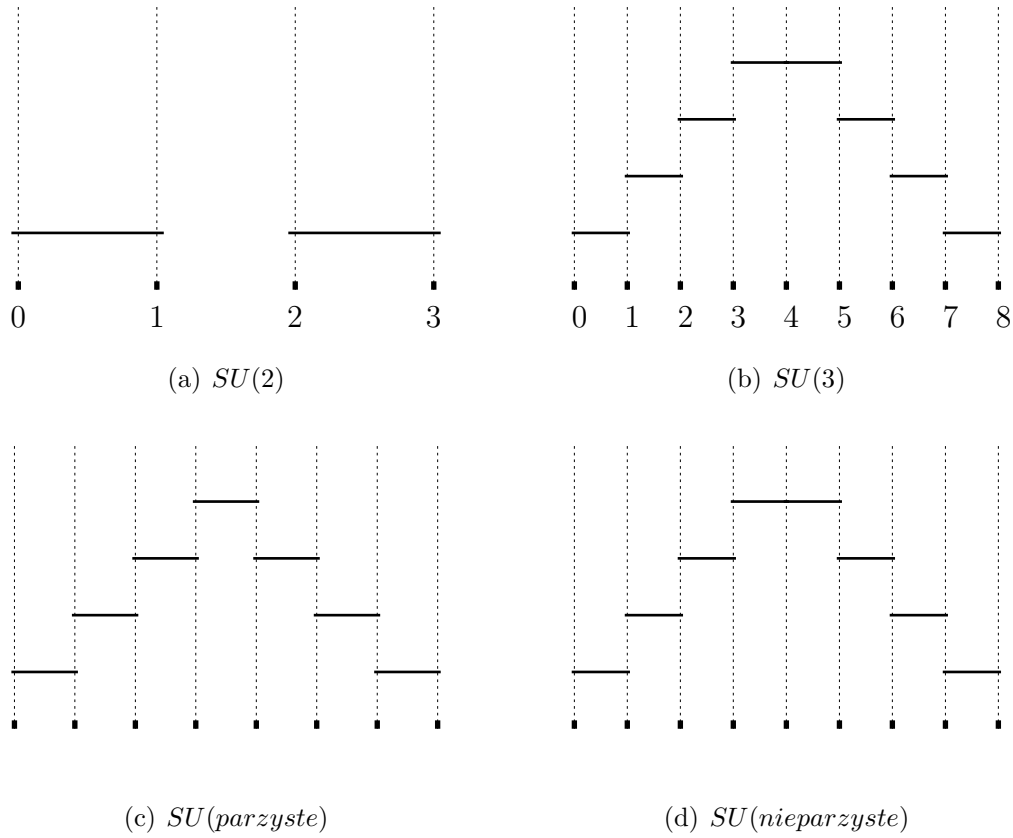
$$H|E\rangle_{n_F} = E|E\rangle_{n_F}. \quad (3.24)$$

energia stanu $|E\rangle_{N^2-1-n_F}$ wynosi,

$$H|E\rangle_{N^2-1-n_F} = HU|E\rangle_{n_F} = UH|E\rangle_{n_F} = EU|E\rangle_{n_F} = E|E\rangle_{N^2-1-n_F}. \quad (3.25)$$

Zatem, konsekwencją symetrii cząstka-dziura jest podwójna degeneracja widma. Każdej energii własnej z sektora z n_F kwantami fermionowymi, $n_F \leq \frac{1}{2}(N^2 - 1)$, odpowiada taka sama energia w sektorze z $N^2 - 1 - n_F$ kwantami fermionowymi.

Wynika z tego, że dla modeli z grupami symetrii $SU(N)$ dla N nieparzystych widmo środkowym sektorze (z $n_F = \frac{1}{2}(N^2 - 1)$) jest podwójnie zdegenerowane. Stany z tego sektora tworzą supermultiplety zarówno ze stanami z sektora po lewej stronie (z $n_F = \frac{1}{2}(N^2 - 1) - 1$) jak i po prawej (z $n_F = \frac{1}{2}(N^2 - 1) + 1$). Symetria cząstka-dziura wymaga, aby widma w tych ostatnich sektorach były identyczne. Zatem widmo z sektora z $n_F = \frac{1}{2}(N^2 - 1)$ musi być podwójnie zdegenerowane. Schematyczny rysunek 3.1 ilustruje różnice pomiędzy strukturą supermultipletów dla modeli z symetrią $SU(N)$ z parzystym (3.1(a) i 3.1(c)) i nieparzystym N (3.1(b) i 3.1(d)).



Rysunek 3.1: Schematyczna struktura supermultipletów dla modeli z symetrią $SU(N)$ dla różnych N . Na osi poziomej oznaczono punktami poszczególne sektory fermionowe. Dla modelu $SU(2)$ $n_F = 0, \dots, 3$, natomiast dla modelu $SU(3)$ $n_F = 0, \dots, 8$. Na rysunkach 3.1(c) i 3.1(d) przedstawiono typową sytuację dla N parzystego i nieparzystego. Poziome odcinki łączące sąsiednie sektory fermionowe reprezentują możliwe supermultiplety utworzone przez stany z tych sektorów. Na uwagę zasługuje degeneracja widma w środkowym sektorze ($n_F = \frac{1}{2}(N^2 - 1)$) w modelach z N nieparzystym.

3.1.2 Parzystość

Transformację parzystości, P , definiujemy jako

$$x \rightarrow -x, \quad p \rightarrow -p, \quad f \rightarrow -f, \quad f^\dagger \rightarrow -f^\dagger. \quad (3.26)$$

Parzystość nie jest symetrią Hamiltonianu, $[H, P] \neq 0$, ponieważ wyraz fermionowy w potencjale nie jest niezmienniczy. Prawdziwa jest jednak słabsza równość, mianowicie

$${}_0\langle E|[H, P]|E\rangle_0 = 0, \quad (3.27)$$

wynikająca z faktu, że wartość oczekiwana wspomnianego wyrazu fermionowego w potencjale znika w sektorze bozonowym. Oznacza to, że tylko w sektorze bozonowym parzystość jest

dobrą liczbą kwantową. Zatem, czynnik $(-1)^j$ w (3.21) można wyciągnąć przed sumę i jako czynnik fazowy nie ma tutaj znaczenia. Wobec tego, obraz bozonowego stanu własnego przez transformację U posiada rozwinięcie w bazie,

$$|E\rangle_{N^2-1} = \sum_{n_B=0}^{\infty} f_{n_B}(a^\dagger; E)|1\rangle. \quad (3.28)$$

Superładunki (3.11) nie mają określonej parzystości. A zatem, dla parzystego stanu bozonowego $|E\rangle_0^{even}$, $Q^\dagger|E\rangle_0^{even}$ będzie stanem z sektora z $n_F = 1$ o nieokreślonej parzystości. W przypadku modeli SYMQM, superładunki są nieparzyste, a zatem $Q^\dagger|E\rangle_0^{even}$ będzie stanem nieparzystym.

3.1.3 Symetria skalowania

W [45] zbadana została zależność widma kwantowego oscylatora anharmonicznego od stałej sprzężenia. Jednym z wniosków było opracowanie symetrii skalowania zauważonej przez Symanzika. Okazuje się, supersymetryczny oscylator anharmoniczny jest również niezmienniczy ze względu na tę symetrię. Aby się o tym przekonać rozważmy następujące przeskalowanie zmiennych

$$x \rightarrow \lambda x, \quad p \rightarrow \frac{1}{\lambda} p, \quad f \rightarrow f, \quad f^\dagger \rightarrow f^\dagger, \quad (3.29)$$

Hamiltonian (3.10) transformuje się jak

$$H \rightarrow H = \frac{1}{\lambda^2} \left(\text{tr } p^2 + g^2 \lambda^6 \left(\text{tr } x^4 - \frac{1}{N} (\text{tr } x^2)^2 \right) + 2g \lambda^3 \text{tr}(x[f^\dagger, f]) \right). \quad (3.30)$$

Zatem, biorąc $\lambda = g^{-\frac{1}{3}}$ otrzymujemy równość,

$$H(g) \rightarrow g^{\frac{2}{3}} H(1). \quad (3.31)$$

Transformacje (3.29) mogą być reprezentowane poprzez operatory unitarne, a zatem obydwa operatory w (3.31) mają identyczne widma. Wystarczy więc obliczyć widmo H dla $g = 1.0$.

Warto zaznaczyć, że supersymetryczny oscylator anharmoniczny ma kilka cech wspólnych z wyżej wymiarowymi modelami SYMQM. Pomimo, że potencjał tych ostatnich zawiera antysymetryczny tensor f_{abc} zamiast całkowicie symetrycznego tensora d_{abc} , ich Hamiltoniany są niezmiennicze ze względu na symetrię skalowania. Zachowują one również symetrię cząstka-dziura. A zatem, przedstawiony powyżej supersymetryczny oscylator anharmoniczny jest dobrym układem do sprawdzenia podejścia numerycznego oraz metod analitycznych przed rozpoczęciem badań wyżej wymiarowych SYMQM.

3.2 Modele SYMQM

Stopnie swobody dwuwymiarowych modeli SYMQM są opisane zmienną skalarną x_a i zespoloną zmienną fermionową f_a . Indeks a jest indeksem dołączonym grupy $SU(N)$. Operatory

bozonowe x_a i p_a oraz fermionowe f_a i f_a^\dagger spełniają reguły komutacji i antykomutacji,

$$[x_a, p_b] = i\delta_{a,b}, \quad \{f_a, f_b^\dagger\} = \delta_{a,b}, \quad (3.32)$$

podczas gdy generator globalnej symetrii cechowania przyjmuje postać

$$G_a = f_{abc}(x_b p_c - \frac{i}{2} f_b^\dagger f_c). \quad (3.33)$$

Superładunki są dane poprzez

$$Q = f_a p_a, \quad Q^\dagger = f_a^\dagger p_a, \quad (3.34)$$

a zatem

$$\{Q, Q^\dagger\} = p_a p_a - 2g x_a G_a. \quad (3.35)$$

Jak już wspomniano, w nieabelowej teorii pola z lokalną symetrią cechowania $SU(N)$ w cechowaniu czasowym kwantowe prawo Gaussa realizuje się jako dodatkowy warunek jaki muszą spełniać stany fizyczne. Pokazaliśmy, że w redukcji wymiarowej operator odpowiadający prawu Gaussa redukuje się do generatora globalnych transformacji grupy $SU(N)$. A zatem fizyczna przestrzeń Hilberta modeli SYMQM składa się ze stanów niezmienniczych względem transformacji grupy $SU(N)$. Równoważnie, możemy powiedzieć, że stany fizyczne muszą być anihilowane przez generator G_a .

Operator Hamiltonianu otrzymany z relacji (3.35) przyjmuje wyjątkowo prostą postać na stanach fizycznych,

$$H = \frac{1}{2} p_a p_a. \quad (3.36)$$

(3.36) można traktować jako granicę $g \rightarrow 0$ Hamiltonianu supersymetrycznego oscylatora anharmonicznego. W związku z tym, H w sposób trywialny jest niezmienniczy ze względu na symetrię cząstka-dziura oraz transformację parzystości, jak również zachowuje fermionową liczbę obsadzeń. Wnioski wyprowadzone w poprzednim podrozdziale pozostają prawdziwe. Zauważmy jednak, że teraz operator parzystości komutuje z H , a więc parzystość jest dobrą liczbą kwantową we wszystkich sektorach fermionowych.

ROZDZIAŁ 4

OMÓWIENIE UŻYTYCH METOD

W tym rozdziale omówimy dwa zagadnienia. Zaczniemy od opisanie konstrukcji bazy Focka w przestrzeni Hilberta supersymetrycznych mechanik kwantowych Yanga-Millsa z grupą symetrii $SU(N)$. Następnie, przedstawimy rekurencyjny algorytm pozwalający efektywnie obliczać elementy macierzowe operatorów niezmienniczych ze względu na symetrię cechowania w takiej bazie. W szczególności pozwala on obliczyć obciętą macierz operatora Hamiltona.

4.1 Baza Focka

4.1.1 Elementarne cegiełki

Baza Focka złożona jest ze stanów własnych operatora liczby kwantów. Do ich klasyfikacji rozważamy bozonowe i fermionowe operatory liczby kwantów niezmiennicze ze względu na symetrię cechowania,

$$\text{tr } a^\dagger a = \sum_{b=1}^{N^2-1} a_b^\dagger a_b, \quad \text{tr } f^\dagger f = \sum_{b=1}^{N^2-1} f_b^\dagger f_b. \quad (4.1)$$

Jeśli operator Hamiltona zachowuje fermionową liczbę kwantów, naturalne jest rozważanie jego widma w każdym z sektorów przestrzeni Hilberta z określoną fermionową liczbą kwantów osobno. Okazuje się, że dwie liczby kwantowe, n_B - liczba kwantów bozonowych oraz n_F - liczba kwantów fermionowych, nie są wystarczające, aby jednoznacznie zidentyfikować dany stan. A zatem, konieczne będzie skonstruowanie bazy w każdej z takich podprzestrzeni z osobna. Poniżej opisujemy niezmiennicze operatory kreacji, nazywane dalej cegiełkami, dzięki którym będziemy mogli rekurencyjnie budować dowolne stany bazowe.

4.1.1.1 Elementarne cegiełki bozonowe

Ogólny, niezmienniczy względem symetrii cechowania, stan własny bozonowego operatora liczby cząstek, do wartości własnej n_B , może być zapisany jako [29]

$$|n_B\rangle = \sum_{i_1, \dots, i_{n_B}} T_{i_1, i_2, \dots, i_{n_B}} a_{i_1}^\dagger a_{i_2}^\dagger \dots a_{i_{n_B}}^\dagger |0\rangle, \quad (4.2)$$

gdzie T jest niezmienniczym tensorem dla danej grupy symetrii. Każdy taki tensor może być wyrażony jako kombinacja liniowa iloczynów tensorów śladowych [44]. Tensorem śladowym nazywamy ślad z iloczynu macierzy $T_{i,j}^a$; najprostsze z nich to, przykładowo, $\text{tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2} \delta_{ab}$ oraz $\text{tr}(T^a T^b T^c) = \frac{1}{4} d_{abc} + \frac{i}{4} f_{abc}$. A zatem, stan $|n_B\rangle$ w zapisie macierzowym przyjmuje postać

$$|n_B\rangle = \sum_{\{\sum_{j=2}^N j k_j = n_B\}} \gamma_{k_2, \dots, k_{n_B}} (a^{\dagger 2})^{k_2} (a^{\dagger 3})^{k_3} \dots (a^{\dagger n_B})^{k_{n_B}} |0\rangle, \quad (4.3)$$

gdzie $\gamma_{k_2, \dots, k_{n_B}}$ są dowolnymi współczynnikami, natomiast suma jest po wszystkich takich kombinacjach wykładników k_j aby $\sum_{j=2}^{n_B} j k_j = n_B$, tzn. aby stan $|n_B\rangle$ posiadał dokładnie n_B kwantów.

Stan $|n_B\rangle$ może być znacząco uproszczony poprzez użycie twierdzenia Cayleya-Hamiltona. Mówi ono, że każda macierz A , spełnia swoje równanie własne. Dla przykładowych grup symetrii $SU(2)$, $SU(3)$ i $SU(4)$, otrzymujemy równości

$$\begin{aligned} SU(2) : \quad & A^2 - \frac{1}{2}(A^2)\mathcal{I} = 0, \\ SU(3) : \quad & A^3 - \frac{1}{2}(A^2)A - \frac{1}{3}(A^3)\mathcal{I} = 0, \\ SU(4) : \quad & A^4 - \frac{1}{2}(A^2)A^2 - \frac{1}{3}(A^3)A + \frac{1}{8}(A^2)^2\mathcal{I} - \frac{1}{4}(A^4)\mathcal{I} = 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Równania (4.4) można użyć do wyrażenia śladów posiadających iloczynny więcej niż N operatorów takiego samego typu poprzez prostsze ślady. Zaprezentujemy to na przykładzie operatora $A = a^\dagger$ oraz innego operatora B , który może być dowolnym innym operatorem zawierającym bozonowe jak i fermionowe operatory kreacji lub anihilacji. W szczególności, B może być również pojedynczym bozonowym operatorem kreacji. Mnożąc (4.4) przez B z prawej strony, oraz biorąc ślad dostajemy następujące związki

$$\begin{aligned} SU(2) : \quad & (a^\dagger a^\dagger B) = \frac{1}{2}(a^\dagger a^\dagger)(B), \\ SU(3) : \quad & (a^\dagger a^\dagger a^\dagger B) = \frac{1}{2}(a^\dagger a^\dagger)(a^\dagger B) + \frac{1}{3}(a^\dagger a^\dagger a^\dagger)(B), \\ SU(4) : \quad & (a^\dagger a^\dagger a^\dagger a^\dagger B) = \frac{1}{2}(a^\dagger a^\dagger)(a^\dagger a^\dagger B) + \frac{1}{3}(a^\dagger a^\dagger a^\dagger)(a^\dagger B) - \frac{1}{8}(a^\dagger a^\dagger)^2(B) + \frac{1}{4}(a^\dagger a^\dagger a^\dagger a^\dagger)(B). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Tak więc, ogólny stan z n_B kwantami dla dowolnej grupy symetrii $SU(N)$, upraszcza się do

$$|n_B\rangle_N = \sum_{\{\sum_{j=2}^N j k_j = n_B\}} \gamma'_{k_2, \dots, k_N} (a^{\dagger 2})^{k_2} (a^{\dagger 3})^{k_3} \dots (a^{\dagger N})^{k_N} |0\rangle, \quad (4.6)$$

przy czym najwyższy ślad jest postaci $(a^{\dagger N})$.

Możemy teraz zdefiniować zbiór *elementarnych cegiełek bozonowych*, składający się z $N-1$ liniowo niezależnych, pojedynczych śladów z iloczynów operatorów kreacji, które nie mogą być zredukowane poprzez twierdzenie Cayleya-Hamiltona. Tabela 4.1 zawiera elementarne cegiełki bozonowe dla grup symetrii $N = 2, 3, 4$. Iloczyny potęg elementarnych cegiełek bozonowych

$SU(2)$	$SU(3)$	$SU(4)$
$(a^\dagger a^\dagger)$	$(a^\dagger a^\dagger)$	$(a^\dagger a^\dagger)$
	$(a^\dagger a^\dagger a^\dagger)$	$(a^\dagger a^\dagger a^\dagger)$
		$(a^\dagger a^\dagger a^\dagger a^\dagger)$

Tabela 4.1: Elementarne cegiełki bozonowe dla grup symetrii $SU(2), SU(3)$ oraz $SU(4)$.

działające na stan próżni Focka pozwalają otrzymać zbiór stanów

$$\left\{ (a^{\dagger 2})^{k_2} (a^{\dagger 3})^{k_3} \dots (a^{\dagger N})^{k_N} |0\rangle \right\}_{\sum_{j=2}^N j k_j = n_B} \equiv |\{n_B\}\rangle, \quad (4.7)$$

n_F	Cegielki fermionowe	
1	$(f^\dagger a^\dagger)$	$C^\dagger(1, 1, 1)$
2	$(f^\dagger f^\dagger a^\dagger)$	$C^\dagger(1, 2, 1)$
3	$(f^\dagger f^\dagger f^\dagger)$	$C^\dagger(0, 3, 1)$

Tabela 4.2: Cegielki fermionowe dla grupy symetrii $SU(2)$. W lewej kolumnie znajduje się operator, w prawej jego oznaczenie.

który rozpiną podprzestrzeń o ustalonej liczbie kwantów bozonowych n_B . Przyjmiemy uogólniony zapis, w którym poprzez $|\{n_B\}\rangle$ rozumiemy zbiór wszystkich stanów o n_B kwantach. Zbiór stanów (4.7) nazywamy bazą Focka, chociaż stany w nim zawarte nie są zortonormalizowane.

4.1.1.2 Cegielki fermionowe

Definicja cegiełek fermionowych jest nieco bardziej skomplikowana. Naszym celem jest skonstruowanie zbioru wszystkich niezależnych operatorów o n_F kwantach fermionowych, dzięki któremu będziemy mogli zbudować bazę w sektorze z n_F kwantami fermionowymi opierając się wyłącznie na bozonowych stanach bazowych.

W analogii do zbioru elementarnych cegiełek bozonowych, definiujemy zbiór *elementarnych cegiełek fermionowych*. Zawiera on wszystkie jednośladowe operatory zawierające n_F fermionowych operatorów kreacji, które nie mogą być uproszczone poprzez użycie twierdzenia Cayleya-Hamiltona. Co prawda nie istnieje odpowiednik twierdzenia Cayleya-Hamiltona dla macierzy antykomutujących, jednak odpowiedni dobór operatora B w (4.5) pozwala otrzymać równości, które mogą zostać użyte do uproszczenia lub usunięcia liniowo zależnych operatorów fermionowych.

Oprócz cegiełek, które są operatorami jednośladowymi, jak na przykład, wszystkie operatory fermionowe w modelu z grupą symetrii $SU(2)$ (patrz tabela 4.2), musimy również wziąć pod uwagę *złożone cegielki fermionowe*, które są zbudowane z iloczynu kilku śladów. Pojawiają się one w sektorach z $n_F > 1$ dla grup symetrii $SU(N)$ dla $N > 2$. Uwzględnienie operatorów, które są iloczynami jednośladowych cegiełek fermionowych z mniejszą ilością kwantów fermionowych zapewnia, że wszystkie możliwe niezmiennicze zwiężenia n_F fermionowych operatorów kreacji z daną liczbą bozonowych operatorów kreacji zostały wzięte pod uwagę.

Tak powstały zbiór elementarnych cegiełek fermionowych powiększony o operatory wielośladowe nazywamy zbiorem *cegiełek fermionowych*. Jego elementy numerujemy indeksem α dla każdego n_F niezależnie i będziemy oznaczać symbolem $C^\dagger(n_B^\alpha, n_F, \alpha)$, gdzie n_B^α i n_F oznaczają odpowiednio liczbę bozonowych i fermionowych operatorów kreacji. Dodatkowy indeks α ma za zadanie rozróżniać operatory o tych samych liczbach n_B^α . W nowym zapisie elementarne cegielki bozonowe będziemy oznaczać jako $(a^\dagger)^{n_B} \equiv C^\dagger(n_B, 0)$.

Jako przykład, tabele 4.2, 4.3 oraz 4.4 zawierają cegielki fermionowe dla grup symetrii $N = 2, 3, 4$ w wybranych sektorach fermionowych. W prostym przypadku grupy $SU(2)$ przedstawionym w tabeli 4.2, istnieje dokładnie jeden operator fermionowy w każdym z sektorów. Dodatkowo, operatory te są elementarnymi cegielkami fermionowymi. Inne operatory nie

n_F	Cegielki fermionowe	
1	$(f^\dagger a^\dagger)$	$C^\dagger(1, 1, 1)$
	$(f^\dagger a^\dagger a^\dagger)$	$C^\dagger(2, 1, 2)$
2	$(f^\dagger f^\dagger a^\dagger)$	$C^\dagger(1, 2, 1)$
	$(f^\dagger f^\dagger a^\dagger a^\dagger)$	$C^\dagger(2, 2, 2)$
	$(f^\dagger a^\dagger a^\dagger f^\dagger a^\dagger)$	$C^\dagger(3, 2, 3)$
	$(f^\dagger a^\dagger)(f^\dagger a^\dagger a^\dagger)$	$C^\dagger(3, 2, 4)$
3	$(f^\dagger f^\dagger f^\dagger)$	$C^\dagger(0, 3, 1)$
	$(f^\dagger f^\dagger f^\dagger a^\dagger)$	$C^\dagger(1, 3, 2)$
	$(f^\dagger f^\dagger f^\dagger a^\dagger a^\dagger)$	$C^\dagger(2, 3, 3)$
	$(f^\dagger a^\dagger)(f^\dagger f^\dagger a^\dagger)$	$C^\dagger(2, 3, 4)$
	$(f^\dagger a^\dagger f^\dagger f^\dagger a^\dagger a^\dagger)$	$C^\dagger(3, 3, 5)$
	$(f^\dagger a^\dagger)(f^\dagger f^\dagger a^\dagger a^\dagger)$	$C^\dagger(3, 3, 6)$
	$(f^\dagger a^\dagger a^\dagger)(f^\dagger f^\dagger a^\dagger)$	$C^\dagger(3, 3, 7)$
	$(f^\dagger a^\dagger a^\dagger)(f^\dagger f^\dagger a^\dagger a^\dagger)$	$C^\dagger(4, 3, 8)$
4	$(f^\dagger a^\dagger)(f^\dagger f^\dagger f^\dagger)$	$C^\dagger(1, 4, 1)$
	$(f^\dagger f^\dagger f^\dagger f^\dagger a^\dagger)$	$C^\dagger(1, 4, 2)$
	$(f^\dagger a^\dagger)(a^\dagger f^\dagger f^\dagger f^\dagger)$	$C^\dagger(1, 4, 3)$
	$(f^\dagger f^\dagger a^\dagger)(f^\dagger f^\dagger a^\dagger)$	$C^\dagger(2, 4, 4)$
	$(f^\dagger a^\dagger a^\dagger)(f^\dagger f^\dagger f^\dagger)$	$C^\dagger(2, 4, 5)$
	$(f^\dagger f^\dagger f^\dagger f^\dagger a^\dagger a^\dagger)$	$C^\dagger(2, 4, 6)$
	$(f^\dagger a^\dagger a^\dagger)(f^\dagger f^\dagger f^\dagger a^\dagger)$	$C^\dagger(3, 4, 7)$
	$(f^\dagger f^\dagger a^\dagger)(f^\dagger f^\dagger a^\dagger a^\dagger)$	$C^\dagger(3, 4, 8)$
	$(f^\dagger a^\dagger)(f^\dagger a^\dagger a^\dagger)(f^\dagger f^\dagger a^\dagger)$	$C^\dagger(4, 4, 9)$
	$(f^\dagger f^\dagger a^\dagger)(f^\dagger a^\dagger f^\dagger a^\dagger a^\dagger)$	$C^\dagger(4, 4, 10)$

 Tabela 4.3: Cegielki fermionowe dla grupy symetrii $SU(3)$.

są możliwe. Na przykład, operator $(f^\dagger a^\dagger a^\dagger)$ jest tożsamościowo zero, gdyż musi zawierać całkowicie antysymetryczny tensor ϵ^{ijk} zwężony z symetryczną kombinacją operatorów bozonowych $a^\dagger_j a^\dagger_k$.

Liczbę cegiełek fermionowych z n_F kwantami fermionowymi oraz n_B kwantami bozonowymi oznaczmy jako $d(n_F, n_B)$, natomiast całkowitą liczbę cegiełek fermionowych z n_F kwantami fermionowymi jako $d(n_F)$. Oczywiście, $d(n_F) = \sum_{n_B} d(n_F, n_B)$.

Ogólny stan o n_B kwantach bozonowych i n_F kwantach fermionowych dla danej grupy symetrii $SU(N)$ można łatwo zapisać korzystając ze zbioru cegiełek fermionowych oraz wyrażenia na ogólny stan bozonowy (4.6) jako

$$\begin{aligned}
 |n_B, n_F\rangle &= \sum_{\alpha=1}^{d(n_F)} C^\dagger(n_B^\alpha, n_F, \alpha) \times \\
 &\times \sum_{\{ \sum_{j=2}^N j k_j = n_B - n_B^\alpha \}} \gamma_{k_2, \dots, k_N}(\alpha) C^\dagger(2, 0)^{k_2} C^\dagger(3, 0)^{k_3} \dots C^\dagger(N, 0)^{k_N} |0\rangle, \quad (4.8)
 \end{aligned}$$

gdzie nowe współczynniki $\gamma_{k_2, \dots, k_N}(\alpha)$ mogą zależeć od indeksu α . Aby zapewnić całkowitą liczbę kwantów bozonowych równą n_B , należy operatorem $C^\dagger(n_B^\alpha, n_F, \alpha)$ zawierającym n_B^α bozonowych kwantów działać na stan czysto bozonowy o $n_B - n_B^\alpha$ kwantach. W analogii do przypadku bozonowego, możemy zdefiniować zbiór stanów,

$$\left\{ C^\dagger(n_B^\alpha, n_F, \alpha) C^\dagger(2, 0)^{k_2} C^\dagger(3, 0)^{k_3} \dots C^\dagger(N, 0)^{k_N} |0\rangle \right\}_{\sum_\alpha d(n_F), \sum_{j=2}^N j k_j + n_B^\alpha = n_B} \equiv |\{n_B, n_F\}\rangle, \quad (4.9)$$

który po ortonormalizacji będzie bazą w podprzestrzeni o ustalonych n_B i n_F .

n_F	Cegielki fermionowe		
1	$(f^\dagger a^\dagger)$,	$(f^\dagger a^\dagger a^\dagger)$,	$(f^\dagger a^\dagger a^\dagger a^\dagger)$
2	$(f^\dagger f^\dagger a^\dagger)$,	$(f^\dagger f^\dagger a^\dagger a^\dagger)$,	$(f^\dagger f^\dagger a^\dagger a^\dagger a^\dagger)$,
	$(f^\dagger a^\dagger f^\dagger a^\dagger a^\dagger)$,	$(f^\dagger a^\dagger)(f^\dagger a^\dagger a^\dagger)$,	$(f^\dagger a^\dagger f^\dagger a^\dagger a^\dagger a^\dagger)$,
	$(f^\dagger a^\dagger)(f^\dagger a^\dagger a^\dagger a^\dagger)$,	$(f^\dagger a^\dagger a^\dagger f^\dagger a^\dagger a^\dagger a^\dagger)$,	$(f^\dagger a^\dagger a^\dagger)(f^\dagger a^\dagger a^\dagger a^\dagger)$

Tabela 4.4: Cegielki fermionowe dla grupy symetrii $SU(4)$ w sektorach z $n_F = 1, 2$.

4.1.1.3 Rekursywna konstrukcja bazy

Teraz możemy w prosty sposób rekurencyjnie budować bazę Focka. Załóżmy, że stworzyliśmy bazę w sektorze bozonowym dla liczby kwantów bozonowych mniejszej od n_B . Wtedy, zbiór stanów bazowych z n_B kwantami bozonowymi jest dany jako suma wszystkich stanów otrzymanych poprzez działanie odpowiednich cegiełek na stany już istniejące. W naszej uogólnionej notacji można to zapisać jako

$$|\{n_B, 0\}\rangle = \sum_{k=2}^N C^\dagger(k, 0) |\{n_B - k, 0\}\rangle. \quad (4.10)$$

Warto zauważyć, że powyższy zbiór nie jest ortogonalny. Dodatkowo, ten sam stan może być zawarty w wielu kopiach różniących się jedynie kolejnością cegiełek użytych do jego konstrukcji. Poprawną bazę otrzymamy po pozbyciu się nadmiarowych stanów i zortogonalizowaniu pozostałych. Bazę w sektorach fermionowych otrzymamy dzięki cegielkom fermionowym poprzez

$$|\{n_B, n_F\}\rangle = \sum_{\alpha=0}^{d(n_F)} C^\dagger(n_B^\alpha, n_F, \alpha) |\{n_B - n_B^\alpha, 0\}\rangle. \quad (4.11)$$

4.1.2 Liczba stanów bazowych

Liniowa niezależność zbiorów stanów (4.7) oraz (4.9) może być sprawdzona poprzez bezpośrednie obliczenie wyznacznika macierzy Grama. Dostępna jest też metoda oparta na ortogonalności charakterów reprezentacji grupy $SU(N)$, którą pozwala niezależnie obliczyć liczbę

liniowo niezależnych stanów w danej podprzestrzeni. Mamy zatem możliwość pośredniego sprawdzenia wniosków otrzymanych z analizy macierzy Grama.

4.1.2.1 Metoda charakterów

Każdy bozonowy i fermionowy operator kreacji transformuje się zgodnie z reprezentacją dołączoną grupy $SU(N)$. Iloczyn operatorów kreacji, które są potrzebne do skonstruowania stanów bazowych, transformuje się jako iloczyn reprezentacji dołączonych. Z teorii reprezentacji wiadomo, że kwadrat dowolnej nieredukowalnej reprezentacji jest redukowalny i może być wyrażony jako suma części symetrycznej i antysymetrycznej. Zapisując to w języku charakterów otrzymujemy,

$$\begin{aligned}\chi(R) \times \chi(R) &= [\chi(R) \times \chi(R)] + \{\chi(R) \times \chi(R)\} \\ &= \frac{1}{2}(\chi^2(R) + \chi(R^2)) + \frac{1}{2}(\chi^2(R) - \chi(R^2)),\end{aligned}\quad (4.12)$$

gdzie symbole $[\dots]$ oraz $\{\dots\}$ oznaczają odpowiednio część symetryczną i antysymetryczną, a $\chi(R^2)$ jest śladem macierzy reprezentacji R podniesionej do kwadratu. Uogólnienie wzoru (4.12) jest znane jako twierdzenie Fröbeniusa [46], i ma praktyczne konsekwencje, ponieważ charaktery potęg reprezentacji R są często znane. Twierdzenie to podaje wyrażenia na charaktery części symetrycznej i antysymetrycznej iloczynu p reprezentacji R ,

$$[\times_{k=1}^p \chi(R)] = \sum_{\sum_{k=2}^p k i_k = p} \prod_{k=1}^p \frac{1}{i_k!} \frac{\chi^{i_k}(R^k)}{k^{i_k}}, \quad (4.13)$$

$$\{\times_{k=1}^p \chi(R)\} = \sum_{\sum_{k=2}^p k i_k = p} (-1)^{\sum_{k=2}^p i_k} \prod_{k=1}^p \frac{1}{i_k!} \frac{\chi^{i_k}(R^k)}{k^{i_k}}, \quad (4.14)$$

gdzie suma jest po wszystkich partycjach liczby p na liczby $2, \dots, p$, natomiast i_j jest wielokrotnością liczby j w danej partycji. A zatem, najbardziej ogólny iloczyn n_B bozonowych i n_F fermionowych operatorów kreacji będzie w reprezentacji, której charakter jest równy $[\times_{k=1}^{n_B} \chi(R)] \{\times_{k=1}^{n_F} \chi(R)\}$, gdzie R jest teraz reprezentacją dołączoną grupy $SU(N)$. Jeśli przez $D(n_B, n_F)$ oznaczymy liczbę *niezmienniczych*, liniowo niezależnych stanów z n_B bozonowymi i n_F fermionowymi kwantami, wtedy z ortogonalności charakterów wynika, że

$$D(n_B, n_F) = \int d_{\mu_{SU(N)}} 1 [\times_{k=1}^{n_B} \chi(R)] \{\times_{k=1}^{n_F} \chi(R)\}, \quad (4.15)$$

gdzie 1 jest charakterem reprezentacji trywialnej natomiast $d_{\mu_{SU(N)}}$ jest miarą niezmienniczą grupy $SU(N)$.

Wygodną parametryzacją rozmaitości grupy $SU(N)$ jest parametryzacja poprzez $N^2 - 1$ kąty Eulera α_i , będące zdefiniowane na przedziale $[0, 2\pi]$. Przykładowo, elementy grupy $SU(3)$ można zapisać jako [47]

$$U = e^{i\lambda_3\alpha_1} e^{i\lambda_2\alpha_2} e^{i\lambda_3\alpha_3} e^{i\lambda_5\alpha_4} e^{i\lambda_3\alpha_5} e^{i\lambda_2\alpha_6} e^{i\lambda_3\alpha_7} e^{i\lambda_8\alpha_8} \quad (4.16)$$

natomiast uogólnienie tego wzoru dla dowolnej grupy $SU(N)$ można znaleźć w [48]. Ostatnim elementem potrzebnym do obliczenia liczb $D(n_B, n_F)$ są charaktery $\chi(R^k)$. Można je otrzymać ze wzorów Weyla [49]

$$\chi(R) = \sum_{i,j=1}^N e^{i(\alpha_i - \alpha_j)} - 1, \quad \chi(R^k) = \sum_{i,j=1}^N e^{ik(\alpha_i - \alpha_j)} - 1. \quad (4.17)$$

Niezmiennicza miara jest dana poprzez [29],

$$d_{\mu_{SU(N)}} = \frac{1}{N!} \prod_{i=1}^N \frac{d\alpha_i}{2\pi} \left| \prod_{i<j} (e^{i\alpha_i} - e^{i\alpha_j}) \right|^2 \delta_P \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \right), \quad (4.18)$$

gdzie $\delta_P(x)$ jest periodyczną dystrybucją delta Diraca, wyrażającą się wzorem

$$\delta_P \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i - 2\pi k \right), \quad (4.19)$$

gdzie k jest całkowite.

4.1.2.2 Funkcja generująca $D(n_B, n_F)$

Równanie (4.15) jest trudne do jawnego obliczenia dla dowolnego N , jednak można to zrobić dla kilku najprostszych grup [29]. W tych przypadkach liczby $D(n_B, n_F)$ można zapisać w postaci funkcji generującej o dwóch parametrach, t oraz s , $G(t, s)$,

$$G(t, s) = \sum_{n_B, n_F} D(n_B, n_F) t^{n_B} (-s)^{n_F}. \quad (4.20)$$

Dla $N = 3$, $G(t, s)$ może być wyrażona w postaci prostych wielomianów zmiennej t [29], mianowicie

$$G(t, s) = \left(\prod_{k=2}^N \frac{1}{1-t^k} \right) \sum_{i=0}^{N^2-1} (-1)^i s^i c_i(t), \quad (4.21)$$

gdzie wielomiany $c_i(t)$ mają postać,

$$\begin{aligned} c_0(t) &= 1, \\ c_1(t) &= t + t^2, \\ c_2(t) &= t + t^2 + 2t^3, \\ c_3(t) &= 1 + t + 2t^2 + 3t^3 + t^4, \\ c_4(t) &= 2t + 4t^2 + 2t^3 + 2t^4, \\ c_{8-i}(t) &= c_i(t). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Zapisując $G(t, s)$ przy pomocy wielomianów $c_i(t)$ niektóre z informacji zawartych w liczbach $D(n_B, n_F)$ stają się w pełni widoczne. Wyraz proporcjonalny do s^0 jest równy funkcji generującej liczbę partycji na liczby $\{N, N-1, \dots, 2\}$. Odpowiada to stwierdzeniu, że istnieje

tyle stanów o n_B kwantach, ile jest możliwych niezależnych sposobów otrzymania liczby n_B z wielokrotności liczb kwantów zawartych w elementarnych cegiełkach bozonowych. Następnie, z postaci wielomianów $c_i(t)$ kombinatoryczna interpretacja wielokrotności stanów w sektorach fermionowych może być odczytana. W szczególności, $d(n_F, n_B)$, tzn. liczby cegiełek fermionowych o n_B kwantach bozonowych w danym sektorze fermionowym są dane w prosty sposób poprzez,

$$d(n_F, n_B) = \frac{1}{n_B!} \left. \frac{d^{n_B}}{dt^{n_B}} c_{n_F}(t) \right|_{t=0}. \quad (4.23)$$

Przykładowo, rozważmy wielomian $c_1(t)$ dla grupy $SU(3)$. Istnieje jedna cegiełka z pojedynczym kwantem bozonowym, mianowicie cegiełka $(a^\dagger f^\dagger)$, oraz jedna cegiełka z dwoma kwantami bozonowymi - cegiełka $(a^\dagger a^\dagger f^\dagger)$. Mniej oczywisty przypadek jest dany przez wielomian $c_2(t)$. Oprócz dwóch cegiełek z pojedynczym i dwoma kwantami bozonowymi, $(a^\dagger f^\dagger f^\dagger)$ i $(a^\dagger a^\dagger f^\dagger f^\dagger)$, odpowiednio, istnieją też dwie cegiełki o trzech kwantach bozonowych, mianowicie, $(f^\dagger a^\dagger a^\dagger f^\dagger a^\dagger)$ oraz $(f^\dagger a^\dagger)(f^\dagger a^\dagger a^\dagger)$.

Tak więc, liczbą stanów bazowych otrzymanych poprzez jawną konstrukcję i eliminację stanów liniowo zależnych, można sprawdzić z liczbą otrzymaną wyłącznie za pomocą rozważań opartych na teorii grup. Tabela 4.5 przedstawia liczby stanów bazowych dla danych n_B i n_F dla grupy $SU(3)$ obliczone obydwojema metodami aż do $n_B = 30$. Zamieszczamy pojedyncze liczby, gdyż obydwie metody dały identyczne wyniki.

4.1.3 Symetrie bazy

Modele SYMQM posiadają dwie ważne symetrie: supersymetrię i symetrię cząstka-dziura. Pierwsza z nich jest widoczna jako zgodność energii własnych Hamiltonianu w sąsiednich sektorach fermionowych, podczas gdy druga z nich, jest zdefiniowana jako zgodność energii własnych Hamiltonianu w sektorze z p fermionami oraz sektorze z $N^2 - 1 - p$ fermionami, gdzie $0 \leq p \leq N^2 - 1$. Okazuje się, że już na poziomie bazy Focka widoczne są zapowiedzi tych dynamicznych symetrii. Można je dostrzec w zależnościach pomiędzy liczbami $D(n_B, n_F)$, co opisujemy poniżej. Należy jednak pamiętać, że powyższe symetrie bazy są symetriami kinematycznymi i nie oznaczają *dynamicznych* symetrii widm Hamiltonianu.

4.1.3.1 Supersymetria

Aby widmo Hamiltonianu wykazywało degenerację supersymetryczną liczby stanów bozonowych i fermionowych muszą być równe. Faktycznie, dla każdego n_B istnieje tyle samo bazowych stanów bozonowych (stanów o parzystym n_F) co stanów fermionowych (stanów z n_F nieparzystym),

$$\forall_{n_B} \sum_{n_F - \text{parzyste}} D(n_B, n_F) = \sum_{n_F - \text{nieparzyste}} D(n_B, n_F). \quad (4.24)$$

Można to jawnie sprawdzić dla grupy $SU(3)$, zarówno w tabeli 4.5 poprzez oddzielne zsumowanie liczby stanów o n_F parzystym i nieparzystym, jak i w równaniach (4.22) poprzez

n_B	$n_F = 0$	$n_F = 1$	$n_F = 2$	$n_F = 3$	$n_F = 4$	$n_F = 5$	$n_F = 6$	$n_F = 7$	$n_F = 8$
0	1			1		1			1
1		1		1	2	1	1	1	
2	1	1	1	3	4	3	1	1	1
3	1	1	3	5	4	5	3	1	1
4	1	2	2	5	8	5	2	2	1
5	1	2	4	7	8	7	4	2	1
6	2	2	4	9	10	9	4	2	2
7	1	3	5	9	12	9	5	3	1
8	2	3	5	11	14	11	5	3	2
9	2	3	7	13	14	13	7	3	2
10	2	4	6	13	18	13	6	4	2
⋮									
25	4	9	17	33	42	33	17	9	4
26	5	9	17	35	44	35	17	9	5
27	5	9	19	37	44	37	19	9	5
28	5	10	18	37	48	37	18	10	5
29	5	10	20	39	48	39	20	10	5
30	6	10	20	41	50	41	20	10	6
⋮									

Tabela 4.5: Liczby stanów bazy Focka dla danej liczby kwantów bozonowych i fermionowych dla grupy $SU(3)$. Liczby otrzymano niezależnie z funkcji generującej (4.22) oraz jawnej konstrukcji i ortogonalizacji.

zsumowanie odpowiednich wielomianów. Zależność ta może być również udowodniona dla dowolnego N przy użyciu własności funkcji generujących [29].

Dodatkowo, równe liczby stanów bozonowych i fermionowych otrzymamy sumując liczby stanów wzdłuż linii przekątnych z ustalonym $n_B + n_F$ lub $n_B - n_F$, oddzielnie dla n_F parzystego i n_F nieparzystego,

$$\forall_{n_B > 0} \sum_{n_F - \text{parzyste}} D(n_B \pm n_F, n_F) = \sum_{n_F - \text{nieparzyste}} D(n_B \pm n_F, n_F), \quad (4.25)$$

Wyjątkiem jest $n_B = 0$, dla którego istnieje pojedynczy stan w sektorze bozonowym z $n_F = 0$ lub $n_F = N^2 - 1$. Linie przekątne odpowiadają działaniu superładunków supersymetrycznego oscylatora harmonicznego, $Q = (fa)$, i $Q^\dagger = (f^\dagger a^\dagger)$. Mają szczególne znaczenie, gdyż, jak zostanie pokazane w rozdziale 5, wprowadzając obcięcie w poszczególnych sektorach fermionowych zgodnie z takimi liniami pozwala na otrzymanie widm z degeneracją supersymetryczną przy skończonym obcięciu. Znow, wynik ten może być udowodniony dla dowolnego N przy użyciu funkcji generujących [29].

4.1.3.2 Symetria cząstka-dziura

Aby widmo operatora Hamiltona posiadało symetrię cząstka-dziura, dla każdego n_B , liczba stanów bazowych w sektorze z n_F kwantami fermionowymi powinna być równa liczbie stanów w sektorze z $N^2 - 1 - n_F$ kwantami fermionowymi,

$$\forall_{n_B} \quad D(n_B, n_F) = D(n_B, N^2 - 1 - n_F), \quad n_F = 0, \dots, N^2 - 1. \quad (4.26)$$

Poprawność powyższej równości można sprawdzić dla grupy $SU(3)$ w tabeli 4.5, oraz wykazać analitycznie dla dowolnego N .

4.2 Algorytm rekurencyjny

Główna idea tego algorytmu polega na powiązaniu elementów macierzowych analizowanego operatora z prostszymi elementami macierzowymi operatorów, które zostały obliczone w wcześniejszych krokach [50][51]. Do przeprowadzenia obliczeń niezbędne jest podanie listy komutatorów i antykomutatorów wszystkich cegiełek. Jawna konstrukcja ani przechowywanie stanów bazy Focka nie są konieczne.

Oznaczmy ogólny operator poprzez $O(n_B^O, n_F^O)$. n_B^O (n_F^O) jest różnicą liczby bozonowych (fermionowych) operatorów kreacji i anihilacji zawartych w operatorze O . Innymi słowy, O kreuje n_B^O i n_F^O kwantów bozonowych i fermionowych. W ogólności, n_B^O oraz n_F^O mogą być dowolnymi liczbami całkowitymi. Dodatkowo, oznaczamy poprzez $O(n_B^O, n_F^O)_{n_B, n_F}$ elementy macierzowe operatora O otrzymane pomiędzy stanami bazowymi zawierającymi n_B bozonowych oraz n_F fermionowych kwantów z prawej strony i $n'_B = n_B + n_B^O$ oraz $n'_F = n_F + n_F^O$ kwantów bozonowych i fermionowych z lewej strony,

$$O(n_B^O, n_F^O)_{n_B, n_F} = \langle \{n'_B, n'_F\} | O(n_B^O, n_F^O) | \{n_B, n_F\} \rangle. \quad (4.27)$$

$O(n_B^O, n_F^O)_{n_B, n_F}$ jest macierzą o wymiarach $D(n_B, n_F) \times D(n'_B, n'_F)$, gdzie $D(n, m)$ oznacza liczbę stanów bazowych o n kwantach bozonowych i m kwantach fermionowych, wprowadzoną w podrozdziale 4.1.2.1.

Zanim omówimy typowy przypadek, przytoczymy kilka uwag upraszczających obliczenia, mianowicie (wprowadzamy zapis $\#(x)_O$, który oznacza liczbę wystąpień operatora x w operatorze O)

- Jeśli rozważamy element macierzowy operatora dla którego $\#(f^\dagger)_O > \#(f)_O$ wtedy bardziej efektywnie jest obliczyć sprzężenie hermitowskie danego elementu macierzowego. Podobnie, jeśli rozważamy element macierzowy operatora dla którego $\#(f^\dagger)_O = \#(f)_O$, ale $\#(a^\dagger)_O > \#(a)_O$ obliczamy jego sprzężenie hermitowskie.
- Element macierzowy operatora O , który posiada fermionowe lub bozonowe operatory anihilacji działające na stan próżni Focka znika.
- Elementy macierzowe elementarnych cegiełek bozonowych pomiędzy stanami bazowymi z sektora bozonowego mogą zostać odczytane z odpowiedniej części macierzy iloczynów skalarnych.

- Element macierzowy operatora, który jest iloczynem dwóch operatorów jednośladowych może być obliczony poprzez wstawienie reprezentacji operatora jednostkowego pomiędzy nimi, obliczenie elementów macierzowych każdego z nich z osobna, a następnie wymnożenie i zsumowanie wyników częściowych.

Bez straty ogólności możemy założyć, że O jest normalnie uporządkowany. Jeśli O jest złożony wyłącznie z operatorów kreacji, można go wyrazić poprzez cegiełki elementarne i wykorzystać trzecią z powyższych uwag. Założymy więc również, że O zawiera operatory anihilacji.

W przypadku typowym strategia obliczenia elementu macierzowego O polega na przeciągnięciu operatora O poprzez operatory tworzące stan bazowy z prawej strony, aż do momentu gdy O będzie działać na próżnię Focka. Zaczynamy od przeciągnięcia O przez cegiełki fermionowe,

$$\begin{aligned} O(n_B^O, n_F^O)_{n_B, n_F} &= \langle \{n'_B, n'_F\} | [O(n_B^O, n_F^O), C^\dagger(n_B^\alpha, n_F, \alpha)] | \{n_B - n_B^\alpha, 0\} \rangle \\ &+ \langle \{n'_B, n'_F\} | C^\dagger(n_B^\alpha, n_F, \alpha) O(n_B^O, n_F^O) | \{n_B - n_B^\alpha, 0\} \rangle. \end{aligned} \quad (4.28)$$

W celu wykonania następnego kroku, wstawiamy relacje na (anty)komutator operatorów $O(n_B^O, n_F^O)$ oraz $C^\dagger(n_B^\alpha, n_F, \alpha)$. Dla każdego operatora pojawiającego się w tym (anty)komutatorze, obliczamy elementy macierzowe, sprawdzając czy możliwe jest wykorzystanie uproszczeń opisanych powyżej. Zadanie to powinno być łatwiejsze od pierwotnego problemu, gdyż część elementów macierzowych mogła już zostać obliczona wcześniej. Przypadek czysto bozonowy może być potraktowany w analogiczny sposób. Dostajemy

$$\begin{aligned} O(n_B^O, 0)_{n_B, 0} &= \langle \{n'_B, 0\} | [O(n_B^O, 0), C(p, 0)] | \{n_B - p, 0\} \rangle \\ &+ \langle \{n'_B, 0\} | C(p, 0) O(n_B^O, 0) | \{n_B - p, 0\} \rangle, \end{aligned} \quad (4.29)$$

W zasadzie, możemy powtórzyć powyższe kroki, aż O będzie działać na próżnię Focka. Należy jednak pamiętać, że stany $|\{n_B, n_F\}\rangle$ nie są ortogonalne i trzeba to uwzględnić zarówno we wzorze (4.28) jak i (4.29). W tym celu konieczne jest obliczenie macierzy iloczynów skalarnych stanów $|\{n_B, n_F\}\rangle$. Stany o różnej liczbie kwantów są z definicji ortogonalne. Macierz iloczynów skalarnych dla stanów o n_B kwantach bozonowych i n_F kwantach fermionowych oznaczymy poprzez $S(n_B, n_F)$.

Powyższa definicja $S(n_B, n_F)$ różni się od standardowej definicji macierzy Grama. Zwyczajowo, macierz Grama zawiera iloczyny skalarne stanów liniowo niezależnych i w naszym przypadku jest to macierz o wymiarach $D(n_B, n_F) \times D(n_B, n_F)$. Przeciwnie, macierz $S(n_B, n_F)$ jest często większa od macierzy Grama, gdyż zawiera iloczyny skalarne stanów reprezentowanych w kilku kopiach różniących się kolejnością cegiełek użytych do ich budowy. Obecność stanów kopii jest konsekwencją rekurencyjnej konstrukcji bazy (patrz paragraf 4.1.1.3).

Procedura obliczenia macierzy $S(n_B, n_F)$ składa się z trzech kroków. Po pierwsze, wyciągamy na wszystkie możliwe sposoby pojedynczą cegiełkę bozonową (fermionową) ze stanów z lewej i prawej strony. W ogólnym przypadku, istnieje $N - 1$ ($d(n_F)$) takich sposobów. Po drugie, komutujemy (antykomutujemy) te dwie cegiełki i zastępujemy komutator (antykomutator) operatorem normalnie uporządkowanym. Po trzecie, obliczamy elementy macierzowe

takiego operatora pomiędzy stanami bazowymi o mniejszej liczbie kwantów. Ten krok wymaga znajomości macierzy iloczynów skalarnych stanów bazowych, jednak o mniejszej liczbie kwantów i możemy założyć, że taka macierz została obliczona na wcześniejszych etapach algorytmu.

W celu zortogonalizowania stanów $|\{n_B, n_F\}\rangle$ oraz odrzucenia stanów występujących w kilku kopiach wykorzystamy procedurę, która wykonuje obydwie te zadania w jednym kroku. Polega ona na numerycznej diagonalizacji macierzy iloczynów skalarnych $S(n_B, n_F)$. Następnie, zachowywane są tylko wektory własne odpowiadające niezerowej wartości własnej. Stany bazowe nie są znormalizowane, a zatem wspomniane wektory własne należy przemnożyć przez odwrotność pierwiastka odpowiadających im wartości własnych. Tak przygotowane wektory grupujemy w macierzy oznaczanej przez $R(n_B, n_F)$. $R(n_B, n_F)$ nie będzie z reguły macierzą kwadratową. Możemy zapisać,

$$R^T(n_B, n_F)S(n_B, n_F)R(n_B, n_F) = 1_{D(n_B, n_F) \times D(n_B, n_F)}, \quad (4.30)$$

gdzie $1_{D(n_B, n_F) \times D(n_B, n_F)}$ jest macierzą jednostkową, której wymiar jest równy rozmiarowi podprzestrzeni o ustalonej liczbie n_B kwantów bozonowych oraz n_F kwantów fermionowych.

Wprowadzenie macierzy ortogonalizującej do związków pomiędzy elementami macierzowymi pozwala zapisać poprawne relacje rekurencyjne pomiędzy elementami macierzowymi dowolnych operatorów. W przypadku elementów macierzowych z sektorów fermionowych, relacja rekurencyjna pozwala na ich wyrażenie poprzez elementy macierzowe z sektora bozonowego,

$$\begin{aligned} \langle \{n'_B, n'_F\} | O(n_B^O, n_F^O) | \{n_B, n_F\} \rangle &= \left(\langle \{n'_B, n'_F\} | [O(n_B^O, n_F^O), C^\dagger(n_p, n_F, p)] | \{n_B - n_p, 0\} \rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle \{n'_B, n'_F\} | C^\dagger(n_p, n_F, p) O(n_B^O, n_F^O) | \{n_B - n_p, 0\} \rangle \right) \cdot R(n_B, n_F), \end{aligned} \quad (4.31)$$

natomiast w przypadku elementów macierzowych z sektora bozonowego o danej ilości kwantów relacja rekurencyjna pozwala na ich wyrażenie poprzez elementy macierzowe z sektora bozonowego o mniejszej ilości kwantów,

$$\begin{aligned} \langle \{n'_B, 0\} | O(n_B^O, 0) | \{n_B, 0\} \rangle &= \left(\langle \{n'_B, 0\} | [O(n_B^O, 0), C^\dagger(p, 0)] | \{n_B - p, 0\} \rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle \{n'_B, 0\} | C^\dagger(p, 0) O(n_B^O, 0) | \{n_B - p, 0\} \rangle \right) \cdot R(n_B, 0). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Relacje rekurencyjne (4.31) i (4.32) kończą prezentację algorytmu. Posługując się nimi można, zaczynając od próżniowej wartości oczekiwanej zadanego operatora, obliczyć jego wszystkie elementy macierzowe pomiędzy stanami bazowymi zawierającymi nie więcej niż N_{cut} kwantów bozonowych.

4.3 Podsumowanie

Opisaliśmy rekurencyjną konstrukcję bazy Focka we wszystkich sektorach. W tym celu zdefiniowaliśmy zbiory cegiełek - elementarnych, niezmienniczych ze względu na symetrię cechowania, operatorów kreacji - zarówno bozonowych jak i fermionowych. Każdy stan bazowy

może być uzyskany poprzez działanie iloczynu odpowiednich potęg cegiełek na stan próżni. Wprowadziliśmy procedurę usuwającą stany pojawiające się w wielu kopiach w efekcie rekursywnej budowy bazy. Jednym z pośrednich sposobów sprawdzenia poprawności tej procedury jest porównanie otrzymanej liczby stanów bazowych o zadanych liczbach kwantów bozonowych i fermionowych z przewidywaniami dodatkowej, niezależnej metody. Streściliśmy propozycję zastosowania własności charakterów grupy $SU(N)$ do tego celu.

Następnie omówiliśmy relacje rekurencyjne pomiędzy elementami macierzowymi operatorów, które mogą być wykorzystane do efektywnego obliczenia macierzy Hamiltonianu badanego układu. Zastosowanie tej metody do modeli SYMQM oraz do supersymetrycznego oscylatora anharmonicznego zostanie przedyskutowane w następnym rozdziale.

ROZDZIAŁ 5

WYNIKI NUMERYCZNE

Używając metody opisanej w poprzednim rozdziale możemy obliczyć elementy macierzowe operatora Hamiltona dla różnych układów. Podstawowe pytania na które będziemy szukać odpowiedzi to: jaki jest związek wyników otrzymanych dla skończonego obciążenia z rezultatami w kontinuum, czy usunięcie obciążenia pozwala odtworzyć supersymetrię złamaną poprzez wprowadzenie dyskretyzacji, oraz czy możliwe jest otrzymanie degeneracji supersymetrycznej dla skończonego obciążenia? W kolejnych podrozdziałach przedstawimy dyskusję powyższych zagadnień na przykładzie dwóch typów układów: supersymetrycznego oscylatora anharmonicznego z symetrią $SU(3)$ oraz supersymetrycznych mechanik kwantowych Yanga-Millsa z symetriami $SU(2)$, $SU(3)$, $SU(4)$ i $SU(5)$.

5.1 Zbieżność widm

Analiza numeryczna układów kwantowych metodą obciętej przestrzeni Focka polega na obliczeniu kolejnych przybliżeń wartości własnych badanej obserwabli. W każdym następnym kroku baza w danym sektorze obcinana jest do coraz większej liczby kwantów bozonowych, oznaczanej jako N_{cut} , a nowe elementy macierzowe obliczane są np. za pomocą algorytmu rekuren-

N_{cut}	$n_F = 0$	$n_F = 1$	$n_F = 2$
1	2.8333333333333333	3.7500000000000124	3.750000000000008
5	2.805137759654418	2.817654396966426	2.41010649311797
10	2.804878933491876	2.804943385906189	2.38393952020263
15	2.804877899477374	2.804878578502977	2.38379874405844
20	2.804877857980324	2.804877869314702	2.38379576457689
25	2.804877857812559	2.804877857890121	2.38379573799721
30	2.804877857802534	2.804877857804384	2.38379573773261
35	2.804877857802529	2.804877857803605	2.38379573772474
40	2.804877857802507	2.804877857803596	2.38379573772458
N_{cut}	$n_F = 3$	$n_F = 4$	
1	1.009109012532963	3.7500000000000082	
5	0.017808308382480	2.001903558629864	
10	0.000102896003680	1.978068350121234	
15	0.000002580129746	1.977963562445323	
20	0.000000018188518	1.977960963230507	
25	0.00000000380532	1.977960939859982	
30	0.00000000013940	1.977960939644200	
35	0.00000000004579	1.977960939638051	
40	0.00000000004250	1.977960939637698	

Tabela 5.1: Zależność najniższych energii własnych od obciążenia w różnych sektorach fermionowych. Widać dokładną degenerację supersymetryczną energii w sektorach z $n_F = 0$ i $n_F = 1$, oraz powstawanie próżni supersymetrycznej o zerowej energii w sektorze z $n_F = 3$. Stany z sektorów $n_F = 2$ i $n_F = 4$ tworzą supermultiplety ze stanami pominiętymi w tej tabeli. Szczegółowa dyskusja supermultipletów znajduje się w rozdziale 5.2.1.

cyjnego opisanego w poprzednim rozdziale. Fizyczne znaczenie mają wyniki, które dla wystarczająco dużego obciążenia przestają od niego zależeć. Dla niektórych obserwabli okazuje się, że obciążenie rzędu 5 jest wystarczające do otrzymania miarodajnych rezultatów. Jedną z zalet omawianej metody jest możliwość wprowadzenia naturalnej definicji niepewności dla takich obserwabli jako różnicy pomiędzy kolejnymi przybliżeniami. Istnieją też obserwabli, które wykazują bardzo wolną zbieżność. Fizyczne rezultaty dla nich możemy otrzymać tylko w granicy nieskończonego obciążenia.

Jedną z podstawowych obserwabli jest Hamiltonian badanego układu. Zachowanie się energii własnych przy rosnącym obciążeniu, pozwala na określenie natury odpowiadających im stanów własnych. Innymi słowy możliwe jest rozróżnienie pomiędzy stanami zlokalizowanymi a niezlokalizowanymi. Dla prostych układów zostało wykazane [52][53][54], że szybka zbieżność, np. eksponencjalna, jest sygnaturą stanów należących do widma dyskretnego. Odwrotnie, wolna zbieżność, np. postaci $1/N_{cut}$, jest charakterystyką stanów rozproszonych. Intuicyjnie może to być wyjaśnione w następujący sposób. Stany własne badanego układu są rozkładane w bazie utworzonej przez stany własne pewnego wielowymiarowego oscylatora harmonicznego. Jako takie, stany bazowe są zlokalizowane. Potrzebna jest więc baza o nieskończonym rozmiarze, aby poprawnie odtworzyć stany niezlokalizowane. Odwrotnie, aby zrekonstruować stan zlokalizowany na ogół wystarcza kilka najprostszych stanów bazowych. Przykłady zachowania się dyskretnej energii własnych omawiane są w następnym paragrafie podczas dyskusji supersymetrycznego oscylatora anharmonicznego. Z kolei drugi typ zachowania będzie zilustrowany wynikami dla SYMQM dla różnych grup symetrii i w różnych sektorach fermionowych.

5.1.1 Supersymetryczny oscylator anharmoniczny

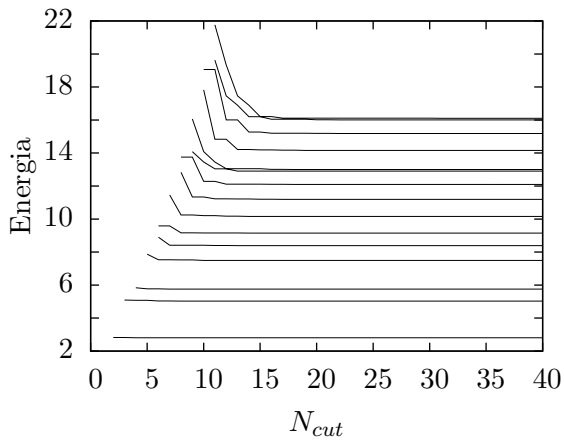
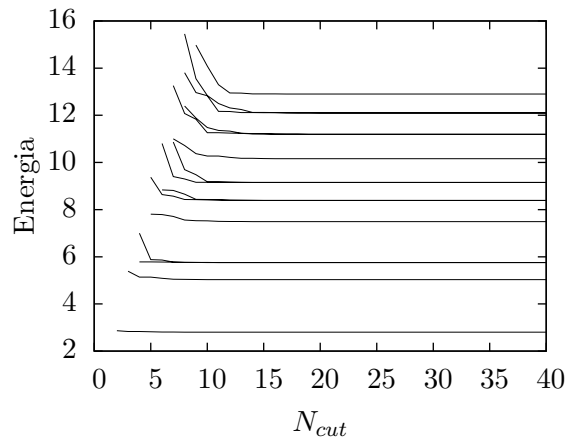
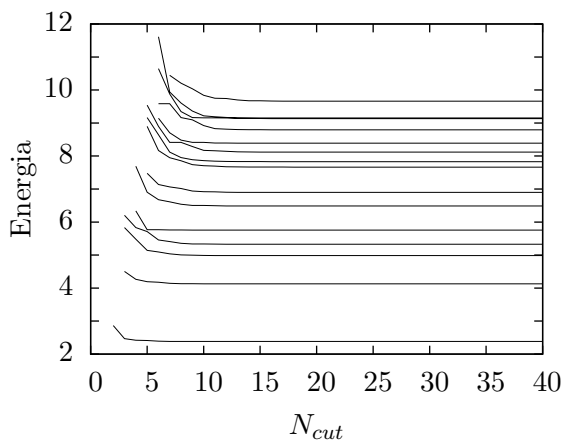
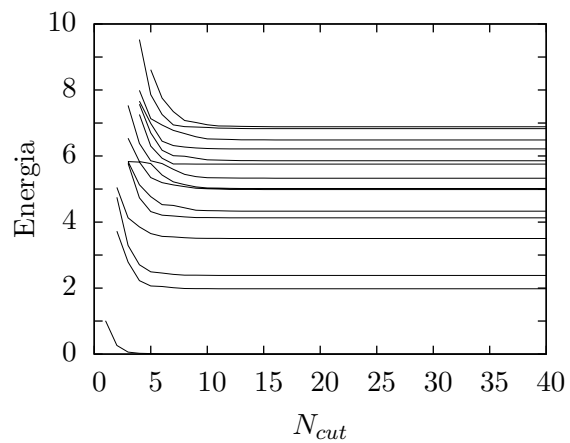
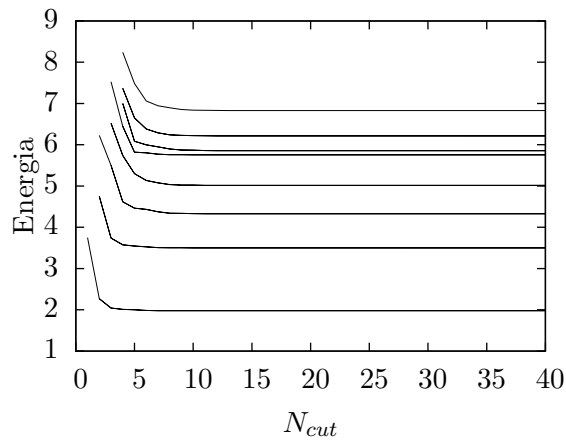
Szczegółową dyskusję zaczynamy od supersymetrycznego oscylatora anharmonicznego, którego Hamiltonian przypominamy poniżej

$$H = \text{tr } p^2 + g^2 \left(\text{tr } x^4 - \frac{1}{N} (\text{tr } x^2)^2 \right) + 2g \text{tr}(x[f^\dagger, f]). \quad (5.1)$$

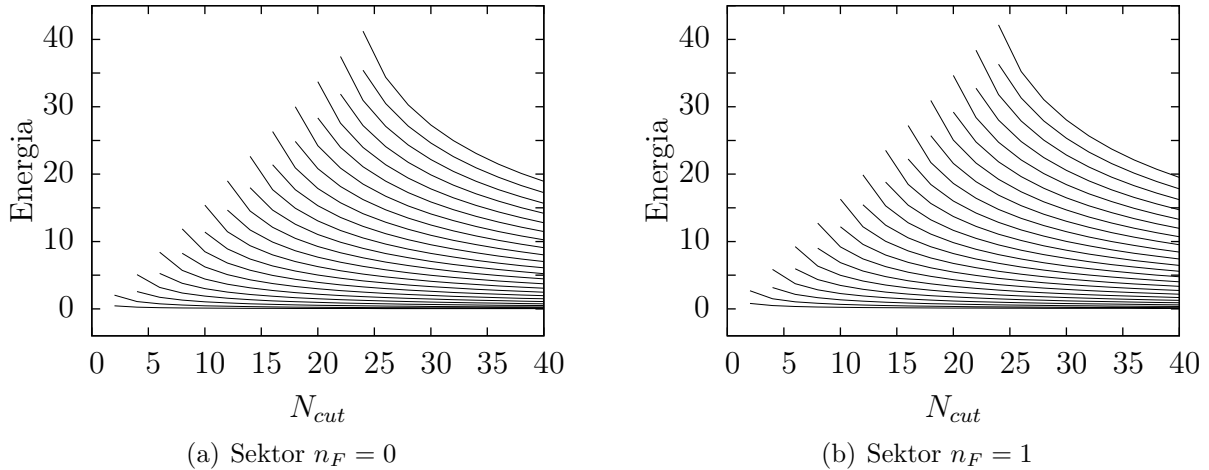
Z powodu potencjału który rośnie w każdym kierunku oczekujemy, że widma tego układu będą dyskretne. Faktycznie, wyniki zawarte w tabeli 5.1 odpowiadające najniższym wartościom własnym Hamiltonianu w sektorach z $n_F = 0, \dots, 4$ otrzymanych dla różnych N_{cut} , wykazują bardzo szybką zbieżność. W szczególności, dla obciążenia równego $N_{cut} = 5$ obliczone wartości są poprawne z dokładnością do 1%. Dla obciążenia $N_{cut} = 40$, co odpowiada bazie złożonej z około 150 stanów w sektorze bozonowym i około 1300 stanów w sektorze z $n_F = 4$ kwantami fermionowymi, widoczna jest zbieżność do ponad 10 cyfr znaczących.

Rysunki 5.1 przedstawiają zależność 15 najniższych energii własnych od obciążenia w różnych sektorach fermionowych. Przedstawione dane odpowiadają stałej sprzężenia $g = 1.0$. Widoczna jest szybka zbieżność wartości własnych we wszystkich sektorach. Możemy zatem wyciągnąć dwa wnioski; wszystkie widma są dyskretne a rezultaty otrzymane dla $N_{cut} = 40$ zbiegły się i odpowiadają fizycznym wartościom w kontinuum.

Pomimo, że na każdym z wykresów 5.1 zamieszczone zostały zależności 15 stanów, degeneracje pojawiające się w wyższych sektorach fermionowych, powodują, że widoczne są

(a) Sektor $n_F = 0$ (b) Sektor $n_F = 1$ (c) Sektor $n_F = 2$ (d) Sektor $n_F = 3$ (e) Sektor $n_F = 4$

Rysunek 5.1: Zależność kilku energii własnych od obciążenia w sektorach z $n_F = 0, 1, \dots, 4$ modelu oscylatora anharmonicznego z symetrią $SU(3)$.



Rysunek 5.2: Zależność kilku energii własnych od obcięcia w sektorze bozonowym i fermionowym modelu $SU(2)$.

mniejsze liczby krzywych. Przykładowo, w sektorze z 4 fermionami spektrum jest dwukrotnie zdegenerowane z powodu symetrii cząstka-dziura.

Warto zaznaczyć, że podobne modele z potencjałem, w którym tensor d_{abc} jest zastąpiony poprzez antysymetryczny tensor f_{abc} , co powoduje pojawienie się płaskich dolin, posiadają widma dyskretne nakładające się na widmo ciągłe [51][54][55].

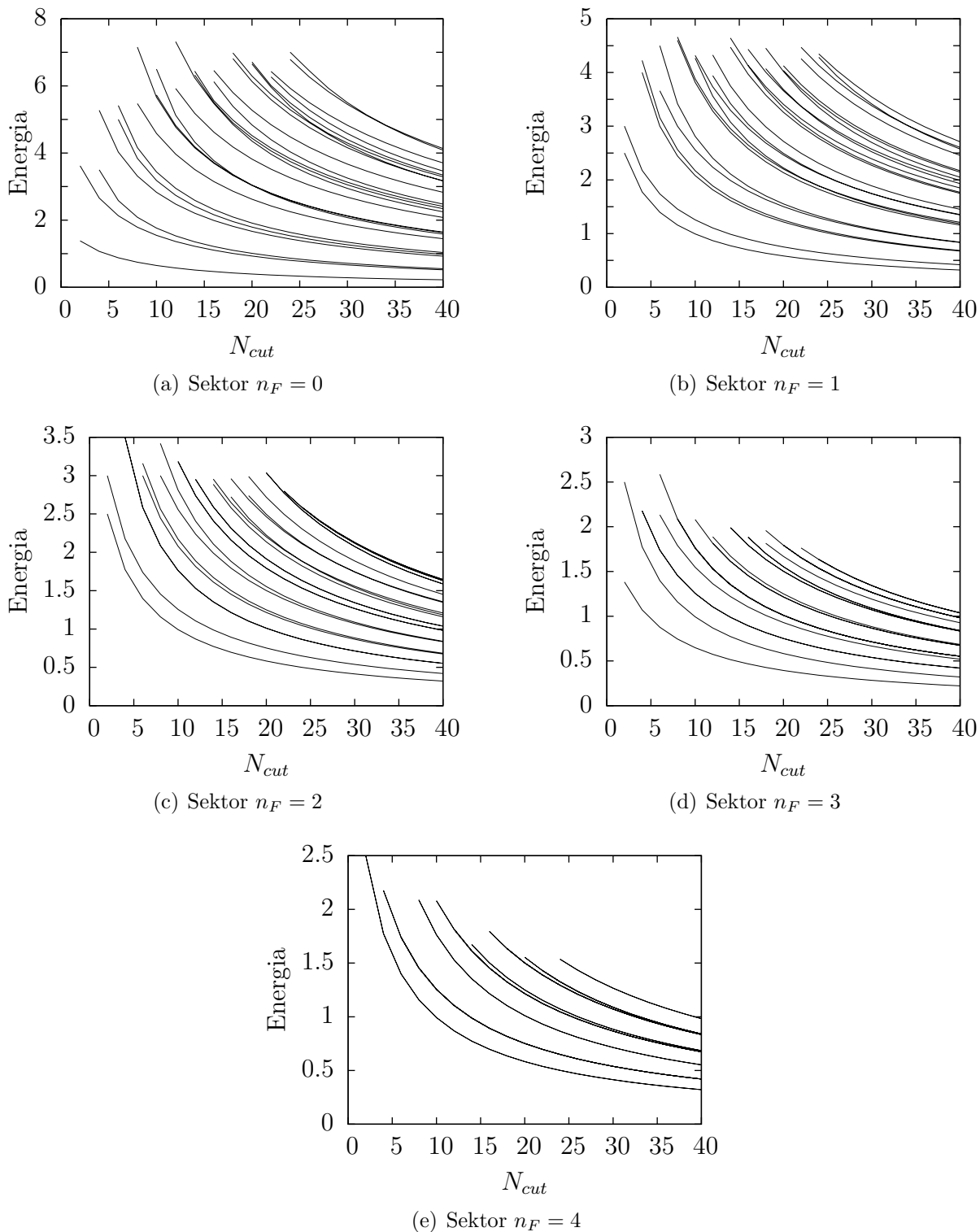
Wyniki w sektorach z $n_F = 5, \dots, 9$ można odtworzyć z danych przedstawionymi w tabeli 5.1 oraz na rysunku 5.1 poprzez symetrię cząstka-dziura.

5.1.2 Modele SYMQM

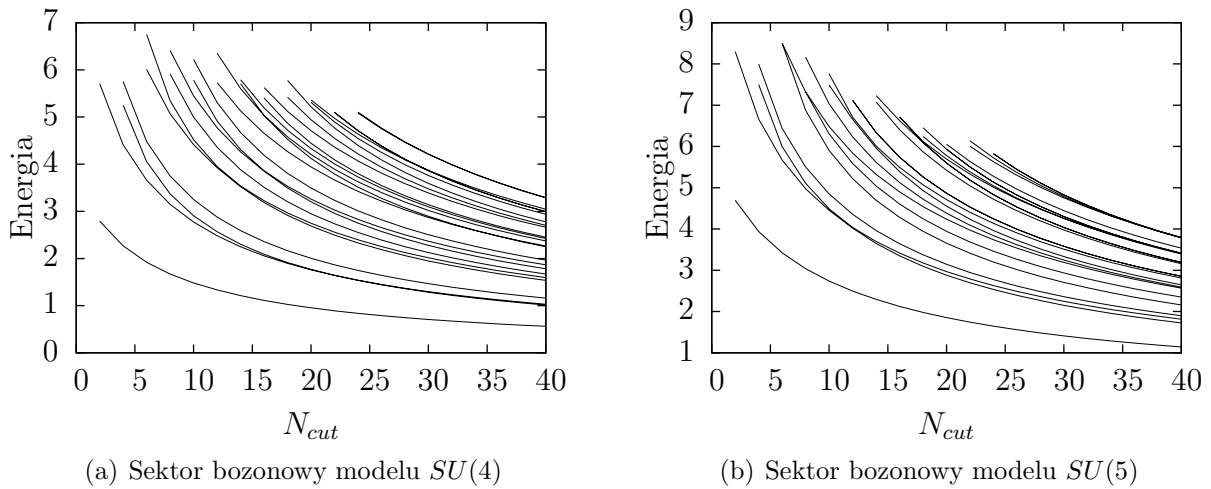
Zbieżność energii dla modeli z grupami symetrii $SU(2)$, $SU(3)$ oraz $SU(4)$ i $SU(5)$ prezentują odpowiednio rysunki 5.2, 5.3 oraz 5.4. Na wszystkich wykresach obserwujemy wolne opadanie krzywych wraz ze wzrostem obcięcia potwierdzające niezlokalizowaną naturę odpowiadających im stanów. Należało tego oczekiwać, skoro Hamiltonian tych układów jest swobodny, $H = \frac{1}{2}\text{tr}(p^2)$, lecz mimo to nietrywialny z powodu warunku Gaussa.

Widma modelu $SU(2)$, przedstawione na rysunku 5.2, wyróżniają się na tle pozostałych regularną strukturą. Jest to nietrywialny efekt związany z prostotą bazy tego modelu oraz szczególną strukturą Hamiltonianu. Na uwagę zasługuje również podobieństwo widm w obydwu sektorach. Wyjaśnieniem jest supersymetria; każdy stan z sektora fermionowego ma partnera w sektorze bozonowym [50][56]. Taka prosta struktura jest wyłączną cechą modelu $SU(2)$ i zostanie w pełni omówiona w rozdziale 6.

Z kolei na rysunku 5.3 przedstawiamy zależności 24 najniższych energii własnych od obcięcia w pięciu sektorach modelu z symetrią $SU(3)$. Poziomy energetyczne wykazują dużo bardziej skomplikowaną strukturę. Dodatkowe degeneracje sprawiają, że w wyższych sektorach fermionowych widoczne są mniejsze liczby krzywych. Przecinanie się niektórych krzy-



Rysunek 5.3: Zależność kilku energii własnych od obciążenia w sektorze bozonowym i sektorach fermionowych z $n_F = 1, \dots, 4$ modelu $SU(3)$.



Rysunek 5.4: Zależność kilku energii własnych od obcięcia w sektorach bozonowych modeli $SU(4)$ i $SU(5)$.

wych sugeruje, że oprócz energii powinna istnieć dodatkowa liczba kwantowa opisująca stany własne Hamiltonianu. Taki wniosek może być poparty przez fakt, że również stany bazowe są numerowane dwiema liczbami całkowitymi. Fizyczna interpretacja drugiej liczby kwantowej będzie omówiona podczas dyskusji funkcji falowych w reprezentacji położeniowej tego modelu w rozdziale 6. Grupowanie się energii w pasma, widoczne szczególnie w sektorze bozonowym, jest także związane z dodatkową liczbą kwantową i zostanie wyjaśnione podczas omawiania analitycznych rozwiązań modelu.

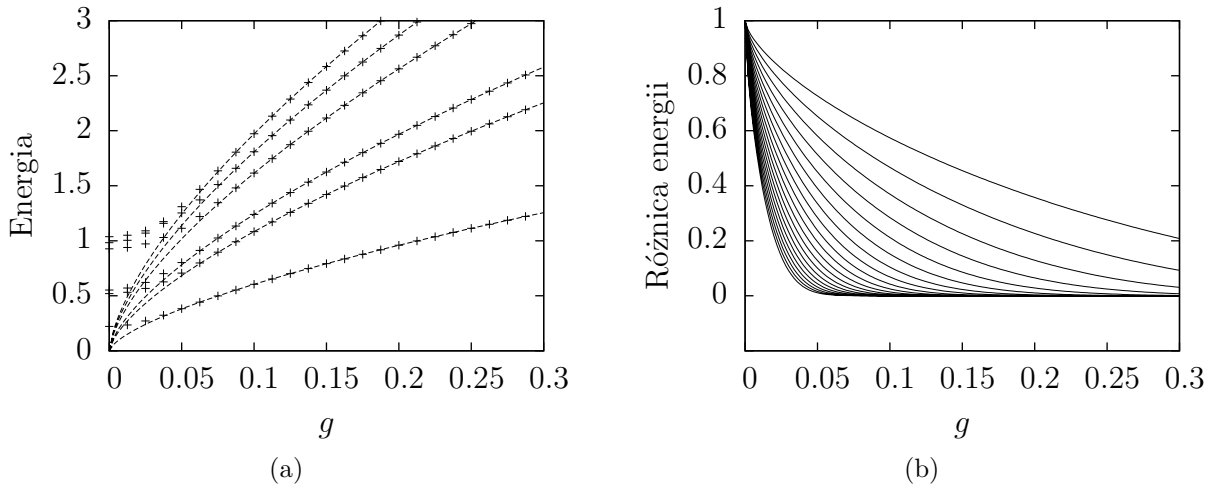
Analogiczne konkluzje możemy wyciągnąć z rysunku 5.4 przedstawiającego zależność kilku energii własnych od obcięcia w sektorze bozonowym dla modeli $SU(4)$ i $SU(5)$. Ponownie, wolne opadanie krzywych potwierdza niezlokalizowany charakter odpowiadających im stanów własnych.

5.1.3 Efekty skończonego obcięcia

Bardzo dobrą ilustracją zależności pomiędzy typem widma a jego zbieżnością jest zachowanie się energii własnych supersymetrycznego oscylatora anharmonicznego dla małych stałych sprzężenia. Dla $g = 0$ układ jest swobodny, a jego widmo jest ciągłe. Dla $g > 0$ w Hamiltonianie pojawia się wyraz anharmoniczny w potencjale, a widmo staje się dyskretne, jak zostało to uargumentowane w poprzednim podrozdziale. Aby ocenić szybkość zbieżności możemy wykorzystać dodatkową symetrię tego modelu, mianowicie (patrz wzór (3.31)),

$$H(g) = g^{\frac{2}{3}} H(1). \quad (5.2)$$

Obliczając numerycznie $H(1)$ przy $N_{cut} = 40$ możemy odtworzyć *dokładną* zależność kilku najniższych energii własnych od stałej sprzężenia. Rysunek 5.5 zawiera takie wyniki. Liniami przerywanymi zaznaczono dokładne widmo otrzymane dzięki relacji (5.2), natomiast krzyżki oznaczają widmo uzyskane numerycznie dla wybranych wartości stałej sprzężenia. Dla



Rysunek 5.5: Panel (a): Zależność sześciu najniższych energii od stałej sprężenia g . Krzyżyki oznaczają punkty obliczone numerycznie dla obcięcia $N_{cut} = 40$. Linie wyznaczają dokładną zależność energii własnych od obcięcia zgodnie z równaniem (5.2) z numerycznie obliczonym $H(1)$. Dla małej stałej sprężenia różnice pomiędzy wynikami numerycznymi a przewidywaniami analitycznymi są wynikiem skończonego obcięcia. Panel (b): Znormalizowane różnice pomiędzy wynikami numerycznymi a analitycznymi dla najniższej energii własnej dla rosnących obcięć, $N_{cut} = 2, 4, 6 \dots, 40$, od góry do dołu. Najwyższa krzywa odpowiada obcięciu $N_{cut} = 2$, natomiast najniższa $N_{cut} = 40$.

$g \geq 0.1$ obydwie wyniki pokrywają się. Numeryczne energie własne zbiegły się do swoich wartości dokładnych. Przeciwnie, dla małych stałych sprężenia istnieje różnica pomiędzy wynikami numerycznymi a przewidywaniami (5.2) spowodowana zbyt małą wartością obcięcia. Dla $g = 0$ dokładny wynik można otrzymać tylko w granicy nieskończonego obcięcia. A zatem, im silniejsze jest oddziaływanie tym szybsza jest zbieżność.

Ten sam efekt zilustrowany jest w prawym panelu rysunku 5.5. Dla energii najniższego stanu bozonowego przedstawiliśmy porównanie różnicy pomiędzy wynikami numerycznymi a przewidywaniami wzoru (5.2) dla różnych obcięć. W tym celu wykreśliliśmy następującą rodzinę funkcji zmiennych g i N_{cut} , dla obcięć z przedziału $N_{cut} = 2, \dots, 40$,

$$E_0(g, N_{cut}) = \frac{E_0^{numeryczna}(g, N_{cut}) - E_0^{teoretyczna}(g)}{E_0^{numeryczna}(0, N_{cut})}. \quad (5.3)$$

Całkowita normalizacja została dobrana tak, aby $E_0(0, N_{cut}) = 1.0$. Widzimy, że dla malejącego g potrzebne jest coraz większe obcięcie żeby uzyskać zgodność wyników numerycznych i teoretycznych.

$n_F = 0$	$n_F = 1$	$n_F = 2$	$n_F = 3$	$n_F = 4$	$n_F = 5$	$n_F = 6$	$n_F = 7$	$n_F = 8$
			0		0			
			1.97796	1.97796^2	1.97796			
<i>2.80488</i>	<i>2.80488</i>	2.3838	2.3838		2.3838	2.3838		
			3.50147	3.50147^2	3.50147			
		4.12774	4.12774		4.12774	4.12774		
			4.32778	4.32778^2	4.32778			
		4.98444	4.98444		4.98444	4.98444		
			5.01572	5.01572^2	5.01572			
<i>5.02988</i>	<i>5.02988</i>						5.02988	5.02988
		5.32891	5.32891		5.32891	5.32891		
<i>5.75469</i>	<i>5.75469²</i>	5.75469	5.75469	5.75469^2	5.75469	5.75469	5.75469 ²	5.75469
			5.85572	5.85572^2	5.85572			
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Tabela 5.2: Energie własne kilku najniższych stanów supersymetrycznego oscylatora anharmonicznego obliczone dla $g = 1.0$ oraz $N_{cut} = 40$. Pary zdegenerowanych energii w sąsiednich sektorach stanowią supermultiplety. Podwójne degeneracje w danym sektorze są zaznaczone zapisem z wykładnikiem ². Takie degeneracje w sektorze $n_F = 4$ są związane z symetrią cząstka-dziura. Stany własne odpowiadające energiom wyróżnionym kursywą zostały uwzględnione w dyskusji ułamków supersymetrycznych.

5.2 Odtwarzanie supersymetrii

Obecnie przedstawimy szczegółowe widma otrzymane dla skończonego obciążenia. Omówimy pojawiające się w nich degeneracje, w szczególności poszukując degeneracji supersymetrycznych.

5.2.1 Supersymetryczny oscylator anharmoniczny

Tabela 5.2 przedstawia energie własne kilku najniższych stanów supersymetrycznego oscylatora anharmonicznego we wszystkich sektorach. Rezultaty otrzymaliśmy dla $g = 1.0$ oraz dla obciążenia gwarantującego, że otrzymane wyniki pokrywają się z wartościami w kontinuum.

Supersymetria jest widoczna jako degeneracje wszystkich sąsiadujących ze sobą energii własnych. Dzięki dużemu obciążeniu wszystkie pary energii zawarte w tabeli 5.2 są zgodne do ponad 10 cyfr znaczących. Jako przykład mogą posłużyć najniższe energie w sektorach $n_F = 0$ i $n_F = 1$, których dokładnie zdegenerowane wartości zostały przedstawione w tabeli 5.1 zamieszczonej w poprzednim podrozdziale.

Dodatkowymi argumentami przemawiającymi za tym, że supersymetria jest odpowiedzialna za powyższe degeneracje, są wartości tak zwanych ułamków supersymetrycznych $q_{mn}^{n_F}$ [51][57]. $q_{mn}^{n_F}$ definiujemy jako udział obrazu stanu n z sektora z z n_F fermionami poprzez dzi-

$n_F=0$ $n_F=1$	2.80488	5.02988	5.75469	5.75469
2.80488	0.9947	0.0072	0.0015	0.0
5.02988	0.0167	0.9904	0.0698	0.0
5.75469	0.0030	0.0317	0.4934	0.6396
7.49223	0.0717	0.0608	0.0007	0.0

$n_F=0$ $n_F=1$	2.80488	5.02988	5.75469	5.75469
2.80488	1.0	0.0	0.0	0.0
5.02988	0.0	1.0	0.0	0.0
5.75469	0.0	0.0	0.5	0.8667
7.49223	0.0	0.0	0.0	0.0

Tabela 5.3: Tabela ułamek supersymetrycznych dla supersymetrycznego oscylatora anharmonicznego pomiędzy sektorami z $n_F = 0$ i $n_F = 1$ dla obciążenia $N_{cut} = 4$ (górną tabelą) i $N_{cut} = 40$ (dolną tabelą). Wiersze i kolumny są numerowane *dokładnymi* energiami czterech najniższych stanów w sektorach z $n_F = 0$ (wiersze) i $n_F = 1$ (kolumny).

łańcie superładunku Q^\dagger , w stanie m z sektora z $n_F + 1$ fermionami,

$$q_{nm}^{n_F} = \sqrt{\frac{2}{E_n + E_m}} {}_{n_F+1}\langle n | Q^\dagger | m \rangle_{n_F}, \quad (5.4)$$

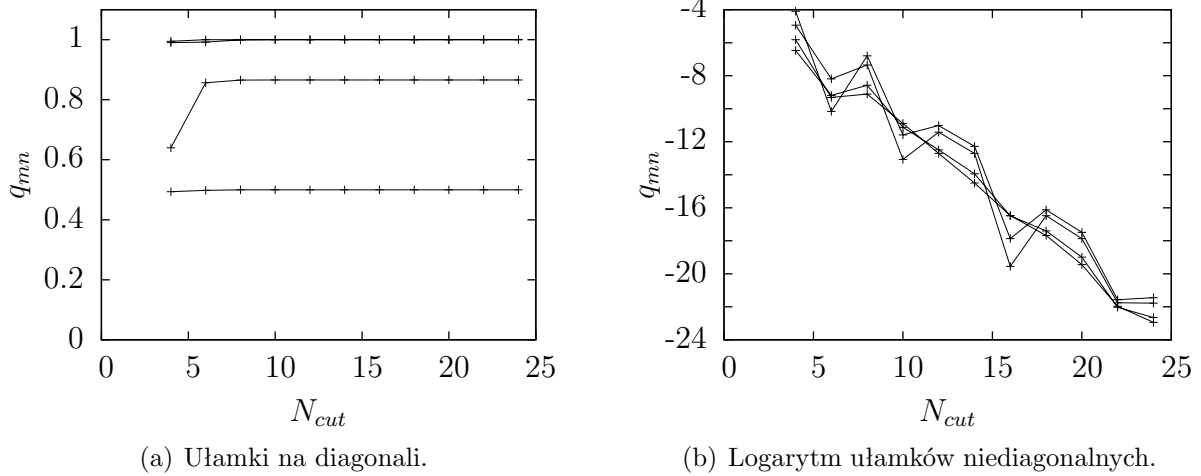
gdzie $|m\rangle$ i E_m to m -ty stan własny i energia własna otrzymana przy danej dyskretyzacji w sektorze z n_F fermionami, natomiast $|n\rangle$ i E_n to odpowiednio n -ty stan własny i energia własna w sektorze z $n_F + 1$ fermionami. Normalizacja została tak dobrana aby dla stanów $|m\rangle$ i $|n\rangle$ należących do jednego supermultipletu, wartość bezwzględna ułamka supersymetrycznego przyjmowała wartość 1.

Przykładowe wartości ułamek supersymetrycznych dla czterech najniższych stanów z sektorów z $n_F = 0$ i $n_F = 1$ są przedstawione w tabeli 5.3 dla dwóch wartości obciążenia: $N_{cut} = 4$ i $N_{cut} = 40$. Zależność od obciążenia obrazuje rysunek 5.6. Widoczna jest szybka zbieżność ułamek $q_{2.80488,2.80488}^1$ oraz $q_{5.02988,5.02988}^1$ do wartości równych 1.0. Natomiast wartości pozostałych ułamek znikają eksponencjalnie szybko, co ukazuje prawy panel rysunku 5.6. Ułamki supersymetryczne potwierdzają zatem, że stany odpowiadające zdegenerowanym energiom własnym są swoimi obrazami poprzez transformacje zadane przez superładunki.

Bozonowy stan o energii 7.49223 jest częścią supermultipletu zawierającego stan z sektora z $n_F = 1$, który nie został wzięty pod uwagę w tabeli 5.3. Stąd, wartości 0.0 w czwartym wierszu tej tabeli.

W trzecim wierszu tabeli 5.3 obserwujemy dwie niezerowe wartości. Tłumaczy się to tym, że superpartner stanu bozonowego o energii 5.75469 jest kombinacją liniową dwóch stanów z sektora z $n_F = 1$ o tej samej energii ze współczynnikami 0.5 oraz 0.8667. Normalizacja tych współczynników równa 1.0 świadczy, że jest to kombinacja liniowa wyłącznie wskazanych stanów.

Drugim przewidywaniem supersymetrii jest obecność w widmie niezdegenerowanego stanu o zerowej energii. W badanym modelu pojawia się on w sektorze $n_F = 3$, a jego obraz poprzez



(a) Ułamki na diagonalu.

(b) Logarytm ułamków niediagonalnych.

Rysunek 5.6: Zależność ułamków supersymetrycznych od obcięcia dla modelu supersymetrycznego oscylatora anharmonicznego.

$n_F = 0$	$n_F = 1$	$n_F = 2$	$n_F = 3$
0.18347	0.35130	0.35130	0.18347
0.74426	1.05571	1.05571	0.74426
1.71700	2.16035	2.16035	1.71700
3.17453	3.74252	3.74252	3.17453
5.27023	5.96048	5.96048	5.27023
8.41049	9.22963	9.22963	8.41049

Tabela 5.4: Widmo modelu SYMQM z symetrią $SU(2)$ dla obcięcia $N_{cut} = 12$. Degeneracje pomiędzy sektorami z $n_F = 1$ i $n_F = 2$ oraz z $n_F = 0$ i $n_F = 3$ są związane z symetrią cząstka-dziura, natomiast brak jest degeneracji supersymetrycznej.

symetrię cząstka-dziura, w sektorze z $n_F = 5$. Liczba supersymetrycznych próżni dla modeli z symetrią $SU(3)$ bez oddziaływania będzie dyskutowana podczas wyprowadzania analitycznych rozwiązań tych modeli w rozdziale 6. Zgodnie z wnioskami tam zawartymi próżnie dla tego modelu znajdują się w sektorach $n_F = 0, 3, 5, 8$. A zatem, włączenie oddziaływania spowodowało zniknięcie próżni z sektorów z $n_F = 0$ i $n_F = 8$. Jest to po części spodziewany efekt. Część fermionowa potencjału znika w sektorach $n_F = 0$ i $n_F = 8$, natomiast potencjał bozonowy nadaje niezerową energię stanom podstawowym. Z kolei, w sektorach $n_F = 3$ i $n_F = 5$ zarówno wyrazy bozonowy i fermionowy mogą modyfikować energie. Okazuje się jednak, że ich wkład się dokładnie znosi i nie zmieniają one zerowej energii próżni.

$n_F = 0$	$n_F = 1$	$n_F = 2$	$n_F = 3$	$n_F = 4$	$n_F = 5$	$n_F = 6$	$n_F = 7$	$n_F = 8$
1.07061			1.07061		1.07061			1.07061
	1.39825	1.39825	1.39825	1.39825 ²	1.39825	1.39825	1.39825	
	2.17712	2.17712	2.17712 ²	2.17712 ⁴	2.17712 ²	2.17712	2.17712	
2.58579		2.58579 ²	2.58579 ⁴	2.58579 ²	2.58579 ⁴	2.58579 ²		2.58579
2.65776			2.65776		2.65776			2.65776
	3.15912	3.15912	3.15912	3.15912 ²	3.15912	3.15912	3.15912	
	4.00000	4.00000	4.00000 ²	4.00000 ⁴	4.00000 ²	4.00000	4.00000	
	4.50000	4.50000	4.50000 ²	4.50000 ⁴	4.50000 ²	4.50000	4.50000	
	4.82288	4.82288	4.82288 ²	4.82288 ⁴	4.82288 ²	4.82288	4.82288	
5.27163			5.27163		5.27163			5.27163
5.41421		5.41421 ²	5.41421 ⁴	5.41421 ²	5.41421 ⁴	5.41421 ²		5.41421
	5.94263	5.94263	5.94263	5.94263 ²	5.94263	5.94263	5.94263	

Tabela 5.5: Widmo modelu SYMQM z symetrią $SU(3)$ we wszystkich sektorach. W każdym sektorze wprowadzono maksymalną liczbą kwantów bozonowych równą $N_{cut} = 5$. Wymiary baz znajdują się w tabeli 5.6. W widmie zachowana jest symetria cząstka-dziura, natomiast brak supersymetrii. Pozostałe pojawiające się degeneracje są przypadkowe i zostaną wyjaśnione analitycznie w rozdziale 6.

5.2.2 Modele SYMQM z symetrią $SU(2)$ i $SU(3)$

Dla widm modeli swobodnych wykazaliśmy wcześniej, że interpretacja ich zbieżności jest inna niż dla modeli z widmem dyskretnym. Okazuje się także, że wprowadzenie obciążenia w sposób przedstawiony dotychczas jawnie łamie supersymetrię. Stąd nie jest możliwe odtworzenie degeneracji supersymetrycznych dla żadnego skończonego obciążenia. Zatem widma numeryczne przedstawiamy dla przykładowych obciążeń. Dla modelu z symetrią $SU(2)$ wynosi ono $N_{cut} = 12$, natomiast dla modelu z symetrią $SU(3)$ $N_{cut} = 5$. Wyniki zebrane są odpowiednio w tabelach 5.4 oraz 5.5.

Możliwe jest zachowanie symetrii cząstka-dziura poprzez wprowadzenie takiego samego obciążenia w każdym sektorze. Degeneracje związane z tą symetrią widać w obydwu tabelach jako zgodność widm w sektorach z n_F i $N^2 - 1 - n_F$ kwantami fermionowymi. W modelu $SU(2)$ jej efektem jest degeneracja pomiędzy sektorami z $n_F = 1$ i $n_F = 2$ oraz z $n_F = 0$ i $n_F = 3$, natomiast w przypadku modelu $SU(3)$ jest to, między innymi, podwójna degeneracja widma w środkowym sektorze. Dla ostatniego z tych modeli wyszczególniliśmy rozmiary baz dla $N_{cut} = 5$ w tabeli 5.6.

Widma z tabel 5.4 oraz 5.5 potwierdzają złamanie supersymetrii. Zarówno w modelu z symetrią $SU(2)$, jak i z symetrią $SU(3)$, energie nie tworzą zdegenerowanych par oraz brak jest kandydata na próżnię supersymetryczną o zerowej energii. Widmo modelu $SU(3)$ posiada bardziej skomplikowaną strukturę. Pojawia się wiele degeneracji przypadkowych, które nie mogą być związane z supersymetrią, gdyż nie wszystkie energie o tych samych wartościach znajdują się w sąsiednich sektorach. Dodatkowo, wartości ułamków supersymetrycznych wskazują, że powiązane działaniem superładunków są stany o różnych energiach, natomiast

n_B	$n_F = 0$	$n_F = 1$	$n_F = 2$	$n_F = 3$	$n_F = 4$	$n_F = 5$	$n_F = 6$	$n_F = 7$	$n_F = 8$
0	1			1		1			1
1		1	1	1	2	1	1	1	
2	1	1	1	3	4	3	1	1	1
3	1	1	3	5	4	5	3	1	1
4	1	2	2	5	8	5	2	2	1
5	1	2	4	7	8	7	4	2	1
Σ	5	7	11	22	26	22	11	7	5

Tabela 5.6: Rozmiar baz w poszczególnych sektorach dla symetrii $SU(3)$ dla $N_{cut} = 5$. Sumaryczna liczba, Σ , stanów bozonowych wynosi 58 i jest równa liczbie stanów fermionowych (oznaczonymi tłustą czcionką).

nie są stany w sąsiednich sektorach o równych energiach. A zatem, odpowiedzialne za te degeneracje muszą być inne mechanizmy, które zostaną wyjaśnione w rozdziale 6.3. Zamieszczamy tam analityczne wyprowadzenie wszystkich energii z tabeli 5.5.

5.3 Supersymetria dla skończonego obciążenia

W tym podrozdziale proponujemy sposób wprowadzenia obciążenia, który nie łamie supersymetrii. Jak wiadomo operator Hamiltonianu jest równy antykomutatorowi operatorów superładunku i jego sprzężenia hermitowskiego. W związku z tym możemy otrzymać *obciążoną* macierz operatora Hamiltona na dwa różne sposoby:

1. w pierwszym sposobie, obliczamy macierz Hamiltonianu w obciążonej bazie, tzn.

$$H_{\text{dyskretyzacja Hamiltonianu}} = \{Q, Q^\dagger\} \Big|_{\text{obciążone}}. \quad (5.5)$$

Tę dyskretyzację nazywamy *dyskretyzacją Hamiltonianu*. Posłużyliśmy się nią w dyskusji zbieżności widm w rozdziale 5.1 oraz odtwarzania supersymetrii w rozdziale 5.2.

2. w drugim sposobie, obliczamy macierze superładunków w obciążonej bazie, natomiast macierz Hamiltonianu otrzymywana jest jako antykomutator już obciążonych macierzy superładunków, tzn.

$$H_{\text{dyskretyzacja superładunków}} = \{Q|_{\text{obciążone}}, Q^\dagger|_{\text{obciążone}}\}. \quad (5.6)$$

Ten sposób wprowadzenia obciążenia będziemy nazywać *dyskretyzacją superładunków*.

W granicy fizycznej, odpowiadającej nieskończonemu obciążeniu, obydwie dyskretyzacje dają te same wyniki. Jednak dla każdego skończonego obciążenia, obciążone macierze Hamiltonianu będą się różnić ostatnimi elementami na głównej przekątnej.

Oczekujemy, że widmo Hamiltonianu w dyskretyzacji superładunków będzie wykazywać degeneracje supersymetryczne nawet dla skończonego obciążenia, ponieważ operator Hamiltonianu jest z konstrukcji związany z kwadratem operatora superładunku. Zobaczymy to na

przykładzie pary stanów $|1\rangle$ i $|2\rangle$ z sąsiednich sektorów fermionowych, powiązanych działaniem superładunków w następujący sposób [43],

$$Q^\dagger|1\rangle = \alpha|2\rangle, \quad Q|2\rangle = \beta|1\rangle, \quad (5.7)$$

gdzie α i β są stałymi. Hamiltonian zdefiniowany w odpowiednich sektorach fermionowych zgodnie z (5.6) ma zdegenerowane widmo,

$$\begin{aligned} H_1|1\rangle &\equiv QQ^\dagger|1\rangle = \alpha\beta|1\rangle, \\ H_2|2\rangle &\equiv Q^\dagger Q|2\rangle = \alpha\beta|2\rangle, \end{aligned} \quad (5.8)$$

przy czym skorzystaliśmy z faktu, że $Q^2 = 0$ oraz $Q^{\dagger 2} = 0$. Zastosowanie dyskretyzacji Hamiltonianu powoduje, że nie da się zapisać obciętej macierzy Hamiltonianu jako kwadratu macierzy superładunków. A zatem, nie będzie ona posiadać degeneracji supersymetrycznej.

Pozostaje uściślić sposób wprowadzenia obciążenia w poszczególnych sektorach fermionowych. W rozdziale 4.1.3, rozróżniliśmy trzy *schematy* jej ograniczenia, które gwarantują równą ilość stanów bozonowych i fermionowych dla każdej liczby kwantów bozonowych n_B . Oznaczmy maksymalną liczbę kwantów bozonowych w sektorze bozonowym poprzez N_{cut} . Wtedy obciążenie w sektorach fermionowych może być równe N_{cut} dla schematu *poziomego*, $N_{cut} - n_F$ dla schematu *lewego* lub $N_{cut} + n_F$ dla schematu *prawego*. Ostatnie dwa schematy są równoważne, jeśli zachowana jest symetrią cząstka-dziura. Będziemy je zatem nazywać też skrótowo: schematami *ukośnymi*. Przykładowe liczby stanów w bazie Focka z symetrią $SU(3)$ dla schematu poziomego i lewego są przedstawione odpowiednio w tabelach 5.6 i 5.7.

Okazuje się, że w lewym i prawym schemacie możliwe jest otrzymanie degeneracji supersymetrycznej widma, natomiast w schemacie poziomym nie jest. Jest to związane z faktem, że schematy ukośne pozwalają dobrać obciążenie w kolejnych sektorach w taki sposób, aby w każdym sektorze znalazły się wszystkie stany, które mogą być otrzymane poprzez działanie odpowiednio Q lub Q^\dagger danymi wzorami (3.34) na stany sektora sąsiedniego. Innymi słowy, tabela 5.7 zawiera wszystkie stany bazowe, które można otrzymać dzięki operatorowi Q zaczynając od dwóch stanów w sektorze $n_F = 8$. A zatem, posiadając poprawne macierze Q dla schematu lewego *definiujemy* macierze Q^\dagger poprzez sprzężenie hermitowskie Q . Dzięki temu w dyskretyzacji superładunków postać Hamiltonianu w każdym z sektorów związana jest z kwadratem superładunków. Wynika z tego, że obydwa schematy ukośne umożliwiają otrzymanie degeneracji supersymetrycznej. Dodatkowo, z konstrukcji wartości ułamków otrzymanych w dyskretyzacji superładunków są równe 1.0 i nie zależą od obciążenia. Analityczne dyskusje stanów własnych otrzymanych przy zastosowaniu dyskretyzacji Hamiltonianu oraz dyskretyzacji superładunków są zamieszczone odpowiednio w rozdziale 6 oraz w dodatku D.

Dla schematu poziomego (patrz tabela 5.6) sumy liczb stanów bozonowych i fermionowych są równe. Inaczej jest dla schematów ukośnych. W tych przypadkach sumy liczb stanów bozonowych i fermionowych różnią się o jeden (patrz tabela 5.7 oraz dyskusja symetrii stanów Focka w rozdziale 4.1.3). Dodatkowy stan jest stanem bozonowym. Dzięki tej nierówności będzie możliwe pojawienie się niezdegenerowanego stanu próżni supersymetrycznej.

Obecnie omówimy szczegółowo widma supersymetrycznego oscylatora anharmonicznego oraz modeli SYMQM z symetrią $SU(2)$ i $SU(3)$ koncentrując się na wskazaniu degeneracji supersymetrycznych.

n_B	$n_F = 0$	$n_F = 1$	$n_F = 2$	$n_F = 3$	$n_F = 4$	$n_F = 5$	$n_F = 6$	$n_F = 7$	$n_F = 8$
0	1			1		1			1
1		1	1	1	2	1	1	1	
2	1	1	1	3	4	3	1	1	1
3	1	1	3	5	4	5	3	1	
4	1	2	2	5	8	5	2		
5	1	2	4	7	8	7			
6	2	2	4	9	10				
7	1	3	5	9					
8	2	3	5						
9	2	3							
10	2								
Σ	14	18	25	40	36	22	7	3	2

Tabela 5.7: Lewy schemat obciążenia dla $N_{cut} = 10$ w sektorze bozonowym. Sumaryczna liczba, Σ , stanów bozonowych wynosi 84, natomiast sumaryczna liczba stanów fermionowych **83** (oznaczonymi tłustą czcionką).

5.3.1 Supersymetryczny oscylator anharmoniczny

Supersymetria dla oscylatora anharmonicznego może być odtworzona w obydwu dyskretyzacjach, ponieważ energie są zbieżne wraz ze wzrostem obciążenia. Zatem jest to dobry model aby porównać wyniki otrzymane obydwoma metodami. Skoncentrujemy się na ułamkach supersymetrycznych, których wartości dla dyskretyzacji Hamiltonianu zostały przedstawione w tabeli 5.3. Identyczne ułamki supersymetryczne obliczone w dyskretyzacji superładunków zamieściliśmy w tabeli 5.8. Zgodnie z oczekiwaniami w obydwu podejściach otrzymaliśmy podobne wyniki, pomimo że do dyskretyzacji superładunków użyliśmy bardzo małego obciążenia $N_{cut} = 4$. Na uwagę zasługuje różnica w wartościach ułamków $q_{5.75469,5.75469}^1$. W dyskretyzacji Hamiltonianu superpartnerem stanu bozonowego o energii 5.75469 była kombinacja stanów z sektora $n_F = 1$ o tej samej energii. W dyskretyzacji superładunków superpartner jest pojedynczym stanem. A zatem, w tej dyskretyzacji konstruowane są od razu poprawne stany tworzące supermultiplety. Podobne zachowanie zaobserwujemy w modelach swobodnych

$n_{F=0}$ $n_{F=1}$	2.80488	5.02988	5.75469	5.75469
2.80488	1.0	0.0	0.0	0.0
5.02988	0.0	1.0	0.0	0.0
5.75469	0.0	0.0	1.0	0.0
7.49223	0.0	0.0	0.0	0.0

Tabela 5.8: Tabela ułamków supersymetrycznych dla supersymetrycznego oscylatora anharmonicznego pomiędzy sektorami z $n_F = 0$ i $n_F = 1$ dla obciążenia $N_{cut} = 4$ w dyskretyzacji superładunków. Wiersze i kolumny opisane są *dokładnymi* energiami czterech najniższych stanów w sektorach z $n_F = 0$ (wiersze) i $n_F = 1$ (kolumny).

$n_F = 0$	$n_F = 1$	$n_F = 2$	$n_F = 3$
0			0
0.35130	0.35130	0.35130	0.35130
1.05571	1.05571	1.05571	1.05571
2.16035	2.16035	2.16035	2.16035
3.74252	3.74252	3.74252	3.74252
5.96048	5.96048	5.96048	5.96048
9.22963	9.22963	9.22963	9.22963

Tabela 5.9: Widmo modelu z symetrią $SU(2)$ w dyskretyzacji superładunków. W sektorach $n_F = 0, 1$ wybrano lewy schemat obciążenia z $N_{cut} = 12$, natomiast w sektorach $n_F = 2, 3$ wybrano prawy schematu z $N_{cut} = 12$.

podczas dyskusji dokładnych rozwiązań zamieszczonej w następnych rozdziałach.

5.3.2 Model z symetrią $SU(2)$

Baza modelu $SU(2)$ jest wyjątkowo prosta. Przypomnijmy, że sektor bozonowy składa się wyłącznie ze stanów z parzystą liczbą kwantów, natomiast sektor z $n_F = 1$ wyłącznie ze stanów o nieparzystej liczbie kwantów. Wynika z tego, że poziomy schemat obciążenia jest równoważny schematowi lewemu dla parzystej maksymalnej liczby kwantów w sektorze bozonowym lub prawemu dla nieparzystej maksymalnej liczby kwantów w sektorze bozonowym. Dodatkowo, z powodu symetrii cząstka dziura, baza w sektorze z $n_F = 2$ może zawierać wyłącznie stany o nieparzystej liczbie kwantów. A zatem, ponieważ operatory superładunków dodają lub odejmują tylko *jeden* kwant bozonowy, stany z sektorów $n_F = 1$ i $n_F = 2$ nie mogą być przez nie powiązane. Konsekwencją tego jest możliwość niezależnego dobrania obciążenia w sektorach z $n_F = 0, 1$ i $n_F = 2, 3$. Wobec tego oczekujemy, że zarówno symetria cząstka-dziura jak i supersymetria mogą być zachowane, pomimo zastosowania ukośnych schematów obciążenia.

Tabela 5.9 przedstawia widma energetyczne we wszystkich sektorach modelu $SU(2)$ otrzymane dla obciążenia $N_{cut} = 12$ przy użyciu dyskretyzacji superładunków. Wybrano lewy schemat obciążenia dla sektorów $n_F = 0, 1$ i prawy dla sektorów $n_F = 2, 3$.

Rozpatrując wyniki dla sektorów $n_F = 0$ i $n_F = 1$ zauważamy sygnaturę supersymetrii. Z jednej strony, energie w obydwu sektorach są identyczne. Ułamki supersymetryczne równe 1.0 świadczą o tym, że odpowiadające zdegenerowanym energiom stany własne przechodzą w siebie nawzajem pod działaniem superładunków. Z drugiej strony, spektrum bozonowe posiada dodatkową energię własną równą dokładnie 0.0. Odpowiadający zerowej wartości własnej stan jest niezdegenerowaną próżnią supersymetryczną, co można potwierdzić poprzez porównanie współczynników rozkładu w bazie Focka otrzymanych numerycznie, ze współczynnikami próżni supersymetrycznej wyprowadzonymi w [29][58].

Niezależne wprowadzenie lewego schematu obciążenia w sektorach z $n_F = 2, 3$ pozwoliło zachować symetrię cząstka-dziura i otrzymać podwójną degenerację wszystkich energii. W szczególności, dzięki temu udało się zrekonstruować obydwie próżnie supersymetryczne obecne w tym modelu.

$n_F = 0$	$n_F = 1$	$n_F = 2$	$n_F = 3$	$n_F = 4$	$n_F = 5$	$n_F = 6$	$n_F = 7$	$n_F = 8$
<i>0</i>								
<i>0.24613</i>	<i>0.24613</i>	0.21015	0.21015					
		0.29703	0.29703					
				0.38147	0.38147			
				0.48561	0.48561			
<i>0.49646</i>	<i>0.49646</i>	0.44475	0.44475					
			0.52140 ²	0.52140 ²				
<i>0.58987</i>	<i>0.58987</i>	0.54944	0.54944					
							0.69098	0.69098
			0.69912	0.69912				
				0.70595	0.70595			
		0.74999	0.74999					
				0.82460	0.82460			
		0.86721	0.86721					
			0.86909	0.86909				
		0.92636	0.92636					
1.08542	<i>1.04406</i> 1.08542	1.04406						
					1.08856	1.08856		
1.12500	1.12500	1.11521	1.11521					
		1.12500	1.12500 ³	1.12500 ³	1.12500	1.12500	1.12500	
				1.21482	1.21482			
		1.25000	1.25000	1.25000	1.25000			
1.26771	1.26771							
			1.29289	1.29289 ³	1.29289 ²			
				1.43070	1.43070			
			1.50000	1.50000				
			1.57956	1.57956				
		1.59330	1.59330					
			1.61903 ²	1.61903 ²				
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Tabela 5.10: Widmo modelu z symetrią $SU(3)$ we wszystkich sektorach otrzymane przy użyciu dyskretyzacji superładunków. Zastosowano lewy schemat obcięć z maksymalną liczbą kwantów w sektorze bozonowym równą $N_{cut} = 10$. Przypadkową n -krotną degenerację w danym sektorze zaznaczono poprzez zapis z wykładnikiem n . Znaczenie kursywy jak w tabeli 5.2.

$n_F=0$ $n_F=1$	0.24613	0.49646	0.58987	1.04406
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.24613	1.0	0.0	0.0	0.0
0.49646	0.0	1.0	0.0	0.0
0.58987	0.0	0.0	1.0	0.0

Tabela 5.11: Tabela ułamków supersymetrycznych dla modelu SYMQM $SU(3)$ pomiędzy sektorami z $n_F = 0$ i $n_F = 1$ dla przykładowego obciążenia $N_{cut} = 18$ dla czterech najniższych stanów otrzymanych w dyskretyzacji superładunków. Wiersze i kolumny opisane są energiami odpowiadającymi stanom z tabeli 5.10.

Pokrywanie się widm w sektorach z $n_F = 1$ i $n_F = 2$ w obydwu dyskretyzacjach jest jedną z konsekwencji prostej struktury badanego modelu i zostanie wyjaśnione podczas dyskusji analitycznych rozwiązań w dyskretyzacji superładunków zamieszczonej w dodatku D.

5.3.3 Model z symetrią $SU(3)$

Widmo modelu z symetrią $SU(3)$ zostało przedstawione w tabeli 5.10. Wyniki otrzymaliśmy poprzez wprowadzenie obciążenia w lewym schemacie. Zgodnie z oczekiwaniami supersymetria nie jest złamana, natomiast symetria cząstka-dziura jest.

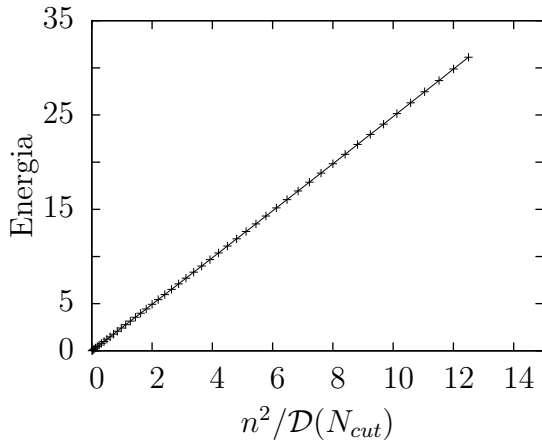
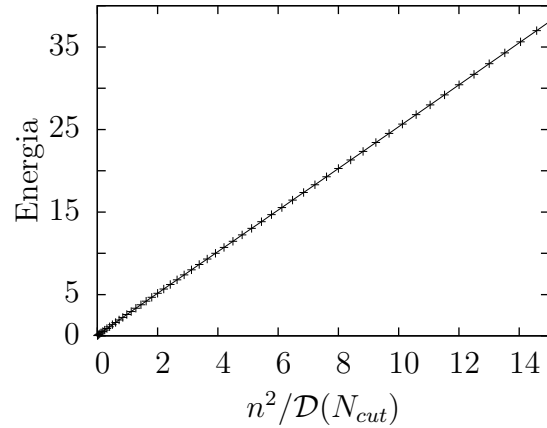
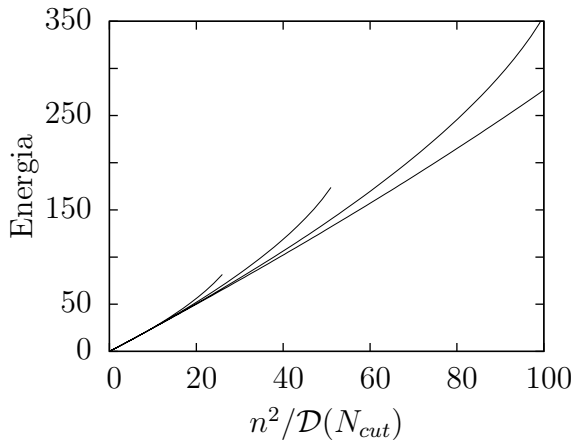
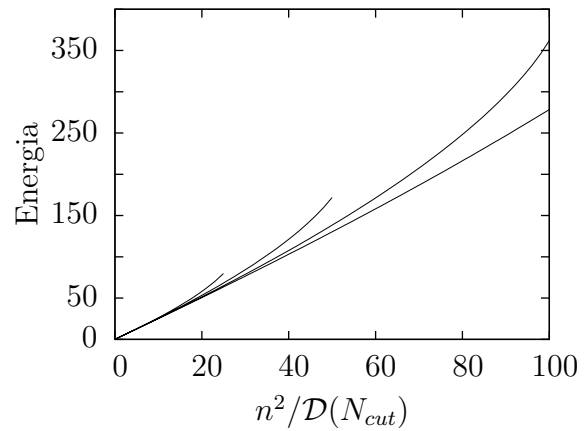
O zachowaniu supersymetrii świadczy dokładna zgodność wszystkich energii własnych w sąsiednich sektorach wraz z analizą ułamków supersymetrycznych. Ich wartości dla przykładowego obciążenia $N_{cut} = 18$ przedstawiliśmy w tabeli 5.11. Wszystkie ułamki supersymetryczne są równe 1.0. Biorąc pod uwagę widmo z tabeli 5.10, możemy zinterpretować ostatnią pustą kolumnę jako oznakę, że odpowiadający stan z sektora z $n_F = 1$ tworzy supermultiplet ze stanem z sektora $n_F = 2$.

Podobnie jak w przypadku modelu $SU(2)$, możliwe jest sprawdzenie, że współczynniki rozkładu stanu o zerowej energii z sektora bozonowego w bazie zgadzają się ze współczynnikami próżni supersymetrycznej skonstruowaną w [29]. Sumaryczna liczba stanów bazowych w obciętej bazie nie dopuszcza do powstania próżni supersymetrycznej w sektorach z $n_F = 3$, $n_F = 5$ i $n_F = 8$ zgodnie z przewidywaniami przedstawionymi w [29][59]. Istnienie tych stanów będzie można potwierdzić poprzez analizę analitycznych rozwiązań dla tego modelu w rozdziale 6.

Analityczne wyprowadzenie widm w sektorze z $n_F = 0$ i $n_F = 1$ znajduje się w dodatku D.

5.4 Prawa skalowania

Na pierwszy rzut oka z wykresów 5.2, 5.3 oraz 5.4 wynika, że wszystkie energie własne opadają do wartości zbliżonych do zera w granicy nieskończonego obciążenia. Nie jest to jednak zgodne z oczekiwaniem ciągłego widma operatora energii kinetycznej, które powinno zostać odtworzone w takiej granicy. Pozorny paradoks został przestudiowany i rozwiązany na prostym


 (a) Sektor $n_F = 0$ dla $N_{cut} = 200$.

 (b) Sektor $n_F = 1$ dla $N_{cut} = 200$.

 (c) Sektor $n_F = 0$.

 (d) Sektor $n_F = 1$.

Rysunek 5.7: (a, b): Prawo skalowania energii własnych $E(n)$ wraz z dopasowaną prostą w obydwu sektorach modelu z symetrią $SU(2)$. (c, d): Zbieżność prawa skalowania energii własnych $E(n)$ dla obcięć $N_{cut} = 50, 100, 200, 400$ w obydwu sektorach modelu z symetrią $SU(2)$. $\mathcal{D}(N_{cut})$ oznacza całkowitą liczbę stanów w danym sektorze dla danego N_{cut} .

przykładzie jednowymiarowych operatorów energii kinetycznej i pędu w [53]. Okazuje się, że należy przypisać kolejne numery, n , kolejnym energiom własnym zaczynając od wartości najniższej, a następnie zastosować prawo skalowania opisujące jak indeks n musi się zmieniać wraz z obcięciem aby w granicy nieskończonego N_{cut} otrzymać fizyczną wartość energii kinetycznej. Zależność ta przyjmuje następującą postać

$$n \sim \sqrt{N_{cut}E}, \quad (5.9)$$

gdzie E jest dowolną dodatnią liczbą rzeczywistą, która będzie odpowiadać *fizycznej* energii kinetycznej w granicy nieskończonego obciążenia. Podobne postępowanie dla operatora pędu

daje

$$n \sim \sqrt{N_{cut}}|P|, \quad (5.10)$$

gdzie P jest dowolną liczbą rzeczywistą. Choć wynikanie relacji dyspersyjnej, $E \sim P^2$, w powyższym rozumowaniu wydaje się oczywiste, okazuje się, że analogiczne wnioski można wyciągnąć w przypadkach nietrywialnych. Na przykład, prawo skalowania (5.9) zostało sprawdzone przez Kotańskiego [60][61] dla supersymetrycznej mechaniki kwantowej Yanga-Millsa w czterech wymiarach z grupą symetrii $SU(2)$. Hamiltonian tego układu posiada potencjał z płaskimi dolinami, a widmo w sektorze z $n_F = 2$ składa się zarówno ze stanów z widma ciągłego jak i ze stanów z widma dyskretnego. Okazało się, że energia odpowiadająca stanom niezlokalizowanym skaluje się zgodnie z (5.9). A zatem, zakładając skalowanie pędu (5.10), zostało wykazane, że dla stanów rozproszonych prawdziwa jest relacja dyspersyjna $E \sim P^2$.

W dalszej części tego podrozdziału sprawdzimy stosowalność praw skalowania dla modeli SYMQM z symetrami $SU(2)$, $SU(3)$, $SU(4)$ i $SU(5)$. Dla modelu z symetrią $SU(2)$ odtworzymy obydwa prawa skalowania (5.9) oraz (5.10), podczas gdy dla modeli z symetrią $SU(N)$, $N > 2$, okaże się, że prawa te się nie stosują. Aby zatem zachować poprawną formę relacji dyspersyjnej zmodyfikujemy prawo skalowania dla operatora pędu. Zaproponowane przez nas uogólnienie powinno poprawnie opisywać stany niezlokalizowane w wersjach modelu analizowanego przez Kotańskiego w [60][61] z symetrią $SU(N)$, $N > 2$.

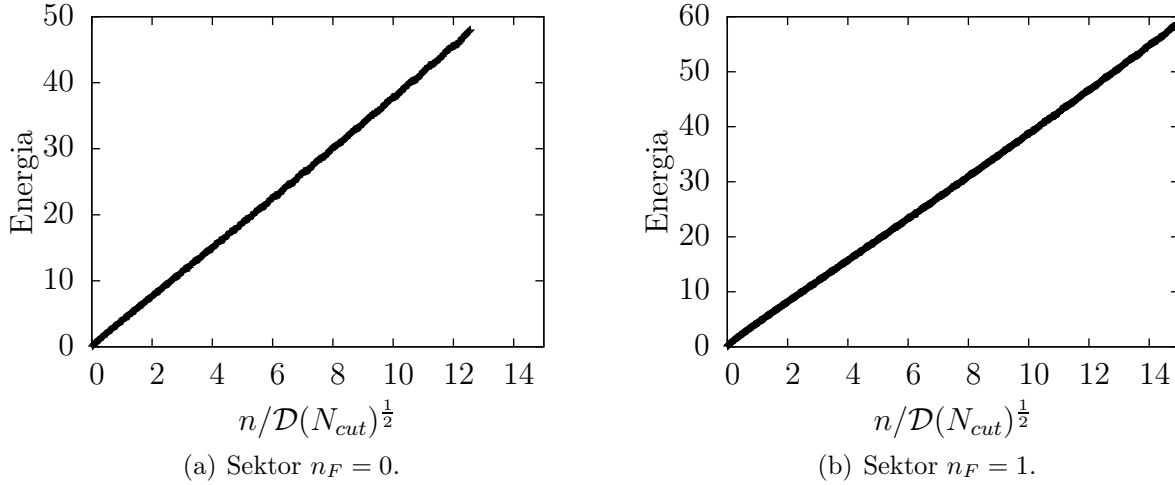
Dyskusję zaczynamy od modelu z symetrią $SU(2)$. Dla danego, możliwie dużego, obciążenia $N_{cut} = 200$, wykreślamy zależność otrzymanych numerycznie wartości własnych Hamiltonianu od kwadratu ich numeru porządkowego, zgodnie ze wzorem (5.9). Wprowadziliśmy oznaczenie $\mathcal{D}(N_{cut})$ na całkowitą liczbę stanów w danym sektorze dla danego N_{cut} . Wyniki dla sektora bozonowego i fermionowego przedstawiamy na rysunku 5.7(a) i 5.7(b). W obydwu przypadkach punkty układają się w prostą, potwierdzając poprawność postulowanego skalowania się energii. Wobec tego, zgodnie z założoną logiką, zakładamy poprawną relację dyspersyjną, $E \sim P^2$, i wnioskujemy prawo skalowania dla operatora pędu. Dla tego modelu okazuje się ono odtwarzać przywidywania równania (5.10).

Z powyższych wyników możemy jeszcze wyciągnąć dwa wnioski. Pierwszy z nich dotyczy współczynników nachylenia prostych $E(n) = a \frac{n^2}{N_{cut}} + b$ na wykresach 5.7(a) i 5.7(b). Wartości współczynników a i b dopasowanych prostych dla odpowiednich sektorów znajdują się w tabeli 5.12. Otrzymane rezultaty są w przybliżeniu równe wartości $\frac{\pi^2}{4}$ przewidzianej analitycznie w [53]. Dopasowanie zostało wykonane przy założeniu zerowych niepewności danych, a zatem podane niepewności współczynników a i b służą jako orientacyjna ocena poprawności dopasowania. Drugi wniosek dotyczy poprawnego uwzględnienia czynnika N_{cut} . Aby dodatkowo potwierdzić zależność w postaci $\frac{1}{N_{cut}}$ na wykresach 5.7(c) i 5.7(d) przedstawiamy zależność $E(n)$ otrzymaną dla kilku rosnących obciążeń. Widoczna jest zbieżność wyników dla małych wartości energii własnych. A zatem, relacja (5.9) poprawnie odtwarza zależność energii od n jak i N_{cut} .

Dla modelu z symetrią $SU(3)$ funkcje $E(n)$ w sektorach z $n_F = 0$ i $n_F = 1$ przedstawiamy na rysunku 5.8. Okazuje się, że zastosowanie prawa skalowania (5.10) nie pozwala otrzymać

n_F	a	niepewność a	b	niepewność b
0	2.4864	0.0012	-0.0369	0.0070
1	2.53451	0.00097	0.0539	0.0087

Tabela 5.12: Współczynniki dopasowania prostej $E(n) = a\frac{n^2}{N_{cut}} + b$ do danych numerycznych dla obcięcia $N_{cut} = 200$ w sektorze $n_F = 0$ i $n_F = 1$ modelu z symetrią $SU(2)$.



Rysunek 5.8: Prawo skalowania energii własnych $E(n)$ w sektorze z $n_F = 0$ i $n_F = 1$ modelu z symetrią $SU(3)$.

zależności liniowej. Można to zrozumieć zauważając, że energie własne w modelu z symetrią $SU(3)$ widoczne na wykresach 5.3 grupują się w pasma. Przykładowo, w sektorze bozonowym zauważamy przypuszczalną przypadkową degenerację energii własnych w granicy kontinuum, n -ta grupa stanów wydaje się być n -krotnie zdegenerowana. Tymczasem, w modelu z symetrią $SU(2)$ widmo jest niezdegenerowane i równo rozłożone. A zatem, aby poprawnie uwzględnić takie degeneracje, prawo skalowania energii powinno przyjąć następującą postać

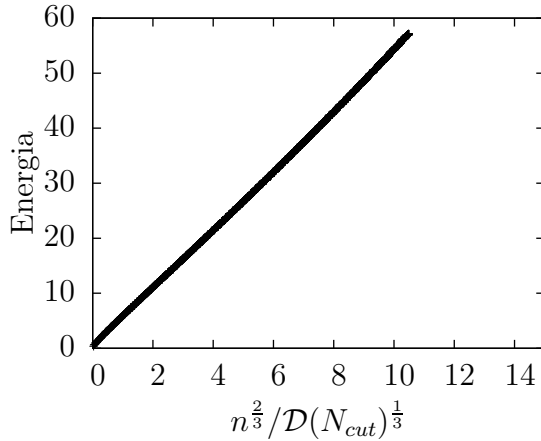
$$n \sim \sqrt{\mathcal{D}(N_{cut})}E, \quad (5.11)$$

przy czym zastąpiliśmy N_{cut} poprzez całkowitą liczbę stanów w danym sektorze, $\mathcal{D}(N_{cut})$, dla danego N_{cut} . W przypadku modelu z symetrią $SU(2)$, $\mathcal{D}(N_{cut}) \sim N_{cut}$. Rysunki 5.8 przedstawiają zależność energii od indeksu n w formie postulowanej przez równanie (5.11). Układanie się punktów wzdłuż linii prostej świadczy o poprawności proponowanego prawa skalowania. Dodatkowo, w tabeli 5.13 przedstawiamy wartości parametrów dopasowania linii prostej $E(n) = a\frac{n}{\sqrt{\mathcal{D}}} + b$. Zakładając, że poprawna relacja dyspersji postaci $E \sim P^2$ musi być spełniona, otrzymujemy prawo skalowania dla operatora pędu,

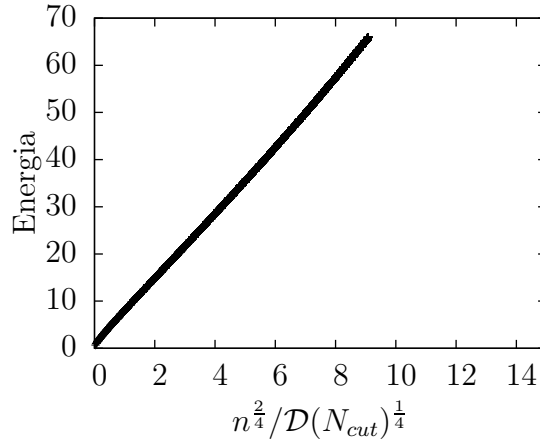
$$n \sim \sqrt{\mathcal{D}(N_{cut})}P^2. \quad (5.12)$$

n_F	a	niepewność a	b	niepewność b
0	3.7726	0.0018	0.021	0.014
1	3.9215	0.0016	-0.043	0.017

Tabela 5.13: Współczynniki dopasowania prostej $E(n) = a \frac{n}{\sqrt{\mathcal{D}}} + b$ do danych numerycznych dla obciążenia $N_{cut} = 200$ w sektorach $n_F = 0$ oraz $n_F = 1$ modelu z symetrią $SU(3)$.



(a) Sektor $n_F = 0$ modelu $SU(4)$.



(b) Sektor $n_F = 0$ modelu $SU(5)$.

Rysunek 5.9: Prawo skalowania energii własnych $E(n)$ w sektorze bozonowym modeli z symetrią $SU(4)$ i $SU(5)$.

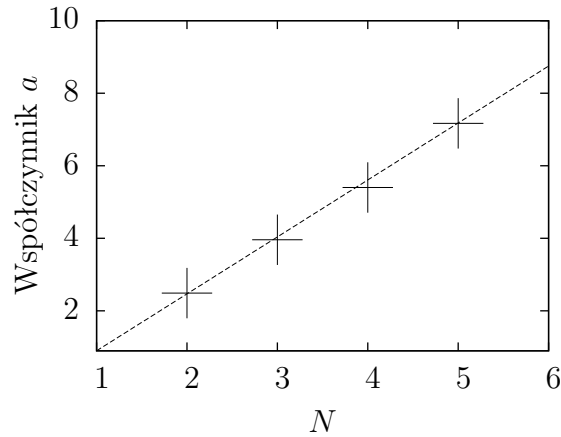
N	a	niepewność a	b	niepewność b
4	5.3934	0.0014	0.0342	0.0096
5	7.16556	0.00071	-0.0414	0.0046

Tabela 5.14: Współczynniki dopasowania prostej $E(n) = a n^{\frac{2}{N-1}} \mathcal{D}(N_{cut})^{-\frac{1}{N-1}} + b$ do danych numerycznych dla obciążenia $N_{cut} = 200$ w sektorze bozonowym modeli z symetrią $SU(4)$ i $SU(5)$.

Powtarzając powyższe kroki możemy znaleźć prawa skalowania dla energii dla modeli SYMQM z symetrią $SU(4)$ i $SU(5)$ w sektorze bozonowym. Uwzględniając grupowanie się stanów, widoczne na wykresie 5.4, postulujemy relację

$$n \sim \sqrt{\mathcal{D}(N_{cut})} E^{\frac{1}{2}(N-1)}, \quad (5.13)$$

której poprawność potwierdza rysunek 5.9. Faktycznie, punkty numeryczne układają się wzdłuż linii prostej. Dopasowanie zależności liniowej $E(n) \sim n^{\frac{2}{N-1}} \mathcal{D}(N_{cut})^{-\frac{1}{N-1}}$ pozwala odczytać współczynniki a i b . Zamieszczamy je w tabeli 5.14. Ponownie, oczekując relacji dyspersyjnej



Rysunek 5.10: Zależność od indeksu grupy symetrii N wartości współczynnika a dopasowań liniowych $E(n)$ dla modeli z różnymi grupami symetrii.

w formie $E \sim P^2$, otrzymujemy prawo skalowania dla operatora pędu

$$n \sim \sqrt{\mathcal{D}(N_{cut})} P^{N-1}. \quad (5.14)$$

Zauważmy, że relacje (5.13) oraz (5.14) poprawnie opisują pierwszy z analizowanych modeli, tzn. model z symetrią $SU(2)$.

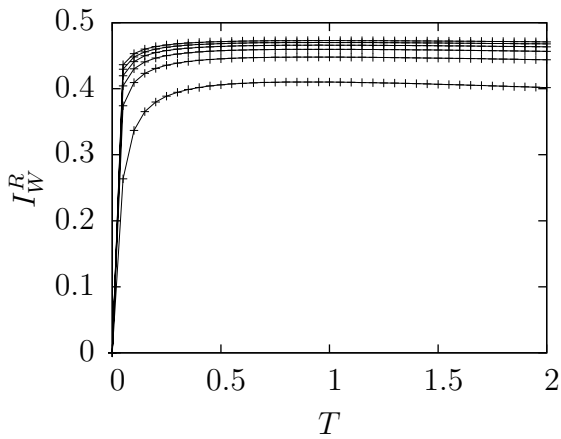
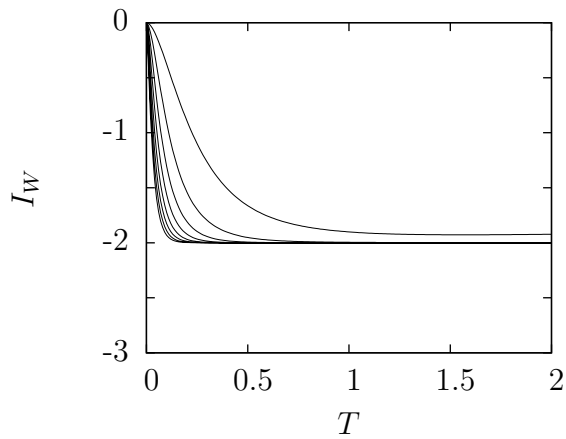
Na zakończenie wykreślmy zależność otrzymanych współczynników a i b od indeksu N dla różnych grup symetrii $SU(N)$. Rezultat przedstawiamy na rysunku 5.10. Okazuje się, że bardzo prosto można opisać wszystkie powyższe przypadki postulując dokładną postać prawa skalowania dla energii w postaci

$$E(n) = \frac{\pi}{2} \left(N + \frac{\pi}{2} - 2 \right) n^{\frac{2}{N-1}} \mathcal{D}(N_{cut})^{-\frac{1}{N-1}}, \quad (5.15)$$

która na wykresie 5.10 jest reprezentowana linią przerywaną. Zaniedbaliśmy wyraz stały, który jest bliski zeru. Relacja (5.15) dla $N = 2$ poprawnie odtwarza wynik Trzetrzelewskiego [53]. Oczekując, że dla modeli swobodnych relacja dyspersyjna będzie spełniona w formie dokładnej $E = \frac{1}{2}P^2$, możemy zapostulować prawo skalowania dla pędu,

$$P(n) = \sqrt{\pi \left(N + \frac{\pi}{2} - 2 \right)} n^{\frac{1}{N-1}} \mathcal{D}(N_{cut})^{-\frac{1}{2(N-1)}}. \quad (5.16)$$

Podkreślmy raz jeszcze, że ten wynik może być następnie użyty aby sprawdzić nietrywialną relację dyspersyjną widma ciągłego w modelach oddziałujących z grupą symetrii $SU(N)$. Przykładem takich układów są SYMQM w $D = 4$.


 (a) Model $SU(2)$.

 (b) Supersymetryczny oscylator anharmoniczny z grupą $SU(3)$.

Rysunek 5.11: Panel (a): ograniczony indeks Wittena dla modelu z symetrią $SU(2)$. Różne krzywe odpowiadają rosnącym obciążeniom. Dla modelu z symetrią $SU(2)$ zamieszczono krzywe otrzymane dla obciążęć: 20, 60, 100, ... , 220. Panel (b): indeks Wittena dla supersymetrycznego oscylatora anharmonicznego z grupą symetrii $SU(3)$. Kolejne krzywe odpowiadają rosnącemu obciążeniu N_{cut} : 5, 10, 15, ... , 40.

5.5 Indeks Wittena

Na zakończenie dyskusji numerycznej przedstawiamy wyniki dla indeksu Wittena $I_W(T)$. $I_W(T)$ definiujemy jako [10]

$$I_W(T) = \sum_{b \in \text{stany bozonowe}} e^{-E_b T} - \sum_{f \in \text{stany fermionowe}} e^{-E_f T}. \quad (5.17)$$

Jest to wielkość często używana do badania supersymetrii w układach kwantowo-mechanicznych. W szczególności pozwala stwierdzić, czy supersymetria jest spontanicznie złamana czy też nie. Dla modeli o dyskretnym widmie wkład do $I_W(T)$ pochodzi jedynie od stanów o zerowej energii, gdyż dla wszystkich pozostałych wkład od stanu bozonowego znosi się z wkładem od odpowiadającego mu stanu fermionowego o tej samej energii. Dla niezłamanej supersymetrii stan próżni supersymetrycznej jest niezdegenerowany, a zatem $I_W(T)$ jest niezerowy. Dla modeli o widmie ciągłym powyższa dyskusja jest bardziej subtelna.

W naszym podejściu, dla *skończonego* obciążenia, sumy po stanach bozonowych i fermionowych są *skończone* zarówno dla układów o widmie ciągłym jak i dyskretnym. Możemy wobec tego w prosty sposób obliczyć przybliżoną wartość indeksu dla danego obciążenia N_{cut} .

Dla układów z symetrią $SU(N)$ z N parzystym degeneracje pomiędzy sektorami z n_F i $N^2 - 1 - n_F$ fermionami związane z symetrią cząstka-dziura sprawiają, że $I_W(T) \equiv 0$. Aby tego uniknąć definiujemy *ograniczony* indeks Wittena, $I_W^R(T)$, do którego wkład będą mieć tylko stany z sektorów z $n_F = 0, \dots, \frac{1}{2}N^2 - 1$. Ponieważ struktura supermultipletów w sektorach z $n_F = \frac{1}{2}N^2, \dots, N^2 - 1$ jest identyczna, $I_W^R(T)$ jest dobrą miarą łamania supersymetrii,

pomimo, że globalny indeks $I_W(T)$ znika. W przypadku układów z symetrią $SU(N)$ z N nieparzystym, do $I_W^R(T)$ mają wkład stany z sektorów z $n_F = 0, \dots, \frac{1}{2}(N^2 - 1)$ oraz połowa podwójnie zdegenerowanego sektora środkowego. W tym przypadku mamy $I_W(T) = 2I_W^R(T)$.

Dla supersymetrycznego oscylatora anharmonicznego wyniki numeryczne dla $I_W(T)$ dla różnych obciążeń są przedstawione na rysunku 5.11 w funkcji euklidesowego czasu T . Widoczna jest szybka zbieżność $I_W(T)$ do wartości -2 , co potwierdza fakt istnienia dwóch supersymetrycznych stanów próżni dla tego modelu.

Znikanie I_W dla $T = 0$ można zrozumieć, zauważając, że dla $T = 0$ indeks Wittena jest równy różnicy liczby stanów w sektorach bozonowych i fermionowych. Jak zostało wykazane w rozdziale 4.1.3 liczby te są równe.

Wyniki dla modelu SYMQM z symetrią $SU(2)$ są przedstawione na rysunku 5.11. $I_W^R(T)$ szybko zbiega się do wartości $\frac{1}{2}$. Wartość ta zgadza się z wcześniejszymi rezultatami otrzymanymi przez Campostriniego i Wośka [50] zarówno numerycznie jak i analitycznie. Wartość ułamkowa jest charakterystyczną cechą $I_W^R(T)$ dla układów o ciągłym widmie. Obliczenia dla modelu SYMQM z symetrią $SU(3)$ sugerują, że $I_W(T)$ jest równy dokładnie zero. Analityczne potwierdzenie tego rezultatu zostanie przedyskutowane w rozdziale 6.

5.6 Podsumowanie

Analizę numeryczną zaczęliśmy od omówienia zależności energii własnych badanych układów od obciążenia. Oczekiwaliśmy jakościowo różnego zachowania się wartości własnych wraz z rosnącym obciążeniem odpowiadającym stanom zlokalizowanym i niezlokalizowanym. Sygnaturą stanów pierwszego typu jest szybka zbieżność, natomiast cechą charakterystyczną stanów drugiego typu jest wolna zbieżność. Wyniki numeryczne potwierdziły te przewidywania dla modeli z symetrią $SU(N)$, $N > 2$. Następnie, opisaliśmy degeneracje w widmach analizowanych układów. Na przykładzie widma supersymetrycznego oscylatora anharmonicznego wykazaliśmy odtwarzanie supersymetrii dla odpowiednio dużego obciążenia. Potwierdziliśmy te wnioski badając wartości ułamków supersymetrycznych. W kolejnym kroku dyskutowaliśmy możliwość otrzymania degeneracji supersymetrycznej dla skończonego obciążenia. W tym celu zaproponowaliśmy dwa sposoby obliczenia obciążonych macierzy Hamiltonianu oraz porównaliśmy widma numeryczne otrzymane za ich pomocą. Przekonaliśmy się, że odpowiednie dobranie obciążeń w kolejnych sektorach fermionowych pozwala uzyskać degenerację supersymetryczną dla skończonego obciążenia. Sprawdzając prawo skalowania dla energii i postulując nierelatywistyczną relację dyspersyjną dla cząstki swobodnej wyprowadziliśmy prawo skalowania dla operatora pędu, które może być następnie wykorzystane w analizie widma ciągłego w nietrywialnych układach z oddziaływaniem. Na zakończenie stwierdziliśmy poprzez obliczenie indeksu Wittena dla supersymetrycznego oscylatora anharmonicznego, że supersymetria nie jest spontanicznie złamana.

ROZDZIAŁ 6

WYNIKI ANALITYCZNE

W poprzednim rozdziale przedstawiliśmy szereg wyników numerycznych dotyczących widm modeli SYMQM oraz supersymetrycznego oscylatora anharmonicznego z różnymi grupami symetrii i w sektorach o różnej liczbie kwantów fermionowych. W bieżącym rozdziale chcielibyśmy zapytać: czy możliwe jest częściowe lub całościowe analityczne odtworzenie rezultatów numerycznych; jakie własności mogą posiadać ewentualne rozwiązania i czy wyjaśniają one charakterystyczne cechy obliczonych widm; oraz jakie praktyczne korzyści płyną ze znajomości analitycznych rozwiązań? Analizę powyższych problemów rozpoczniemy znanym przykładem modelu SYMQM z symetrią $SU(2)$, a następnie uogólnimy nasze wnioski do modeli z symetrias $SU(3)$ oraz $SU(N)$ dla dowolnego N . Na zakończenie zademonstrujemy w jaki sposób można wykorzystać rozwiązania swobodne do odtworzenia części widma supersymetrycznego oscylatora anharmonicznego.

6.1 Dyskretyzacje w podejściu analitycznym

Metoda którą zastosujemy w celu znalezienia rozwiązań zagadnienia własnego Hamiltonianu modeli SYMQM polega na przetłumaczeniu równania własnego na język relacji rekurencyjnych i poszukiwaniu rozwiązań tych ostatnich. W rozdziale 5 zdefiniowaliśmy dwie dyskretyzacje oraz omówiliśmy różnice w wynikach numerycznych otrzymanych za ich pomocą. W obecnym podrozdziale przedstawimy co w języku relacji rekurencyjnych oznacza wprowadzenie obciążenia oraz jak otrzymać rekurencje odpowiadające różnym dyskretyzacjom.

Skończenie wymiarową przestrzeń Hilberta podzielmy na dwie podprzestrzenie. W jednej z nich, nazywanej sektorem bozonowym, wprowadzamy M_0 -wymiarową bazę, której stany numerowane są pojedynczym indeksem i oraz oznaczane poprzez $|i\rangle_0$. W drugiej, nazywanej sektorem fermionowym, wprowadzamy M_1 -wymiarową bazę, a stany są analogicznie numerowane pojedynczym indeksem i oraz oznaczane przez $|i\rangle_1$. Ogólny stan w każdej z nich możemy zapisać jako

$$|E\rangle_0 = \sum_{i=1}^{M_0} a_i^0(E) |i\rangle_0, \quad |E\rangle_1 = \sum_{i=1}^{M_1} a_i^1(E) |i\rangle_1. \quad (6.1)$$

Założmy, że istnieje reprezentacja algebry supersymetrii, taka, że superładunki Q oraz Q^\dagger przekształcają stany z jednego sektora w stany z drugiego,

$$Q^\dagger |E\rangle_0 = \gamma_0 |E\rangle_1, \quad Q |E\rangle_1 = \gamma_1 |E\rangle_0. \quad (6.2)$$

Z algebry supersymetrii $Q^{\dagger 2} = 0$ i $Q^2 = 0$ bezpośrednio wynika, że

$$Q |E\rangle_0 = 0, \quad Q^\dagger |E\rangle_1 = 0, \quad (6.3)$$

Operatory Hamiltona w obydwu sektorach są z definicji równe

$$H_0 = QQ^\dagger, \quad H_1 = Q^\dagger Q. \quad (6.4)$$

Dla zadanych Q i Q^\dagger stany $|E\rangle_0$ i $|E\rangle_1$ spełniające równości (6.2) mogą zostać znalezione poprzez odpowiedni dobór współczynników $a_i^0(E)$ i $a_j^1(E)$. Równania na te współczynniki

przyjmują postać dwóch sprzężonych relacji rekurencyjnych, które zapiszemy symbolicznie jako

$$\mathcal{R}^{\mathcal{Q}^\dagger}(a_i^0, a_j^1; E, \gamma_0) = 0, \quad \mathcal{R}^{\mathcal{Q}}(a_i^1, a_j^0; E, \gamma_1) = 0. \quad (6.5)$$

Równocześnie, $|E\rangle_0$ i $|E\rangle_1$ są stanami własnymi operatorów H_0 i H_1 , tzn. $H_0|E\rangle_0 = \gamma_0\gamma_1|E\rangle_0$ i $H_1|E\rangle_1 = \gamma_0\gamma_1|E\rangle_1$. A zatem, mogą być otrzymane poprzez rozwiązanie relacji rekurencyjnych na współczynniki $a_i^0(E)$ oraz $a_i^1(E)$ wynikających z postaci H_0 i H_1 , które z kolei zapiszemy jako

$$\mathcal{R}^{H_0}(a_i^0; E) = 0, \quad \mathcal{R}^{H_1}(a_i^1; E) = 0. \quad (6.6)$$

Oczywiście, rozwiązania (6.5) i (6.6) są sobie równe. Przystaje to jednak być prawdą, jeśli z obydwu baz zachowamy tylko pewną liczbę najniższych stanów bazowych, pomijając pozostałe. Takie przybliżenie nazwalismy w rozdziale 5 dyskretyzacją, bo rzeczywiście dyskretyzuje ono przestrzeń i pęd w sensie wartości oczekiwanych. Wyrazimy teraz dwie zaproponowane dyskretyzacje w języku relacji rekurencyjnych:

1. w pierwszym podejściu najpierw wyprowadzamy osobne rekurencje na współczynniki a_i^0 i a_i^1 , a następnie wprowadzamy obcięcie. Mówiąc konkretniej, po wyrugowaniu, dzięki równaniom $\mathcal{R}^{\mathcal{Q}}(a_i^1, a_j^0; E, \gamma_1) = 0$, zmiennych a_i^1 z równań $\mathcal{R}^{\mathcal{Q}^\dagger}(a_i^0, a_j^1; E, \gamma_0) = 0$ otrzymujemy relacje rekurencyjne $\mathcal{R}^{H_0}(a_i^0; E) = 0$ na a_i^0 . Natomiast wyrugowanie zmiennych a_i^0 z równań $\mathcal{R}^{\mathcal{Q}}(a_i^1, a_j^0; E, \gamma_1) = 0$ dzięki równaniom $\mathcal{R}^{\mathcal{Q}^\dagger}(a_i^0, a_j^1; E, \gamma_0) = 0$ prowadzi do rekurencji $\mathcal{R}^{H_1}(a_i^1; E) = 0$ na a_i^1 . Obcięcie \mathcal{R}^{H_0} i \mathcal{R}^{H_1} na pewnym N_{cut}^0 w sektorze bozonowym i N_{cut}^1 w sektorze fermionowym oraz ich rozwiązanie odpowiada dyskretyzacji Hamiltonianu,

$$H_{\text{dyskretyzacja Hamiltonianu}} = \{Q, Q^\dagger\} \Big|_{\text{obcięte}}. \quad (6.7)$$

2. w drugim podejściu, najpierw wprowadzamy obcięcie w rekurencjach $\mathcal{R}^{\mathcal{Q}}(a_j^1, a_i^0; E, \gamma_1) = 0$ i $\mathcal{R}^{\mathcal{Q}^\dagger}(a_i^0, a_j^1; E, \gamma_0) = 0$ ograniczając się do N_{cut}^0 amplitud bozonowych a_i^0 i N_{cut}^1 amplitud fermionowych a_i^1 . Następnie, wyrugowanie jednych lub drugich zmiennych i rozwiązanie tak otrzymanego układu równań prowadzi do dyskretyzacji superładunków,

$$H_{\text{dyskretyzacja superładunków}} = \{Q|_{\text{obcięte}}, Q^\dagger|_{\text{obcięte}}\}. \quad (6.8)$$

W następnych podrozdziałach wyprowadzamy rozwiązania analityczne modeli SYMQM z różnymi grupami $SU(N)$ i w różnych sektorach przy pomocy dyskretyzacji Hamiltonianu. Pewne uwagi dotyczące analitycznej dyskusji dyskretyzacji superładunków znajdują się w dodatku D.

6.2 Rozwiązania dla modelu z symetrią $SU(2)$

Stany bazy dla modelu z symetrią $SU(2)$ numerowane są pojedynczą liczbą całkowitą proporcjonalną do liczby kwantów bozonowych zawartych w danym stanie (patrz rozdział 4).

Rozmiar podprzestrzeni Hilberta w sektorze bozonowym i fermionowym dla obciążenia N_{cut} wynosi odpowiednio,

$$d = \left\lfloor \frac{1}{2}N_{cut} \right\rfloor + 1, \quad d' = \left\lfloor \frac{1}{2}(N_{cut} - 1) \right\rfloor + 1. \quad (6.9)$$

Ogólne stany w tych sektorach rozkładamy jako

$$|E\rangle_{n_F=0} = \sum_{j=0}^{d-1} a_j(E) \operatorname{tr} (a^{\dagger 2})^j |0\rangle, \quad |E\rangle_{n_F=1} = \sum_{j=0}^{d'-1} b_j(E) \operatorname{tr} (f^{\dagger} a^{\dagger}) \operatorname{tr} (a^{\dagger 2})^j |0\rangle. \quad (6.10)$$

Proste obliczenia pozwalają przekształcić równania własne operatora Hamiltona w relacje rekurencyjne na współczynniki $a_j(E)$ i $b_j(E)$, które przyjmują postać,

$$\begin{aligned} a_{j-1}(E) - \left(2j + \frac{3}{2} - 2E\right)a_j(E) + (j+1)\left(j + \frac{3}{2}\right)a_{j+1}(E) &= 0, \\ b_{j-1}(E) - \left(2j + \frac{5}{2} - 2E\right)b_j(E) + (j+1)\left(j + \frac{5}{2}\right)b_{j+1}(E) &= 0. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Dla skończonego obciążenia powyższa rekurencja bozonowa (fermionowa) jest zredukowana do zbioru d (d') równań na wielomiany Laguerre'a, przy czym $a_d = 0$ ($b_{d'} = 0$). Otrzymujemy więc zbiór d (d') równań na d (d') niewiadome współczynniki $a_j(E)$ ($b_j(E)$) oraz jeden parametr E . Wyprowadzenie przedstawione w rozdziale C.2 w dodatku C pozwala zapisać zbiór rozwiązań dla powyższych równań. Okazuje się, że niezerowe rozwiązania na amplitudy $a_j(E)$ ($b_j(E)$) istnieją dla dyskretnej energii E_m , $1 \leq m \leq d$ ($1 \leq m \leq d'$) określonych osobno w każdym sektorze poprzez warunki kwantyzacji,

$$L_d^{\frac{1}{2}}(2E_m) = 0 \text{ w sektorze bozonowym}, \quad L_{d'}^{\frac{3}{2}}(2E_m) = 0 \text{ w sektorze fermionowym}. \quad (6.12)$$

Każdej energii E_m spełniającej warunki (6.12) odpowiada stan własny złożony z d (d') stanów bazy, ze współczynnikami danymi wzorami¹

$$\begin{aligned} a_j(E_m) &= e^{-E_m} L_j^{\frac{1}{2}}(2E_m) \quad 0 \leq j < d, \\ b_j(E_m) &= \sqrt{2E_m} e^{-E_m} L_j^{\frac{3}{2}}(2E_m) \quad 0 \leq j < d'. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Ze wzorów (6.12) wynika, że dla każdego skończonego obciążenia N_{cut} energie w sektorze bozonowym i fermionowym są różne, a zatem nie będzie możliwe otrzymanie degeneracji supersymetrycznej.

Wraz z rosnącym obciążeniem N_{cut} liczba dopuszczalnych wartości parametru E rośnie. W granicy kontinuum, $N_{cut} \rightarrow \infty$, widma w obydwu sektorach dane są przez dodatnią półoś liczb rzeczywistych. A zatem, dla dowolnej niezerowej energii, będzie istnieć para stanów, jeden w sektorze bozonowym, drugi w sektorze fermionowym. Stany własne w granicy kontinuum są

¹Stosujemy notację wprowadzoną w dodatku A.

dane następującymi wzorami

$$\begin{aligned}
 |E\rangle^{n_F=0} &= e^{-E} \sum_{j=0}^{\infty} L_j^{\frac{1}{2}}(2E) \operatorname{tr} (a^{\dagger 2})^j |0\rangle, \\
 |E\rangle^{n_F=1} &= \sqrt{2E} e^{-E} \sum_{j=0}^{\infty} L_j^{\frac{3}{2}}(2E) \operatorname{tr} (f^{\dagger} a^{\dagger}) \operatorname{tr} (a^{\dagger 2})^j |0\rangle.
 \end{aligned} \tag{6.14}$$

Rozwiązania te mają szereg własności, których wyprowadzenie znajduje się w dodatku E. Obecnie streścimy najważniejsze z nich.

Po pierwsze, zarówno dla skończonego jak i nieskończonego obciążenia, stany własne są do siebie ortogonalne. Ich normalizacja jest zgodna z normalizacją fal płaskich. Po drugie, zbiór rozwiązań stanowi poprawną bazę przestrzeni Hilberta, tzn. jest zbiorem zupełnym. Po trzecie, w granicy kontinuum odpowiadają rozwiązaniom Claudson-Halperna, tzn. możliwe jest znalezienie reprezentacji położeniowej funkcji falowych stanów (6.14), która przyjmuje postać

$${}^{n_F=0}\langle R|E\rangle^{n_F=0} = \mathcal{N} \frac{\sin kr}{kr}, \quad {}^{n_F=1}\langle R|E\rangle^{n_F=1} = \mathcal{N} \left(\frac{\sin kr}{(kr)^2} - \frac{\cos kr}{kr} \right), \tag{6.15}$$

przy czym $E = \frac{1}{2}k^2$, natomiast $R = \frac{1}{2}r^2$ jest zmienną sprzężoną do zmiennej E . Jest to dobre potwierdzenie poprawności całego podejścia.

Narzucenie warunku aby normalizacja stanów (6.13) i (6.14) była zgodna z normalizacją fal płaskich implikuje pojawienie się czynników e^{-E} oraz dodatkowego czynnika $\sqrt{2E}$ dla stanów z sektora $n_F = 1$. Uwzględnienie poprawnych czynników normalizacyjnych modyfikuje strukturę rozwiązań o zerowej energii. Pomijając je moglibyśmy wyciągnąć naiwny wniosek o istnieniu dwóch stanów o zerowej energii, po jednym w każdym sektorze. Czynniki $\sqrt{2E}$ powoduje, że fermionowy stan z $E = 0$ znika ze spektrum. Zatem, stan bozonowy o zerowej energii nie ma partnera w sektorze fermionowym, wobec czego jest dobrym kandydatem na próżnię supersymetryczną. Powyższe konkluzje są zgodne z numerycznymi wynikami otrzymanymi przy dyskretyzacji superładunków dla skończonego obciążenia. Pełniejsza dyskusja supermultipletów dla tego modelu znajduje się w rozdziale 6.5.1.

Rozwiązania dla skończonego obciążenia odpowiadają dokładnie wynikom podejścia numerycznego. W szczególności, energie własne otrzymane z warunków kwantyzacji

$$L_6^{\frac{1}{2}}(2E) = 0 \text{ w sektorze bozonowym,} \quad L_6^{\frac{3}{2}}(2E) = 0 \text{ w sektorze fermionowym,} \tag{6.16}$$

są równe wynikom numerycznym zamieszczonym w tabeli 5.4, natomiast wzory (6.13) dokładnie odpowiadają numerycznym stanom własnym.

6.3 Rozwiązania dla modelu z symetrią $SU(3)$

Obecnie rozszerzymy powyższą analizę do modelu $SU(3)$. Przedstawimy relacje rekurencyjne we wszystkich sektorach. Opiszemy strukturę rozwiązań i przedyskutujemy ich własności. Warto podkreślić, że poprawne rozwiązania dla tego modelu nie były do tej pory znane.

6.3.1 Sektor z $n_F = 0$

Postępując analogicznie jak dla układu z grupą symetrii $SU(2)$, rozkładamy dowolny stan $|E\rangle_{n_F=0}$ w sektorze bozonowym obciętej bazy,

$$|E\rangle_{n_F=0} = \sum_{\substack{2j+3k \leq N_{cut} \\ j,k \geq 0}} a_{j,k}(E) \operatorname{tr} (a^\dagger)^j \operatorname{tr} (a^\dagger)^k |0\rangle, \quad (6.17)$$

Aby $|E\rangle_{n_F=0}$ był stanem własnym Hamiltonianu, $a_{j,k}$ muszą spełniać odpowiednie relacje rekurencyjne [62] (szczegóły wyprowadzenia znajdują się w dodatku B),

$$a_{j-1,k} - (2j + 3k + 4 - 2E)a_{j,k} + (j + 1)(j + 3k + 4)a_{j+1,k} + \frac{3}{8}(k + 1)(k + 2)a_{j-2,k+2} = 0, \quad (6.18)$$

Nową cechą rekurencji dla modelu $SU(3)$ jest 'mieszanie' które spowodowane jest ostatnim wyrazem w równaniach (6.18). Poprzez mieszanie rozumiemy fakt, że liczba potrójnych cegiełek nie jest dobrą liczbą kwantową charakteryzującą rozwiązanie.

Modele SYMQM zachowują parzystość (patrz rozdział 3), dzięki czemu możemy z rekurencji (6.18) wyodrębnić część parzystą i część nieparzystą. Zbiór wszystkich rozwiązań można więc podzielić na zbiory rozwiązań parzystych i nieparzystych.

Niezależnie od parzystości, rozwiązania rekurencji (6.18) można dodatkowo podzielić na rozłączne zbiory, które będziemy nazywać *rodzinami*. Rodziny można ponumerować maksymalną liczbą potrójnych cegiełek zawartych w rozkładzie stanu własnego na stany bazowe,

- dane rozwiązanie należy do rodziny f_κ jeśli $a_{j,k} \equiv 0, k > 2\kappa$ oraz $a_{j,k} \neq 0, k \leq 2\kappa$. Innymi słowy, rozwiązanie może być rozłożone na stany z bazy, zawierające parzystą ilość kwantów, a maksymalna liczba potrójnych cegiełek to 2κ .
- dane rozwiązanie należy do rodziny g_κ jeśli $a_{j,k} \equiv 0, k > 2\kappa + 1$ oraz $a_{j,k} \neq 0, k \leq 2\kappa + 1$, czyli rozwiązanie może być rozłożone na stany z bazy, zawierające nieparzystą ilość kwantów, a maksymalna liczba potrójnych cegiełek to $2\kappa + 1$.

Oznaczmy liczby rozwiązań należących odpowiednio do rodzin f_κ i g_κ dla obcięcia N_{cut} poprzez liczby całkowite $d_\kappa(N_{cut})$ i $d'_\kappa(N_{cut})$.

$d_0 = \lfloor \frac{N_{cut}}{2} \rfloor + 1$ jest liczbą stanów złożonych wyłącznie z cegiełek $(a^\dagger a^\dagger)$, mianowicie,

$$|0\rangle, (a^\dagger a^\dagger)|0\rangle, (a^\dagger a^\dagger)^2|0\rangle, \dots, (a^\dagger a^\dagger)^{d_0-1}|0\rangle.$$

A zatem, stany własne operatora Hamiltona należące do rodziny f_0 będą odpowiadać d_0 niezależnym kombinacjom liniowym powyższych stanów.

Podobnie, istnieje $d'_0 = \lfloor \frac{N_{cut}-3}{2} \rfloor + 1$ stanów bazowych złożonych z dokładnie jednej cegiełki potrójnej,

$$(a^\dagger a^\dagger a^\dagger)|0\rangle, (a^\dagger a^\dagger)(a^\dagger a^\dagger a^\dagger)|0\rangle, (a^\dagger a^\dagger)^2(a^\dagger a^\dagger a^\dagger)|0\rangle, \dots, (a^\dagger a^\dagger)^{d'_0-1}(a^\dagger a^\dagger a^\dagger)|0\rangle.$$

A zatem, ogólnie,

$$d_\kappa = \left\lfloor \frac{1}{2}(N_{cut} - 6\kappa) \right\rfloor + 1, \quad d'_\kappa = \left\lfloor \frac{1}{2}(N_{cut} - 6\kappa - 3) \right\rfloor + 1. \quad (6.19)$$

Dla danego obciążenia N_{cut} mamy w sumie $\lfloor \frac{N_{cut}}{3} \rfloor$ rodzin rozwiązań. Rekurencję (6.18) rozwiąza-
liśmy w podrozdziale C.6 dodatku C. Opiszemy teraz ogólne własności rozwiązań.

Rozwiązania należące do rodziny f_κ mają postać

$$|E_m, \kappa\rangle_{even}^{n_F=0} = (2E_m)^{3\kappa} e^{-E_m} \sum_{n=0}^{d_\kappa-1} L_n^{6\kappa+3}(2E_m) \left(|n, 2\kappa\rangle + \sum_{t=1}^{\kappa} \Gamma_{\kappa-1, \kappa-t}^{even} |n+3t, 2\kappa-2t\rangle \right), \quad (6.20)$$

gdzie

$$\Gamma_{\kappa-1, t}^{even} = (-24)^{t-\kappa} \frac{(\kappa+t)!}{(\kappa-t)!(2t)!}. \quad (6.21)$$

Natomiast, warunek kwantyzacji dla tej rodziny jest dany równaniem,

$$L_{d_\kappa}^{6\kappa+3}(2E_m) = 0, \quad 1 \leq m \leq d_\kappa. \quad (6.22)$$

Analogicznie, dla rozwiązań należących do rodziny g_κ mamy

$$|E_m, \kappa\rangle_{odd}^{n_F=0} = (2E_m)^{3\kappa+\frac{3}{2}} e^{-E_m} \sum_{n=0}^{d'_\kappa-1} L_n^{6\kappa+6}(2E_m) \left(|n, 2\kappa+1\rangle + \sum_{t=1}^{\kappa} \Gamma_{\kappa-1, \kappa-t}^{odd} |n+3t, 2\kappa-2t+1\rangle \right), \quad (6.23)$$

gdzie

$$\Gamma_{\kappa-1, p}^{odd} = (-24)^{t-\kappa} \frac{(\kappa+t+1)!}{(\kappa-t)!(2t+1)!}. \quad (6.24)$$

Warunek kwantyzacji ma postać,

$$L_{d'_\kappa}^{6\kappa+6}(2E_m) = 0, \quad 1 \leq m \leq d'_\kappa. \quad (6.25)$$

Dla danego obciążenia N_{cut} pełne rozwiązanie zagadnienia własnego Hamiltonianu złożone
jest z rozwiązań należących do sumy mnogościowej wszystkich niepustych rodzin, tzn. rodzin
 f_κ o indeksach κ mniejszych lub równych κ_{max} oraz rodzin g_κ z $\kappa \leq \kappa'_{max}$, gdzie

$$\kappa_{max} \equiv \left\lfloor \frac{1}{6} N_{cut} \right\rfloor, \quad \kappa'_{max} \equiv \left\lfloor \frac{1}{6} (N_{cut} - 3) \right\rfloor. \quad (6.26)$$

Najprostszymi rodzinami rozwiązań są f_0 oraz g_0 , które mają postać zbiorów złożonych z

- d_0 rozwiązań o energiach E_m takich, że $L_{d_0}^3(2E_m) = 0$, które są dane poprzez

$$|E_m, 0\rangle_{even}^{n_F=0} = e^{-E_m} \sum_{n=0}^{d_0-1} L_n^3(2E_m) |n, 0\rangle, \quad 1 \leq m \leq d_0, \quad (6.27)$$

- d'_0 rozwiązań o energiach E_m takich, że $L_{d'_0}^6(2E_m) = 0$, które są dane poprzez

$$|E_m, 0\rangle_{odd}^{n_F=0} = (2E_m)^{\frac{3}{2}} e^{-E_m} \sum_{n=0}^{d'_0-1} L_n^6(2E_m) |n, 1\rangle, \quad 1 \leq m \leq d'_0. \quad (6.28)$$

Wszystkie pozostałe rodziny składają się z rozwiązań zawierających mieszanie, tzn. składających się z kilku części o różnej liczbie cegiełek potrójnych. Najprostsze z nich to f_1 oraz g_1 , natomiast najbardziej skomplikowane to $f_{\kappa_{max}}$ oraz $g_{\kappa'_{max}}$. Poniżej prezentujemy postać rozwiązań należących do tych rodzin,

- rodzina f_1 składa się z d_1 rozwiązań o energiach E_m takich, że $L_{d_1}^9(2E_m) = 0$ są dane poprzez

$$|E_m, 1\rangle_{even}^{n_F=0} = (2E_m)^3 e^{-E_m} \sum_{n=0}^{d_1-1} L_n^9(2E_m) (|n, 2\rangle - \frac{1}{24} |n+3, 0\rangle), \quad 1 \leq m \leq d_1 \quad (6.29)$$

- rodzina g_1 składa się z d'_1 rozwiązań o energiach E_m takich, że $L_{d'_1}^{12}(2E_m) = 0$ są dane poprzez

$$|E_m, 1\rangle_{odd}^{n_F=0} = (2E_m)^{\frac{9}{2}} e^{-E_m} \sum_{n=0}^{d'_1-1} L_n^{12}(2E_m) (|n, 3\rangle - \frac{1}{12} |n+3, 1\rangle), \quad 1 \leq m \leq d'_1. \quad (6.30)$$

oraz

- rodzina $f_{\kappa_{max}}$ składa się z $d_{\kappa_{max}}$, ($\kappa_{max} = \lfloor \frac{1}{6} N_{cut} \rfloor$), rozwiązań o energiach E_m takich, że $L_{d_{\kappa_{max}}}^{6\kappa_{max}+3}(2E_m) = 0$ są dane poprzez

$$|E_m, \kappa_{max}\rangle_{even}^{n_F=0} = (2E_m)^{3\kappa_{max}} e^{-E_m} \sum_{n=0}^{d_{\kappa_{max}}-1} L_n^{6\kappa_{max}+3}(2E_m) \overline{|n, 2\kappa_{max}\rangle}, \quad 1 \leq m \leq d_{\kappa_{max}}, \quad (6.31)$$

- rodzina $g_{\kappa'_{max}}$ składa się z $d'_{\kappa'_{max}}$, ($\kappa'_{max} = \lfloor \frac{1}{6} (N_{cut} - 3) \rfloor$), rozwiązań o energiach E_m takich, że $L_{d'_{\kappa'_{max}}}^{6\kappa'_{max}+6}(2E_m) = 0$ są dane poprzez

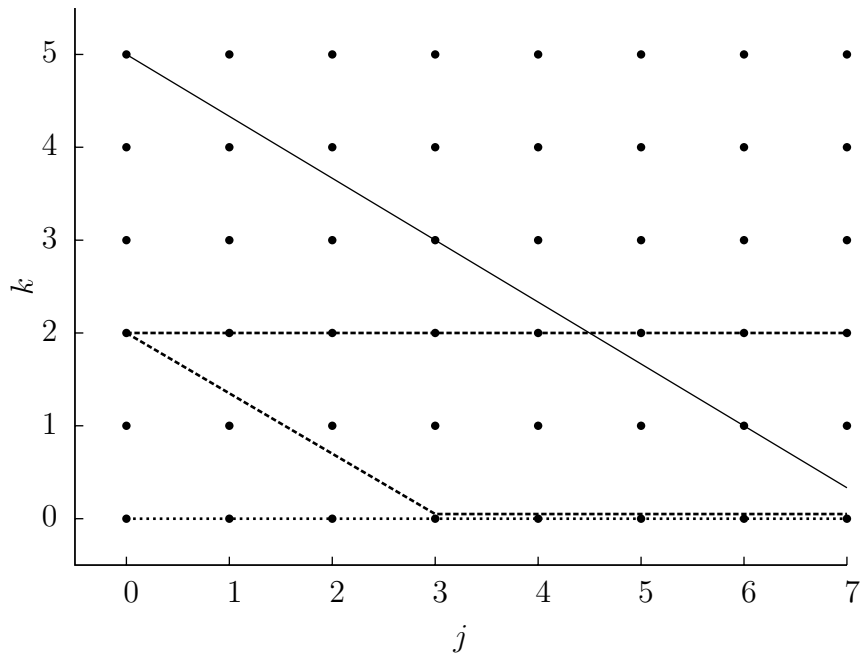
$$|E_m, \kappa'_{max}\rangle_{odd}^{n_F=0} = (2E_m)^{3\kappa'_{max}+\frac{3}{2}} e^{-E_m} \sum_{n=0}^{d'_{\kappa'_{max}}-1} L_n^{6\kappa'_{max}+6}(2E_m) \overline{|n, 2\kappa'_{max}+1\rangle}, \quad 1 \leq m \leq d'_{\kappa'_{max}}. \quad (6.32)$$

Ostatnie rozwiązania należą do rodziny o najwyższym indeksie dla danego obciążenia, przy czym wprowadziliśmy skrócony zapis (patrz dodatek C), mianowicie,

$$\overline{|n, 2\kappa\rangle} \equiv |n, 2\kappa\rangle + \sum_{t=1}^{\kappa} \Gamma_{\kappa-1, \kappa-t}^{even} |n+3t, 2\kappa-2t\rangle, \quad (6.33)$$

$$\overline{|n, 2\kappa+1\rangle} \equiv |n, 2\kappa+1\rangle + \sum_{t=1}^{\kappa} \Gamma_{\kappa-1, \kappa-t}^{odd} |n+3t, 2\kappa-2t+1\rangle. \quad (6.34)$$

Powyższa struktura rozwiązań jest częściowo pokazana na rysunku 6.1. Każdemu punktowi odpowiada współczynnik $a_{j,k}$ lub odpowiednio stan bazowy $|j, k\rangle$ o odpowiednich wartościach indeksów j i k . Ukośna prosta oznacza linię stałej liczby kwantów, w tym przypadku równej $N_{cut} = 15$. Stany odpowiadające współczynnikom leżącym poniżej oraz na tej linii są zawarte w bazie. Zwiększając obciążenie przesuwamy linię na prawo, a baza zwiększa się o dodatkowe stany. Pozostałe linie reprezentują zbiory stanów bazowych budujących daną rodzinę rozwiązań. Najniższa, kropkowana linia oznacza rodzinę f_0 zawierającą $d_0(N_{cut})$ rozwiązań dla których jedynie współczynniki $a_{j,0}$ są niezerowe. Linia przerywana odpowiada rodzinie f_1 i reprezentuje $d'_0(N_{cut})$ rozwiązań. Poziome części łączą amplitudy $a_{j,2}$ oraz $a_{j,0}$. Mieszanie pomiędzy tymi współczynnikami zaczyna się od $a_{0,2}$ i $a_{3,0}$ które zawierają po 6 kwantów.



Rysunek 6.1: Struktura rozwiązań relacji rekurencyjnej (6.18). Punkty odpowiadają współczynnikom $a_{j,k}$ z odpowiednimi wartościami indeksów j i k . Linia ciągła odpowiada przykładowemu obciążeniu $N_{cut} = 15$, natomiast linie przerywane reprezentują odpowiednie rodziny rozwiązań, jak zostało opisane w tekście.

Zbiór wszystkich skwantowanych energii E_m , $\{E\}_{N_{cut}}^{n_F=0}$, dla których istnieje niezerowe rozwiązanie relacji rekurencyjnych, może być zapisane w prosty sposób poprzez wprowadzenie wielomianu $\Theta_{N_{cut}}^{n_F=0}(E)$. Jego zera odpowiadają wszystkim energiom własnym operatora Hamiltona dla danego obciążenia N_{cut} ,

$$\{E\}_{N_{cut}}^{n_F=0} = \{E : \Theta_{N_{cut}}^{n_F=0}(E) = 0\}. \quad (6.35)$$

Wielomian $\Theta_{N_{cut}}^{n_F=0}(E)$ musi być iloczynem wszystkich warunków kwantyzacji dla danego obciążenia, czyli jest dany w prosty sposób poprzez,

$$\Theta_{N_{cut}}^{n_F=0}(E) = \prod_{k=0}^{\lfloor \frac{1}{3}N_{cut} \rfloor} L_{\lfloor \frac{1}{2}(N_{cut}-3k) \rfloor + 1}^{3k+3}(2E). \quad (6.36)$$

Wzór (6.36) została sprawdzona poprzez porównanie z wynikami numerycznymi aż do obciążenia $N_{cut} = 40$. W szczególności energie własne w sektorze bozonowym w tabeli 5.5 odpowiadają warunkowi,

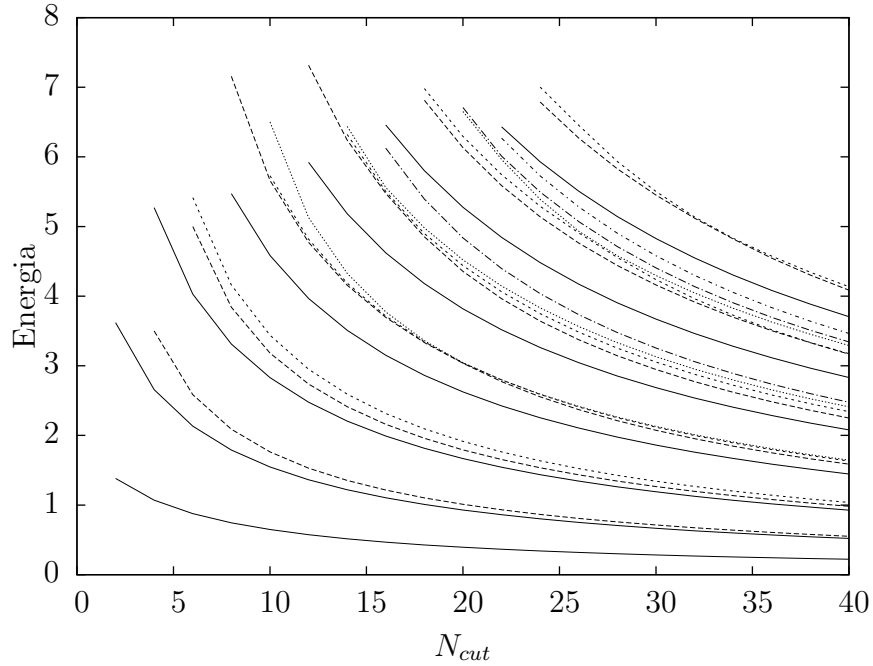
$$\Theta_5^{n_F=0}(E) = L_3^3(2E)L_2^6(2E) = 0. \quad (6.37)$$

Analityczna znajomość widma dla dowolnego N_{cut} pozwala odtworzyć wykresy zależności energii własnych w sektorze bozonowym od obciążenia. Na rysunku 6.2 przedstawiamy widmo otrzymane z wzoru (6.36). Rozwiązania należące do tej samej rodziny oznaczone są tym samym typem linii. Przykładowo, linie ciągłe reprezentują rozwiązania z rodziny f_0 . Najniższa linia tego typu odpowiada najmniejszemu zeru w warunku kwantyzacji $L_{d_0}^3(2E) = 0$ i jest niezdegenerowana. Następne w kolejności są dwie linie odpowiadające drugiemu zeru w warunku kwantyzacji z rodziny f_0 oraz najmniejszemu zeru w warunku kwantyzacji dla rodziny g_0 , $L_{d_0}^6(2E) = 0$. Wobec tego degeneracja sugerowana przez rysunek 6.2 jest spowodowana zbliżoną wartością tych zer. Przepuszczalna potrójna degeneracja kolejnej grupy stanów znajduje swoje wytłumaczenie w zbliżonych wartościach: trzeciego zera z warunku $L_{d_0}^3(2E) = 0$, drugiego zera z warunku $L_{d_0}^6(2E) = 0$ oraz najmniejszego zera z warunku $L_{d_1}^9(2E) = 0$. Strukturę pozostałej części widma można wyjaśnić w analogiczny sposób.

Fizycznie interesujące rozwiązania otrzymamy w granicy kontinuum, $N_{cut} \rightarrow \infty$. Twierdzenie C.9 z dodatku C przewiduje, że dla nieskończonego obciążenia widma rozwiązań we wszystkich rodzinach dane są przez dodatnią półoś liczb rzeczywistych. Odpowiadające im stany własne są opisane poprzez wzory (6.20) i (6.23), przy czym górna granica sum staje się nieskończona. A zatem, każda energia posiada nieskończoną degenerację numerowaną indeksem rodziny rozwiązań, czyli maksymalną liczbą potrójnych cegiełek.

W dodatku E pokazaliśmy, że rozwiązania należące do tej samej rodziny są do siebie ortogonalne zarówno dla skończonego jak i nieskończonego obciążenia. Jest to proste uogólnienie argumentacji przedstawionej dla rozwiązań modelu z symetrią $SU(2)$. Dodatkowo, można pokazać na prostych przykładach, że rozwiązania należące do różnych rodzin, są również ortogonalne. Oznacza to, że dzięki odpowiednim współczynnikom $\Gamma_{t,p}^{even}$ i $\Gamma_{t,p}^{odd}$ znaleźliśmy *ortogonalną* bazę Focka. W szczególności rozwiązania o tej samej energii, ale należące do różnych rodzin, są ortogonalne.

Żądając, aby normalizacja wszystkich rozwiązań była zgodna z normalizacją fal płaskich, otrzymujemy dla rodzin $f_{\kappa>0}$ i g_κ dodatkowy czynnik normalizacyjny $(2E)^{\frac{n}{2}}$, gdzie n



Rysunek 6.2: Zależność energii własnych od obciążenia wyliczona analitycznie dla sektora bozonowego. Różne typy linii odpowiadają różnym rodzinom rozwiązań.

jest liczbą naturalną. W konsekwencji, rozwiązania o zerowej energii należące do wszystkich rodzin, oprócz rozwiązania z rodziny f_0 oznaczonego jako $|0\rangle$, znikają. Można pokazać, że $|0\rangle$ redukuje się do stanu próżni supersymetrycznej znalezionej w [50]. Dodatkowo, w następnym podrozdziale wykażemy, że nie istnieje superpartner tego stanu w sektorze z $n_F = 1$. A zatem, stan $|0\rangle$ o zerowej energii jest niezdegenerowany.

Uogólniając argument dla modelu z symetrią $SU(2)$ wykazaliśmy również zupełność opisanych powyżej rozwiązań. Wynika z tego, że zbiór rozwiązań (6.20) i (6.23) stanowi poprawną bazę przestrzeni Hilberta, zarówno dla skończonego jak i nieskończonego obciążenia. A zatem, jest to poprawne i pełne uogólnienie rozwiązań Claudsona-Halperna na model z symetrią $SU(3)$. Poniżej przedstawiamy rozszerzenie powyższej dyskusji dla sektorów fermionowych.

6.3.2 Sektor z $n_F = 1$

Ogólny stan z sektora z $n_F = 1$, $|E\rangle_{n_F=1}$, rozkładamy jako

$$\begin{aligned}
 |E\rangle_{n_F=1} = & \sum_{\substack{2j+3k+1 \leq N_{cut} \\ j,k \geq 0}} a_{j,k}^1(E) \operatorname{tr}(f^\dagger a^\dagger) \operatorname{tr}(a^{\dagger 2})^j \operatorname{tr}(a^{\dagger 3})^k |0\rangle \\
 & + \sum_{\substack{2j+3k+2 \leq N_{cut} \\ j,k \geq 0}} a_{j,k}^2(E) \operatorname{tr}(f^\dagger a^\dagger a^\dagger) \operatorname{tr}(a^{\dagger 2})^j \operatorname{tr}(a^{\dagger 3})^k |0\rangle. \quad (6.38)
 \end{aligned}$$

Przekształcając równanie własne Hamiltonianu na relacje rekurencyjne na $a_{j,k}^1$ i $a_{j,k}^2$, otrzymujemy²

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_j^{3k+4} \cdot \mathbf{a}_{j,k}^1 + \frac{3}{8}(k+1)(k+2) a_{j-2,k+2}^1 + \frac{k+1}{2} a_{j-1,k+1}^2 &= 0, \\ \mathbf{S}_j^{3k+5} \cdot \mathbf{a}_{j,k}^2 + \frac{3}{8}(k+1)(k+2) a_{j-2,k+2}^2 + \frac{3(k+1)}{2} a_{j,k+1}^1 &= 0. \end{aligned} \quad (6.39)$$

Rekurencje (6.39) można rozbić na część parzystą i nieparzystą. Dzięki temu możemy pozbyć się indeksów górnych, które stają się niepotrzebne, zastępując je indeksem k . Odpowiedni indeks górny można odtworzyć traktując oddzielnie parzyste i nieparzyste wartości indeksu k . Wprowadzając indeks $\kappa = 2k$ lub $\kappa = 2k + 1$ otrzymujemy odpowiednio,

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_j^{6\kappa+4} \cdot \mathbf{a}_j^{2\kappa} + \frac{2\kappa+1}{2} a_{j-1}^{2\kappa+1} + \frac{3}{8}(2\kappa+1)(2\kappa+2) a_{j-2}^{2\kappa+2} &= 0, \\ \mathbf{S}_j^{6\kappa+8} \cdot \mathbf{a}_j^{2\kappa+1} + 3(\kappa+1) a_j^{2\kappa+2} + \frac{3}{8}(2\kappa+2)(2\kappa+3) a_{j-2}^{2\kappa+3} &= 0. \end{aligned} \quad (6.40)$$

oraz

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_j^{6\kappa+5} \cdot \mathbf{a}_j^{2\kappa} + \frac{3(2\kappa+1)}{2} a_j^{2\kappa+1} + \frac{3}{8}(2\kappa+1)(2\kappa+2) a_{j-2}^{2\kappa+2} &= 0, \\ \mathbf{S}_j^{6\kappa+7} \cdot \mathbf{a}_j^{2\kappa+1} + (\kappa+1) a_{j-1}^{2\kappa+2} + \frac{3}{8}(2\kappa+2)(2\kappa+3) a_{j-2}^{2\kappa+3} &= 0. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Rozwiązanie powyższych rekurencji opisane jest w rozdziale C.8 dodatku C. Podobnie jak w sektorze bozonowym możemy zdefiniować następujące rodziny,

- dane rozwiązanie należy do rodziny g_κ^1 , jeśli jest złożone ze stanów bazowych o *nieparzystej* liczbie kwantów oraz stan z największą liczbą cegiełek potrójnych równą 2κ , jest proporcjonalny do cegiełki fermionowej ($f^\dagger a^\dagger$),
- dane rozwiązanie należy do rodziny g_κ^2 , jeśli jest złożone ze stanów bazowych o *nieparzystej* liczbie kwantów oraz stan z największą liczbą cegiełek potrójnych równą $2\kappa + 1$, jest proporcjonalny do cegiełki fermionowej ($f^\dagger a^\dagger a^\dagger$).

Rozwiązania należące do powyższych rodzin są rozwiązaniami relacji rekurencyjnych (6.40).

- dane rozwiązanie należy do rodziny f_κ^1 , jeśli jest złożone ze stanów bazowych o *parzystej* liczbie kwantów oraz stan z największą liczbą cegiełek potrójnych równą $2\kappa + 1$, jest proporcjonalny do cegiełki fermionowej ($f^\dagger a^\dagger$),
- dane rozwiązanie należy do rodziny f_κ^2 , jeśli jest złożone ze stanów bazowych o *parzystej* liczbie kwantów oraz stan z największą liczbą cegiełek potrójnych równą 2κ , jest proporcjonalny do cegiełki fermionowej ($f^\dagger a^\dagger a^\dagger$).

²Stosujemy notację wprowadzoną w dodatku A.

Rozwiązania należące do powyższych rodzin są rozwiązaniami relacji rekurencyjnych (6.41).

Można łatwo obliczyć liczbę rozwiązań należących do danej rodziny przy obcięciu N_{cut} poprzez zliczenie liczby stanów w bazie spełniających odpowiednie warunki. W analogii do przypadku bozonowego definiujemy liczby całkowite $d_{\kappa}^1(N_{cut})$ i $d_{\kappa}^2(N_{cut})$ równe liczbie rozwiązań odpowiednio w rodzinach f_{κ}^1 oraz f_{κ}^2 . Podobnie, $d_{\kappa}'^1(N_{cut})$ i $d_{\kappa}'^2(N_{cut})$ oznaczają liczbę rozwiązań należących do rodzin g_{κ}^1 and g_{κ}^2 . Otrzymujemy,

$$\begin{aligned} d_{\kappa}^1(N_{cut}) &= \left\lfloor \frac{1}{2}(N_{cut} - 6\kappa - 4) \right\rfloor + 1, & d_{\kappa}^2(N_{cut}) &= \left\lfloor \frac{1}{2}(N_{cut} - 6\kappa - 2) \right\rfloor + 1, \\ d_{\kappa}'^1(N_{cut}) &= \left\lfloor \frac{1}{2}(N_{cut} - 6\kappa - 1) \right\rfloor + 1, & d_{\kappa}'^2(N_{cut}) &= \left\lfloor \frac{1}{2}(N_{cut} - 6\kappa - 5) \right\rfloor + 1. \end{aligned} \quad (6.42)$$

Całkowita liczba niepustych rodzin przy obcięciu równym N_{cut} wynosi $\lfloor \frac{N_{cut}-1}{3} \rfloor + \lfloor \frac{N_{cut}-2}{3} \rfloor$.

Warto podkreślić, że podobnie jak w przypadku bozonowym, rozwiązania wyrażają się poprzez uogólnione wielomiany Laguerre'a. Poniżej podajemy ich dokładną postać.

Rozwiązania należące do rodzin g_{κ}^1 i g_{κ}^2 mają postać

$$\begin{aligned} |E_m, \kappa, 1\rangle_{odd} &= (2E_m)^{3\kappa + \frac{1}{2}} e^{-E_m} \sum_{n=0}^{d_{\kappa}^1} L_n^{6\kappa+4}(2E_m) \left((f^{\dagger} a^{\dagger})|n, 2\kappa\rangle \right. \\ &+ \left. \sum_{p=1}^{\kappa} \left(\Gamma_{2\kappa, 2\kappa-2p+1}^{odd} (f^{\dagger} a^{\dagger} a^{\dagger})|n+3p-2, 2\kappa-2p+1\rangle + \Gamma_{2\kappa, 2\kappa-2p}^{odd} (f^{\dagger} a^{\dagger})|n+3p, 2\kappa-2p\rangle \right) \right), \end{aligned} \quad (6.43)$$

oraz

$$\begin{aligned} |E_m, \kappa, 2\rangle_{odd} &= (2E_m)^{3\kappa + \frac{5}{2}} e^{-E_m} \sum_{n=0}^{d_{\kappa}^2} L_n^{6\kappa+8}(2E_m) \left((f^{\dagger} a^{\dagger} a^{\dagger})|n, 2\kappa+1\rangle \right. \\ &+ \left. \sum_{p=1}^{\kappa+1} \left(\Gamma_{2\kappa+1, 2\kappa-2p+2}^{odd} (f^{\dagger} a^{\dagger})|n+3p-1, 2\kappa-2p+2\rangle + \Gamma_{2\kappa+1, 2\kappa-2p+1}^{odd} (f^{\dagger} a^{\dagger} a^{\dagger})|n+3p, 2\kappa-2p+1\rangle \right) \right), \end{aligned} \quad (6.44)$$

gdzie wielkości $\Gamma_{\kappa, p}^{odd}$ są zdefiniowane rekurencyjnie w rozdziale C.8. Odpowiadające rodzinom g_{κ}^1 i g_{κ}^2 warunki kwantowania to

$$\begin{aligned} L_{d_{\kappa}^1}^{6\kappa+4}(2E_m) &= 0, & 1 \leq m \leq d_{\kappa}^1, \\ L_{d_{\kappa}^2}^{6\kappa+8}(2E_m) &= 0, & 1 \leq m \leq d_{\kappa}^2. \end{aligned} \quad (6.45)$$

Analogicznie, dla rozwiązań z rodzin f_κ^2 i f_κ^1 otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 |E_m, \kappa, 2\rangle_{even} &= (2E_m)^{3\kappa+1} e^{-E_m} \sum_{n=0}^{d_\kappa^2} L_n^{6\kappa+5}(2E_m) \left((f^\dagger a^\dagger a^\dagger)|n, 2\kappa\rangle \right. \\
 &+ \left. \sum_{p=1}^{\kappa} \left(\Gamma_{2\kappa, 2\kappa-2p+1}^{even}(f^\dagger a^\dagger)|n+3p-1, 2\kappa-2p+1\rangle + \Gamma_{2\kappa, 2\kappa-2p}^{even}(f^\dagger a^\dagger a^\dagger)|n+3p, 2\kappa-2p\rangle \right) \right), \tag{6.46}
 \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
 |E_m, \kappa, 1\rangle_{even} &= (2E_m)^{3\kappa+2} e^{-E_m} \sum_{n=0}^{d_\kappa^1} L_n^{6\kappa+7}(2E_m) \left((f^\dagger a^\dagger)|n, 2\kappa+1\rangle \right. \\
 &+ \left. \sum_{p=1}^{\kappa} \left(\Gamma_{2\kappa+1, 2\kappa-2p}^{even}(f^\dagger a^\dagger a^\dagger)|n+3p+1, 2\kappa-2p\rangle + \Gamma_{2\kappa+1, 2\kappa-2p+1}^{even}(f^\dagger a^\dagger)|n+3p, 2\kappa-2p+1\rangle \right) \right), \tag{6.47}
 \end{aligned}$$

przy czym warunki kwantowania przyjmują następującą postać,

$$\begin{aligned}
 L_{d_\kappa^1}^{6\kappa+5}(2E_m) &= 0, & 1 \leq m \leq d_\kappa^1, \\
 L_{d_\kappa^2}^{6\kappa+7}(2E_m) &= 0, & 1 \leq m \leq d_\kappa^2.
 \end{aligned} \tag{6.48}$$

Przykładowo, najprostsze rodziny wraz z warunkami kwantowania są dane wzorami

$$\begin{aligned}
 |E_m, 0, 1\rangle_{odd} &= (2E_m)^{\frac{1}{2}} e^{-E_m} \sum_{n=0}^{d_0^1-1} L_n^4(2E_m)(f^\dagger a^\dagger)|n, 0\rangle, & L_{d_0^1}^4(2E_m) &= 0, & 1 \leq m \leq d_0^1, \\
 |E_m, 0, 1\rangle_{even} &= (2E_m) e^{-E_m} \sum_{n=0}^{d_0^2-1} L_n^5(2E_m)(f^\dagger a^\dagger a^\dagger)|n, 0\rangle, & L_{d_0^2}^5(2E_m) &= 0, & 1 \leq m \leq d_0^2.
 \end{aligned} \tag{6.49}$$

Podobnie jak w przypadku sektora bozonowego, pełne rozwiązanie problemu własnego w sektorze z $n_F = 1$ jest sumą rozwiązań należących do wszystkich niepustych rodzin dla danego obcięcia N_{cut} . Wobec tego, zbiór wszystkich energii własnych, $\{E\}_{N_{cut}}^{n_F=1}$, można zapisać jako zbiór zer wielomianu $\Theta_{N_{cut}}^{n_F=1}(E)$ otrzymanego z iloczynu odpowiednich warunków kwantowania,

$$\Theta_{N_{cut}}^{n_F=1}(E) = \left(\prod_{k=0}^{\lfloor \frac{1}{3}(N_{cut}-1) \rfloor} L_{\lfloor \frac{1}{2}(N_{cut}-3k-1) \rfloor + 1}^{3k+4}(2E) \right) \left(\prod_{j=0}^{\lfloor \frac{1}{3}(N_{cut}-2) \rfloor} L_{\lfloor \frac{1}{2}(N_{cut}-3j-2) \rfloor + 1}^{3j+5}(2E) \right). \tag{6.50}$$

Okazuje się, że własności rozwiązań bozonowych opisane w poprzednim podrozdziale, można uogólnić dla rozwiązań fermionowych. A zatem, zgodnie z twierdzeniem C.9 z dodatku C, zbiór energii własnych dla każdej z rodzin staje się ciągły i pokrywa całą dodatnią

półoś E w granicy nieskończonego obciążenia. Każda energia posiada nieskończoną degenerację numerowaną indeksami rodzin rozwiązań. Znalezione rozwiązania tworzą zbiór ortogonalny. Zarówno rozwiązania o różnych energiach należące do tej samej rodziny jak i rozwiązania o tej samej energii ale należące do różnych rodzin są względem siebie ortogonalne. Pozostaje to prawdziwe dla skończonego N_{cut} oraz w granicy nieskończonego obciążenia. Dodatkowo, możliwe jest narzucenie normalizacji zgodnej z normalizacją fal płaskich. Okazuje się, że rozwiązania należące do wszystkich rodzin muszą być pomnożone przez odpowiedni czynnik $(2E)^{\frac{n}{2}}$ z $n \geq 1$, $n \in \mathbb{Z}$. Wynika z tego, że w tym sektorze nie istnieją rozwiązania o zerowej energii, co jest zgodne z naszymi wynikami numerycznymi. W konsekwencji, bozonowy stan o zerowej energii z rodziny f_0 pozostaje niezdegenerowany (patrz rozdział 6.3.1).

Dla skończonego obciążenia powyższe rozwiązania dokładnie odpowiadają wynikom numerycznym. W szczególności odpowiednia kolumna tabeli 5.5 może być otrzymana z zer wielomianu (6.50) po wstawieniu $N_{cut} = 5$.

Opisane rozwiązania są pierwszymi znanymi uogólnieniami fermionowych rozwiązań Claudsona-Halperna dla modeli z symetrią $SU(N > 2)$.

6.3.3 Sektory z $n_F > 1$

Obecnie omówimy rozwiązania modelu z symetrią $SU(3)$ w wyższych sektorach fermionowych. Zaczniemy od wyprowadzenia wyrażeń na widma energetyczne, a następnie skonstruujemy pewien podzbiór stanów własnych w sektorze z $n_F = 2$.

6.3.3.1 Widma

W sektorze z n_F fermionami mamy d^{n_F} liniowo niezależnych cegiełek fermionowych, indeksowanych przez α i oznaczanych poprzez $C^\dagger(n_B^\alpha, n_F, \alpha)$ zgodnie z zapisem wprowadzonym w rozdziale 4.1.1.2. Przypomnijmy, że α numeruje cegiełki fermionowe w danym sektorze, natomiast n_B^α jest liczbą kwantów bozonowych zawartych w cegiełce α .

Aby rozłożyć ogólny stan niezbędnych jest d^{n_F} rodzajów współczynników $a_{j,k}^\alpha$,

$$|E\rangle_{n_F} = \sum_{\alpha=1}^{d^{n_F}} \sum_{2j+3k \leq N_{cut} - n_B^\alpha} a_{j,k}^\alpha C^\dagger(n_B^\alpha, n_F, \alpha) (a^\dagger a^\dagger)^j (a^\dagger a^\dagger a^\dagger)^k |0\rangle. \quad (6.51)$$

W części B.2 dodatku B wyprowadziliśmy ogólną relację rekurencyjną w sektorach fermiono-

wych. Przyjmuje ona następującą postać

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\alpha=1}^{d^{n_F}} \sum_{2j+3k \leq N_{cut} - n_B^\alpha} \left(a_{j-1,k}^\alpha - (2j+3k+4+n_B^\alpha-2E)a_{j,k}^\alpha \right. \\
 & \quad \left. + (j+1)(j+3k+4+n_B^\alpha)a_{j+1,k}^\alpha + \frac{3}{8}(k+1)(k+2)a_{j-2,k+2}^\alpha \right) C^\dagger(n_B^\alpha, n_F, \alpha) |j, k\rangle \\
 & + \sum_{\alpha=1}^{d^{n_F}} \sum_{t=1}^{n_B^\alpha} \sum_{2j+3k \leq N_{cut} - n_B^\alpha - 3} a_{j,k+1}^\alpha \left((k+1) [G_\alpha^t, (a^\dagger a^\dagger a^\dagger)] |j, k\rangle + (a^\dagger a^\dagger)^j (a^\dagger a^\dagger a^\dagger)^{k+1} G_\alpha^t |0\rangle \right) = 0,
 \end{aligned} \tag{6.52}$$

gdzie wielkości G_α^t są operatorami powstałymi z komutatora $[(aa), C^\dagger(n_B^\alpha, n_F, \alpha)]$. Komutator taki jest sumą n_B^α wyrazów, z których każdy jest równy cegiełce $C^\dagger(n_B^\alpha, n_F, \alpha)$ z jednym z bozonowych operatorów kreacji zamienionym na bozonowy operator anihilacji. Wyrazy te zapiszemy jako G_α^t , gdzie indeks t biegnie od 1 do n_B^α ,

$$[(aa), C^\dagger(n_B^\alpha, n_F, \alpha)] = \sum_{t=1}^{n_B^\alpha} G_\alpha^t. \tag{6.53}$$

Rekurencja ta ma kilka charakterystycznych własności. Przede wszystkim, wyrażenie w dużych nawiasach w (6.52) odpowiada relacji (A.5) spełnianej przez wielomiany Laguerre'a o indeksie $3k+3+n_B^\alpha$. Następnie, wyrazy zawierające operatory G_α^t nie są proporcjonalne do cegiełki $C^\dagger(n_B^\alpha, n_F, \alpha)$, ponieważ posiadają różną od n_B^α liczbę operatorów kreacji. A zatem nie wprowadzą modyfikacji do rekurencji na wielomiany Laguerre'a i są rzeczywistymi wyrazami mieszającymi współczynniki $a_{j,k}^\alpha$ o różnych indeksach α . W końcu, dla każdego N_{cut} istnieje równanie dla amplitudy $a_{j',k'}^{\alpha'}$, takiej, że $2j'+3k'+n_B^{\alpha'} = N_{cut}$, dla której wyrazy z drugiej i trzeciej linijki (6.52) będą nieobecne. Te trzy fakty wystarczają, aby rozwiązania mogły być zarówno zapisane za pomocą wielomianów Laguerre'a jak i pogrupowane w rodziny o różnej maksymalnej liczbie cegiełek potrójnych uzupełnionych o odpowiednie warunki kwantyzacji.

Warunek kwantyzacji dla każdej rodziny jest określony przez dwie liczby całkowite, n oraz δ , i ma postać $L_n^\delta(2E) = 0$. Indeks δ może być odczytany z ogólnej relacji rekurencyjnej (6.52) i wynosi $\delta = 3k+3+n_B^\alpha$, przy czym dla każdego α , indeks k numeruje rodziny i jest ograniczony przez $0 \leq k \leq \lfloor \frac{1}{3}(N_{cut} - n_B^\alpha) \rfloor$. Indeks n odpowiada liczbie rozwiązań należących do danej rodziny i może być łatwo wyliczony jako $n = \lfloor \frac{1}{2}(N_{cut} - 3k - n_B^\alpha) \rfloor + 1$. Wobec tego, możliwe jest skonstruowanie wielomianu $\Theta_{N_{cut}}^{n_F}(E)$, będącego iloczynem warunków kwantyzacji dla niepustych rodzin dla obciążenia N_{cut} w danym sektorze fermionowym. Zera tego wielomianu odpowiadają wszystkim energiom własnych Hamiltonianu,

$$\left\{ E \right\}_{N_{cut}}^{\text{w sektorze } n_F} = \left\{ E : \Theta_{N_{cut}}^{n_F}(E) = 0 \right\}. \tag{6.54}$$

$\Theta_{N_{cut}}^{n_F}(E)$ przyjmuje zatem postać,

$$\Theta_{N_{cut}}^{n_F}(E) = \prod_{\alpha=1}^{d^{n_F}} \left(\prod_{k=0}^{\lfloor \frac{1}{3}(N_{cut} - n_B^\alpha) \rfloor} L_{\lfloor \frac{1}{2}(N_{cut} - 3k - n_B^\alpha) \rfloor + 1}^{3k+3+n_B^\alpha}(2E) \right). \tag{6.55}$$

n_F	$n_B^\alpha = 0$	$n_B^\alpha = 1$	$n_B^\alpha = 2$	$n_B^\alpha = 3$	$n_B^\alpha = 4$	$n_B^\alpha = 5$
0	1					
1		1	1			
2		1	1	2		
3	1	1	2	3	1	
4		1	2	1	1	
$\sum_{n_B}^\alpha$	0	0	0	0	0	

Tabela 6.1: Krotności cegiełek fermionowych o danej liczbie kwantów bozonowych dla grupy symetrii $SU(3)$. Przypominamy, widmo jest podwójnie zdegenerowane z powodu symetrii cząstka-dziura. A zatem, rozważamy ograniczony indeks Wittena do którego wkład dają energie z sektorów $n_F = 0, \dots, 4$. Liczbę cegiełek w sektorze $n_F = 4$ podzielono przez 2. Ostatni wiersz zawiera sumę $\sum_{n_B}^\alpha = \sum_{n_F} (-1)^{n_F} (\#n_B^\alpha)$.

Aby wyznaczyć widmo w danym sektorze fermionowym wystarcza znajomość liczb n_B^α . W przypadku modelu z symetrią $SU(3)$ liczby te znajdują się w tabeli 6.1. Wzór (6.55) został porównany z niezależnymi wynikami numerycznymi opisanymi w rozdziale 4. Obydwie metody dały identyczne wyniki dla obcięć $N_{cut} \leq 40$ we wszystkich sektorach fermionowych $0 \leq n_F \leq 4$. W szczególności energie własne otrzymane w tabeli 5.5 w rozdziale 5 można otrzymać z zer wielomianu $\Theta_{N_{cut}}^{n_F}(E)$ po wstawieniu obcicia równego $N_{cut} = 5$.

6.3.3.2 Indeks Wittena

Ze wzoru (6.55) wynikają bezpośrednio wszystkie degeneracje widoczne w tabeli 5.5. Przekonaliśmy się, że kluczową rolę odgrywają n_B^α , czyli liczby kwantów bozonowych zawartych w cegiełce fermionowej. Każda para cegiełek fermionowych o równych liczbach kwantów bozonowych powoduje degenerację części widma, niezależnie czy cegiełki te należą do różnych sektorów czy też nie.

W szczególności, można w ten sposób łatwo wyjaśnić znikanie indeksu Wittena dla każdego skończonego obcicia dla modelu SYMQM $SU(3)$. W tabeli 6.1 zamieściliśmy krotności liczb n_B^α we wszystkich sektorach modelu $SU(3)$. Dla każdej wartości n_B^α istnieje tyle samo cegiełek fermionowych w sektorach o parzystej i nieparzystej liczbie kwantów fermionowych. A zatem, sumując ich wkłady do indeksu Wittena dostajemy dokładnie zero. Analityczne obliczenie indeksu w granicy kontinuum opiera się na uwzględnieniu subtelnej różnicy pomiędzy granicznym rozkładem zer wielomianów Laguerre'a o różnych indeksach i nie będzie tutaj dyskutowane.

6.3.3.3 Stany własne

Wyprowadzenie szczegółowych wzorów na stany własne w sektorach fermionowych nie wymaga koncepcyjnie żadnych modyfikacji przedstawionej metody. Jest jednak żmudne z powodu dużej liczby cegiełek fermionowych oraz mieszania pomiędzy nimi. Prowadzi również do wielu drobiazgowych wzorów. W tym podrozdziale ograniczymy się do wyprowadzenia wzorów na niektóre stany własne w sektorze z $n_F = 2$, które będą przydatne podczas dyskusji supermultipletów w analizowanym modelu.

W sektorze z $n_F = 2$ mamy cztery cegiełki fermionowe,

$$(f^\dagger f^\dagger a^\dagger), \quad (f^\dagger f^\dagger a^\dagger a^\dagger), \quad (f^\dagger a^\dagger f^\dagger a^\dagger a^\dagger), \quad (f^\dagger a^\dagger)(f^\dagger a^\dagger a^\dagger) \quad (6.56)$$

W związku z tym, ogólny stan z tego sektora możemy rozłożyć w bazie jako

$$\begin{aligned} |E\rangle_{n_F=2} = & \sum_{\substack{2j+3k \leq N_{cut}-1 \\ j,k \geq 0}} a_{j,k}^1(E) \operatorname{tr} (f^\dagger f^\dagger a^\dagger) |j, k\rangle + \sum_{\substack{2j+3k \leq N_{cut}-2 \\ j,k \geq 0}} a_{j,k}^2(E) \operatorname{tr} (f^\dagger f^\dagger a^\dagger a^\dagger) |j, k\rangle \\ & + \sum_{\substack{2j+3k \leq N_{cut}-3 \\ j,k \geq 0}} \left(a_{j,k}^3(E) \operatorname{tr} (f^\dagger a^\dagger f^\dagger a^\dagger a^\dagger) + a_{j,k}^4(E) \operatorname{tr} (f^\dagger a^\dagger)(f^\dagger a^\dagger a^\dagger) \right) |j, k\rangle \end{aligned} \quad (6.57)$$

Odpowiednie relacje rekurencyjne przyjmują następującą postać,

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_j^{3k+4} \cdot \mathbf{a}_{j,k}^1 + \frac{3}{8}(k+1)(k+2)a_{j-2,k+2}^1 + \frac{k+1}{2}a_{j-1,k+1}^2 - \frac{k+1}{2}a_{j,k}^3 &= 0, \\ \mathbf{S}_j^{3k+5} \cdot \mathbf{a}_{j,k}^2 + \frac{3}{8}(k+1)(k+2)a_{j-2,k+2}^2 - \frac{k+1}{2}a_{j-1,k+1}^3 + \frac{3(k+1)}{2}a_{j,k+1}^1 &= 0, \\ \mathbf{S}_j^{3k+6} \cdot \mathbf{a}_{j,k}^3 + \frac{3}{8}(k+1)(k+2)a_{j-2,k+2}^3 &= 0, \\ \mathbf{S}_j^{3k+6} \cdot \mathbf{a}_{j,k}^4 + \frac{3}{8}(k+1)(k+2)a_{j-2,k+2}^4 &= 0. \end{aligned} \quad (6.58)$$

Zauważmy, że równania na $a_{j,k}^4(E)$ odprzegają się od reszty równań, a więc można je wyznaczyć niezależnie od pozostałych współczynników $a_{j,k}^\alpha$. Dodatkowo, relacje rekurencyjne na amplitudy $a_{j,k}^4(E)$ mają taką samą strukturę jak rekurencje w sektorze bozonowym. Jediną różnicą jest przesunięcie indeksu wielomianów Laguerre'a. A zatem, uwzględniając tę modyfikację i powtarzając identyczne kroki jak w przypadku rozwiązań bozonowych otrzymujemy następujące wyrażenia.

Dla rozwiązań parzystych mamy

$$|E_m, \kappa\rangle_{even}^{n_F=2} = (2E_m)^{3\kappa+3} e^{-E_m} \sum_{n=0}^{d_\kappa-1} L_n^{6\kappa+6} (2E_m) (f^\dagger a^\dagger)(f^\dagger a^\dagger a^\dagger) \overline{|n, 2\kappa\rangle} \quad (6.59)$$

z warunkiem kwantyzacji danym równaniem

$$L_{d_\kappa}^{6\kappa+6}(2E_m) = 0, \quad 1 \leq m \leq d_\kappa, \quad (6.60)$$

przy czym stan $\overline{|n, 2\kappa\rangle}$ jest zdefiniowany jako

$$\overline{|n, 2\kappa\rangle} = |n, 2\kappa\rangle + \sum_{t=1}^{\kappa} \Gamma_{\kappa-1, \kappa-t}^{even} |n+3t, 2\kappa-2t\rangle, \quad (6.61)$$

oraz

$$\Gamma_{\kappa-1, t}^{even} = (-24)^{t-\kappa} \frac{(1+\kappa+t)!}{(1+2\kappa)(\kappa-t)!(2t)!}, \quad (6.62)$$

natomiast

$$d_{\kappa} = \left\lfloor \frac{1}{2}(N_{cut} - 6\kappa - 3) \right\rfloor + 1. \quad (6.63)$$

Analogicznie, dla rozwiązań nieparzystych

$$|E_m, \kappa\rangle_{odd}^{n_F=2} = (2E_m)^{3\kappa+\frac{9}{2}} e^{-E_m} \sum_{n=0}^{d'_{\kappa}-1} L_n^{6\kappa+9} (2E_m) (f^{\dagger} a^{\dagger}) (f^{\dagger} a^{\dagger} a^{\dagger}) \overline{|n, 2\kappa+1\rangle}, \quad (6.64)$$

przy czym $\overline{|n, 2\kappa+1\rangle}$ jest zdefiniowany jako

$$\overline{|n, 2\kappa+1\rangle} = |n, 2\kappa+1\rangle + \sum_{t=1}^{\kappa} \Gamma_{\kappa-1, \kappa-t}^{odd} |n+3t, 2\kappa-2t+1\rangle. \quad (6.65)$$

oraz

$$\Gamma_{\kappa-1, t}^{odd} = (-24)^{t-\kappa} \frac{(2+\kappa+t)!}{(2+2\kappa)(\kappa-t)!(2t+1)!}, \quad (6.66)$$

natomiast

$$d'_{\kappa} = \left\lfloor \frac{1}{2}(N_{cut} - 6\kappa - 6) \right\rfloor + 1. \quad (6.67)$$

Warunek kwantyzacji ma postać

$$L_{d'_{\kappa}}^{6\kappa+9} (2E_m) = 0, \quad 1 \leq m \leq d'_{\kappa}. \quad (6.68)$$

Wszystkie własności rozwiązań bozonowych pozostają prawdziwe dla rozwiązań opisanych powyżej. W szczególności, możemy narzucić normalizację zgodną z normalizacją fal płaskich. Dodatkowy czynnik normalizacyjny $(2E)^{\frac{9}{2}}$ z $n \geq 9$, $n \in \mathbb{Z}$ spowoduje, że nie będzie rozwiązań o zerowej energii w tym sektorze.

6.4 Widma dla modeli z symetrią $SU(N)$

Celem tego podrozdziału jest wyprowadzenie postaci wielomianu $\Theta_{N_{cut}}^{n_F}(N, E)$, którego zera odpowiadałyby energiom własnym Hamiltonianu SYMQM dla dowolnej grupy symetrii $SU(N)$, w dowolnym sektorze fermionowym n_F , i dla dowolnego obciążenia N_{cut} . Oprzemy się przy tym na strukturze relacji rekurencyjnej będącej uogólnieniem rekurencji dyskutowanych w

poprzednich częściach pracy i opisujących model z symetrią $SU(3)$.

W rozdziale 4 przedstawiliśmy konstrukcję bazy dla modeli z symetrią $SU(N)$. Dla danego N mamy do dyspozycji $N - 1$ elementarnych cegiełek bozonowych postaci,

$$C_N^\dagger(2, 0) \equiv (a^{\dagger 2}), \quad C_N^\dagger(3, 0) \equiv (a^{\dagger 3}), \quad \dots, \quad C_N^\dagger(N - 1, 0) \equiv (a^{\dagger N-1}), \quad C_N^\dagger(N, 0) \equiv (a^{\dagger N}).$$

Dodatkowo, w sektorze z n_F kwantami fermionowymi, mamy $d^{n_F}(N)$ złożonych cegiełek fermionowych ponumerowanych indeksem α i oznaczonych jako $C_N^\dagger(n_B^\alpha, n_F, \alpha)$. Pomimo, że szczegółowa postać cegiełek fermionowych dla $N > 4$ nie jest jawnie znana, okazuje się, że nie jest konieczna do wyznaczenia widm modeli $SU(N)$. Bozonowe stany bazowe zapisujemy jako

$$|p_2, p_3, \dots, p_N\rangle = C_N^\dagger(2, 0)^{p_2} C_N^\dagger(3, 0)^{p_3} \dots C_N^\dagger(N - 1, 0)^{p_{N-1}} C_N^\dagger(N, 0)^{p_N} |0\rangle, \quad (6.69)$$

natomiast fermionowe stany bazowe możemy otrzymać poprzez działanie odpowiednimi cegiełkami fermionowymi na (6.69). Ogólny stan z sektora o n_F kwantach fermionowych rozkładamy w bazie z nieznanymi amplitudami $a_{p_2, p_3, \dots, p_N}^\alpha(E)$, gdzie p_i opisują potęgę bozonowej cegiełki elementarnej $C_N^\dagger(i, 0)$, natomiast indeks α opisuje użytą cegiełkę fermionową, $1 \leq \alpha \leq d^{n_F}(N)$. Dla obcięcia N_{cut} mamy zatem

$$|E\rangle = \sum_{\alpha=1}^{d^{n_F}(N)} \sum_{\sum_{t=2}^N t p_t \leq N_{cut} - n_B^\alpha} a_{p_2, p_3, \dots, p_N}^\alpha C_N^\dagger(n_B^\alpha, n_F, \alpha) |p_2, p_3, \dots, p_N\rangle. \quad (6.70)$$

Operator Hamiltona z symetrią $SU(N)$ ma postać przedstawioną w rozdziale 3,

$$H = (a^\dagger a) + \frac{N^2 - 1}{4} - \frac{1}{2}(a^\dagger a^\dagger) - \frac{1}{2}(a a). \quad (6.71)$$

Powyższe informacje są wystarczające do otrzymania widm omawianych modeli, co przedstawimy w kolejnych podrozdziałach.

6.4.1 Sektory bozonowe

W sektorze bozonowym nie ma cegiełek fermionowych, więc należy pominąć indeks α przy amplitudzie $a_{p_2, p_3, \dots, p_N}^\alpha(E)$. Relacja rekurencyjna ma następującą postać (szczegóły znajdują się w rozdziale B.3 dodatku B)

$$\begin{aligned} & \sum_{\sum_{t=2}^N t p_t \leq N_{cut}} \left\{ a_{p_2-1, p_3, \dots, p_N}(E) - \left(2p_2 + \sum_{i=3}^N i p_i + \frac{1}{2}(N^2 - 1) - 2E \right) a_{p_2, p_3, \dots, p_N}(E) \right. \\ & \quad \left. + (p_2 + 1) \left(p_2 + \sum_{i=3}^N i p_i + \frac{1}{2}(N^2 - 1) \right) a_{p_2+1, p_3, \dots, p_N}(E) \right. \\ & \quad \left. + \sum_{j=3}^N \sum_{t=j}^N \gamma(j, t, p_j + 1, p_t + 1, N) a_{p_2, \dots, p_{j+1}, \dots, p_{t+1}, \dots, p_N}(E) \right\} |p_2, \dots, p_j, \dots, p_t, \dots, p_N\rangle = 0, \end{aligned} \quad (6.72)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \gamma(j, t, p_j, p_t, N) = & \delta_{t,j} \frac{j^2}{4} p_j (p_j - 1) \left\{ (a^{\dagger 2j-1}) - \frac{1}{N} (a^{\dagger j-1})^2 \right\} \\ & + (1 - \delta_{t,j}) \frac{j t p_j p_t}{2} \left\{ (a^{\dagger j+t-1}) - \frac{1}{N} (a^{\dagger j})(a^{\dagger t-1}) \right\}. \end{aligned} \quad (6.73)$$

W powyższej rekurencji nie zastosowaliśmy twierdzenia Cayleya-Hamiltona. Wobec tego, ślady z potęgami większymi od N pojawiające się w wyrażeniu $\gamma(j, t, p_j, p_t, N)$ należy uprościć stosując to twierdzenie dla odpowiedniego N . W szczególności, dla $N = 3$, po uproszczeniu cegiełek $(a^{\dagger 4})$ i $(a^{\dagger 5})$, rekurencja (6.72) redukuje się do relacji rekurencyjnej wyprowadzonej dla grupy $SU(3)$ i danej wzorem (6.18).

Analizując strukturę rekurencji (6.72) na amplitudy $a_{p_2, p_3, \dots, p_N}(E)$ zauważamy, że indeks p_2 pełni szczególną rolę, natomiast pozostałe indeksy można traktować jako parametry uzupełniające. Znalezienie rozwiązania jest możliwe poprzez wprowadzenie zależności współczynników $a_{p_2, p_3, \dots, p_N}(E)$ od indeksu p_2 w postaci wielomianów Laguerre'a o stopniu p_2 i zmiennej $2E$. W konsekwencji okazuje się, że rozwiązania dzielą się na rozłączne rodziny z określoną maksymalną liczbą cegiełek każdego typu. Zatem, każde rozwiązanie można jednoznacznie oznaczyć poprzez jego energię E oraz liczby całkowite $p_3^{max}, p_4^{max}, \dots, p_N^{max}$, przy czym p_t^{max} określa maksymalną potęgę cegiełki $(a^{\dagger t})$ w rozwinięciu stanu własnego w bazie. Jest to naturalne uogólnienie rozwiązań dla grupy $SU(3)$, w przypadku której rozwiązania były numerowane maksymalną liczbą cegiełek potrójnych, p_3^{max} .

I tak, dla modelu z symetrią $SU(4)$ rodziny rozwiązań są numerowane dwoma liczbami całkowitymi, p_3^{max} i p_4^{max} oraz parzystością. Rodziny parzyste możemy oznaczyć poprzez $f_{p_3^{max}, p_4^{max}}$, natomiast nieparzyste przez $g_{p_3^{max}, p_4^{max}}$. Przykładowo, rozwiązanie $|E, p_3^{max}, p_4^{max}\rangle$ należy do rodziny $f_{p_3^{max}, p_4^{max}}$ jeśli $3p_3^{max} + 4p_4^{max}$ jest parzyste oraz stany bazowe tworzące ten stan posiadają co najwyżej p_3^{max} cegiełek $(a^{\dagger 3})$ oraz p_4^{max} cegiełek $(a^{\dagger 4})$.

Dla danego obciążenia N_{cut} , możemy określić wielomian $\Theta_{N_{cut}}^{n_F=0}(N, E)$, którego zera odpowiadają wszystkim wartościom własnym obciążonego Hamiltonianu,

$$\left\{ E \right\}_{N_{cut}}^{\text{w sektorze } n_F=0} = \left\{ \Theta_{N_{cut}}^{n_F=0}(N, E) = 0 \right\}. \quad (6.74)$$

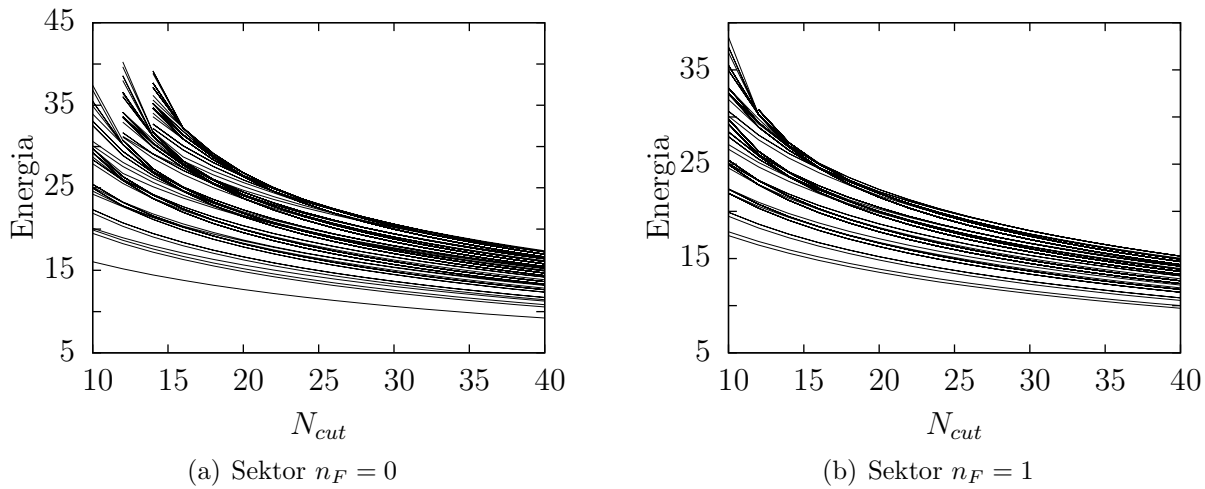
$\Theta_{N_{cut}}^{n_F=0}(N, E)$ może być wyrażony jako iloczyn warunków kwantyzacji wszystkich niepustych rodzin rozwiązań. Przykładowo, dla grupy $SU(4)$ mamy

$$\Theta_{N_{cut}}^{n_F=0}(4, E) = \prod_{t=0}^{\lfloor \frac{1}{3} N_{cut} \rfloor} \left(\prod_{k=0}^{\lfloor \frac{1}{4} (N_{cut} - 3t) \rfloor} L_{\lfloor \frac{1}{2} (N_{cut} - 3t - 4k) \rfloor + 1}^{3t + 4k + \frac{1}{2}(16-1) - 1}(2E) \right), \quad (6.75)$$

natomiast dla grupy $SU(5)$ mamy

$$\Theta_{N_{cut}}^{n_F=0}(5, E) = \prod_{t=0}^{\lfloor \frac{1}{3} N_{cut} \rfloor} \left(\prod_{k=0}^{\lfloor \frac{1}{4} (N_{cut} - 3t) \rfloor} \left(\prod_{s=0}^{\lfloor \frac{1}{5} (N_{cut} - 3t - 4k) \rfloor} L_{\lfloor \frac{1}{2} (N_{cut} - 3t - 4k - 5s) \rfloor + 1}^{3t + 4k + 5s + \frac{1}{2}(25-1) - 1}(2E) \right) \right). \quad (6.76)$$

Powyższe wzory zostały sprawdzone poprzez niezależne obliczenia numeryczne wykorzystujące algorytm opisany w rozdziale 4. Obydwa rezultaty zgodziły się dokładnie dla $N_{cut} \leq 20$. W



Rysunek 6.3: Zależności od obciążenia 120 najniższych energii własnych dla modelu z symetrią $SU(10)$ otrzymane na podstawie wzorów (6.77) oraz (6.79). Panel (a) dla sektora bozonowego, panel (b) dla sektora z $n_F = 1$.

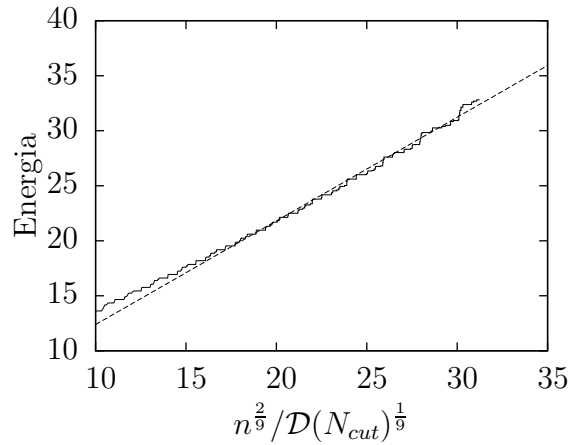
szczegółności, można odtworzyć zależności widm od obciążenia przedstawione na rysunku 5.4. Z relacji rekurencyjnej (6.72) wynika następujące uogólnienie powyższych wzorów dla dowolnego N ,

$$\Theta_{N_{cut}}^{n_F=0}(N, E) = \prod_{i=3}^N \left(\prod_{t_i=0}^{\lfloor \frac{1}{i} (N_{cut} - (\sum_{s=3}^{i-1} st_s)) \rfloor} L_{\lfloor \frac{1}{2} (N_{cut} - (\sum_{s=3}^N st_s)) \rfloor + 1}^{\sum_{s=3}^N st_s + \frac{1}{2}(N^2-1)-1} (2E) \right). \quad (6.77)$$

Dzięki wyrażeniu (6.77) możemy wykreślić zależność widma od obciążenia dla modelu z symetrią $SU(N)$. Przykładowo, dla grupy symetrii $SU(10)$ taka zależność dla 120 najniższych energii jest przedstawiona na rysunku 6.3. Zauważmy, że baza dla $N_{cut} = 40$ składa się z 16928 stanów, wobec czego rachunki numeryczne stają się dla takiego przypadku coraz bardziej czasochłonne. Poprawność przedstawionego widma możemy pośrednio sprawdzić analizując skalowanie się energii wraz z indeksem n numerującym kolejne energie własne. Relacja (5.15) zaproponowana w rozdziale 5.4 sugeruje zależność $E(n)$ w postaci

$$E(n) = \frac{\pi}{2} \left(8 + \frac{\pi}{2} \right) n^{\frac{2}{9}} \mathcal{D}(N_{cut})^{-\frac{1}{9}}, \quad (6.78)$$

gdzie $\mathcal{D}(N_{cut})$ oznacza całkowity rozmiar bazy bozonowej dla modelu $SU(10)$ dla obciążenia N_{cut} . Na rysunku 6.4 przedstawiamy zależność energii obliczonych ze wzoru (6.77) dla obciążenia $N_{cut} = 40$ od indeksu n zgodnie z relacją (6.78). Punkty układają się wzdłuż linii prostej potwierdzając poprawne skalowanie z indeksem n . Dopasowując liniową zależność otrzymujemy nachylenie prostej równe 0.94, co z dokładnością rzędu 5% zgadza się z prawem skalowania (6.78). Niezgodność bierze się z relatywnie małego obciążenia użytego do obliczeń.



Rysunek 6.4: Prawo skalowania energii własnych $E(n)$ w sektorze bozonowym modelu z symetrią $SU(10)$.

6.4.2 Sektory fermionowe

Na zakończenie przedstawiamy wzory pozwalające obliczyć widma modeli z symetrią $SU(N)$ w dowolnym sektorze fermionowym. Odpowiadająca relacja rekurencyjna została wyprowadzona w dodatku B. Podsumowaniem tych rachunków jest wielomian, $\Theta_{N_{cut}}^{n_F}(N, E)$, którego zera odpowiadają energiom własnym obciętego operatora Hamiltona,

$$\Theta_{N_{cut}}^{n_F}(N, E) = \prod_{\alpha=1}^{d^{n_F}(N)} \left\{ \prod_{i=3}^N \left(\prod_{t_i=0}^{\lfloor \frac{1}{i} (N_{cut} - (\sum_{s=3}^{i-1} st_s) - n_B^\alpha(N)) \rfloor} L_{\lfloor \frac{1}{2} (N_{cut} - (\sum_{s=3}^N st_s) + \frac{1}{2}(N^2-1) - 1 + n_B^\alpha(N)) \rfloor + 1} (2E) \right) \right\}, \quad (6.79)$$

przy czym $d^{n_F}(N)$ oraz $n_B^\alpha(N)$ zależą oczywiście od N . Jako przykład zastosowania wzoru (6.79) zamieszczamy na rysunku 6.3 zależność widma modelu z symetrią $SU(10)$ w sektorze z $n_F = 1$ od obciążenia. Warto zauważyć, że dla $N_{cut} = 40$ baza w tym sektorze składa się z aż 77832 stanów.

6.5 Zastosowania rozwiązań dokładnych

W poprzednich podrozdziałach wyprowadziliśmy analityczną postać rozwiązań modeli SYMQM w granicy kontinuum przy użyciu dyskretyzacji Hamiltonianu. Obecnie omówimy dwa możliwe zastosowania takich rozwiązań.

Pierwszym z nich jest możliwość jawnej konstrukcji supermultipletów. Najpierw odtworzymy strukturę supermultipletów dla prostego modelu z symetrią $SU(2)$, a następnie przejdziemy do modelu z symetrią $SU(3)$, koncentrując się na trzech sektorach $n_F = 0, 1, 2$.

Drugim z zastosowań jest wykorzystanie obciętych rozwiązań dla modelu $SU(3)$ do przeprowadzenia rachunku zaburzeń dla supersymetrycznego oscylatora anharmonicznego i wyprowadzenia przybliżonej zależności energii własnych od stałej sprzężenia.

6.5.1 Struktura supermultipletów

W tej części pokażemy, że rozwiązania w sąsiednich sektorach wyprowadzone w poprzednich podrozdziałach są powiązane działaniem superładunków. Przypominamy, że zgodnie z definicją z rozdziału 3 superładunki dane są następującymi wzorami,

$$Q^\dagger = \frac{i}{\sqrt{2}}(\text{tr}(f^\dagger a^\dagger) - \text{tr}(f^\dagger a)), \quad Q = \frac{i}{\sqrt{2}}(\text{tr}(fa^\dagger) - \text{tr}(fa)). \quad (6.80)$$

6.5.1.1 Model z symetrią $SU(2)$

Aby przekształcić rozwiązania bozonowe w fermionowe należy sprawić, aby indeks wielomianów Laguerre'a pojawiających się w rozwiązaniu bozonowym wzrósł o 1. Analogicznie, przekształcenie rozwiązania fermionowego w bozonowe wymaga obniżenia indeksu wielomianu Laguerre'a danego w rozwiązaniu fermionowym. Okazuje się, że działanie superładunków daje dokładnie wyrażenia pojawiające się w relacjach rekurencyjnych na wielomiany Laguerre'a o różnych indeksach. Poniżej prześledzimy to na konkretnych wzorach. W dyskretyzacji Hamiltonianu supermultiplety mogą być otrzymane tylko w granicy kontinuum, gdyż tylko dla nieskończonego obciążenia widma w obydwu sektorach są sobie równe.

A zatem, obliczmy obraz bozonowego stanu o dowolnej energii $E > 0$, $Q^\dagger|E\rangle^{n_F=0}$. Wykorzystując standardową relację rekurencyjną dla uogólnionych wielomianów Laguerre'a (patrz dodatek A),

$$k\mathcal{L}_k^\alpha(x) = (k + \alpha)\mathcal{L}_{k-1}^\alpha(x) - x\mathcal{L}_{k-1}^{\alpha+1}(x), \quad (6.81)$$

znajdujemy stan fermionowy o energii E ,

$$Q^\dagger|E\rangle^{n_F=0} = \eta|E\rangle^{n_F=1}, \quad (6.82)$$

jeśli tylko

$$\eta = \frac{i}{\sqrt{2}} \frac{a_0}{b_0} \frac{4\sqrt{2E}}{3}. \quad (6.83)$$

Podobnie, obliczając obraz stanu fermionowego, $Q|E\rangle^{n_F=1}$ otrzymujemy

$$Q|E\rangle^{n_F=1} = \gamma|E\rangle^{n_F=0}, \quad (6.84)$$

przy czym ponownie wykorzystaliśmy jedną ze standardowych relacji rekurencyjnej dla uogólnionych wielomianów Laguerre'a (patrz dodatek A),

$$\mathcal{L}_k^\alpha(x) = \mathcal{L}_k^{\alpha+1}(x) - \mathcal{L}_{k-1}^{\alpha+1}(x). \quad (6.85)$$

Stała proporcjonalności wynosi

$$\gamma = -\frac{i}{\sqrt{2}} \frac{b_0}{a_0} \frac{3\sqrt{2E}}{4}. \quad (6.86)$$

Tak więc, zbierając powyższe wyniki, dostajemy

$$QQ^\dagger|E\rangle^{n_F=0} = \eta\gamma|E\rangle^{n_F=0} = E|E\rangle^{n_F=0}, \quad (6.87)$$

$$Q^\dagger Q|E\rangle^{n_F=1} = \gamma\eta|E\rangle^{n_F=1} = E|E\rangle^{n_F=1}. \quad (6.88)$$

$n_F = 0$	$n_F = 1$
$ 0\rangle$	
$ E\rangle^{n_F=0}$	$ E\rangle^{n_F=1}$

Tabela 6.2: Struktura supermultipletów dla modelu z symetrią $SU(2)$. Rozwiązania o równych energiach z rodzin znajdujących się w jednym wierszu tworzą supermultiplety.

Dla energii $E = 0$ stan w sektorze z $n_F = 1$ znika, wobec czego stan $|0\rangle^{n_F=0}$ jest niezdegenerowany. Porównanie jego współczynników rozwinięcia w bazie potwierdza, że jest to próżnia supersymetryczna [50].

Podsumowując, w modelu $SU(2)$ dostajemy pojedynczy stan próżni supersymetrycznej w sektorze bozonowym, podczas gdy dla dowolnej niezerowej energii stan z sektora bozonowego posiada superpartnera w sektorze z jednym fermionem. Tę prostą strukturę supersymetryczną przedstawiamy w tabelce 6.2. W każdym wierszu tabelki wpisane są rodziny rozwiązań tworzące supermultiplet. W przypadku modelu $SU(2)$ mamy pojedyncze rodziny w każdym z dwóch sektorów fermionowych, a zatem tabelka jest wyjątkowo prosta.

6.5.1.2 Model z symetrią $SU(3)$ - sektory z $n_F = 0$ i $n_F = 1$ fermionami

W tej części rozszerzymy przedstawione powyżej obliczenia dla modelu $SU(3)$ pomiędzy sektorami z $n_F = 0$ i $n_F = 1$. Komplikacją jest fakt, że w modelu $SU(3)$ istnieje nieskończenie wiele rodzin rozwiązań. Opiszemy szczegółowo konstrukcję supermultipletów dla trzech najprostszych rodzin, a następnie zapostulujemy ogólny wzór.

Rodzina f_0

Najprostszy stan własny do energii E z sektora bozonowego ma postać,

$$|E, 0\rangle_{even}^{n_F=0} = e^{-E} \sum_{n=0}^{\infty} L_n^3(2E) |n, 0\rangle. \quad (6.89)$$

Działanie superładunku na $|E, 0\rangle_{even}^{n_F=0}$ daje

$$Q^\dagger |E, 0\rangle_{even}^{n_F=0} = \frac{i}{\sqrt{2}} 2E e^{-E} \sum_{n=0}^{\infty} L_n^4(2E) (f^\dagger a^\dagger) |n, 0\rangle, \quad (6.90)$$

przy czym wykorzystaliśmy relację rekurencyjną (6.81). Prawa strona (6.90) jest rozwiązaniem w sektorze z $n_F = 1$, a więc możemy przepisać równość (6.90) używając zapisu wprowadzonego podczas dyskusji rozwiązań w sektorze z $n_F = 1$ jako

$$Q^\dagger |E, 0\rangle_{even}^{n_F=0} = \frac{i}{\sqrt{2}} \sqrt{2E} \left(|E, 0, 1\rangle_{odd}^{n_F=1} \right). \quad (6.91)$$

$n_F = 0$	$n_F = 1$	$n_F = 2$
$ 0\rangle$		
$ E, 0\rangle_{even}^{n_F=0}$	$ E, 0, 1\rangle_{odd}^{n_F=1}$	
$ E, 0\rangle_{odd}^{n_F=0}$	$\{ E, 0, 1\rangle_{even}^{n_F=1}, E, 0, 2\rangle_{even}^{n_F=1}\}_-$ $\{ E, 0, 1\rangle_{odd}^{n_F=1}, E, 0, 2\rangle_{odd}^{n_F=1}\}_+$	$ E, 0\rangle_{odd}^{n_F=2}$
$ E, 1\rangle_{even}^{n_F=0}$	$\{ E, 1, 1\rangle_{odd}^{n_F=1}, E, 0, 2\rangle_{odd}^{n_F=1}\}_-$ $\{ E, 1, 1\rangle_{even}^{n_F=1}, E, 0, 2\rangle_{even}^{n_F=1}\}_+$	$ E, 0\rangle_{even}^{n_F=2}$
$ E, 1\rangle_{odd}^{n_F=0}$	$\{ E, 1, 1\rangle_{even}^{n_F=1}, E, 1, 2\rangle_{even}^{n_F=1}\}_-$ $\{ E, 1, 1\rangle_{odd}^{n_F=1}, E, 1, 2\rangle_{odd}^{n_F=1}\}_+$	$ E, 1\rangle_{odd}^{n_F=2}$
$ E, 2\rangle_{even}^{n_F=0}$	$\{ E, 2, 1\rangle_{odd}^{n_F=1}, E, 1, 2\rangle_{odd}^{n_F=1}\}_-$ $\{ E, 2, 1\rangle_{even}^{n_F=1}, E, 1, 2\rangle_{even}^{n_F=1}\}_+$	$ E, 1\rangle_{even}^{n_F=2}$

Tabela 6.3: Struktura supermultipletów dla modelu z symetrią $SU(3)$. Rozwiązania o równych energiach z rodzin znajdujących się w jednym wierszu tworzą supermultiplety.

Możemy też sprawdzić, że

$$Q\left(|E, 0, 1\rangle_{odd}^{n_F=1}\right) = -\frac{i}{\sqrt{2}}\sqrt{2E}|E, 0\rangle_{even}^{n_F=0}, \quad (6.92)$$

gdzie użyliśmy rekurencji (6.85).

A zatem, dla $E > 0$ stany $|E, 0\rangle_{even}^{n_F=0}$ i $|E, 0, 1\rangle_{odd}^{n_F=1}$ tworzą supermultiplety. W granicy $E \rightarrow 0$ stan $|E = 0, 0, 1\rangle_{odd}^{n_F=1}$ znika, a więc w sektorze bozonowym otrzymujemy niezdegenerowany stan próżni supersymetrycznej.

Struktura supermultipletów została zilustrowana w tabeli 6.3 w dwóch pierwszych wierszach. Pojedynczy stan próżni supersymetrycznej znajduje się w sektorze bozonowym. Dla niezerowych energii stany bozonowe $|E, 0\rangle_{even}^{n_F=0}$ są superpartnerami stanów $|E, 0, 1\rangle_{odd}^{n_F=1}$ z sektora $n_F = 1$, dlatego też znajdują się w jednym wierszu tabeli.

Rodzina g_0

Kolejny przykład jest bardziej skomplikowany. Szukamy partnerów supersymetrycznych dla stanów z rodziny g_0 ,

$$|E, 0\rangle_{odd}^{n_F=0} = (2E)^{\frac{3}{2}} e^{-E} \sum_{n=0}^{\infty} L_n^6(2E) |n, 1\rangle. \quad (6.93)$$

Działanie superładunku na $|E, 0\rangle_{odd}^{n_F=0}$ daje

$$Q^\dagger |E, 0\rangle_{odd}^{n_F=0} = \frac{i}{\sqrt{2}} (2E)^{\frac{5}{2}} e^{-E} \sum_{n=0}^{\infty} L_n^7(2E) (f^\dagger a^\dagger) |n, 1\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}} (2E)^{\frac{3}{2}} e^{-E} \frac{3}{2} \sum_{n=0}^{\infty} L_n^6(2E) (f^\dagger a^\dagger a^\dagger) |n, 0\rangle. \quad (6.94)$$

Korzystając z równości (patrz dodatek A),

$$(n + \alpha + 1) \mathcal{L}_n^\alpha(x) - (\alpha + 1) \mathcal{L}_n^{\alpha+1}(x) + x \mathcal{L}_{n-1}^{\alpha+2}(x) = 0, \quad (6.95)$$

możemy doprowadzić (6.94) do następującej postaci

$$Q^\dagger |E, 0\rangle_{odd}^{n_F=0} = \frac{i}{\sqrt{2}} \sqrt{2E} \left(|E, 0, 1\rangle_{even}^{n_F=1} - \frac{3}{2} |E, 0, 2\rangle_{even}^{n_F=1} \right), \quad (6.96)$$

Supersymetryczny partner stanu $|E, 0\rangle_{odd}$ jest zatem kombinacją liniową stanów należących dwóch różnych rodzin z sektora z $n_F = 1$. Ponowne działanie operatorem Q^\dagger na taki stan daje zero, natomiast dla operatora Q otrzymujemy

$$Q \left(|E, 0, 1\rangle_{even}^{n_F=1} - \frac{3}{2} |E, 0, 2\rangle_{even}^{n_F=1} \right) = -\frac{i}{\sqrt{2}} \sqrt{2E} |E, 0\rangle_{odd}^{n_F=0}. \quad (6.97)$$

Supermultiplety utworzone z rodzin $|E, 0\rangle_{odd}$ oraz $|E, 0, 1\rangle_{even}^{n_F=1}$ i $|E, 0, 2\rangle_{even}^{n_F=1}$ znajdują się w trzecim wierszu tabeli 6.3.

Rodzina f_1

Dla stanów $|E, 1\rangle_{even}^{n_F=0}$,

$$|E, 1\rangle_{even}^{n_F=0} = (2E)^3 e^{-E} \sum_{n=0}^{\infty} L_n^9(2E) \left(|n, 2\rangle - \frac{1}{24} |n+3, 0\rangle \right), \quad (6.98)$$

działanie superładunku Q^\dagger daje

$$\begin{aligned} Q^\dagger |E, 1\rangle_{even}^{n_F=0} &= \frac{i}{\sqrt{2}} (2E)^4 e^{-E} \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{10}(2E) \left((f^\dagger a^\dagger) |n, 2\rangle - \frac{1}{3} (f^\dagger a^\dagger a^\dagger) |n+1, 1\rangle - \frac{1}{36} (f^\dagger a^\dagger) |n+3, 0\rangle \right) \\ &\quad - 3 \frac{i}{\sqrt{2}} (2E)^3 e^{-E} \sum_{n=0}^{\infty} L_n^8(2E) \left((f^\dagger a^\dagger a^\dagger) |n, 1\rangle - \frac{1}{24} (f^\dagger a^\dagger) |n+2, 0\rangle \right), \quad (6.99) \end{aligned}$$

co można zapisać jako,

$$Q^\dagger |E, 1\rangle_{even}^{n_F=0} = \frac{i}{\sqrt{2}} \sqrt{2E} \left(|E, 1, 1\rangle_{odd}^{n_F=1} - 3|E, 0, 2\rangle_{odd}^{n_F=1} \right). \quad (6.100)$$

Poprzez działanie operatorem anihilacji Q otrzymujemy, zgodnie z oczekiwaniami, z powrotem stan z sektora bozonowego,

$$Q \left(|E, 1, 1\rangle_{odd}^{n_F=1} - 3|E, 0, 2\rangle_{odd}^{n_F=1} \right) = -\frac{i}{\sqrt{2}} \sqrt{2E} |E, 1\rangle_{even}^{n_F=0}. \quad (6.101)$$

Supermultiplety utworzone z rodzin $|E, 1\rangle_{even}$ oraz $|E, 1, 1\rangle_{odd}^{n_F=1}$ i $|E, 0, 2\rangle_{odd}^{n_F=1}$ znajdują się w piątym wierszu tabeli 6.3.

Powyższe rachunki można w prosty sposób uogólnić otrzymując,

$$\begin{aligned} Q^\dagger |E, n\rangle_{even}^{n_F=0} &= \frac{i}{\sqrt{2}} \sqrt{2E} \left(|E, n, 1\rangle_{odd}^{n_F=1} - \frac{3n}{2} |E, n-1, 2\rangle_{odd}^{n_F=1} \right), \\ Q^\dagger |E, n\rangle_{odd}^{n_F=0} &= \frac{i}{\sqrt{2}} \sqrt{2E} \left(|E, n, 1\rangle_{even}^{n_F=1} - \frac{3(n+1)}{2} |E, n, 2\rangle_{even}^{n_F=1} \right). \end{aligned} \quad (6.102)$$

6.5.1.3 Model z symetrią $SU(3)$ - sektory z $n_F = 1$ i $n_F = 2$ fermionami

W poprzedniej części otrzymaliśmy kombinacje liniowe stanów z sektora $n_F = 1$ tworzące supermultiplety ze stanami z sektora $n_F = 0$. Oczekujemy, że kombinacje liniowe tych rozwiązań będą 'prostopadłe' do supermultipletów z sektorów $n_F = 0$ i $n_F = 1$ będą stanami tworzącymi supermultiplety z sektorów $n_F = 1$ i $n_F = 2$. Szukane współczynniki α_i poprawnych kombinacji liniowych możemy znaleźć żądając,

$$\begin{aligned} Q \left(|E, 0, 1\rangle_{even}^{n_F=1} - \frac{3}{2} \alpha_1 |E, 0, 2\rangle_{even}^{n_F=1} \right) &= 0, \\ Q \left(|E, 1, 1\rangle_{odd}^{n_F=1} - 3\alpha_2 |E, 0, 2\rangle_{odd}^{n_F=1} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (6.103)$$

Otrzymujemy,

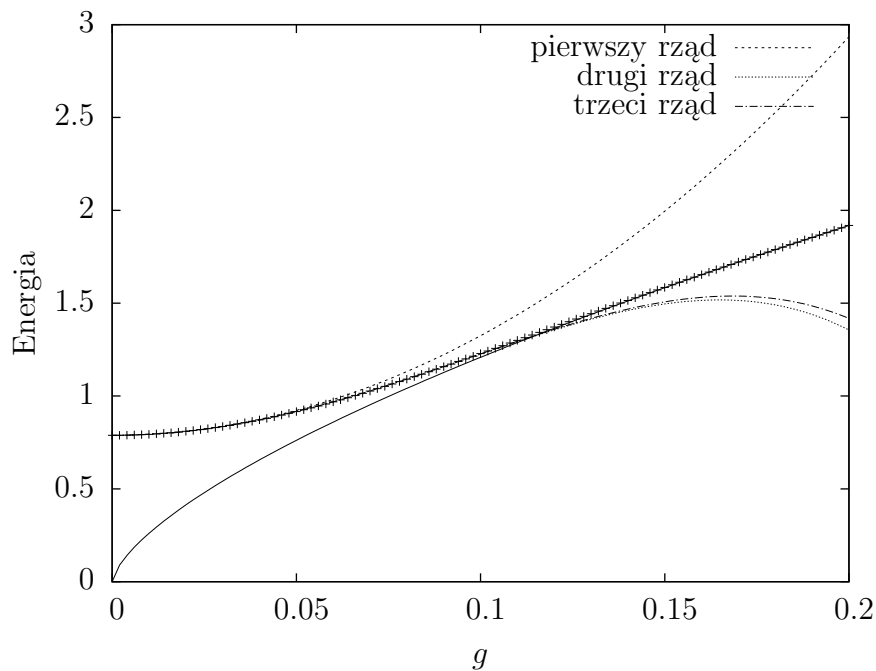
$$\alpha_1 = -3, \quad \alpha_2 = -2. \quad (6.104)$$

Zatem, działanie operatora Q^\dagger na powyższe kombinacje liniowe prowadzi do stanów z sektora $n_F = 2$ opisanych w podrozdziale 6.3.3.3,

$$\begin{aligned} Q^\dagger \left(|E, 0, 1\rangle_{even}^{n_F=1} + \frac{9}{2} |E, 0, 2\rangle_{even}^{n_F=1} \right) &= \frac{i}{\sqrt{2}} \sqrt{2E} |E, 0\rangle_{odd}^{n_F=2}, \\ Q^\dagger \left(|E, 1, 1\rangle_{odd}^{n_F=1} + 6|E, 0, 2\rangle_{odd}^{n_F=1} \right) &= \frac{i}{\sqrt{2}} \sqrt{2E} |E, 0\rangle_{even}^{n_F=2}. \end{aligned} \quad (6.105)$$

Można się przekonać, że ponowne działanie operatora Q^\dagger anihiluje te stany,

$$\begin{aligned} Q^\dagger |E, 0\rangle_{odd}^{n_F=2} &= 0, \\ Q^\dagger |E, 0\rangle_{even}^{n_F=2} &= 0. \end{aligned} \quad (6.106)$$



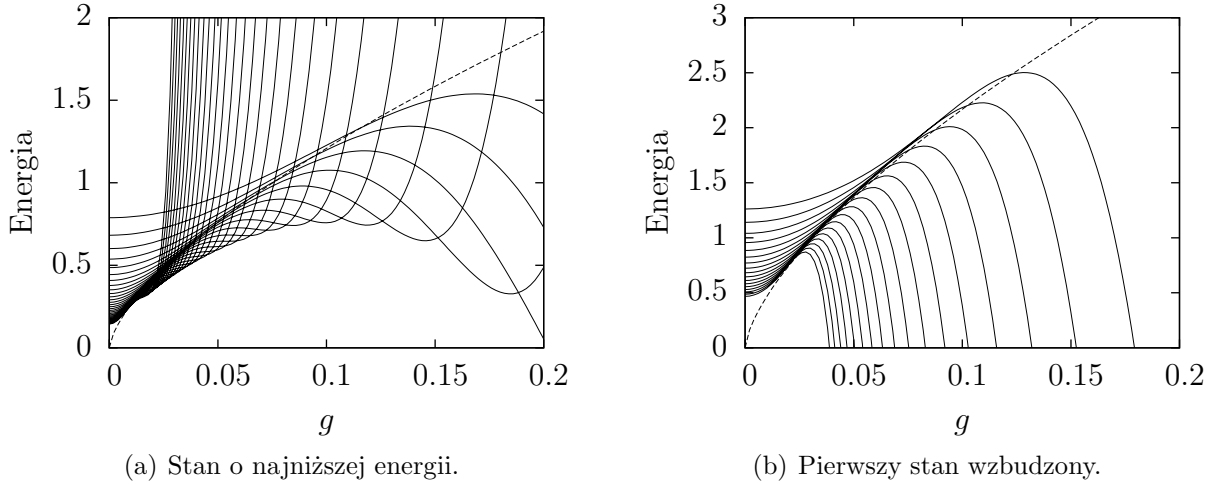
Rysunek 6.5: Porównanie zależności energii najniższego stanu od stałej sprzężenia obliczonej numerycznie (krzyżyki), korzystając ze wzoru (5.2) (linia ciągła), oraz w kolejnych rzędach rachunku zaburzeń (odpowiednie linie przerywane).

Supermultiplety utworzone z rodzin $|E, 0, 1\rangle_{even}^{n_F=1}$ i $|E, 0, 2\rangle_{even}^{n_F=1}$ oraz $|E, 0\rangle_{odd}^{n_F=2}$ znajdują się w czwartym wierszu tabeli 6.3, natomiast te utworzone z rodzin $|E, 1, 1\rangle_{odd}^{n_F=1}$ i $|E, 0, 2\rangle_{odd}^{n_F=1}$ oraz $|E, 0\rangle_{even}^{n_F=2}$ znajdują się w szóstym wierszu tabeli 6.3.

Podsumowując, w trzech powyższych podrozdziałach pokazaliśmy, że możliwe jest analityczne sprawdzenie struktury supersymetrycznej badanych modeli.

6.5.2 Rachunek perturbacyjny dla supersymetrycznego oscylatora anharmonicznego

W tej części zastosujemy standardowy rachunek zaburzeń Rayleigh'a-Schrödinger'a, aby otrzymać przybliżone wartości własne w sektorze bozonowym supersymetrycznego oscylatora anharmonicznego. Zauważmy, że dla *skończonego* obciążenia swobodne stany własne mają *skończoną* normę. Dla danego N_{cut} ich postać została przedstawiona w podrozdziale 6.3.1. A zatem, możliwe jest rozwinięcie energii własnych modelu oscylatora anharmonicznego dla małych wartości stałej sprzężenia, korzystając ze swobodnych stanów własnych. Potencjał oddziały-



Rysunek 6.6: Zależność rozwinięcia perturbacyjnego najniższej (lewy wykres) oraz pierwszej wzbudzonej (prawy wykres) energii bozonowej supersymetrycznego oscylatora anharmonicznego od obciążenia, dla obciążeń z zakresu od $N_{cut} = 20$ do $N_{cut} = 140$. Przerwaną linią zaznaczono przewidywanie teoretyczne dane relacją $E(g) = g^{\frac{2}{3}} E(1)$ z wartością energii dla stałej sprężenia $g = 1$ obliczonej numerycznie.

wania wyrażony za pomocą operatorów kreacji i anihilacji przyjmuje następującą postać

$$\begin{aligned}
 V = \frac{1}{24} & \left((a^\dagger a^\dagger)^2 + (aa)^2 + 4((a^\dagger a)(aa) - (a^\dagger a^\dagger)(aa) + (a^\dagger a^\dagger)(a^\dagger a)) - 8((a^\dagger a)^2 - (a^\dagger a)) \right. \\
 & \left. + 10((a^\dagger a^\dagger) + (aa)) + 12(a^\dagger aa^\dagger a) + 24(a^\dagger a^\dagger aa) + 20 \right). \quad (6.107)
 \end{aligned}$$

Usunęliśmy z V wyrazy fermionowe, ponieważ ich wkład w sektorze bozonowym znika. Najprościej jest zastosować rachunek zaburzeń do rodziny f_0 . Żadne z rozwiązań należące do tej rodziny nie zawiera cegiełek potrójnych. Dodatkowo, jeśli oznaczymy podprzestrzeń bazy złożoną ze stanów postaci $(a^\dagger a^\dagger)^n |0\rangle$ jako \mathcal{H}_0 , można pokazać, że operator V nie wyprowadza poza \mathcal{H}_0 . Z konstrukcji rozwiązań modelu $SU(3)$ wynika, że rozwiązania należące do innych rodzin niż f_0 są ortogonalne do \mathcal{H}_0 . Wobec tego, tylko pomiędzy rozwiązaniami z rodziny f_0 elementy macierzowe potencjału będą niezerowe. Wyrażenie na taki element macierzowy pomiędzy dwoma rozwiązaniami o energiach E_1 i E_2 możemy znaleźć analitycznie i zapisać w formie skończonych szeregów iloczynów wielomianów Laguerre'a dla obciążenia N_{cut} . Mi-

$$\begin{aligned}
 V_{E_\alpha, E_\beta}(N_{cut}) = \frac{1}{\sqrt{|E_\alpha|^2 |E_\beta|^2}} & \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{1}{2} N_{cut} \rfloor} \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(4)}{\Gamma(n+4)} \left(\frac{1}{12} (n+1)(n+2) \mathcal{L}_{n+2}^3(2E_\alpha) \mathcal{L}_n^3(2E_\beta) \right. \\
 & \left. + \frac{1}{6} (5 + 7n + 2n^2) \mathcal{L}_{n+1}^3(2E_\alpha) \mathcal{L}_n^3(2E_\beta) + \frac{1}{12} (10 + 12n + 3n^2) \mathcal{L}_n^3(2E_\alpha) \mathcal{L}_n^3(2E_\beta) \right) \quad (6.108)
 \end{aligned}$$

przy czym $|E_\alpha|$ i $|E_\beta|$ oznaczają odpowiednio normę stanu o energii E_α i E_β , natomiast energie E_α i E_β są wyznaczone przez warunek kwantyzacji $L^3_{[\frac{1}{2}N_{cut}]+1}(2E) = 0$. Wykorzystując znane wzory na poprawki do energii [63] możemy znaleźć przybliżoną zależność energii własnych od stałej sprzężenia. Przykładowo, dla najniższego stanu bozonowego oraz obciążenia $N_{cut} = 20$ otrzymujemy następujący wzór,

$$\begin{aligned} E_0(g) &= E_0 + g^2 V_{E_0, E_0} + g^4 \sum_{\alpha \neq 0} \frac{|V_{E_0, E_\alpha}|^2}{E_0 - E_\alpha} \\ &\quad + g^6 \left(\sum_{\substack{\alpha \neq 0 \\ \beta \neq 0}} \frac{V_{E_0, E_\alpha} V_{E_\alpha, E_\beta} V_{E_\beta, E_0}}{(E_0 - E_\alpha)(E_0 - E_\beta)} - V_{E_0, E_0} \sum_{\alpha \neq 0} \frac{|V_{E_0, E_\alpha}|^2}{(E_0 - E_\alpha)^2} \right) \\ &= 0.788363 + 53.6563g^2 - 986.556g^4 + 977.818g^6, \quad (6.109) \end{aligned}$$

przy czym zarówno $E_0(g)$ jak i V_{E_α, E_β} zależą od obciążenia. Porównanie tego wyniku z wyliczeniami numerycznymi przedstawione jest na wykresie 6.5. Wykreślono zarówno wyniki czysto numeryczne, jak i przewidywania formuły (3.31). Przybliżenie perturbacyjne dobrze odwzorowuje wyniki numeryczne dla stałej sprzężenia $g < 0.12$. Na uwagę zasługuje jednak fakt, że obszar zgodności zawiera region wartości stałej sprzężenia dla której wyniki numeryczne są zgodne z dokładnymi przewidywaniami analitycznymi wzoru (3.31). A zatem, zaczynając od obciążonego widma swobodnego, możliwe jest stosując rachunek perturbacyjny otrzymanie przewidywań dla widma dyskretnego, którego energie własne zbiegły się.

Na rysunku 6.6 przedstawiamy zależności $E_0(g)$ i $E_1(g)$ od obciążenia. $E_1(g)$ jest pierwszą wzbudzoną energią własną w rodzinie f_0 . Stosując prymitywne oszacowanie punktu dla którego przybliżenie perturbacyjne zgadza się z dokładnymi wynikami numerycznymi, jako punkt przecięcia krzywych $E_0(g)$ i $E_1(g)$, możemy odczytać przybliżenie szukanej energii własnej supersymetrycznego oscylatora anharmonicznego. Otrzymujemy, odpowiednio, 2.851 ± 0.001 i 5.117 ± 0.002 , gdzie podana niepewność jest niepewnością dopasowania, natomiast dużo większy błąd systematyczny jest trudny do oszacowania. Wartości te zgadzają się z dokładnością 2% z energiami przedstawionymi w tabeli 5.2.

6.6 Podsumowanie

W tym rozdziale przelaliśmy równanie własne Hamiltonianów SYMQM $H|E\rangle = E|E\rangle$ na relację rekurencyjną na współczynniki rozkładu stanu własnego $|E\rangle$ w bazie Focka. Wykazaliśmy, że dwie dyskretyzacje prowadzą do różnych rekurencji. Następnie, koncentrując się na dyskretyzacji Hamiltonianu, rozwiązaliśmy wyprowadzoną rekurencję i otrzymaliśmy warunki kwantyzacji energii oraz wzory na stany własne zarówno dla skończonego jak i nieskończonego obciążenia. Przedyskutowaliśmy wyniki takiego podejścia dla modeli z symetrią $SU(2)$, $SU(3)$ oraz ogólnie $SU(N)$ w sektorach bozonowych i fermionowych. W szczególności wyprowadziliśmy wszystkie wyniki numeryczne otrzymane w dyskretyzacji Hamiltonianu opisane w poprzednim rozdziale. Jak przykład dalszych zastosowań obliczyliśmy zależność widm od obciążenia w sektorze bozonowym oraz z $n_F = 1$ dla modelu $SU(10)$. Poprawność wyników pośred-

nio sprawdziliśmy porównując skalowanie otrzymanych energii własnych z przewidywaniem ogólnego wzoru zaproponowanego w rozdziale 5.4. Na zakończenie wykorzystaliśmy znalezione stany własne do skonstruowania supermultipletów w sektorach z $n_F = 0, 1, 2$ modelu $SU(3)$. Wykazaliśmy, w granicy nieskończonego obciążenia, pełne odtworzenie reprezentacji algebry supersymetrii. Dodatkowo, użyliśmy obciążonych bozonowych stanów własnych modelu $SU(3)$ do wyprowadzenia przybliżonego widma supersymetrycznego oscylatora anharmonicznego w sektorze bozonowym dla grupy symetrii $SU(3)$. Stosując tradycyjny rachunek zaburzeń zrekonstruowaliśmy dwie najniższe energie tego modelu z dokładnością 2%.

ROZDZIAŁ 7

DYSKUSJA

Chromodynamika kwantowa od długiego czasu stanowi wyzwanie dla fizyki teoretycznej. Zasadniczym problemem jest duża stała sprzężenia a więc i konieczność skonstruowania nieperturbacyjnych metod badania silnie sprzężonych teorii cechowania. Redukcja wymiarowa jest jedną z takich metod. Zaproponowana przez Bjorkena miała w założeniu pozwolić na zrozumienie mechanizmu uwięzienia kwarków. Niestety, zagadnienie to okazało się być dużo bardziej skomplikowanym. Niemniej jednak metoda ciągle jest wykorzystywana i pozwala otrzymać wiele wartościowych wyników. Kryterium indeksu Wittena w supersymetrycznych mechanikach kwantowych do badania supersymetrii w teorii pola można uznać za jedno z takich zastosowań.

W efekcie redukcji wymiarowej pierwotna kwantowa teoria pola jest zastępowana przez odpowiadający jej układ kwantowo-mechaniczny. Rozwiązanie tego ostatniego umożliwia otrzymanie przybliżonych wartości mas stanów obecnych w pełnej teorii. Warto podkreślić, że podejście zaproponowane przez Lüschera, w którym systematycznie wyciąłkujemy się mody o niezerowym pędzie, pozwala na otrzymanie wyników ilościowych. Porównanie ich z ekstrapolacją rezultatów otrzymanych w obliczeniach na sieciach, jedynych wiarygodnych wyników dostępnych dla silnie sprzężonej kwantowej teorii pola, wykazuje zadowalającą zgodność.

Celem niniejszej pracy była systematyczna dyskusja dynamiki modeli supersymetrycznych mechanik kwantowych. Analizę skoncentrowaliśmy na dwóch typach układów: supersymetrycznych mechanik kwantowych Yanga-Millsa, będących zredukowanymi do jednego punktu w przestrzeni kwantowymi teoriami pola Yanga-Millsa zdefiniowanymi w $D = 2$, oraz supersymetrycznym oscylatorze anharmonicznym.

Wspólnym punktem numerycznej oraz analitycznej metody zastosowanej w pracy było wykorzystanie bazy Focka w celu systematycznego opisu fizycznej przestrzeni Hilberta. Należy pamiętać, że pomimo iż dwuwymiarowe modele SYMQM są swobodne, konstrukcja ich rozwiązań jest nietrywialna z powodu więzu w postaci prawa Gaussa. Podobnie jak w pełnej teorii pola, warunek Gaussa jest narzucony na stany fizyczne. W efekcie redukcji wymiarowej lokalna symetria cechowania staje się globalną symetrią, a warunek więzu jest równoważny żądaniu aby stany fizyczne były singletami względem globalnych transformacji grupy $SU(N)$. Prawo Gaussa uwzględniliśmy konstruując stany bazowe niezmiennicze ze względu na transformacje $SU(N)$. W rozdziale 4 omówiliśmy rekurencyjny sposób budowy bazy poprzez wprowadzenie operatorów kreacji nazywanych cegiełkami oraz opisaliśmy ich postać we różnych sektorach modeli SYMQM. Dzięki takiemu zabiegowi wprowadzenie obciążenia nie złamało symetrii cechowania. W rozdziale 4 wskazaliśmy również charakterystyczne własności tak otrzymanej bazy; na przykład szczególne związki pomiędzy rozmiarami baz o zadanych liczbach kwantów bozonowych i fermionowych.

Komplikacje spowodowane prawem Gaussa widoczne są na przykład w rozdziale 6, gdzie omawialiśmy rozwiązania analityczne. Duża liczba niezależnych cegiełek, która rośnie wraz ze wzrostem grupy symetrii $SU(N)$ a także z wzrastającą liczbą kwantów fermionowych, powoduje znaczne skomplikowanie rozwiązań. Niemniej jednak udało się otrzymać wiele interesujących rezultatów. Większość z tych rozwiązań było inspirowanych wynikami numerycznymi, stąd też ścisły związek w tej pracy pomiędzy częścią numeryczną i analityczną.

Użyta metoda numeryczna polegała na obliczeniu macierzy rozpatrywanego operatora, np. Hamiltonianu, w bazie złożonej ze stanów zawierających mniej niż N_{cut} kwantów bozonowych.

Tak otrzymana macierz była następnie diagonalizowana numerycznie. Metoda taka bardzo dobrze sprawdza się w analizie układów kwantowo-mechanicznych o niedużej liczbie stopni swobody [64][65]. Faktycznie, w przypadku supersymetrycznego oscylatora anharmonicznego, którego widmo jest dyskretne, już dla małych obcięć $N_{cut} \sim 5$ zgodność przybliżonych energii własnych z wartościami w kontinuum była rzędu 1% (patrz podrozdział 5.1). Wspomnijmy, że proponowaną metodę można stosować do układów z oddziaływaniami zarówno bozonowymi jak i fermionowymi, jak również do układów o widmach ciągłych i dyskretnych [54].

Uzupełnieniem dla rekurencyjnej budowy bazy Focka było usprawnienie obliczeń poprzez rozszerzenie na wszystkie sektory fermionowe algorytmu rekurencyjnego opisanego pokrótce w podrozdziale 4.2. Dzięki temu możliwe było efektywne obliczanie elementów macierzowych w bazach badanych modeli. Ograniczeniem metody numerycznej przestał być problem otrzymania macierzy badanych operatorów, natomiast stała się nim diagonalizacja dużych macierzy. Jedną z propozycji ominięcia tego zagadnienia mogłoby być wykorzystanie dodatkowych symetrii obecnych w analizowanym układzie. W szczególności, Hamiltoniany wyżej wymiarowych modeli SYMQM są niezmiennicze ze względu na symetrię obrotową $SO(d)$. Algorytm rekurencyjny może być uogólniony w sposób pozwalający otrzymać widma w kanałach o określonym kręcie [51]. Zmniejsza to w znaczący sposób wielkość macierzy do diagonalizowania.

Alternatywnym podejściem numerycznym do modeli SYMQM jest metoda Monte Carlo. Pozwala osiągnąć bardzo interesujące wyniki dla grup symetrii o stosunkowo dużych N [66][67][68][69][70]. W przypadku modeli $D = 10$, ograniczeniem tej metody jest jednak problem wyznacznika fermionowego, który uniemożliwia probabilistyczną interpretację całki statystycznej. Metoda obciętej przestrzeni Focka obchodzi tę trudność traktując bozonowe i fermionowe stopnie swobody w identyczny sposób. Dodatkowo, metoda Monte Carlo operuje wyłącznie na wielkościach średnich. Nie pozwala zatem łatwo otrzymać dokładnej postaci funkcji falowej dla dowolnego stanu. Wydaje się zatem, że wybrana metoda numeryczna bardzo dobrze nadaje się do analizowanego problemu.

Dodatkowym atutem metody obciętej bazy Focka jest możliwość oszacowania niepewności otrzymanych rezultatów dzięki szybkiej zbieżności wartości własnych odpowiadających stanom zlokalizowanym. Potwierdza to analiza zbieżności otrzymanych energii własnych dla supersymetrycznego oscylatora anharmonicznego. A zatem wartości własne otrzymane dla wystarczająco dużego obciążenia odpowiadają fizycznym energiom tego układu w granicy nieskończonego obciążenia. W podrozdziale 5.2 zaprezentowaliśmy dokładne wartości liczbowe kilku najniższych energii własnych we wszystkich sektorach fermionowych supersymetrycznego oscylatora anharmonicznego dla grupy $SU(3)$. Analogiczna dyskusja dla modeli SYMQM jest trudniejsza, ponieważ ich widma są ciągłe. W rezultacie zależność energii własnych od obciążenia dla tych układów jest wolna. Potwierdzają to wykresy zamieszczone w podrozdziale 5.1 dla modeli SYMQM z różnymi grupami symetrii ($SU(2), SU(3), SU(4), SU(5)$) oraz różnymi sektorami fermionowymi ($n_F = 1, 2, 3, 4$ dla grupy $SU(3)$). A zatem, nie jest możliwe bezpośrednio powiązanie wyników otrzymanych dla skończonego obciążenia z rezultatami w granicy kontinuum. Natomiast, z samego faktu wolnej zbieżności możemy stwierdzić, że stany odpowiadające danym energiom własnym są niezlokalizowane.

Zaletą redukcji wymiarowej jest dokładne zachowanie symetrii badanego układu. W granicy kontinuum oprócz symetrii cechowania oczekujemy odtworzenia supersymetrii, parzystości, czy symetrii skalowania. Okazuje się jednak, że poprzez odpowiedni dobór obcięcia możliwe jest zachowanie niektórych symetrii nawet dla skończonej wartości N_{cut} . Przykładowo, jeśli N_{cut} we wszystkich sektorach jest takie samo, widmo posiada degenerację związaną z symetrią cząstka-dziura.

W tym kontekście przestudiowaliśmy widmo supersymetrycznego oscylatora anharmonicznego. Jego widmo jest dyskretne, a więc jego energie własne są szybko zbieżne przy wzroście obcięcia. A zatem, dla wartości własnych, które są już zgodne z rezultatami fizycznymi, odtworzone są wszystkie symetrie. Faktycznie, poprzez analizę ułamków supersymetrycznych przekonaaliśmy się, że zdegenerowane pary energii faktycznie odpowiadają degeneracji supersymetrycznej. Z kolei dla modeli SYMQM supersymetria nie jest odtwarzana dla żadnego skończonego obcięcia. W związku z tym, w podrozdziale 5.3, zaproponowaliśmy inny sposób wprowadzenia obcięcia, który gwarantuje otrzymanie degeneracji supersymetrycznej w widmie dla skończonego obcięcia. Operator Hamiltona wyliczany jest jako kwadrat *obciętych* macierzy superładunków. Dzięki temu, z konstrukcji, jego widmo jest zdegenerowane, a pary energii powiązane są działaniem superładunków. W granicy nieskończonego obcięcia rezultaty otrzymane dzięki takiej procedurze pokrywają się z wynikami otrzymanymi poprzednią metodą.

Równoległe do wyników numerycznych przedstawiliśmy w rozdziale 6 szereg rozwiązań analitycznych. W celu znalezienia rozwiązań dwuwymiarowych modeli SYMQM, przetłumaczyliśmy problem własny Hamiltonianu dla różnych grup symetrii $SU(N)$ na relacje rekurencyjne na współczynniki rozwinięcia stanów własnych w bazie Focka. Otrzymane relacje rekurencyjne okazały się być układem wielu sprzężonych rekurencji na wielomiany Laguerre'a. Udało nam się je rozwiązać i zrozumieć problem mieszania. Dzięki temu otrzymaliśmy zamknięte wzory na widma modeli SYMQM z różnymi grupami symetrii $SU(N)$ we wszystkich sektorach fermionowych. Najważniejszym, i zaskakującym wnioskiem, jest obserwacja, że dla danego obcięcia N_{cut} i dla danej grupy symetrii $SU(N)$ widmo zależy wyłącznie od liczb N_{cut} i N oraz liczb n_B^{α} równych liczbie bozonowych operatorów kreacji zawartych w cegiełkach fermionowych dla danego modelu.

Analizując wyrażenia na stany własne wykazaliśmy szereg własności zaproponowanych rozwiązań. Pokazaliśmy, że zarówno dla skończonego obcięcia jak i w granicy kontinuum stanowią zupełny i ortogonalny zbiór funkcji. Dodatkowo, sprawdziliśmy, że możliwe jest narzucenie normalizacji zgodnej z normalizacją fal płaskich. Innymi słowy, potwierdziliśmy, że znaleziony zbiór rozwiązań stanowi uogólnienie rozwiązań Claudsona-Halperna dla modeli z symetrami $SU(N > 2)$ oraz jest poprawny we wszystkich sektorach. Warto podkreślić, że rozwiązania modeli SYMQM były już analizowane w pracach Trzetrzelewskiego [29] i Samuela [71], jednak znalezione przez nich rozwiązania nie były jednak kompletne. Wydaje się, że zaproponowane przez nas wyrażenia są lepiej przystosowane do dalszej analizy.

Interesującą obserwacją jest podział wyprowadzonych rozwiązań na rozłączne rodziny różniące się maksymalną liczbą cegiełek. Zauważyliśmy, że w sektorze bozonowym wszystkich modeli najniższą energię posiadają najprostsze rozwiązania należące do rodziny f_0 . Na uwagę zasługuje fakt, że jest to prawdziwe zarówno w przypadku swobodnym jak i z oddziaływaniem.

Cechą charakterystyczną tych rozwiązań jest fakt, że zawierają jedynie cegiełki podwójne, a zatem zależą tylko od jednej zmiennej radialnej, $\text{tr}(x^2)$. W celu zidentyfikowania drugiej zmiennej 'radialnej' dla grupy $SU(3)$ możliwe jest wprowadzenie dodatkowego operatora $\text{tr}(p^3)$. Operator ten komutuje z Hamiltonianem, a więc możliwe jest równoczesne zdiagonalizowanie operatorów $\text{tr}(p^2)$ i $\text{tr}(p^3)$, nadając indeksowi κ numerującemu wyprowadzone przez nas stany własne znaczenie fizyczne. Wydaje się, że kontynuując taką analizę możliwe będzie znalezienie ogólnego zbioru zmiennych 'radialnych' dla dowolnej grupy $SU(N)$. Może to być pomocne w analizie wyżej wymiarowych modeli, gdyż pozwoliłoby to poszukiwać ich funkcji falowych zależących od najwygodniejszych zmiennych.

Na techniczną uwagę zasługuje fakt, że otrzymane przez nas wyrażenia zarówno na stany własne jak i widma modeli SYMQM są poprawne dla skończonego i nieskończonego obciążenia. Dzięki temu, w każdym podrozdziale, mogliśmy sprawdzić poprawność wyników analitycznych konfrontując je z odpowiednimi wynikami numerycznymi przedstawionymi w rozdziale 5. W szczególności, w podrozdziale 6.5.1 zrekonstruowaliśmy supermultiplety w modelu SYMQM z symetrią $SU(3)$ znalezione numerycznie w dyskretyzacji superładunków. Oszacowanie zredukowanego indeksu Wittena dla modelu SYMQM z symetrią $SU(3)$ może być podane jako drugi przykład nietrywialnego porównania wyników numerycznych i analitycznych. Na zakończenie rozdziału 5 przedstawiliśmy rezultat numeryczny równy 0, który następnie potwierdziliśmy analitycznie w podrozdziale 6.3.3.2. Dla supersymetrycznego oscylatora anharmonicznego z symetrią $SU(3)$ otrzymaliśmy -2 , w zgodności z naszymi wcześniejszymi wnioskami o istnieniu dwóch, powiązanych symetrią cząstka-dziura, próżni supersymetrycznych w sektorach z $n_F = 3$ i $n_F = 5$.

Interesującym rezultatem numerycznym opisanym w rozdziale 5 było prawo skalowania energii dla modeli SYMQM z dowolną grupą symetrii $SU(N)$, które zaproponowaliśmy jako uogólnienie wykazanej wcześniej [53] analogicznej relacji dla grupy $SU(2)$. Prawo skalowania dla modeli $SU(2)$ okazało się zaskakująco uniwersalne. Zostało wyprowadzone przez Trzetrzelewskiego dla jednowymiarowego operatora pędu [53] oraz dwuwymiarowego modelu SYMQM z grupą $SU(2)$, natomiast Kotański [60] wykazał, że stosuje się również w modelu $D = 4$ SYMQM z grupą $SU(2)$. Przypuszczamy, że postulowane prawo skalowania także będzie prawdziwe dla wyżej wymiarowych układów z odpowiednimi grupami symetrii.

Jednym z ciekawszych zastosowań wyprowadzonych rozwiązań było obliczenie przybliżonych bozonowych energii własnych supersymetrycznego oscylatora anharmonicznego. Pokazaliśmy, że stosując standardowy rachunek zaburzeń oraz stosując *obcięte* swobodne stany własne dla $g = 0$ możliwe było znalezienie przybliżonej zależności od g dla małych wartości stałej sprzężenia. Zaskakująco, okazało się, że znaleziona zależność pozwala otrzymać przybliżone energie własne, które pokrywają się z wynikami z kontinuum. Wzbudza to duże nadzieje, że podobna analiza dla wyżej wymiarowych modeli SYMQM jak na przykład te w $D = 10$ pozwoli otrzymać przybliżone funkcje falowe tych modeli.

Wyprowadzone dla dowolnej grupy $SU(N)$ i w sektorze o dowolnym n_F relacje rekurencyjne przedstawione w niniejszej pracy mogą zostać wykorzystane do badania granicy dużego N . Jak pokazaliśmy w rozdziale 2 granica taka jest ważna z fizycznego punktu widzenia, jeśli badane modele są interpretowane jako opis dynamiki supermembran. Choć dwuwymia-

rowe modele SYMQM nie mogą być bezpośrednio powiązane z membranami, stanowią dobry model testowy do studiowania granicy $N \rightarrow \infty$. Powyższy problem był analizowany przez Trzetrzelewskiego [72], który zaproponował fizyczną interpretację granicy dużego N rozwiązań swobodnych, jako opis dynamiki 'kolców' (ang. spikes) będących deformacjami membrany w postaci bardzo cienkich i długich cylindrów. Wykorzystując podejście poprzez relacje rekurencyjne możliwe jest rozszerzenie takiej analizy na sektory fermionowe.

Podsumowując, podejście obciętej bazy Focka do modeli dwuwymiarowych SYMQM pozwoliło otrzymać wiele ciekawych wyników, zarówno analitycznych jak i numerycznych. W szczególności udało się znaleźć nietrywialne rozwiązania modelu z symetrią $SU(3)$ i potwierdzić ich poprawność porównując z rezultatami numerycznymi. Mamy nadzieję, że kontynuowanie i rozszerzenie takiego dwutorowego podejścia może być przydatne w analizie wyżej wymiarowych i fizycznie bardziej interesujących modeli supersymetrycznych mechanik kwantowych Yanga-Millsa. W zasięgu opisanej metody mogą być między innymi model w $D = 4$ z symetrią $SU(3)$ czy model w $D = 10$ z symetrią $SU(2)$.

PODZIĘKOWANIA

Niniejszym chciałbym podziękować mojemu promotorowi, prof. Jackowi Woškowi, za wprowadzenie mnie do świata nauki.

Dziękuję mojej Rodzinie za nieprzerwaną pomoc i wsparcie.

Dziękuję Bratu za pokazanie drugiej strony studiowania.

Na koniec dziękuję moim przyjaciołom z Instytutu Fizyki; Mariuszowi i Przemkowi, za niezliczone wspólne obiady, dyskusje i sprzeczki na wszystkie możliwe tematy w ciągu studiów i doktoratu.

DODATEK A

UOGÓLNIONE WIELOMIANY LAGUERRE'A

W obecnym podrozdziale przypominamy podstawowe własności wielomianów Laguerre'a. Wielomiany Laguerre'a $\mathcal{L}_n^\alpha(x)$ są zdefiniowane jako rozwiązania równania różniczkowego [73][74][75]

$$xy'' + (\alpha + 1 - x)y' + ny = 0, \quad (\text{A.1})$$

oraz warunku ortogonalności

$$\int_0^\infty \mathcal{L}_m^\alpha(x) \mathcal{L}_n^\alpha(x) x^\alpha e^{-x} dx = \delta_{mn}. \quad (\text{A.2})$$

Spełniają trójczłonową relację rekurencyjną,

$$(n + \alpha) \mathcal{L}_{n-1}^\alpha(x) - (2n + \alpha + 1 - x) \mathcal{L}_n^\alpha(x) + (n + 1) \mathcal{L}_{n+1}^\alpha(x) = 0. \quad (\text{A.3})$$

Częściej potrzebna okaże się rekurencja dla przeskalowanych wielomianów Laguerre'a $L_n^\alpha(x)$, nazywanych czasami w literaturze wielomianami Sonine'a, które są zdefiniowane jako

$$L_n^\alpha(x) \equiv \frac{\mathcal{L}_n^\alpha(x)}{\Gamma(n + \alpha + 1)}. \quad (\text{A.4})$$

Relacja rekurencyjna (A.3) przyjmuje dla nich postać,

$$L_{n-1}^\alpha(x) - (2n + \alpha + 1 - x) L_n^\alpha(x) + (n + 1)(n + \alpha + 1) L_{n+1}^\alpha(x) = 0. \quad (\text{A.5})$$

Równanie (A.5) będziemy nazywać *równaniem* dla uogólnionych wielomianów Laguerre'a, gdy jest zapisane dla *konkretnej* wartości indeksu n . Przeciwnie, jeśli (A.5) zapisane jest dla *dowolnej* wartości indeksu n , tzn. rozumiemy przez nie zbiór równań dla uogólnionych wielomianów Laguerre'a, będziemy nazywać ją *relacją rekurencyjną* dla uogólnionych wielomianów Laguerre'a. Poprzez *obciętą* relację rekurencyjną dla wielomianów Laguerre'a rzędu κ , będziemy rozumieć zbiór równań na wielomiany Laguerre'a z $\kappa + 1$ niewiadomymi oznaczonymi przez $a_0(x)$, $a_1(x)$, \dots , $a_\kappa(x)$.

Dla uproszczenia zapisu wprowadzamy następującą, skróconą, notację dla trójczłonowej relacji rekurencyjnej (A.5),

$$\mathbf{S}_j^\alpha(x) \cdot \mathbf{a}_j(x) \equiv a_{j-1}(x) - (2j + \alpha + 1 - x)a_j(x) + (j + 1)(j + \alpha + 1)a_{j+1}(x),$$

gdzie $\mathbf{S}_j^\alpha(x)$ oraz $\mathbf{a}_j(x)$ oznaczają 'wektory',

$$\mathbf{S}_j^\alpha(x) \equiv (1, \quad -(2j + \alpha + 1 - x), \quad (j + 1)(j + \alpha + 1)), \quad \mathbf{a}_j(x) \equiv \begin{pmatrix} a_{j-1}(x) \\ a_j(x) \\ a_{j+1}(x) \end{pmatrix}.$$

Podczas dyskusji supermultipletów w podrozdziale 6.5.1 przydatne okażą się następujące, znane relacje rekurencyjne dla wielomianów Laguerre'a [74]:

$$\mathcal{L}_n^\alpha(x) = \mathcal{L}_n^{\alpha+1}(x) - \mathcal{L}_{n-1}^{\alpha+1}(x), \quad (\text{A.6})$$

$$n \mathcal{L}_n^\alpha(x) = (n + \alpha) \mathcal{L}_{n-1}^\alpha(x) - x \mathcal{L}_{n-1}^{\alpha+1}(x), \quad (\text{A.7})$$

$$n \mathcal{L}_n^{\alpha+1}(x) = (n - x) \mathcal{L}_{n-1}^{\alpha+1}(x) + (n + \alpha) \mathcal{L}_{n-1}^\alpha(x). \quad (\text{A.8})$$

Wykorzystując powyższe rekurencje otrzymujemy kolejną, łączącą wielomiany o trzech różnych indeksach

$$x\mathcal{L}_{n-1}^{\alpha+2}(x) + (n + \alpha + a)\mathcal{L}_n^\alpha(x) - (\alpha + 1)\mathcal{L}_n^{\alpha+1}(x) = 0 \quad (\text{A.9})$$

Oprócz relacji rekurencyjnych wykorzystamy również wzory na szereg iloczynów wielomianów Laguerre'a [74],

$$\sum_{m=0}^n \frac{m!}{\Gamma(m + \alpha + 1)} \mathcal{L}_m^\alpha(x) \mathcal{L}_m^\alpha(y) = \frac{(n + 1)!}{\Gamma(n + \alpha + 1)} \frac{1}{xy} \left[\mathcal{L}_n^\alpha(x) \mathcal{L}_{n+1}^\alpha(y) - \mathcal{L}_{n+1}^\alpha(x) \mathcal{L}_n^\alpha(y) \right], \quad (\text{A.10})$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{m!}{\Gamma(m + \alpha + 1)} \mathcal{L}_m^\alpha(x) \mathcal{L}_m^\alpha(y) z^m = (1 - z)^{-1} \exp\left(-z \frac{x + y}{1 - z}\right) (xyz)^{-\alpha/2} I_\alpha\left(\frac{2\sqrt{xyz}}{1 - z}\right) \quad (\text{A.11})$$

DODATEK B

WYPROWADZENIE RELACJI REKURENCYJNYCH

W tym dodatku wyprowadzamy relacje rekurencyjne odpowiadające problemowi własnemu Hamiltonianu SYMQM dla następujących przypadków:

- modelu z symetrią $SU(3)$ w sektorze bozonowym
- modelu z symetrią $SU(3)$ w sektorze fermionowym
- modelu z symetrią $SU(N)$ w sektorze bozonowym
- modelu z symetrią $SU(N)$ w sektorze fermionowym

B.1 Model swobodny z symetrią $SU(3)$ - sektor bozonowy

Hamiltonian dla modelu z symetrią $SU(3)$ jest dany w języku macierzowych operatorów kreacji i anihilacji następującym wzorem,

$$H = (a^\dagger a) + 2 - \frac{1}{2}(aa) - \frac{1}{2}(a^\dagger a^\dagger). \quad (\text{B.1})$$

Dowolny stan rozkładamy w bazie z nieznanymi współczynnikami $a_{i,j}$,

$$|E\rangle = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{i,j} |i,j\rangle = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{i,j} (a^\dagger a^\dagger)^i (a^\dagger a^\dagger a^\dagger)^j |0\rangle. \quad (\text{B.2})$$

Rozpatrując działanie poszczególnych wyrazów H na stany bazowe, łatwo można się przekonać, że

$$(a^\dagger a)(a^\dagger a^\dagger)^i (a^\dagger a^\dagger a^\dagger)^j |0\rangle = (i + \frac{3}{2}j)(a^\dagger a^\dagger)^i (a^\dagger a^\dagger a^\dagger)^j |0\rangle, \quad (\text{B.3})$$

$$(a^\dagger a^\dagger)(a^\dagger a^\dagger)^i (a^\dagger a^\dagger a^\dagger)^j |0\rangle = (a^\dagger a^\dagger)^{i+1} (a^\dagger a^\dagger a^\dagger)^j |0\rangle, \quad (\text{B.4})$$

Aby wyliczyć działanie operatora (aa) potrzeba nieco więcej pracy. Niezbędne jest wyliczenie następujących komutatorów:

$$[(aa), (a^\dagger a^\dagger)^i] = i(i+3)(a^\dagger a^\dagger)^{i-1} + 2i(a^\dagger a^\dagger)^{i-1}(a^\dagger a), \quad (\text{B.5})$$

$$[(aa), (a^\dagger a^\dagger a^\dagger)^i] = \frac{3}{8}i(i-1)(a^\dagger a^\dagger a^\dagger)^{i-2}(a^\dagger a^\dagger)^2 + 3i(a^\dagger a^\dagger a^\dagger)^{i-1}(a^\dagger a^\dagger a) \quad (\text{B.6})$$

oraz

$$[(a^\dagger a^\dagger a), (a^\dagger a^\dagger a^\dagger)^k] = \frac{1}{4}k(a^\dagger a^\dagger a^\dagger)^{k-1}(a^\dagger a^\dagger)^2. \quad (\text{B.7})$$

Zbierając powyższe wyniki otrzymujemy

$$(aa)(a^\dagger a^\dagger)^i (a^\dagger a^\dagger a^\dagger)^j |0\rangle = i(i+3j+3)(a^\dagger a^\dagger)^{i-1}(a^\dagger a^\dagger a^\dagger)^j |0\rangle + \frac{3}{8}j(j-1)(a^\dagger a^\dagger)^{i+2}(a^\dagger a^\dagger a^\dagger)^{j-2} |0\rangle. \quad (\text{B.8})$$

Tak więc, działanie operatora Hamiltona na dowolny stan z bazy dane jest wzorem

$$H|i, j\rangle = \left(i + \frac{3}{2}j + 2\right)|i, j\rangle - \frac{1}{2}|i + 1, j\rangle - \frac{1}{2}i(i + 3j + 3)|i - 1, j\rangle - \frac{3}{16}j(j - 1)|i + 2, j - 2\rangle. \quad (\text{B.9})$$

Żądając, aby $|E\rangle$ był stanem własnym operatora H do wartości własnej E , zbierając współczynniki stojące przy danych wartościach potęg operatorów kreacji ($a^\dagger a^\dagger$) oraz ($a^\dagger a^\dagger a^\dagger$) otrzymujemy relację rekurencyjną na współczynniki $a_{i,j}$,

$$a_{i-1,j} - (2i + 3j + 4 - 2E)a_{i,j} + (i + 1)(i + 3j + 4)a_{i+1,j} + \frac{3}{8}(j + 1)(j + 2)a_{i-2,j+2} = 0. \quad (\text{B.10})$$

B.2 Model swobodny z symetrią $SU(3)$ - sektory fermionowe

W tym podrozdziale uogólnimy relację rekurencyjną wyprowadzoną w poprzednim podrozdziale dla sektora bozonowego do przypadku dowolnego sektora fermionowego modelu z symetrią $SU(3)$.

B.2.1 Wzór ogólny

Baza modelu z symetrią $SU(3)$ w sektorze z n_F kwantami fermionowymi złożona jest z następujących stanów,

$$|j, k, \alpha\rangle \equiv C^\dagger(n_B^\alpha, n_F, \alpha) (a^\dagger a^\dagger)^j (a^\dagger a^\dagger a^\dagger)^k |0\rangle, \quad (\text{B.11})$$

gdzie $C^\dagger(n_B^\alpha, n_F, \alpha)$ oznacza α -tą złożoną cegiełkę fermionową zawierającą n_F fermionowych operatorów kreacji. Indeks α przebiega zakres od 1 do całkowitej liczby złożonych cegiełek fermionowych o n_F fermionowych operatorach kreacji, oznaczoną przez d^{n_F} . Tak więc, ogólny stan z tego sektora może być rozłożony w następujący sposób,

$$|E\rangle = \sum_{\alpha=1}^{d^{n_F}} \sum_{2j+3k \leq N_{cut} - n_B^\alpha} a_{j,k}^\alpha C^\dagger(n_B^\alpha, n_F, \alpha) (a^\dagger a^\dagger)^j (a^\dagger a^\dagger a^\dagger)^k |0\rangle. \quad (\text{B.12})$$

Równanie własne dla operatora Hamiltona do energii własnej E ma postać

$$(H - E\mathbb{1})|E\rangle = 0. \quad (\text{B.13})$$

Przepisując je za pomocą $a_{j,k}^\alpha$ otrzymujemy

$$(H - E\mathbb{1})|E\rangle = \sum_{\alpha=1}^{d^{n_F}} \sum_{2j+3k \leq N_{cut} - n_B^\alpha} a_{j,k}^\alpha \left([H, C^\dagger(n_B^\alpha, n_F, \alpha)] + C^\dagger(n_B^\alpha, n_F, \alpha) (H - E) \right) |j, k\rangle = 0. \quad (\text{B.14})$$

Komutator operatora Hamiltona ze złożonymi cegiełkami fermionowymi wynosi

$$\begin{aligned} [H, C^\dagger(n_B^\alpha, n_F, \alpha)] &= [(a^\dagger a) - \frac{1}{2}(aa), C^\dagger(n_B^\alpha, n_F, \alpha)] = \\ &= \frac{1}{2}n_B^\alpha C^\dagger(n_B^\alpha, n_F, \alpha) - \frac{1}{2}[(aa), C^\dagger(n_B^\alpha, n_F, \alpha)] \end{aligned}$$

Otrzymujemy

$$\sum_{\alpha=1}^{d^{n_F}} \sum_{2j+3k \leq N_{cut} - n_B^\alpha} a_{j,k}^\alpha \left(C^\dagger(n_B^\alpha, n_F, \alpha) \left(H + \frac{1}{2}n_B^\alpha \right) - [(aa), C^\dagger(n_B^\alpha, n_F, \alpha)] \right) |j, k\rangle = 0. \quad (\text{B.15})$$

Działanie operatora Hamiltona na bozonowe stany bazy zostało wyliczone w poprzednim podrozdziale (B.9). Pozostało zatem jeszcze wyliczenie komutatorów $[(aa), C^\dagger(n_B^\alpha, n_F, \alpha)]$. Dla poszczególnych cegiełek $C^\dagger(n_B^\alpha, n_F, \alpha)$ komutator taki będzie równy sumie n_B^α wyrazów, każdy z nich równy cegiełce $C^\dagger(n_B^\alpha, n_F, \alpha)$ z jednym z bozonowych operatorów kreacji zamienionym na bozonowy operator anihilacji. Zapiszmy je jako G_α^t , gdzie indeks t biegnie od 1 do n_B^α ,

$$[(aa), C^\dagger(n_B^\alpha, n_F, \alpha)] = \sum_{t=1}^{n_B^\alpha} G_\alpha^t. \quad (\text{B.16})$$

Chcąc pozbyć się operatorów anihilacji zawartych w operatorach G_α^t , chcemy przesunąć je na prawo poprzez operatory kreacji $(a^\dagger a^\dagger)^j (a^\dagger a^\dagger a^\dagger)^k$ tak aby anihilowały próżnię Focka. Tak więc,

$$\forall_t [G_\alpha^t, (a^\dagger a^\dagger)^j (a^\dagger a^\dagger a^\dagger)^k] = (a^\dagger a^\dagger)^j [G_\alpha^t, (a^\dagger a^\dagger a^\dagger)^k] + [G_\alpha^t, (a^\dagger a^\dagger)^j] (a^\dagger a^\dagger a^\dagger)^k \quad (\text{B.17})$$

G_α^t zawiera dokładnie jeden bozonowy operator anihilacji, a więc możemy łatwo uprościć powyższe komutatory,

$$\forall_t [G_\alpha^t, (a^\dagger a^\dagger)^j] = j (a^\dagger a^\dagger)^{j-1} [G_\alpha^t, (a^\dagger a^\dagger)], \quad (\text{B.18})$$

$$\forall_t [G_\alpha^t, (a^\dagger a^\dagger a^\dagger)^k] = k (a^\dagger a^\dagger a^\dagger)^{k-1} [G_\alpha^t, (a^\dagger a^\dagger a^\dagger)]. \quad (\text{B.19})$$

Wynika z tego,

$$\begin{aligned} \forall_t [G_\alpha^t, (a^\dagger a^\dagger)^j (a^\dagger a^\dagger a^\dagger)^k] &= k [G_\alpha^t, (a^\dagger a^\dagger a^\dagger)] (a^\dagger a^\dagger)^j (a^\dagger a^\dagger a^\dagger)^{k-1} \\ &+ j [G_\alpha^t, (a^\dagger a^\dagger)] (a^\dagger a^\dagger)^{j-1} (a^\dagger a^\dagger a^\dagger)^k \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

W końcu, zauważając, że $[G_\alpha^t, (a^\dagger a^\dagger)]$ jest po prostu równe cegiełce $C^\dagger(n_B^\alpha, n_F, \alpha)$, możemy napisać

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha=1}^{d^{n_F}} \sum_{2j+3k \leq N_{cut} - n_B^\alpha} C^\dagger(n_B^\alpha, n_F, \alpha) \left(a_{j-1,k}^\alpha - (2j+3k+4+n_B^\alpha-2E) a_{j,k}^\alpha \right. \\ & \quad \left. + (j+1)(j+3k+4+n_B^\alpha) a_{j+1,k}^\alpha + \frac{3}{8}(k+1)(k+2) a_{j-2,k+2}^\alpha \right) |j, k\rangle \\ & \quad + \sum_{\alpha=1}^{d^{n_F}} \sum_{t=1}^{n_B^\alpha} \sum_{2j+3k \leq N_{cut} - n_B^\alpha} a_{j,k}^\alpha \left(k [G_\alpha^t, (a^\dagger a^\dagger a^\dagger)] |j, k-1\rangle + (a^\dagger a^\dagger)^j (a^\dagger a^\dagger a^\dagger)^k G_\alpha^t |0\rangle \right) = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

B.2.2 Sektor z $n_F = 1$

Obecnie opiszemy zastosowanie ogólnej relacji rekurencyjnej wyprowadzonej powyżej do sektora z $n_F = 1$. W tym sektorze istnieją następujące cegiełki fermionowe,

$$(f^\dagger a^\dagger) \equiv F_1(1), \quad (f^\dagger a^\dagger a^\dagger) \equiv F_2(1). \quad (\text{B.22})$$

A zatem,

$$[(aa), (f^\dagger a^\dagger)] = (f^\dagger a) \equiv G_1^1, \quad [(aa), (f^\dagger a^\dagger a^\dagger)] = (f^\dagger a^\dagger a) + (f^\dagger a a^\dagger) \equiv G_2^1 + G_2^2. \quad (\text{B.23})$$

Wobec czego,

$$[G_1^1, (a^\dagger a^\dagger)^j (a^\dagger a^\dagger a^\dagger)^k] = \frac{3k}{2} (f^\dagger a^\dagger a^\dagger) (a^\dagger a^\dagger)^j (a^\dagger a^\dagger a^\dagger)^{k-1} + j (f^\dagger a^\dagger) (a^\dagger a^\dagger)^{j-1} (a^\dagger a^\dagger a^\dagger)^k, \quad (\text{B.24})$$

$$\begin{aligned} [G_2^1, (a^\dagger a^\dagger)^j (a^\dagger a^\dagger a^\dagger)^k] &= \frac{k}{4} (f^\dagger a^\dagger) (a^\dagger a^\dagger)^{j+1} (a^\dagger a^\dagger a^\dagger)^{k-1} + j (f^\dagger a^\dagger a^\dagger) (a^\dagger a^\dagger)^{j-1} (a^\dagger a^\dagger a^\dagger)^k \\ &= [G_2^2, (a^\dagger a^\dagger)^j (a^\dagger a^\dagger a^\dagger)^k] \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

Dzięki temu możemy zapisać relację rekurencyjną w sektorze z $n_F = 1$ w postaci,

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_j^{3k+4} \cdot \mathbf{a}_{j,k}^1 + \frac{3}{8}(k+1)(k+2) a_{j-2,k+2}^1 + \frac{k+1}{2} a_{j-1,k+1}^2 &= 0, \\ \mathbf{S}_j^{3k+5} \cdot \mathbf{a}_{j,k}^2 + \frac{3}{8}(k+1)(k+2) a_{j-2,k+2}^2 + \frac{3(k+1)}{2} a_{j,k+1}^1 &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

B.3 Model swobodny z symetrią $SU(N)$ - sektor bozonowy

W tym podrozdziale uogólniamy bozonową relację rekurencyjną wyprowadzoną dla modelu z symetrią $SU(3)$ do modelu z symetrią $SU(N)$ dla dowolnego, skończonego N . Przy wyprowadzaniu tej relacji nie stosujemy twierdzenia Cayleya-Hamiltona. Relacja rekurencyjna będzie więc zawierać operatory z potęgami operatorów kreacji większymi od N . Redukcję

można wykonać na końcowej relacji rekurencyjnej. Jeśli chcemy analizować granicę dużego N , twierdzenie Cayleya-Hamiltona nie będzie się stosować.

Ogólny operator Hamiltona dla układów SYMQM ma postać

$$H = (a^\dagger a) + \frac{N^2 - 1}{4} - \frac{1}{2}(a^\dagger a^\dagger) - \frac{1}{2}(aa). \quad (\text{B.27})$$

Stany bazy są teraz numerowane $N - 1$ liczbami, i mogą być otrzymane poprzez działanie elementarnych cegiełek bozonowych na stan próżni Focka według wzoru

$$|p_2, p_3, p_4, \dots, p_N\rangle = \left(\prod_{k=2}^N (a^\dagger)^{p_k} \right) |0\rangle. \quad (\text{B.28})$$

Dowolny stan może być rozpisany w obciętej bazie przy użyciu współczynników a_{p_2, p_3, \dots, p_N} jako

$$|E\rangle = \sum_{2p_2+3p_3+\dots+Np_N \leq N_{cut}} a_{p_2, p_3, \dots, p_N} |p_2, p_3, \dots, p_N\rangle. \quad (\text{B.29})$$

Postępując analogicznie do przypadku modelu z symetrią $SU(3)$, aby otrzymać relacje rekurencyjną na współczynniki a_{p_2, p_3, \dots, p_N} musimy znaleźć działanie operatora Hamiltona na dowolny stan z bazy. Dla dwóch prostszych operatorów zawartych w operatorze Hamiltona mamy

$$(a^\dagger a) |p_2, p_3, p_4, \dots, p_N\rangle = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=2}^N k p_k \right) |p_2, p_3, p_4, \dots, p_N\rangle, \quad (\text{B.30})$$

$$(a^\dagger a^\dagger) |p_2, p_3, p_4, \dots, p_N\rangle = |p_2 + 1, p_3, p_4, \dots, p_N\rangle. \quad (\text{B.31})$$

Wyliczenie działania operatora (aa) jest bardziej skomplikowane. Celem będzie przeniesienie operatora (aa) poprzez wszystkie operatory kreacji zawarte w danym stanie bazy, aż (aa) będzie działać na próżnię Focka. Tak więc

$$(aa) |p_2, p_3, p_4, \dots, p_N\rangle = \sum_{j=2}^N \left(\prod_{i=2}^{j-1} (a^\dagger)^{p_i} \right) \left[(aa), (a^\dagger)^{p_j} \right] \left(\prod_{i=j+1}^N (a^\dagger)^{p_i} \right) |0\rangle \quad (\text{B.32})$$

W kolejnych krokach należy wyliczyć następujące komutatory

$$\begin{aligned} \left[(aa), (a^\dagger)^m \right] &= \frac{m^2}{4} p_m (p_m - 1) (a^\dagger)^{p_m - 2} (a^\dagger)^{2m - 1} - \frac{m^2}{4N} p_m (p_m - 1) (a^\dagger)^{m - 1} (a^\dagger)^{p_m - 2} \\ &\quad + m p_m (a^\dagger)^{p_m - 1} (a^\dagger)^{m - 1} a. \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

oraz dla dodatnich liczb całkowitych A i B ,

$$\begin{aligned} \left[(a^\dagger)^{A-1} a, \left(\prod_{i=A+1}^B (a^\dagger)^{p_i} \right) \right] &= \left(\prod_{i=A+1}^B (a^\dagger)^{p_i} \right) (a^\dagger)^{A-1} a \\ &\quad + \sum_{t=A+1}^B \prod_{i=A+1}^B \frac{(a^\dagger)^{p_i}}{(a^\dagger)^t} \left\{ \frac{t p_t}{2} (a^\dagger)^{A+t-1} - \frac{t p_t}{2N} (a^\dagger)^A (a^\dagger)^{t-1} \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

gdzie wprowadziliśmy następującą notację,

$$\prod_{i=A}^B \frac{(a^\dagger)^{p_i}}{(a^\dagger)^t} \equiv \left(\prod_{i=A}^{t-1} (a^\dagger)^{p_i} \right) (a^\dagger)^{p_t-1} \left(\prod_{i=t+1}^B (a^\dagger)^{p_i} \right). \quad (\text{B.35})$$

Wracając do pierwotnego zdania wyliczenia działania operatora (aa) na stan bazy, wstawiamy otrzymane powyżej wyniki i możemy napisać

$$\begin{aligned} (aa)|p_2, p_3, p_4, \dots, p_N\rangle &= p_2 \left\{ p_2 + \frac{N^2 - 1}{2} - 1 + \sum_{i=3}^N ip_i \right\} \left(\prod_{i=2}^N \frac{(a^\dagger)^{p_k}}{(a^\dagger)^2} \right) |0\rangle + \\ &+ \sum_{j=3}^N \frac{j^2}{4} p_j (p_j - 1) \left\{ (a^\dagger)^{2j-1} - \frac{1}{N} (a^\dagger)^{j-1} \right\} \left(\prod_{i=2}^N \frac{(a^\dagger)^{p_k}}{(a^\dagger)^2} \right) |0\rangle \\ &+ \sum_{j=3}^N \left(\prod_{i=2}^{j-1} (a^\dagger)^{p_i} \right) j p_j (a^\dagger)^{p_j-1} (a^\dagger)^{j-1} a \left(\prod_{i=j+1}^N (a^\dagger)^{p_k} \right) |0\rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

Wykorzystując równanie (B.34) do ostatniej linii wzoru (B.36) otrzymujemy

$$\begin{aligned} (aa)|p_2, p_3, p_4, \dots, p_N\rangle &= p_2 \left\{ p_2 + \frac{N^2 - 1}{2} - 1 + \sum_{i=3}^N ip_i \right\} \left(\prod_{i=2}^N \frac{(a^\dagger)^{p_i}}{(a^\dagger)^2} \right) |0\rangle + \\ &+ \sum_{j=3}^N \sum_{t=j}^N \gamma(j, t, p_j, p_t, N) \left(\prod_{i=2}^N \frac{(a^\dagger)^{p_i}}{(a^\dagger)^j (a^\dagger)^t} \right) |0\rangle, \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

gdzie dla czytelności wprowadziliśmy funkcję $\gamma(j, t, p_j, p_t, N)$ daną wzorem

$$\begin{aligned} \gamma(j, t, p_j, p_t, N) &= \delta_{t,j} \frac{j^2}{4} p_j (p_j - 1) \left\{ (a^\dagger)^{2j-1} - \frac{1}{N} (a^\dagger)^{j-1} \right\} \\ &+ (1 - \delta_{t,j}) \frac{j^t p_j p_t}{2} \left\{ (a^\dagger)^{j+t-1} - \frac{1}{N} (a^\dagger)^j (a^\dagger)^{t-1} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.38})$$

Wykorzystując wyprowadzone powyżej działanie operatora Hamiltona na dowolny stan z bazy dla dowolnego N , możemy zapisać równanie własne do wartości własnej E w postaci relacji rekurencyjnej na współczynniki a_{p_2, p_3, \dots, p_N}

$$\begin{aligned} \sum_{\sum_{t=2}^N t p_t \leq N_{cut}} \left\{ a_{p_2-1, p_3, \dots, p_N}(E) - \left(2p_2 + \sum_{i=3}^N ip_i + \frac{1}{2}(N^2 - 1) - 2E \right) a_{p_2, p_3, \dots, p_N}(E) \right. \\ \left. + (p_2 + 1) \left(p_2 + \sum_{i=3}^N ip_i + \frac{1}{2}(N^2 - 1) \right) a_{p_2+1, p_3, \dots, p_N}(E) \right. \\ \left. + \sum_{j=3}^N \sum_{t=j}^N \gamma(j, t, p_j + 1, p_t + 1, N) a_{p_2, \dots, p_j+1, \dots, p_t+1, \dots, p_N}(E) \right\} |p_2, \dots, p_j, \dots, p_t, \dots, p_N\rangle = 0, \end{aligned} \quad (\text{B.39})$$

Wstawiając $N = 3$ oraz wykorzystując twierdzenie Cayleya-Hamiltona otrzymujemy relację rekurencyjną otrzymaną w rozdziale B.1.

B.4 Model swobodny z symetrią $SU(N)$ - sektory fermionowe

Wykorzystując obliczenia z poprzednich podrozdziałów możemy zapisać relację rekurencyjną dla modelu z symetrią $SU(N)$ w dowolnym sektorze fermionowym. Stosując notację wprowadzoną w poprzednim podrozdziale, przepisujemy równanie (B.15) w postaci

$$\sum_{\alpha=1}^{d^{n_F}} \sum_{\sum_{k=2}^N k p_k \leq N_{cut} - n_B^\alpha} a_{p_2, p_3, \dots, p_N}^\alpha C^\dagger(n_B^\alpha, n_F, \alpha) \left(H + \frac{n_B^\alpha}{2} \right) |p_2, p_3, \dots, p_N\rangle - \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{d^{n_F}} \sum_{\sum_{k=2}^N k p_k \leq N_{cut} - n_B^\alpha} a_{p_2, p_3, \dots, p_N}^\alpha [(aa), C^\dagger(n_B^\alpha, n_F, \alpha)] |p_2, p_3, \dots, p_N\rangle = 0. \quad (\text{B.40})$$

Działanie operatora Hamiltona na stan bazowy zostało wyprowadzone w poprzednim podrozdziale. Należy zatem wyliczyć komutatory $[(aa), C^\dagger(n_B^\alpha, n_F, \alpha)]$ dla dowolnego N postępując w podobny sposób jak w podrozdziale B.2.1. Analogicznie, dla poszczególnych cegiełek $C^\dagger(n_B^\alpha, n_F, \alpha)$, omawiany komutator będzie równy sumie n_B^α wyrazów, każdy z nich równy cegiełce $C^\dagger(n_B^\alpha, n_F, \alpha)$ z jednym z bozonowych operatorów kreacji zamienionym na bozonowy operator anihilacji. Możemy je ponownie zapisać jako G_α^t , gdzie indeks t biegnie od 1 do n_B^α ,

$$[(aa), C^\dagger(n_B^\alpha, n_F, \alpha)] = \sum_{t=1}^{n_B^\alpha} G_\alpha^t. \quad (\text{B.41})$$

Operatory G_i^t chcemy przesunąć na prawo poprzez operatory kreacji $\prod_{k=2}^N (a^\dagger)^k p_k$. A zatem,

$$\forall_t [G_\alpha^t, \prod_{k=2}^N (a^\dagger)^k p_k] = \sum_{j=2}^N \left(\prod_{k=2}^{j-1} (a^\dagger)^k p_k \right) [G_\alpha^t, (a^\dagger)^j p_j] \left(\prod_{k=j+1}^N (a^\dagger)^k p_k \right) \quad (\text{B.42})$$

G_α^t zawiera dokładnie jeden bozonowy operator anihilacji, więc możemy napisać ogólnie,

$$\forall_t [G_\alpha^t, (a^\dagger)^j p_j] = p_j (a^\dagger)^{j-1} [G_\alpha^t, (a^\dagger)^j]. \quad (\text{B.43})$$

Dla $j = 2$, w powyższym wzorze możemy zastąpić $[G_\alpha^t, (a^\dagger a^\dagger)]$ poprzez $C^\dagger(n_B^\alpha, n_F, \alpha)$. Zatem ogólna postać relacji rekurencyjnej wygląda następująco,

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\alpha=1}^{d^{n_F}} \sum_{\sum_{k=2}^N k p_k \leq N_{cut} - n_B^\alpha} \left\{ \right. \\
 & C^\dagger(n_B^\alpha, n_F, \alpha) \left\{ a_{p_2-1, p_3, \dots, p_N}^\alpha(E) - \left(2p_2 + \sum_{i=3}^N i p_i + \frac{1}{2}(N^2 - 1) + n_B^\alpha - 2E \right) a_{p_2, p_3, \dots, p_N}^\alpha(E) \right. \\
 & \quad \left. + (p_2 + 1) \left(p_2 + \sum_{i=3}^N i p_i + \frac{1}{2}(N^2 - 1) + n_B^\alpha \right) a_{p_2+1, p_3, \dots, p_N}^\alpha(E) \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{j=3}^N \sum_{t=j}^N \gamma(j, t, p_j + 1, p_t + 1, N) a_{p_2, \dots, p_{j+1}, \dots, p_{t+1}, \dots, p_N}^\alpha(E) \right\} |p_2, \dots, p_j, \dots, p_t, \dots, p_N\rangle \\
 & \left. + a_{p_2, p_3, \dots, p_N}^\alpha(E) \sum_{t=1}^{n_B^\alpha} \left(\sum_{j=3}^N p_j [G_\alpha^t, (a^{\dagger j})] |p_2, p_3, \dots, p_{j-1}, \dots, p_N\rangle + \left(\prod_{k=2}^N (a^{\dagger k})^{p_k} \right) G_\alpha^t |0\rangle \right) \right\} = 0.
 \end{aligned} \tag{B.44}$$

DODATEK C

REKURENCJE I UOGÓLNIONE WIELOMIANY LAGUERRE'A

W tym rozdziale przedstawiamy wyprowadzenie rozwiązań relacji rekurencyjnych wprowadzonych w poprzednim rozdziale.

C.1 Twierdzenie 1

Zacniemy od następującego twierdzenia

Twierdzenie 1. *Niech będzie dany zbiór $\kappa + 1$ uogólnionych równań Laguerre'a na nieznanne współczynniki a_0, \dots, a_κ ,*

$$a_{j-1}(x) - (2j + \alpha + 1 - x)a_j(x) + (j + 1)(j + \alpha + 1)a_{j+1}(x) = 0. \quad (\text{C.1})$$

Istnieje $\kappa + 1$ nietrywialnych rozwiązań, oznaczonych jako $(a_j)^0, \dots, (a_j)^\kappa$, postaci

$$(a_j)^i = a_0 \Gamma(\alpha + 1) L_j^\alpha(x_i), \quad (\text{C.2})$$

gdzie x_i są rozwiązaniami następującego równania

$$L_{\kappa+1}^\alpha(x_i) = 0, \quad i = 0, \dots, \kappa. \quad (\text{C.3})$$

Dowód. Zapiszmy obcięty zbiór przeskalowanych, uogólnionych równań Laguerre'a w jawnej postaci

$$\begin{aligned} & -(\alpha + 1 - x)a_0 + (\alpha + 1)a_1 = 0, \\ & a_0 - (\alpha + 3 - x)a_1 + 2(\alpha + 2)a_2 = 0, \\ & a_1 - (\alpha + 5 - x)a_2 + 3(\alpha + 3)a_3 = 0, \\ & a_2 - (\alpha + 7 - x)a_3 + 4(\alpha + 4)a_4 = 0, \\ & \vdots \\ & a_{\kappa-4} - (\alpha + 2\kappa - 5 - x)a_{\kappa-3} + (\kappa - 2)(\alpha + \kappa - 2)a_{\kappa-2} = 0, \\ & a_{\kappa-3} - (\alpha + 2\kappa - 3 - x)a_{\kappa-2} + (\kappa - 1)(\alpha + \kappa - 1)a_{\kappa-1} = 0, \\ & a_{\kappa-2} - (\alpha + 2\kappa - 1 - x)a_{\kappa-1} + \kappa(\alpha + \kappa)a_\kappa = 0, \\ & a_{\kappa-1} - (\alpha + 2\kappa + 1 - x)a_\kappa = 0. \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Jasnym jest, że a_1 może być wyrażone poprzez a_0 dzięki pierwszemu równaniu. Następnie, korzystając z drugiego równania, a_2 może być również wyrażone wyłącznie poprzez a_0 . Kontynuując, możemy przepisać wszystkie równania oprócz ostatniego w następującej postaci

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\alpha + 1 - x}{\alpha + 1} a_0 = a_0 \Gamma(\alpha + 1) L_1^\alpha(x), \\ a_2 &= \frac{((\alpha + 3 - x)^{\frac{\alpha+1-x}{\alpha+1}} - 1)}{2(\alpha + 2)} a_0 = a_0 \Gamma(\alpha + 1) L_2^\alpha(x), \\ a_3 &= a_0 \Gamma(\alpha + 1) L_3^\alpha(x), \\ a_4 &= a_0 \Gamma(\alpha + 1) L_4^\alpha(x), \\ & \vdots \\ a_{\kappa-1} &= a_0 \Gamma(\alpha + 1) L_{\kappa-1}^\alpha(x), \\ a_\kappa &= a_0 \Gamma(\alpha + 1) L_\kappa^\alpha(x). \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

W przypadku ostatniego równania otrzymujemy

$$a_0 L_{\kappa-1}^\alpha(x) - a_0(\alpha + 2\kappa + 1 - x)L_\kappa^\alpha(x) = 0. \quad (\text{C.6})$$

Dzięki (A.5) powyższa równość może być uproszczona do postaci

$$a_0 L_{\kappa+1}^\alpha(x) = 0. \quad (\text{C.7})$$

Widać stąd, że jeśli x jest pierwiastkiem wielomianu $L_{\kappa+1}^\alpha$, a_0 może być dowolne i cały układ równań posiada nietrywialne rozwiązanie. W przeciwnym przypadku, jeśli x nie jest pierwiastkiem wielomianu $L_{\kappa+1}^\alpha$, równanie (C.7) wymusza $a_0 = 0$. Jest to równoważne znikaniu wszystkich współczynników a_j .

Podsumowując, ponieważ równanie $L_{\kappa+1}^\alpha(x) = 0$ posiada $\kappa + 1$ różnych pierwiastków, cały układ równań posiada $\kappa + 1$ niezależnych, nietrywialnych rozwiązań. Oznaczamy je poprzez

$$(a_j)^0, \dots, (a_j)^\kappa \quad (\text{C.8})$$

gdzie

$$(a_j)^i = a_0 \Gamma(\alpha + 1) L_j^\alpha(x_i). \quad (\text{C.9})$$

□

C.2 Zastosowanie twierdzenia 1 do sektorów z $n_F = 0$ oraz $n_F = 1$ modelu swobodnego z symetrią $SU(2)$

W rozdziale B.2.2 wyprowadziliśmy rekurencje na współczynniki rozkładu stanów własnych modelu swobodnego z grupą symetrii $SU(2)$. W sektorze bozonowym współczynniki $a_j(E)$ są powiązane rekurencją

$$a_{j-1}(E) - \left(2j + \frac{3}{2} - 2E\right)a_j(E) + (j+1)\left(j + \frac{3}{2}\right)a_{j+1}(E) = 0, \quad (\text{C.10})$$

natomiast w sektorze $n_F = 1$, współczynniki $b_j(E)$ spełniają następujące równania

$$b_{j-1}(E) - \left(2j + \frac{5}{2} - 2E\right)b_j(E) + (j+1)\left(j + \frac{5}{2}\right)b_{j+1}(E) = 0. \quad (\text{C.11})$$

Po ograniczeniu bazy do stanów z maksymalną liczbą N_{cut} kwantów bozonowych, tylko amplitudy $a_d(E)$ oraz $b_{d'}(E)$ są dopuszczone, przy czym

$$\begin{aligned} d &= \left\lfloor \frac{1}{2} N_{cut} \right\rfloor + 1, \\ d' &= \left\lfloor \frac{1}{2} (N_{cut} - 1) \right\rfloor + 1. \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

Zatem równania (C.10) oraz (C.11) przyjmują postać z twierdzenia 1, z $\kappa = d$ lub $\kappa = d'$ odpowiednio w sektorze bozonowym i fermionowym. Wobec tego możemy napisać,

$$a_j(E) = a_0 \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) L_j^{\frac{1}{2}}(2E), \quad 0 \leq j < d \quad (\text{C.13})$$

gdzie E musi spełniać równanie

$$L_d^{\frac{1}{2}}(2E) = 0. \quad (\text{C.14})$$

Analogicznie, w sektorze z jednym kwantem fermionowym otrzymujemy

$$b_j(E) = b_0 \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) L_j^{\frac{3}{2}}(2E), \quad 0 \leq j < d' \quad (\text{C.15})$$

gdzie E spełnia równanie

$$L_{d'}^{\frac{3}{2}}(2E) = 0. \quad (\text{C.16})$$

Stałe normalizacyjne a_0 i b_0 są dowolnymi stałymi niezależnymi od j . Mogą jednak zależeć od energii E . Poprawna normalizacja powyższych rozwiązań zgodna z normalizacją fal płaskich jest dyskutowana w rozdziale E.1.

C.3 Twierdzenie 2

Twierdzenia 2, 3 oraz 4 zawierają rozwiązania niejednorodnych układów uogólnionych równań Laguerre'a. Rozwiązania takie są potrzebne do wyprowadzenia stanów własnych swobodnego modelu z grupą symetrii $SU(3)$ w sektorze bozonowym.

Twierdzenie 2. *Niech będzie dany zbiór $\kappa + 1$, niejednorodnych, uogólnionych równań Laguerre'a postaci*

$$a_{j-1}(x) - (2j + \alpha + 1 - x)a_j(x) + (j + 1)(j + \alpha + 1)a_{j+1}(x) = \chi L_{j+q}^\beta(x), \quad (\text{C.17})$$

gdzie $\chi \neq 0$, α oraz β są takie że $\frac{1}{2}(\beta - \alpha)$ jest dodatnią liczbą całkowitą, natomiast x nie jest pierwiastkiem $L_{\kappa+1}^\alpha(x)$.

Wtedy, istnieją szczególne wartości α , β , q oraz parametru x , dla których układ posiada nietrywialne rozwiązania z a_j niezerowymi.

Dowód. Równania (C.17) stanowią zbiór $\kappa + 1$ niejednorodnych równań z $\kappa + 1$ nieznanymi $a_j(x)$. Wyznacznik macierzy definiującej ten układ równań wynosi $L_{\kappa+1}^\alpha(x)$ i, z założenia, jest różny od zera. Tak więc, istnieje dokładnie jedno, nietrywialne rozwiązanie. Skonstruujemy je w następujący sposób. Załóżmy, że $a_j(x)$ jest proporcjonalne do L_{j-p}^β z, na razie nieznanym, współczynnikiem proporcjonalności $\gamma \neq 0$ oraz p pewną liczbą całkowitą,

$$a_j(x) = \gamma L_{j-p}^\beta(x). \quad (\text{C.18})$$

Rekurencja (C.17) przyjmuje postać

$$L_{j-p-1}^\beta(x) - (2j + \alpha + 1 - x)L_{j-p}^\beta(x) + (j + 1)(j + \alpha + 1)L_{j-p+1}^\beta(x) + \frac{\chi}{\gamma}L_{j+q}^\beta(x) = 0. \quad (\text{C.19})$$

Ogólna relacja rekurencyjna dla uogólnionych wielomianów Laguerre'a L_j^β ma postać

$$L_{j-1}^\beta(x) - (2j + \beta + 1 - x)L_j^\beta(x) + (j + 1)(j + \beta + 1)L_{j+1}^\beta(x) = 0. \quad (\text{C.20})$$

Z założenia $\frac{1}{2}(\beta - \alpha) = k$, gdzie k jest dodatnią liczbą całkowitą, więc dla $j \geq k$ możemy w równaniu (C.19) przesunąć wskaźnik $j \rightarrow j + k$. Po wstawieniu $p = k$, otrzymujemy

$$L_{j-1}^\beta(x) - (2j + \beta + 1 - x)L_j^\beta(x) + (j + k + 1)(j + k + \alpha + 1)L_{j+1}^\beta(x) + \frac{\chi}{\gamma}L_{j+k+q}^\beta(x) = 0. \quad (\text{C.21})$$

Powyższe równanie może być znacząco uproszczone korzystając z rekurencji (C.20), dając

$$-\frac{1}{4}(\beta^2 - \alpha^2)L_{j+1}^\beta(x) + \frac{\chi}{\gamma}L_{j+k+q}^\beta(x) = 0. \quad (\text{C.22})$$

Równanie (C.22) musi być prawdziwe dla każdej wartości parametru x . To będzie możliwe tylko gdy

$$q = 1 - k = 1 - \frac{1}{2}(\beta - \alpha), \quad (\text{C.23})$$

$$\gamma = \frac{4\chi}{\beta^2 - \alpha^2}. \quad (\text{C.24})$$

Z założeń (C.18) wynika, że współczynniki $a_j(x)$ muszą zniknąć dla $j < k$.

Podsumowując, skonstruowaliśmy nietrywialne rozwiązanie dla niejednorodnego układu uogólnionych równań Laguerre'a równe

$$\begin{aligned} a_j(x_i) &= 0, & j &= 0, \dots, k-1, \\ a_j(x_i) &= \gamma L_{j-k}^\beta(x_i), & j &= k, \dots, \kappa, \end{aligned} \quad (\text{C.25})$$

gdzie $k = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$. To rozwiązanie nie ma już swobody przeskalowania przez dowolną stałą. \square

C.4 Twierdzenie 3

Twierdzenie 3. *Niech będą dane dwie obcięte, uogólnione relacje rekurencyjne Laguerre'a. Niech jedna z nich będzie rozszerzona o następujący wyraz mieszający ze stałą χ ,*

$$\begin{aligned} a_{j-1}(x) - (2j + \alpha + 1 - x)a_j(x) + (j + 1)(j + \alpha + 1)a_{j+1}(x) - \chi b_{j+q}(x) &= 0, \\ b_{j-1}(x) - (2j + \beta + 1 - x)b_j(x) + (j + 1)(j + \beta + 1)b_{j+1}(x) &= 0, \end{aligned} \quad (\text{C.26})$$

oraz niech $\chi \neq 0$, $\frac{1}{2}(\beta - \alpha) = k$, gdzie k jest dodatnią liczbą całkowitą oraz $q \leq 0$.

Wtedy, dla pewnych wartości parametru x układ posiada nietrywialne rozwiązania z nieznikającymi współczynnikami $a_j(x)$ i $b_j(x)$.

Dowód. Układ κ równań dla współczynników $b_j(x)$ może być przedstawiony w postaci opisanej w twierdzeniu 1. Zgodnie z tym twierdzeniem taki układ dopuszcza $\kappa + 1$ nietrywialnych rozwiązań. Dla zgodności zakładamy, że współczynników $a_j(x)$ jest $\kappa + 2 - q$. Rozważając możliwe wartości parametru x , możemy wyróżnić trzy przypadki:

- $L_{\kappa+2-q}^\alpha(x) \neq 0$ oraz $L_{\kappa+1}^\beta(x) \neq 0$, wtedy pełny układ równań nie dopuszcza rozwiązań z $a_j(x)$ lub $b_j(x)$ różnymi od zera.
- $L_{\kappa+2-q}^\alpha(x) = 0$ oraz $L_{\kappa+1}^\beta(x) \neq 0$, wtedy $b_j(x)$ musi znikać, dając jednorodny układ równań dla współczynników $a_j(x)$. Ponieważ $L_{\kappa+2-q}^\alpha(x) = 0$, a zatem układ dopuszcza $\kappa + 1 - q$ nietrywialnych rozwiązań postaci,

$$(a_j)^i = a_0 \Gamma(\alpha + 1) L_j^\alpha(x_i), \quad j = 0, \dots, \kappa - q + 1, \quad (\text{C.27})$$

gdzie x_i jest rozwiązaniem równania $L_{\kappa+2-q}^\alpha(x) = 0$.

- $L_{\kappa+2-q}^\alpha(x) \neq 0$ oraz $L_{\kappa+1}^\beta(x) = 0$, wtedy układ równań na współczynniki $b_j(x)$ dopuszcza $\kappa + 1$ nietrywialnych rozwiązań. Z powodu wyrazu mieszającego $a_j(x)$ nie może znikać. Jak zostało pokazane w twierdzeniu 2, dla $\frac{1}{2}(\beta - \alpha) = 1 - q$ istnieje dokładnie jedno nietrywialne rozwiązanie pełnego układu równań z nieznikającymi $a_j(x)$ oraz $b_j(x)$, danym przez

$$b_j(x_i) = b_0 \Gamma(\beta + 1) L_j^\beta(x_i), \quad j = 0, \dots, \kappa, \quad (\text{C.28})$$

oraz

$$a_j(x_i) = 0, \quad j = 0, \dots, k - 1, \quad (\text{C.29})$$

$$a_j(x_i) = \gamma b_0 \Gamma(\beta + 1) L_{j-k}^\beta(x_i), \quad j = k, \dots, \kappa + k, \quad (\text{C.30})$$

gdzie x_i jest rozwiązaniem równania $L_{\kappa+1}^\beta(x) = 0$, a także,

$$\gamma = \frac{4\chi}{\beta^2 - \alpha^2}. \quad (\text{C.31})$$

□

C.5 Twierdzenie 4

Następujące twierdzenie jest uogólnieniem twierdzenia 3 do układu m sprzężonych uogólnionych relacji rekurencyjnych Laguerre'a.

Twierdzenie 4. *Niech będzie dany układ $m + 1$ obciętych uogólnionych relacji rekurencyjnych Laguerre'a z wyrazami niejednorodnymi w postaci,*

$$\begin{aligned} a_{j-1}^0(x) - (2j + \alpha_0 + 1 - x)a_j^0(x) + (j + 1)(j + \alpha_0 + 1)a_{j+1}^0(x) - \chi_0 a_{j+q_0}^1(x) &= 0, \\ a_{j-1}^1(x) - (2j + \alpha_1 + 1 - x)a_j^1(x) + (j + 1)(j + \alpha_1 + 1)a_{j+1}^1(x) - \chi_1 a_{j+q_1}^2(x) &= 0, \\ a_{j-1}^2(x) - (2j + \alpha_2 + 1 - x)a_j^2(x) + (j + 1)(j + \alpha_2 + 1)a_{j+1}^2(x) - \chi_2 a_{j+q_2}^3(x) &= 0, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (\text{C.32})$$

$$\begin{aligned} a_{j-1}^{m-1}(x) - (2j + \alpha_{m-1} + 1 - x)a_j^{m-1}(x) + \\ + (j + 1)(j + \alpha_{m-1} + 1)a_{j+1}^{m-1}(x) - \chi_{m-1} a_{j+q_{m-1}}^m(x) &= 0, \\ a_{j-1}^m(x) - (2j + \alpha_m + 1 - x)a_j^m(x) + (j + 1)(j + \alpha_m + 1)a_{j+1}^m(x) &= 0, \end{aligned}$$

Dodatkowo zakładamy, że współczynników $a_j^m(x)$ jest $\kappa + 1$, a także że dla wszystkich liczb całkowitych t , $0 < t \leq m$, prawdą jest, że $(k_m \equiv 0)$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\alpha_m - \alpha_{m-t}) &= k_{m-t}, \\ q_{m-t} &= 1 - k_{m-t} + k_{m-t+1}. \end{aligned} \quad (\text{C.33})$$

Wtedy, istnieje $\kappa + 1$ nietrywialnych rozwiązań dla parametru x spełniającego równanie $L_{\kappa+1}^{\alpha_m}(x) = 0$,

Dowód. Dowód zaczniemy od zastosowania twierdzenia 1 do obciętej relacji rekurencyjnej dla współczynników $a_j^m(x)$. W zależności od wartości parametru x , możliwe są dwie sytuacje:

- x , dla którego $L_{\kappa+1}^{\alpha_m}(x) \neq 0$

Skoro $L_{\kappa+1}^{\alpha_m}(x) \neq 0$, zatem z twierdzenia 1 wynika, że wszystkie współczynniki $a_j^m(x)$ muszą zniknąć. W tej sytuacji relacja rekurencyjna dla współczynników $a_j^{m-1}(x)$ staje się jednorodna. Tak więc, otrzymujemy założenia obecnego twierdzenia dla $m \rightarrow m - 1$.

- x , dla którego $L_{\kappa+1}^{\alpha_m}(x) = 0$

Twierdzenie 1 przewiduje $\kappa + 1$ niezerowych rozwiązań na współczynniki $a_j^m(x)$.

W następującym rozumowaniu zakładamy, bez straty ogólności, drugą z powyższych możliwości. Tak więc, x jest pierwiastkiem równania $L_{\kappa+1}^{\alpha_m}(x) = 0$. A zatem, układy równań na współczynniki $a_j^m(x)$ oraz $a_j^{m-1}(x)$ spełniają założenia twierdzenia 3, jeśli tylko

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\alpha_m - \alpha_{m-1}) &= k_{m-1} \text{ dla } k_{m-1} \text{ będącego nieujemną liczbą całkowitą,} \\ q_{m-1} &= 1 - k_{m-1}. \end{aligned} \quad (\text{C.34})$$

Zgodnie z twierdzeniem 3 potrzeba $\kappa + 2 - q_{m-1}$ współczynników $a_j^{m-1}(x)$. Rozwiązania dla $a_j^{m-1}(x)$ są proporcjonalne do $a_j^m(x)$ ze stałą proporcjonalności

$$\gamma_{m-1} = \frac{4\chi_{m-1}}{\alpha_m^2 - \alpha_{m-1}^2}, \quad (\text{C.35})$$

co oznacza,

$$a_j^{m-1}(x) = a_0^m \frac{4\chi_{m-1}}{\alpha_m^2 - \alpha_{m-1}^2} \Gamma(\alpha_m + 1) L_{j-k_{m-1}}^{\alpha_m}(x). \quad (\text{C.36})$$

W konsekwencji, biorąc pod uwagę układ równań na współczynniki $a_j^{m-2}(x)$, dostajemy

$$a_{j-1}^{m-2}(x) - (2j + \alpha_{m-2} + 1 - x)a_j^{m-2}(x) + (j+1)(j + \alpha_{m-2} + 1)a_{j+1}^{m-2}(x) + \chi_{m-2}a_{j+q_{m-2}}^{m-1}(x) = 0. \quad (\text{C.37})$$

Rozwiązania powyższego równania opisane są w twierdzeniu 2. Zakładamy, że

$$a_j^{m-2}(x) = \gamma_{m-2} a_0^m \Gamma(\alpha_m + 1) a_{j+q_{m-2}}^{m-1}(x) \quad (\text{C.38})$$

więc, jeśli tylko

$$\frac{1}{2}(\alpha_m - \alpha_{m-2}) = k_{m-2} \text{ dla } k_{m-2} \text{ będącego nieujemną liczbą całkowitą,} \quad (\text{C.39})$$

$$q_{m-2} = 1 - k_{m-2} + k_{m-1},$$

znajdziemy następną stałą mieszania,

$$\gamma_{m-2} = \frac{4\chi_{m-2}}{\alpha_m^2 - \alpha_{m-2}^2}. \quad (\text{C.40})$$

Znów, potrzebujemy $\kappa + 3 - q_{m-1} - q_{m-2}$ współczynników $a_j^{m-2}(x)$. W końcu, dostajemy

$$a_j^{m-2}(x) = a_0^m \gamma_{m-1} \gamma_{m-2} \Gamma(\alpha_m + 1) L_{j-k_{m-2}}^{\alpha_m}(x), \quad (\text{C.41})$$

co można przepisać w postaci

$$a_j^{m-2}(x) = a_0^m \Gamma_{m-1, m-2} \Gamma(\alpha_m + 1) L_{j-k_{m-2}}^{\alpha_m}(x), \quad (\text{C.42})$$

gdzie

$$\Gamma_{x,y} = \prod_{t=y}^x \gamma_t. \quad (\text{C.43})$$

Powtarzając te kroki $m-2$ razy znajdziemy postać rozwiązań dla wszystkich współczynników $a_j^p(x)$.

Podsumowując, dla wszystkich $\kappa+1$ pierwiastków równania $L_{\kappa+1}^{\alpha_m}(x) = 0$, które oznaczamy jako x_i , rozważany układ równań posiada nietrywialne rozwiązania postaci,

$$a_j^m(x_i) = a_0^m \Gamma(\alpha_m + 1) L_j^{\alpha_m}(x_i),$$

$$\text{gdzie } 0 \leq j \leq \kappa$$

$$a_j^{m-1}(x_i) = a_0^m \Gamma_{m-1, m-1} \Gamma(\alpha_m + 1) L_{j-k_{m-1}}^{\alpha_m}(x_i),$$

$$\text{gdzie } k_{m-1} \leq j \leq \kappa + k_{m-1}$$

$$a_j^{m-2}(x_i) = a_0^m \Gamma_{m-1, m-2} \Gamma(\alpha_m + 1) L_{j-k_{m-1}-k_{m-2}}^{\alpha_m}(x_i),$$

$$\text{gdzie } k_{m-1} + k_{m-2} \leq j \leq \kappa + k_{m-1} + k_{m-2}$$

⋮

$$a_j^1(x_i) = a_0^m \Gamma_{m-1, 1} \Gamma(\alpha_m + 1) L_{j-\sum_{t=1}^{m-1} k_t}^{\alpha_m}(x_i),$$

$$\text{gdzie } \left(\sum_{t=1}^{m-1} k_t \right) \leq j \leq \kappa + \left(\sum_{t=1}^{m-1} k_t \right)$$

$$a_j^0(x_i) = a_0^m \Gamma_{m-1, 0} \Gamma(\alpha_m + 1) L_{j-\sum_{t=0}^{m-1} k_t}^{\alpha_m}(x_i),$$

$$\text{gdzie } \left(\sum_{t=0}^{m-1} k_t \right) \leq j \leq \kappa + \left(\sum_{t=0}^{m-1} k_t \right).$$

□

C.6 Zastosowanie twierdzenia 4 do sektora z $n_F = 0$ modelu swobodnego z symetrią $SU(3)$

Relacja rekurencyjna dla modelu z symetrią $SU(3)$ w sektorze bozonowym na współczynniki $a_{j,k}$ ma postać (6.18),

$$a_{j-1,k} - (2j + 3k + 4 - 2E)a_{j,k} + (j + 1)(j + 3k + 4)a_{j+1,k} + \frac{3}{8}(k + 1)(k + 2)a_{j-2,k+2} = 0. \quad (\text{C.44})$$

Rekurencja ta rozpada się na dwie niezależne relacje rekurencyjne, jedną dla k parzystych i drugą dla k nieparzystych. Rozpisując (C.44) osobno w obydwu tych przypadkach dla poszczególnych wartości indeksu k , otrzymamy układ równań analogiczny do układu opisanego w założeniach poprzedniego twierdzenia. Mamy dla k parzystych (zapisując $a_{j,k}(2E)$ jako $a_j^k(2E)$),

$$\begin{aligned} a_{j-1}^0 - (2j + 4 - 2E)a_j^0 + (j + 1)(j + 4)a_{j+1}^0 + \frac{3}{4}a_{j-2}^2 &= 0, \\ a_{j-1}^2 - (2j + 6 + 4 - 2E)a_j^2 + (j + 1)(j + 6 + 4)a_{j+1}^2 + \frac{9}{2}a_{j-2}^4 &= 0, \\ a_{j-1}^4 - (2j + 12 + 4 - 2E)a_j^4 + (j + 1)(j + 12 + 4)a_{j+1}^4 + \frac{45}{4}a_{j-2}^6 &= 0, \\ \vdots \\ a_{j-1}^{2\kappa-2} - (2j + 6\kappa - 2 - 2E)a_j^{2\kappa-2} + (j + 1)(j + 6\kappa - 2)a_{j+1}^{2\kappa-2} + \frac{3}{4}(2\kappa - 1)\kappa a_{j-2}^{2\kappa} &= 0, \\ a_{j-1}^{2\kappa} - (2j + 6\kappa + 4 - 2E)a_j^{2\kappa} + (j + 1)(j + 6\kappa + 4)a_{j+1}^{2\kappa} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{C.45})$$

Analogicznie, dla k nieparzystych,

$$\begin{aligned} a_{j-1}^1 - (2j + 3 + 4 - 2E)a_j^1 + (j + 1)(j + 3 + 4)a_{j+1}^1 + \frac{9}{4}a_{j-2}^3 &= 0, \\ a_{j-1}^3 - (2j + 9 + 4 - 2E)a_j^3 + (j + 1)(j + 9 + 4)a_{j+1}^3 + \frac{15}{2}a_{j-2}^5 &= 0, \\ a_{j-1}^5 - (2j + 15 + 4 - 2E)a_j^5 + (j + 1)(j + 15 + 4)a_{j+1}^5 + \frac{63}{4}a_{j-2}^7 &= 0, \\ \vdots \\ a_{j-1}^{2\kappa-1} - (2j + 6\kappa + 1 - 2E)a_j^{2\kappa-1} + (j + 1)(j + 6\kappa + 1)a_{j+1}^{2\kappa-1} + \frac{3}{4}\kappa(2\kappa + 1)a_{j-2}^{2\kappa+1} &= 0, \\ a_{j-1}^{2\kappa+1} - (2j + 6\kappa + 7 - 2E)a_j^{2\kappa+1} + (j + 1)(j + 6\kappa + 7)a_{j+1}^{2\kappa+1} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{C.46})$$

Utożsamiając wielkości z twierdzenia 4 w przypadku parzystym mamy

$$\begin{aligned}\alpha_t &= 6t + 3, \\ \chi_t &= -\frac{3(t+1)(2t+1)}{4}, \\ k_t &= \frac{1}{2}(\alpha_t - \alpha_{t-1}) = 3, \\ q_t &= -2 = 1 - k_t.\end{aligned}\tag{C.47}$$

Zatem,

$$\gamma_t = -\frac{1}{3} \frac{(t+1)(2t+1)}{(2\kappa+1)^2 - (2t+1)^2},\tag{C.48}$$

oraz

$$\Gamma_{\kappa-1,t}^{even} = \prod_{p=t}^{\kappa-1} \gamma_p = (-24)^{t-\kappa} \frac{(\kappa+t)!}{(\kappa-t)!(2t)!}.\tag{C.49}$$

Warunek kwantyzacji przyjmuje postać

$$L_{d_\kappa}^{6\kappa+3}(2E) = 0,\tag{C.50}$$

gdzie liczby całkowite d_κ zostały wprowadzone w rozdziale 6.3.1 i wynoszą

$$d_\kappa = \left\lfloor \frac{1}{2}(N_{cut} - 6\kappa) \right\rfloor + 1.\tag{C.51}$$

Natomiast, odpowiadające dostępnym wartościom energii stany własne są dane następującym wzorem,

$$|E, \kappa\rangle_{even} = a_0 \Gamma(6\kappa + 4) \sum_{n=0}^{d_\kappa-1} L_n^{6\kappa+3}(2E) \left(|n, 2\kappa\rangle + \sum_{t=1}^{\kappa} \Gamma_{\kappa-1, \kappa-t}^{even} |n+3t, 2\kappa-2t\rangle \right),\tag{C.52}$$

gdzie $\Gamma(x)$ oznacza funkcję Gamma Eulera, $\Gamma(x) = (x-1)!$ dla x całkowitego i dodatniego. Podobnie w przypadku nieparzystym możemy utożsamić,

$$\begin{aligned}\alpha_t &= 6t + 6, \\ \chi_t &= -\frac{3(t+1)(2t+3)}{4}, \\ k_t &= \frac{1}{2}(\alpha_t - \alpha_{t-1}) = 3, \\ q_t &= -2 = 1 - k_t.\end{aligned}\tag{C.53}$$

A zatem,

$$\gamma_t = -\frac{1}{6} \frac{(t+1)(t+\frac{3}{2})}{(\kappa+1)^2 - (t+1)^2},\tag{C.54}$$

oraz

$$\Gamma_{\kappa-1,p}^{odd} = \prod_{t=p}^{\kappa-1} \gamma_t = (-24)^{t-\kappa} \frac{(\kappa+t+1)!}{(\kappa-t)!(2t+1)!}.\tag{C.55}$$

Tym razem warunek kwantyzacji wynosi,

$$L_{d'_\kappa}^{6\kappa+6}(2E) = 0, \quad (\text{C.56})$$

z $d'_\kappa = \left\lfloor \frac{1}{2}(N_{cut} - 6\kappa - 3) \right\rfloor + 1$, a odpowiadające stany własne wynoszą,

$$|E, \kappa\rangle_{odd} = a_0 \Gamma(6\kappa + 7) \sum_{n=0}^{d'_\kappa-1} L_n^{6\kappa+6}(2E) \left(|n, 2\kappa + 1\rangle + \sum_{t=1}^{\kappa} \Gamma_{\kappa-1, \kappa-t}^{odd} |n + 3t, 2\kappa - 2t + 1\rangle \right). \quad (\text{C.57})$$

Podobnie jak w modelu $SU(2)$, stałe normalizacyjne a_0 i b_0 pozostają dowolnymi stałymi i mogą zależeć od energii E . Poprawna normalizacja powyższych rozwiązań zgodna z normalizacją fal płaskich jest dyskutowana w rozdziale E.2.

C.7 Twierdzenie 5

Aby otrzymać wzory na stany własne dla modelu z symetrią $SU(3)$ w sektorze z jednym kwantem fermionowym, potrzebujemy znać rozwiązania układu podwójnie sprzężonych relacji rekurencyjnych Laguerre'a. Podajemy je w postaci poniższego twierdzenia.

Twierdzenie 5. *Niech będzie dany układ $m + 1$ obciętych relacji rekurencyjnych Laguerre'a uzupełnionych o wyrazy sprzęgające w postaci jak poniżej,*

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_j^{\alpha_0} \cdot \mathbf{a}_j^0(x) - \chi_0 a_{j+q_0}^1(x) - \mu_0 a_{j+p_0}^2(x) &= 0, \\ \mathbf{S}_j^{\alpha_1} \cdot \mathbf{a}_j^1(x) - \chi_1 a_{j+q_1}^2(x) - \mu_1 a_{j+p_1}^3(x) &= 0, \\ \mathbf{S}_j^{\alpha_2} \cdot \mathbf{a}_j^2(x) - \chi_2 a_{j+q_2}^3(x) - \mu_2 a_{j+p_2}^4(x) &= 0, \\ &\vdots \\ \mathbf{S}_j^{\alpha_{m-3}} \cdot \mathbf{a}_j^{m-3}(x) - \chi_{m-3} a_{j+q_{m-3}}^{m-2}(x) - \mu_{m-3} a_{j+p_{m-1}}^{m-1}(x) &= 0, \\ \mathbf{S}_j^{\alpha_{m-2}} \cdot \mathbf{a}_j^{m-2}(x) - \chi_{m-2} a_{j+q_{m-2}}^{m-1}(x) - \mu_{m-2} a_{j+p_{m-2}}^m(x) &= 0, \\ \mathbf{S}_j^{\alpha_{m-1}} \cdot \mathbf{a}_j^{m-1}(x) - \chi_{m-1} a_{j+q_{m-1}}^m(x) &= 0, \\ \mathbf{S}_j^{\alpha_m} \cdot \mathbf{a}_j^m(x) &= 0, \end{aligned} \quad (\text{C.58})$$

Niech dodatkowo x będzie jednym z $\kappa + 1$ pierwiastków równania $L_{\kappa+1}^{\alpha_m}(x) = 0$.

Wtedy, istnieje jedno nietrywialne rozwiązanie ze wszystkimi współczynnikami $a_t^p(x)$ częściowo niezerowymi (dla każdego p dla co najmniej jednej wartości indeksu t $a_t^p(x) \neq 0$), jeśli tylko dla wszystkich liczb całkowitych $0 < i \leq m$ spełnione są następujące warunki, ($k_t \equiv 0$, dla $t \geq m$)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\alpha_m - \alpha_{m-i}) &= k_{m-i}, \\ p_{m-i} &= 1 - k_{m-i} + k_{m-i+2}, \\ q_{m-i} &= 1 - k_{m-i} + k_{m-i+1}. \end{aligned} \quad (\text{C.59})$$

Dowód. Dowód przebiega analogicznie do dowodu twierdzenia 4. Zaczynamy od rozwiązania układu równań dla współczynników a_j^m używając twierdzenia 1. Z założenia mamy $L_{\kappa+1}^{\alpha_m}(x) = 0$. Układ równań dla $a_j^m(x)$ i $a_j^{m-1}(x)$ spełnia założenia twierdzenia 3. Nietrywialne rozwiązanie będzie istnieć pod warunkiem, że

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\alpha_m - \alpha_{m-1}) &= k_{m-1} \text{ dla } k_{m-1} \text{ będącego nieujemną liczbą całkowitą,} \\ q_{m-1} &= 1 - k_{m-1}. \end{aligned} \quad (\text{C.60})$$

W takim razie, twierdzenie 3 podaje postać rozwiązań, w których $a_j^{m-1}(x)$ są proporcjonalne do $a_j^m(x)$ ze stałą proporcjonalności,

$$\gamma_{m-1} = \frac{4\chi_{m-1}}{\alpha_m^2 - \alpha_{m-1}^2}. \quad (\text{C.61})$$

Kontynuując, dla równań na współczynniki $a_j^{m-2}(x)$ mamy,

$$\mathbf{S}_j^{\alpha_{m-2}} \cdot \mathbf{a}_j^{m-2}(x) - \chi_{m-2} a_{j+q_{m-2}}^{m-1}(x) - \mu_{m-2} a_{j+p_{m-2}}^m(x) = 0, \quad (\text{C.62})$$

gdzie

$$\begin{aligned} a_j^{m-1}(x) &= a_0^m \gamma_{m-1} \Gamma(\alpha_m + 1) L_{j-k_{m-1}}^{\alpha_m}(x), \\ a_j^m(x) &= a_0^m \Gamma(\alpha_m + 1) L_j^{\alpha_m}(x). \end{aligned} \quad (\text{C.63})$$

A więc, równoważnie możemy napisać

$$\mathbf{S}_j^{\alpha_{m-2}} \cdot \mathbf{a}_j^{m-2}(x) - \chi_{m-2} \gamma_{m-1} a_0^m \Gamma(\alpha_m + 1) L_{j-k_{m-1}+q_{m-2}}^{\alpha_m}(x) - \mu_{m-2} a_0^m \Gamma(\alpha_m + 1) L_{j+p_{m-2}}^{\alpha_m}(x) = 0. \quad (\text{C.64})$$

Jeśli tylko,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\alpha_m - \alpha_{m-2}) &= k_{m-2} \text{ dla } k_{m-2} \text{ będącego nieujemną liczbą całkowitą,} \\ p_{m-2} &= 1 - k_{m-2}, \\ q_{m-2} &= 1 - k_{m-2} + k_{m-1}, \end{aligned} \quad (\text{C.65})$$

możemy ponownie użyć twierdzenia 2, aby otrzymać rozwiązanie dla współczynników $a_j^{m-2}(x)$ jako proporcjonalnych do $a_j^m(x)$ z następną stałą proporcjonalności

$$\gamma_{m-2} = \frac{4(\chi_{m-2} \gamma_{m-1} + \mu_{m-2})}{\alpha_m^2 - \alpha_{m-2}^2}. \quad (\text{C.66})$$

Analogicznie, równania na współczynniki $a_j^{m-3}(x)$ mają postać

$$\mathbf{S}_j^{\alpha_{m-3}} \cdot \mathbf{a}_j^{m-3}(x) - \chi_{m-3} a_{j+q_{m-3}}^{m-2}(x) - \mu_{m-3} a_{j+p_{m-3}}^{m-1}(x) = 0, \quad (\text{C.67})$$

gdzie $a_j^{m-1}(x)$ i $a_j^{m-2}(x)$ są dane poprzez

$$\begin{aligned} a_j^{m-2}(x) &= a_0^m \gamma_{m-2} \Gamma(\alpha_m + 1) L_{j-k_{m-2}}^{\alpha_m}(x), \\ a_j^{m-1}(x) &= a_0^m \gamma_{m-1} \Gamma(\alpha_m + 1) L_{j-k_{m-1}}^{\alpha_m}(x). \end{aligned} \quad (\text{C.68})$$

Stąd,

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_j^{\alpha_{m-3}} \cdot \mathbf{a}_j^{m-3}(x) - a_0^m \chi_{m-3} \gamma_{m-2} \Gamma(\alpha_m + 1) L_{j-k_{m-2}+q_{m-3}}^{\alpha_m}(x) \\ - a_0^m \mu_{m-3} \gamma_{m-1} \Gamma(\alpha_m + 1) L_{j-k_{m-1}+p_{m-3}}^{\alpha_m}(x) = 0. \end{aligned} \quad (\text{C.69})$$

Znowu, jeśli tylko

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\alpha_m - \alpha_{m-3}) &= k_{m-3} \text{ dla } k_{m-3} \text{ będącego nieujemną liczbą całkowitą,} \\ p_{m-3} &= 1 - k_{m-3} + k_{m-1}, \\ q_{m-3} &= 1 - k_{m-3} + k_{m-2}, \end{aligned} \quad (\text{C.70})$$

możemy ponownie użyć twierdzenia 2, które podaje rozwiązania dla współczynniki $a_j^{m-3}(x)$ jako proporcjonalne do $a_j^m(x)$ z następną stałą mieszania,

$$\gamma_{m-3} = \frac{4(\chi_{m-3} \gamma_{m-2} + \mu_{m-3} \gamma_{m-1})}{\alpha_m^2 - \alpha_{m-3}^2}. \quad (\text{C.71})$$

Powtarzając powyższe kroki $m-3$ razy otrzymamy postać rozwiązań dla wszystkich współczynników a_j^p .

Podsumowując, dla wszystkich pierwiastków x równania $L_{\kappa+1}^{\alpha_m}(x) = 0$ otrzymujemy nietrywialne rozwiązania, których postać możemy zapisać jako,

$$\begin{aligned} a_j^m(x) &= a_0^m \Gamma(\alpha_m + 1) L_j^{\alpha_m}(x), \\ &\text{gdzie } 0 \leq j \leq \kappa \\ a_j^{m-1}(x) &= a_0^m \Gamma_{m-1, m-1} \Gamma(\alpha_m + 1) L_{j-k_{m-1}}^{\alpha_m}(x), \\ &\text{gdzie } k_{m-1} \leq j \leq \kappa + k_{m-1} \\ a_j^{m-2}(x) &= a_0^m \Gamma_{m-1, m-2} \Gamma(\alpha_m + 1) L_{j-k_{m-1}-k_{m-2}}^{\alpha_m}(x), \\ &\text{gdzie } k_{m-1} + k_{m-2} \leq j \leq \kappa + k_{m-1} + k_{m-2} \\ &\vdots \\ a_j^1(x) &= a_0^m \Gamma_{m-1, 1} \Gamma(\alpha_m + 1) L_{j-\sum_{t=1}^{m-1} k_t}^{\alpha_m}(x), \\ &\text{gdzie } \left(\sum_{t=1}^{m-1} k_t \right) \leq j \leq \kappa + \left(\sum_{t=1}^{m-2} k_t \right) \\ a_j^0(x) &= a_0^m \Gamma_{m-1, 0} \Gamma(\alpha_m + 1) L_{j-\sum_{t=0}^{m-1} k_t}^{\alpha_m}(x), \\ &\text{gdzie } \left(\sum_{t=0}^{m-1} k_t \right) \leq j \leq \kappa + \left(\sum_{t=0}^{m-1} k_t \right), \end{aligned} \quad (\text{C.72})$$

przy czym na siłę wprowadziliśmy notację użytą w poprzednim twierdzeniu, mianowicie,

$$\Gamma_{x,y} = \gamma_y, \quad (\text{C.73})$$

gdzie γ_y jest zdefiniowana rekursywnie

$$\gamma_y = 4 \frac{\chi_y \gamma_{y+1} + \mu_y \gamma_{y+2}}{\alpha_m^2 - \alpha_y^2}, \quad (\text{C.74})$$

oraz $\gamma_{y \geq m} \equiv 1$. □

C.8 Zastosowanie twierdzenia 5 do sektora z $n_F = 1$ modelu swobodnego z symetrią $SU(3)$

W tym podrozdziale użyjemy wykazanego powyżej twierdzenia do znalezienia stanów własnych modelu z symetrią $SU(3)$ w sektorze z jednym kwantem fermionowym. Relacja rekurencyjna na współczynniki rozkładu stanu własnego operatora Hamiltona w bazie w sektorze $n_F = 1$ dana jest następującym wzorem,

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_j^{3k+4} \cdot \mathbf{a}_{j,k}^1 + \frac{3}{8}(k+1)(k+2) a_{j-2,k+2}^1 + \frac{k+1}{2} a_{j-1,k+1}^2 &= 0, \\ \mathbf{S}_j^{3k+5} \cdot \mathbf{a}_{j,k}^2 + \frac{3}{8}(k+1)(k+2) a_{j-2,k+2}^2 + \frac{3(k+1)}{2} a_{j,k+1}^1 &= 0. \end{aligned} \quad (\text{C.75})$$

Analogicznie, jak w przypadku bozonowym, rozdzielamy równania opisujące współczynniki z parzystą ilością kwantów od równań opisujących współczynniki z nieparzystą ilością kwantów. Przypominamy, że współczynniki $a_{j,k}^1$ są proporcjonalne do fermionowej cegiełki ($f^\dagger a^\dagger$) zawierającej jeden kwant bozonowy, natomiast współczynniki $a_{j,k}^2$ są proporcjonalne do fermionowej cegiełki ($f^\dagger a^\dagger a^\dagger$) zawierającej dwa kwanty bozonowe.

Mamy wobec tego, dla przypadku parzystego,

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_j^5 \cdot \mathbf{a}_j^0 + \frac{3}{2} a_j^1 + \frac{3}{4} a_{j-2}^2 &= 0, \\ \mathbf{S}_j^7 \cdot \mathbf{a}_j^1 + a_{j-1}^2 + \frac{9}{4} a_{j-2}^3 &= 0, \\ \mathbf{S}_j^{11} \cdot \mathbf{a}_j^2 + \frac{9}{2} a_j^3 + \frac{9}{2} a_{j-2}^4 &= 0, \\ \vdots & \\ \mathbf{S}_j^{6k-1} \cdot \mathbf{a}_j^{2k-2} + \frac{3(2k-1)}{2} a_{j-1}^{2k-1} + \frac{3}{4} k(2k-1) a_{j-2}^{2k} &= 0, \\ \mathbf{S}_j^{6k+1} \cdot \mathbf{a}_j^{2k-1} + k a_j^{2k} + \frac{3}{4} k(2k+1) a_{j-2}^{2k+1} &= 0, \\ \mathbf{S}_j^{6k+5} \cdot \mathbf{a}_j^{2k} + \frac{3(2k+1)}{2} a_{j-1}^{2k+1} + \frac{3}{4} (2k+1)(k+1) a_{j-2}^{2k+2} &= 0, \\ \mathbf{S}_j^{6k+7} \cdot \mathbf{a}_j^{2k+1} + (k+1) a_j^{2k+2} + \frac{3}{4} (k+1)(2k+3) a_{j-2}^{2k+3} &= 0, \end{aligned} \quad (\text{C.76})$$

przy czym użyliśmy zapisu $a_{j,2k}^2 \rightarrow a_j^{2k}$ i $a_{j,2k+1}^1 \rightarrow a_j^{2k+1}$, ponieważ $a_{j,2k}^2$ zawsze występuje z parzystym indeksem $2k$, natomiast $a_{j,2k+1}^1$ zawsze występuje z nieparzystym indeksem $2k+1$. Dla przypadku nieparzystego mamy,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}_j^4 \cdot \mathbf{a}_j^0 + \frac{1}{2} a_{j-1}^1 + \frac{3}{4} a_{j-2}^2 &= 0, \\
 \mathbf{S}_j^8 \cdot \mathbf{a}_j^1 + 3 a_j^2 + \frac{9}{4} a_{j-2}^3 &= 0, \\
 \mathbf{S}_j^{10} \cdot \mathbf{a}_j^2 + \frac{3}{2} a_{j-1}^3 + \frac{9}{2} a_{j-2}^4 &= 0, \\
 \vdots & \\
 \mathbf{S}_j^{6k-2} \cdot \mathbf{a}_j^{2k-2} + \frac{2k-1}{2} a_{j-1}^{2k-1} + \frac{3}{4} k(2k-1) a_{j-2}^{2k} &= 0, \\
 \mathbf{S}_j^{6k+2} \cdot \mathbf{a}_j^{2k-1} + 3k a_j^{2k} + \frac{3}{4} k(2k+1) a_{j-2}^{2k+1} &= 0, \\
 \mathbf{S}_j^{6k+4} \cdot \mathbf{a}_j^{2k} + \frac{2k+1}{2} a_{j-1}^{2k+1} + \frac{3}{4} (2k+1)(k+1) a_{j-2}^{2k+2} &= 0, \\
 \mathbf{S}_j^{6k+8} \cdot \mathbf{a}_j^{2k+1} + 3(k+1) a_j^{2k+2} + \frac{3}{4} (k+1)(2k+3) a_{j-2}^{2k+3} &= 0,
 \end{aligned} \tag{C.77}$$

gdzie znów zmieniliśmy zapis na $a_{j,2k}^1 \rightarrow a_j^{2k}$ i $a_{j,2k+1}^2 \rightarrow a_j^{2k+1}$, ponieważ tym razem $a_{j,2k}^1$ zawsze występuje z parzystym indeksem $2k$, natomiast $a_{j,2k+1}^2$ zawsze występuje z nieparzystym indeksem $2k+1$. Łatwo teraz utożsamić wielkości podane w twierdzeniu 5 z parametrami relacji rekurencyjnej. Zarówno w przypadku parzystym jak i nieparzystym, musimy rozróżnić dwa podprzypadki, w zależności czy ostatnia rekurencja dotyczy współczynników a^κ z indeksem κ parzystym lub nieparzystym.

A zatem, dla równań (C.76) z ostatnią rekurencją o parzystym indeksie mamy

$$\begin{aligned}
 \alpha_t &= \begin{cases} 3t+4, & t \text{ nieparzyste,} \\ 3t+5, & t \text{ parzyste,} \end{cases} \\
 \chi_t &= \begin{cases} \frac{t+1}{2}, & t \text{ nieparzyste,} \\ \frac{3}{2}(t+1), & t \text{ parzyste,} \end{cases} \\
 \mu_t &= \frac{3}{8}(t+1)(t+2).
 \end{aligned} \tag{C.78}$$

Rozwiązania tego typu nazywamy rozwiązaniami z rodziny f_m^2 . Dla danego obciążenia N_{cut} rodzina f_m^2 liczy $d_m^2(N_{cut}) = \lfloor \frac{1}{2}(N_{cut} - 6m - 2) \rfloor$ rozwiązań postaci

$$\begin{aligned}
 |E, m, 2\rangle_{even} &= a_0 \Gamma(6m+6) \sum_{n=0}^{d_m^2} L_n^{6m+5}(2E) \left((f^\dagger a^\dagger a^\dagger) |n, 2m\rangle \right. \\
 &+ \left. \sum_{p=1}^m \left(\Gamma_{2m, 2m-2p+1}^{even} (f^\dagger a^\dagger) |n+3p-1, 2m-2p+1\rangle + \Gamma_{2m, 2m-2p}^{even} (f^\dagger a^\dagger a^\dagger) |n+3p, 2m-2p\rangle \right) \right),
 \end{aligned} \tag{C.79}$$

przy czym stałe $\Gamma_{x,y}^{even}$ są określone rekurencyjnym wzorem (C.73). Dla równań (C.76) z ostatnią rekurencją o nieparzystym indeksie mamy

$$\begin{aligned}\alpha_t &= \begin{cases} 3t + 4, & t \text{ nieparzyste,} \\ 3t + 5, & t \text{ parzyste,} \end{cases} \\ \chi_t &= \begin{cases} \frac{t+1}{2}, & t \text{ nieparzyste,} \\ \frac{3}{2}(t+1), & t \text{ parzyste,} \end{cases} \\ \mu_t &= \frac{3}{8}(t+1)(t+2).\end{aligned}\tag{C.80}$$

Rozwiązania tego typu nazywamy rozwiązaniami z rodziny f_m^1 . Dla danego obciążenia N_{cut} rodzina f_m^1 liczy $d_m^1(N_{cut}) = \lfloor \frac{1}{2}(N_{cut} - 6m - 4) \rfloor$ rozwiązań postaci

$$\begin{aligned}|E, m, 1\rangle_{even} &= a_0 \Gamma(6m + 8) \sum_{n=0}^{d_m^1} L_n^{6m+7}(2E) \left((f^\dagger a^\dagger) |n, 2m + 1\rangle \right. \\ &+ \left. \sum_{p=1}^m \left(\Gamma_{2m+1, 2m-2p}^{even} (f^\dagger a^\dagger a^\dagger) |n + 3p + 1, 2m - 2p\rangle + \Gamma_{2m+1, 2m-2p+1}^{even} (f^\dagger a^\dagger) |n + 3p, 2m - 2p + 1\rangle \right) \right),\end{aligned}\tag{C.81}$$

przy czym stałe $\Gamma_{x,y}^{even}$ są określone rekurencyjnym wzorem (C.73).

Analogicznie, utożsamiając wielkości podane w twierdzeniu 5 z parametrami relacji rekurencyjnej możemy napisać dla równań (C.77) z ostatnią rekurencją o parzystym indeksie

$$\begin{aligned}\alpha_t &= \begin{cases} 3t + 5, & t \text{ nieparzyste,} \\ 3t + 4, & t \text{ parzyste,} \end{cases} \\ \chi_t &= \begin{cases} \frac{3}{2}(t+1), & t \text{ nieparzyste,} \\ \frac{t+1}{2}, & t \text{ parzyste,} \end{cases} \\ \mu_t &= \frac{3}{8}(t+1)(t+2),\end{aligned}\tag{C.82}$$

Rozwiązania tego typu nazywamy rozwiązaniami z rodziny g_m^1 . Dla danego obciążenia N_{cut} rodzina g_m^1 liczy $d_m^1(N_{cut}) = \lfloor \frac{1}{2}(N_{cut} - 6m - 1) \rfloor$ rozwiązań postaci

$$\begin{aligned}|E, m, 1\rangle_{odd} &= a_0 \Gamma(6m + 5) \sum_{n=0}^{d_m^1} L_n^{6m+4}(2E) \left((f^\dagger a^\dagger) |n, 2m\rangle \right. \\ &+ \left. \sum_{p=1}^m \left(\Gamma_{2m, 2m-2p+1}^{odd} (f^\dagger a^\dagger a^\dagger) |n + 3p - 2, 2m - 2p + 1\rangle + \Gamma_{2m, 2m-2p}^{odd} (f^\dagger a^\dagger) |n + 3p, 2m - 2p\rangle \right) \right),\end{aligned}\tag{C.83}$$

przy czym stałe $\Gamma_{x,y}^{odd}$ są określone rekurencyjnym wzorem (C.73). Dla równań (C.77) z ostatnią

rekurencją o nieparzystym indeksie mamy

$$\begin{aligned}\alpha_t &= \begin{cases} 3t + 5, & t \text{ nieparzyste,} \\ 3t + 4, & t \text{ parzyste,} \end{cases} \\ \chi_t &= \begin{cases} \frac{3}{2}(t + 1), & t \text{ nieparzyste,} \\ \frac{t+1}{2}, & t \text{ parzyste,} \end{cases} \\ \mu_t &= \frac{3}{8}(t + 1)(t + 2),\end{aligned}\tag{C.84}$$

Rozwiązania tego typu nazywamy rozwiązaniami z rodziny g_m^2 . Dla danego obciążenia N_{cut} rodzina g_m^2 liczy $d_m^2(N_{cut}) = \lfloor \frac{1}{2}(N_{cut} - 6m - 5) \rfloor$ rozwiązań postaci

$$\begin{aligned}|E, m, 2\rangle_{odd} &= a_0 \Gamma(6m + 9) \sum_{n=0}^{d_m^2} L_n^{6m+8}(2E) \left((f^\dagger a^\dagger a^\dagger)|n, 2m + 1\rangle \right. \\ &+ \left. \sum_{p=1}^{m+1} \left(\Gamma_{2m+1, 2m-2p+2}^{odd}(f^\dagger a^\dagger)|n+3p-1, 2m-2p+2\rangle + \Gamma_{2m+1, 2m-2p+1}^{odd}(f^\dagger a^\dagger a^\dagger)|n+3p, 2m-2p+1\rangle \right) \right),\end{aligned}\tag{C.85}$$

przy czym stałe $\Gamma_{x,y}^{odd}$ są określone rekurencyjnym wzorem (C.73).

C.9 Wniosek 1

Wniosek 1. *Zbiór wszystkich dopuszczalnych wartości parametru x , dla których istnieje nietrywialne rozwiązanie obciążonych relacji rekurencyjnych Laguerre'a nie zależy od postaci współczynników mieszania χ i μ jeśli tylko współczynniki te nie zależą od indeksu j .*

Dowód. Postać $m + 1$ obciążonych relacji rekurencyjnych Laguerre'a, takich jak na przykład podane w założeniach twierdzeń 4 lub 5, ma szczególną cechę, mianowicie, i -ta relacja rekurencyjna zawiera wyrazy mieszające proporcjonalne tylko do współczynników j -tej relacji rekurencyjnej, gdzie $j > i$. Załóżmy że $\forall j > i$ wszystkie współczynniki opisane j -tą relację rekurencyjną znikają. Wtedy, i -ta relacja rekurencyjna staje się jednorodna i może być rozwiązana przy użyciu twierdzenia 1. Jak wynika z tego twierdzenia, możliwe wartości parametru x są dane równaniem

$$L_{\kappa_i+1}^{\alpha_i}(x) = 0,\tag{C.86}$$

z pewnym odpowiednim κ_i . Załóżmy teraz że x nie jest rozwiązaniem powyższego równania. Wtedy, współczynniki opisane relacją rekurencyjną, w myśl powyższych twierdzeń, muszą zniknąć. W takim przypadku, $(i - 1)$ -ta relacja rekurencyjna staje się jednorodna i może być rozwiązana z pomocą twierdzenia 1. Tak więc, zbiór możliwych wartości parametru x będzie dany poprzez sumę mnogościową zer dwóch równań,

$$L_{\kappa_i+1}^{\alpha_i}(x) = 0,\tag{C.87}$$

$$L_{\kappa_{i-1}+1}^{\alpha_{i-1}}(x) = 0.\tag{C.88}$$

Powtarzając indukcyjnie powyższe kroki, możemy wnioskować że zbiór wszystkich wartości parametru x dla których istnieje nietrywialne rozwiązanie dla układu $m + 1$ relacji rekurencyjnych Laguerre'a jest dany poprzez zera poniższego równania

$$\left(\prod_{p=0}^m L_{\kappa_p+1}^{\alpha_p}(x) \right) = 0. \quad (\text{C.89})$$

Na koniec zauważmy, że w obciętym układzie relacji rekurencyjnych Laguerre'a z założenia istnieje jedna jednorodna relacja rekurencyjna, która może być rozwiązana przy użyciu twierdzenia 1. \square

DODATEK D

ROZWIĄZANIA ANALITYCZNE W DYSKRETYZACJI SUPERŁADUNKÓW

Na początku rozdziału 5 zaproponowane zostały dwie możliwe dyskretyzacje. Różnią się one sposobem wprowadzenia obciążenia. W pierwszej z nich obcinana jest macierz Hamiltonianu, natomiast w drugiej obcinane są macierze superładunków, a z nich następnie wyliczana jest macierz Hamiltonianu. W rozdziale 6 zostały omówione analityczne rozwiązania otrzymane przy pomocy dyskretyzacji Hamiltonianu. W tym dodatku, chcemy przedyskutować analityczne rozwiązania otrzymane przy zastosowaniu dyskretyzacji superładunków. Zaczniemy od modelu z symetrią $SU(2)$, a następnie omówimy model z symetrią $SU(3)$ koncentrując się na przykładzie dwóch najprostszych rodzin rozwiązań w sektorach z $n_F = 0$ i $n_F = 1$. Naszym celem będzie zademonstrowanie mechanizmów odpowiedzialnych za powstanie degeneracji supersymetrycznej w dyskretyzacji superładunków, a nie wyliczenie pełnego rozwiązania zagadnienia własnego.

D.1 Model z symetrią $SU(2)$

Ogólne stany z sektora bozonowego oraz z jednym fermionem mogą być zapisane jako

$$|E\rangle_{n_F=0} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(E) \text{tr} (a^{\dagger 2})^k |0\rangle, \quad |E\rangle_{n_F=1} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(E) \text{tr} (f^{\dagger} a^{\dagger}) \text{tr} (a^{\dagger 2})^k |0\rangle, \quad (\text{D.1})$$

Z równań

$$Q^{\dagger} |E\rangle_{n_F=0} = \alpha |E\rangle_{n_F=1}, \quad Q |E\rangle_{n_F=1} = \beta |E\rangle_{n_F=0}, \quad (\text{D.2})$$

możemy wyprowadzić relacje rekurencyjne na współczynniki $a_k(E)$ oraz $b_k(E)$, przy czym po zmianie zmiennych

$$\alpha \rightarrow -i\sqrt{2}\alpha, \quad \beta \rightarrow -i\beta\sqrt{2}, \quad \alpha\beta = E \quad (\text{D.3})$$

otrzymujemy

$$a_k - (k+1)a_{k+1} = Eb_k, \quad k \geq 0, \quad (\text{D.4})$$

$$\frac{1}{2}(b_{k-1} - (k + \frac{3}{2})b_k) = a_k, \quad k \geq 0, \quad b_{-1} = 0, \quad (\text{D.5})$$

Dla skończonego obciążenia N_{cut} tylko współczynniki a_k dla $k < d(N_{cut})$ i b_k dla $k < d'(N_{cut})$ są dopuszczalne, przy czym stałe d i d' są dane wzorami

$$d = \left\lfloor \frac{1}{2}N_{cut} \right\rfloor + 1, \quad d' = \left\lfloor \frac{1}{2}(N_{cut} - 1) \right\rfloor + 1. \quad (\text{D.6})$$

Wartości stałych d i d' dla przykładowych N_{cut} ilustruje tabela D.1. Dla N_{cut} nieparzystego mamy taką samą ilość stanów w obydwu sektorach, natomiast dla N_{cut} parzystego w sektorze bozonowym jest o jeden stan więcej niż w sektorze z $n_F = 1$. Obcięte relacje rekurencyjne (D.4) oraz (D.5) otrzymujemy poprzez ograniczenie się do pierwszych d współczynników a_k oraz pierwszych d' współczynników b_k . W celu otrzymania rekurencji wyłącznie na a_k lub b_k usuwamy zmienne jednego typu za pomocą równań (D.4) lub (D.5).

n_B	a_k	b_k
0	a_0	-
1	-	b_0
2	a_1	-
3	-	b_1
4	a_2	-
\vdots		
nieparzyste	-	b_{η_b}
parzyste	a_{η_a}	-

n_B	a_k	b_k
0	a_0	-
1	-	b_0
2	a_1	-
3	-	b_1
4	a_2	-
5	-	b_2
\vdots		
parzyste	a_{η_1}	-
nieparzyste	-	b_{η_b}

N_{cut}	$n_F = 0$	$n_F = 1$
0	1	0
1	1	1
2	2	1
3	2	2
\vdots		
10	6	5
11	6	6
\vdots		

Tabela D.1: Ilość stanów w bazie Focka dla grupy symetrii $SU(2)$.

W przypadku gdy N_{cut} jest parzyste wszystkie równania ze zbioru (D.4) pozostają niezmienione. Ostatnie równanie ma zatem postać

$$\frac{i}{\sqrt{2}}(a_{d-2} - (d-1) a_{d-1}) = \alpha b_{d'-1}. \quad (D.7)$$

Wprowadzenie obcięcia zmieniło formę ostatniego równania ze zbioru (D.5), które otrzymuje postać

$$\frac{i}{2\sqrt{2}} b_{d'-1} = \beta a_{d-1}. \quad (D.8)$$

Pozostałe równania nie zmieniają się. Po wyrugowaniu współczynników jednego typu otrzymujemy niezależne relacje rekurencyjne na współczynniki a_k oraz b_k w dyskretyzacji superładunków. Okazuje się, że relacja rekurencyjna na współczynniki b_k ma taką samą formę jak w dyskretyzacji Hamiltonianu opisanej w rozdziale 6. A zatem, w sektorze fermionowym możemy przepisać zarówno rozwiązania jak i warunek kwantyzacji

$$L_{d'}^{\frac{3}{2}}(2E) = 0. \quad (D.9)$$

Modyfikacja (D.8) powoduje natomiast zmianę relacji rekurencyjnej na współczynniki a_k . W porównaniu z równaniami obliczonymi w dyskretyzacji Hamiltonianu, różnica pojawia się w ostatnim równaniu, które jest jednocześnie warunkiem kwantyzacji w sektorze bozonowym. Otrzymujemy

$$EL_{d-1}^{\frac{3}{2}}(2E) = 0. \quad (D.10)$$

Dodatkowy czynnik E powoduje, że widmo w sektorze bozonowym zawiera energię 0. Stan własny odpowiadający zerowej energii własnej jest dokładnie postaci wyprowadzonej w [50].

Dla parzystego obcięcia $d-1 = d'$, wobec czego widma w obydwu sektorach są takie same, z dodatkową zerową energią własną w sektorze bozonowym. Wzory na stany własne pozostają

niezmienione w porównaniu z dyskretyzacją Hamiltonianu, a zatem

$$\begin{aligned} a_j(E) &= a_0 \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) L_j^{\frac{1}{2}}(2E), & 0 \leq j < d-1, \\ b_j(E) &= b_0 \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) L_j^{\frac{3}{2}}(2E), & 0 \leq j < d'. \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

Dla N_{cut} nieparzystego, ilość stanów w obydwu sektorach jest taka sama. Wprowadzenie obciążenia modyfikuje ostatnie równanie ze zbioru równań (D.4), natomiast wszystkie równania (D.5) pozostają niezmienione. W konsekwencji, relacje rekurencyjne na współczynniki a_k będą identyczne jak w przypadku relacji otrzymanych przy użyciu dyskretyzacji Hamiltonianu. Zatem, warunek kwantyzacji w sektorze bozonowym przyjmie postać

$$L_d^{\frac{1}{2}}(2E) = 0. \quad (\text{D.12})$$

Modyfikacja równań rekurencyjnych na współczynniki b_k , zmieni warunek kwantyzacji w sektorze fermionowym, które przyjmie postać

$$L_{d'}^{\frac{1}{2}}(2E) = 0. \quad (\text{D.13})$$

Dla nieparzystego obciążenia, $d = d'$, dlatego też widma w obydwu sektorach są identyczne. Stany własne są dane wzorami

$$\begin{aligned} a_j(E) &= a_0 \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) L_j^{\frac{1}{2}}(2E), & 0 \leq j < d, \\ b_j(E) &= b_0 \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) L_j^{\frac{3}{2}}(2E), & 0 \leq j < d'. \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

Tym razem ilość stanów w obydwu sektorach nie pozwala na zmieszczenie się niezdegenerowanego stanu.

Podsumowując, pokazaliśmy, że w dyskretyzacji superładunków otrzymujemy dokładną degenerację supersymetryczną dla każdego skończonego obciążenia. Rozszerzymy teraz powyższe rozumowanie dla modelu z symetrią $SU(3)$.

D.2 Model z symetrią $SU(3)$ - sektory z $n_F = 0$ oraz $n_F = 1$

Ogólny stan $|E\rangle_{n_F=0}$ w sektorze bozonowym i $|E\rangle_{n_F=1}$ w sektorze z $n_F = 1$ rozkładamy w bazie jako

$$\begin{aligned} |E\rangle_{n_F=0} &= \sum_{2j+3k \leq N_{cut}} a_{j,k}(E) |j, k\rangle, \\ |E\rangle_{n_F=1} &= \sum_{2j+3k \leq N_{cut}-1} b_{j,k}(E) \text{tr}(f^\dagger a^\dagger) |j, k\rangle + \sum_{2j+3k \leq N_{cut}-2} c_{j,k}(E) \text{tr}(f^\dagger a^\dagger a^\dagger) |j, k\rangle. \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

Z równań dla superładunków

$$Q^\dagger |E\rangle_{n_F=0} = \alpha |E\rangle_{n_F=1}, \quad Q |E\rangle_{n_F=1} = \beta |E\rangle_{n_F=0}, \quad (\text{D.16})$$

otrzymujemy częściowe relacje rekurencyjne, które po zmianie zmiennych

$$\alpha \rightarrow -i\sqrt{2}\alpha, \quad \beta \rightarrow -i\beta\sqrt{2}, \quad \alpha\beta = E, \quad (\text{D.17})$$

przyjmują postać (dla $j \geq 0$ i $k \geq 0$)

$$\begin{aligned} a_{j,k} - (j+1)a_{j+1,k} &= E b_{j,k}, \\ -\frac{3}{2}(k+1)a_{j,k+1} &= E c_{j,k}, \\ \frac{1}{2}(b_{j-1,k} + c_{j,k-1}) - \left(\frac{1}{2}j + \frac{3}{4}k + 2\right)b_{j,k} - \frac{1}{2}(j+1)c_{j+1,k-1} - \frac{1}{8}(k+1)c_{j-2,k+1} &= a_{j,k}, \end{aligned} \quad (\text{D.18})$$

Podczas analizy modelu z grupą symetrii $SU(2)$ przekonaliśmy się, że dyskretyzacja superładunków nie wpływa na postać stanów własnych. Modyfikacji ulegają natomiast warunki kwantyzacji, a zatem uwagę należy skoncentrować na równaniach brzegowych.

Rozwiązania otrzymane przy użyciu dyskretyzacji Hamiltonianu grupują się w rodziny numerowane maksymalną liczbą cegiełek potrójnych. Analizę w dyskretyzacji superładunków przeprowadzimy ustalając maksymalną wartość indeksu k (niezależnie od obciążenia), a następnie badając wpływ obciążenia na brzegowe równania rekurencyjne w zmiennej j .

Rozpocznijmy od najprostszego przypadku z $k = 0$. Liczbę współczynników $a_{k,0}$ oznaczamy jako $\eta_a(N_{cut})$, natomiast liczbę współczynników $b_{k,0}$ jako $\eta_b(N_{cut})$. Mamy,

$$\eta_a(N_{cut}) \equiv 1 + \lfloor \frac{1}{2}N_{cut} \rfloor, \quad \eta_b(N_{cut}) \equiv 1 + \lfloor \frac{1}{2}(N_{cut} - 1) \rfloor. \quad (\text{D.19})$$

Dla danego obciążenia liczby współczynników $a_{k,0}$ i $b_{k,0}$ są równe analogicznym liczbom dla modelu $SU(2)$, a zatem są przedstawione w tabeli D.1. Rekurencje (D.18) redukują się do postaci,

$$a_{j,0} - (j+1)a_{j+1,0} = E b_{j,0}, \quad (\text{D.20})$$

$$\frac{1}{2}(b_{j-1,0} - (j+4)b_{j,0}) = a_{j,0}, \quad (\text{D.21})$$

będącej minimalną modyfikacją rekurencji dla modelu $SU(2)$. Możemy zatem powtórzyć rozumowanie przedstawione w poprzednim podrozdziale.

Dla parzystego obciążenia brzegowe równanie (D.20) jest niezaburzone i ma postać

$$a_{\eta_a-2,0} - (\eta_a - 1)a_{\eta_a-1,0} = E b_{\eta_b-1,0}, \quad (\text{D.22})$$

natomiast ostatnia równość (D.21) po modyfikacji jest równa

$$\frac{1}{2}b_{\eta_b-1,0} = a_{\eta_a-1,0}. \quad (\text{D.23})$$

A zatem, warunki kwantyzacji przyjmują postać

$$EL_{\eta_a-1}^4(2E) = 0 \text{ w sektorze bozonowym oraz } L_{\eta_b}^4(2E) = 0 \text{ w sektorze z } n_F = 1. \quad (\text{D.24})$$

Wzory na stany własne pozostają niezmienione w porównaniu z dyskretyzacją Hamiltonianu, a więc

$$\begin{aligned} a_{j,0}(E) &= a_0 \Gamma(4) L_j^3(2E), & 0 \leq j < \eta_a - 1, \\ b_{j,0}(E) &= b_0 \Gamma(5) L_j^4(2E), & 0 \leq j < \eta_b, \end{aligned} \quad (\text{D.25})$$

Tak więc, dla parzystego N_{cut} widma w obydwu sektorach są takie same z wyjątkiem dodatkowej zerowej energii w sektorze bozonowym.

Identycznie jak dla modelu $SU(2)$, dla N_{cut} nieparzystego, w obydwu sektorach otrzymujemy takie same warunki kwantyzacji, tzn.

$$EL_{\eta_a}^3(2E) = 0 \text{ w sektorze bozonowym oraz } L_{\eta_b}^3(2E) = 0 \text{ w sektorze z } n_F = 1, \quad (\text{D.26})$$

natomiast stany własne są dane wzorami,

$$\begin{aligned} a_{j,0}(E) &= a_0 \Gamma(4) L_j^3(2E), & 0 \leq j < \eta_a, \\ b_{j,0}(E) &= b_0 \Gamma(5) L_j^4(2E), & 0 \leq j < \eta_b. \end{aligned} \quad (\text{D.27})$$

A zatem, otrzymujemy degeneracje supersymetryczną, lecz brak jest niezdegenerowanego stanu o zerowej energii.

Rozważmy teraz sytuację gdy $k \leq 1$. Rekurencje (D.18) redukują się do postaci,

$$\begin{aligned} a_{j,1} - (j+1)a_{j+1,1} &= E b_{j,1}, \\ \frac{1}{2}(b_{j-1,1} + c_{j,0}) - \left(\frac{1}{2}j + \frac{3}{4} + 2\right)b_{j,0} - \frac{1}{2}(j+1)c_{j+1,0} &= a_{j,1}, \\ -\frac{3}{2}a_{j,1} &= E c_{j,0}, \\ a_{j,0} - (j+1)a_{j+1,0} &= E b_{j,0}, \\ \frac{1}{2}(b_{j-1,0} - (j+4)b_{j,0}) &= a_{j,0}. \end{aligned} \quad (\text{D.28})$$

Ostatnie dwa równania odsprzęgają się, gdyż mają inną parzystość. A zatem wystarczy rozważyć układ równań,

$$\begin{aligned} a_{j,1} - (j+1)a_{j+1,1} &= E b_{j,1}, \\ \frac{1}{2}(b_{j-1,1} + c_{j,0}) - \left(\frac{1}{2}j + \frac{3}{4} + 2\right)b_{j,0} - \frac{1}{2}(j+1)c_{j+1,0} &= a_{j,1}, \\ -\frac{3}{2}a_{j,1} &= E c_{j,0}. \end{aligned} \quad (\text{D.29})$$

Zanim jednak przyjrzymy się modyfikacji tych równań poprzez wprowadzenie obciążenia znajdziemy ich rozwiązania w granicy nieskończonego obciążenia. Zatem, wyrugowując zmienne $b_{j,1}$ i $c_{j,0}$ otrzymujemy równania rekurencyjne na współczynniki $a_{k,1}$, które można rozwiązać otrzymując,

$$a_{k,1} = a_{0,1} \Gamma(7) L_k^6(2E). \quad (\text{D.30})$$

n_B	$a_{k,1}$	$b_{k,1}$	$c_{k,0}$
0	-	-	-
1	-	-	-
2	-	-	$c_{0,0}$
3	$a_{0,1}$	-	-
4	-	$b_{0,1}$	$c_{1,0}$
5	$a_{1,1}$	-	-
6	-	$b_{1,1}$	$c_{2,0}$
7	$a_{2,1}$	-	-
8	-	$b_{2,1}$	$c_{3,0}$
9	$a_{3,1}$	-	-
⋮			
⋮			

n_B	$a_{k,2}$	$b_{k,2}$	$c_{k,1}$
0	-	-	-
⋮			
4	-	-	-
5	-	-	$c_{0,1}$
6	$a_{0,2}$	-	-
7	-	$b_{0,2}$	$c_{1,1}$
8	$a_{1,2}$	-	-
9	-	$b_{1,2}$	$c_{2,1}$
10	$a_{2,2}$	-	-
11	-	$b_{2,2}$	$c_{3,1}$
12	$a_{3,2}$	-	-
⋮			

Tabela D.2: Ilość stanów w bazie dla $k = 1$ (lewa tabela) i $k = 2$ (prawa tabela).

Rozwiązując układ (D.29) ze względu na zmienne $b_{k,1}$ i $c_{k,0}$ otrzymujemy,

$$b_{k,1} = b_{0,1}\Gamma(7)L_k^7(2E), \quad c_{k,0} = c_{0,0}\frac{3}{2}\Gamma(7)L_k^6(2E). \quad (\text{D.31})$$

Zauważmy, że rozwiązanie bozonowe (D.30) jest równe rozwiązaniu $|E, 0\rangle_{odd}^{n_F=0}$ wyprowadzone-
mu w dyskretyzacji Hamiltonianu. Z kolei, rozwiązanie fermionowe (D.31) odpowiada dokład-
nie kombinacji liniowej rozwiązań $\frac{1}{7}|E, 0, 1\rangle_{even}^{n_F=1} - \frac{3}{2}|E, 0, 2\rangle_{even}^{n_F=1}$, przedstawionej w rozdziale
6.5.1. A zatem, możemy stwierdzić, że w dyskretyzacji superładunków znajdujemy bezpośrednio
stany tworzące supermultiplety.

Zbadamy teraz jaki wpływ na tę dyskusję ma wprowadzenie obciążenia. Liczby współczyn-
ników $a_{k,1}$, $b_{k,1}$ i $c_{k,0}$ oznaczamy odpowiednio, jako $\eta_a(N_{cut})$, $\eta_b(N_{cut})$ i $\eta_c(N_{cut})$. Mamy,

$$\eta_a(N_{cut}) \equiv 1 + \lfloor \frac{1}{2}(N_{cut} - 3) \rfloor, \quad \eta_b(N_{cut}) \equiv 1 + \lfloor \frac{1}{2}(N_{cut} - 4) \rfloor, \quad \eta_c(N_{cut}) \equiv 1 + \lfloor \frac{1}{2}(N_{cut} - 2) \rfloor. \quad (\text{D.32})$$

Dla przykładowego obciążenia obecne współczynniki $a_{k,1}$, $b_{k,1}$ i $c_{k,0}$ są przedstawione w tabeli
D.2.

Wprowadzając następnie parzyste obciążenie N_{cut} , brzegowe równania mają postać

$$\begin{aligned} a_{\eta_a-1,1} - \eta_a a_{\eta_a,1} &= E b_{\eta_b,1}, \\ -\frac{3}{2} a_{\eta_a,1} &= E c_{\eta_c,0}, \\ \frac{1}{2}(b_{\eta_b,1} + c_{\eta_c,0}) &= a_{\eta_a,1}. \end{aligned} \quad (\text{D.33})$$

Dwa pierwsze równania nie zostały zmodyfikowane poprzez wprowadzenie obciążenia, natomiast
ostatnie równanie zostało zmienione. Analogicznie jak w poprzednich przypadkach, prowadzi

to do zmiany w warunku kwantyzacji, tym razem jednak w *obydwu* sektorach. W sektorze bozonowym otrzymamy mianowicie warunek,

$$\frac{1}{2}L_{\eta_a-1}^6(2E) - \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{2}\eta_a - E\right)L_{\eta_a}^6(2E) = 0. \quad (\text{D.34})$$

Nie można go sprowadzić do prostszej postaci wykorzystując jedną z relacji rekurencyjnych na wielomiany Laguerre'a, tak jak to miało miejsce w przypadku rozwiązań z $k = 0$. Wynika z tego, że dla rodziny rozwiązań $k = 1$ nie istnieją rozwiązania o zerowej energii.

W sektorze fermionowym otrzymamy warunek kwantyzacji identyczny z (D.34). A zatem, pokazaliśmy, że dla rodziny rozwiązań z $k = 1$ widma w obydwu sektorach są identyczne. Wzory na stany własne pozostają niezmienione w stosunku do wzorów wyprowadzonych przy użyciu pierwszej dyskretyzacji. A zatem w mocy pozostaje dyskusja supermultipletów 6.5.1. Z tą różnicą, że *w sektorze fermionowym otrzymujemy bezpośrednio wzory na superpartnerów stanów bozonowych*, bez konieczności szukania odpowiednich kombinacji liniowych.

Analogiczna sytuacja zaistnieje dla rozwiązań z $k > 1$. A zatem w dyskretyzacji superładunków dla skończonego obciążenia nie pojawią rozwiązania o zerowej energii inne niż należące do rodziny f_0 . Jest to zgodne z konkluzjami otrzymanymi podczas analizy normalizacji rozwiązań dyskretyzacji Hamiltonianu w granicy kontinuum przedstawionej w dodatku E.

Powyższe wyprowadzenie można uogólnić zarówno dla rozwiązań z wyższych rodzin rozwiązań, jak i w wyższych sektorach fermionowych. Z powodu większej liczby cegiełek fermionowych obliczenia stają się bardziej żmudne, jednak nie pojawiają się żadne jakościowe zmiany w strukturze i w mechanizmie działania dyskretyzacji superładunków.

DODATEK E

WŁASNOŚCI ROZWIĄZAŃ MODELI Z SYMETRIĄ $SU(2)$ I $SU(3)$

E.1 Własności rozwiązań modelu $SU(2)$

Obecnie pokażemy, że rozwiązania modelu $SU(2)$ spełniają warunek ortogonalności, są unormowane zgodnie z normalizacją fal płaskich oraz że zbiór rozwiązań $\{|E\rangle\}$ jest poprawną bazą przestrzeni Hilberta. Dodatkowo wyprowadzimy funkcje falowe odpowiadające tym rozwiązaniom w reprezentacji położenia.

E.1.1 Ortogonalność i normalizacja

Rozwiązania z sektora bozonowego $|E\rangle_{n_F=0}$ oraz $|E'\rangle_{n_F=0}$ mają postać

$$|E\rangle_{n_F=0} = e^{-E} \sum_{n=0}^{d-1} L_n^{\frac{1}{2}}(2E)|n\rangle, \quad |E'\rangle_{n_F=1} = e^{-E} \sqrt{2E} \sum_{n=0}^{d'-1} L_n^{\frac{3}{2}}(2E)(f^\dagger a^\dagger)|n\rangle. \quad (\text{E.1})$$

Iloczyny skalarne tych stanów zapisujemy jako

$$\langle E|E'\rangle_{n_F=0} = e^{-(E+E')} \sum_{n,m=0}^d \mathcal{L}_n^{\frac{1}{2}}(2E) \mathcal{L}_m^{\frac{1}{2}}(2E') \frac{1}{1} \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(m + \frac{3}{2})} \langle n|m\rangle, \quad (\text{E.2})$$

natomiast dla stanów $|E\rangle_{n_F=1}$ oraz $|E'\rangle_{n_F=1}$ z sektora z $n_F = 1$,

$$\langle E|E'\rangle_{n_F=1} = \sqrt{4EE'} e^{-(E+E')} \sum_{n,m=0}^{d'-1} \mathcal{L}_n^{\frac{3}{2}}(2E) \mathcal{L}_m^{\frac{3}{2}}(2E') \frac{1}{1} \frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(m + \frac{5}{2})} \langle n|(fa)(f^\dagger a^\dagger)|m\rangle, \quad (\text{E.3})$$

gdzie $d = \lfloor \frac{1}{2} N_{cut} \rfloor + 1$ i $d' = \lfloor \frac{1}{2} (N_{cut} - 1) \rfloor + 1$. Następnie obliczamy iloczyny skalarne stanów bazowych,

$$\begin{aligned} \langle m|m\rangle &= \Gamma(m+1) \Gamma(m + \frac{3}{2}) \equiv (\mathcal{N}_m^{n_F=0})^2, \\ \langle m|(fa)(f^\dagger a^\dagger)|m\rangle &= \Gamma(m+1) \Gamma(m + \frac{5}{2}) \equiv (\mathcal{N}_m^{n_F=1})^2. \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

Zgodnie ze wzorem (A.10) możemy obliczyć skończoną sumę w powyższych wzorach otrzymując

$$\langle E|E'\rangle_{n_F=0} = e^{-(E+E')} \frac{d!}{\Gamma(d + \frac{1}{2})} \frac{1}{2(E-E')} \left[\mathcal{L}_{d-1}^{\frac{1}{2}}(2E) \mathcal{L}_d^{\frac{1}{2}}(2E') - \mathcal{L}_d^{\frac{1}{2}}(2E) \mathcal{L}_{d-1}^{\frac{1}{2}}(2E') \right], \quad (\text{E.5})$$

$$\langle E|E'\rangle_{n_F=1} = e^{-(E+E')} \frac{d!}{\Gamma(d' + \frac{3}{2})} \frac{\sqrt{EE'}}{E-E'} \left[\mathcal{L}_{d'-1}^{\frac{3}{2}}(2E) \mathcal{L}_{d'}^{\frac{3}{2}}(2E') - \mathcal{L}_{d'}^{\frac{3}{2}}(2E) \mathcal{L}_{d'-1}^{\frac{3}{2}}(2E') \right]. \quad (\text{E.6})$$

Wobec tego, biorąc pod uwagę warunki kwantowania, $\mathcal{L}_d^{\frac{1}{2}}(2E') = 0$ i $\mathcal{L}_d^{\frac{1}{2}}(2E) = 0$, w sektorze bozonowym oraz, $\mathcal{L}_{d'}^{\frac{3}{2}}(2E') = 0$ i $\mathcal{L}_{d'}^{\frac{3}{2}}(2E) = 0$, w sektorze z $n_F = 1$,

$$\begin{aligned} \langle E|E'\rangle_{n_F=0} &= 0, \quad \text{dla } E \neq E', \\ \langle E|E'\rangle_{n_F=1} &= 0, \quad \text{dla } E \neq E'. \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

Analiza ortogonalności rozwiązań w granicy kontinuum jest bardziej skomplikowana. Rozwiązania w granicy nieskończonego obciążenia mają postać

$$|E\rangle_{n_F=0} = e^{-E} \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{\frac{1}{2}}(2E)|n\rangle, \quad |E\rangle_{n_F=1} = e^{-E} \sqrt{2E} \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{\frac{3}{2}}(2E)(f^\dagger a^\dagger)|n\rangle, \quad (\text{E.8})$$

gdzie E może być dowolną dodatnią liczbą całkowitą. Korzystając ze wzoru (A.11) dostajemy

$$\langle E|E'\rangle_{n_F} = e^{-(E+E')} (4EE')^{-\frac{1}{4}} \lim_{z \rightarrow 1^-} (1-z)^{-1} \exp\left(-z \frac{2(E+E')}{1-z}\right) z^{-\frac{\sigma}{2}} I_\sigma\left(\frac{4\sqrt{EE'z}}{1-z}\right). \quad (\text{E.9})$$

Wprowadzając nową zmienną $\epsilon = \frac{1}{4}(1-z)$ oraz wykorzystując asymptotyczną formę funkcji Bessela dla dużego argumentu,

$$I_\alpha(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}, \quad \text{dla dużego } x, \quad (\text{E.10})$$

otrzymujemy

$$\langle E|E'\rangle_{n_F} = \frac{1}{2} (4EE')^{-\frac{1}{2}} \Gamma(\sigma+1)^2 \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\sqrt{\pi\epsilon}} e^{-\frac{(\sqrt{2E}-\sqrt{2E'})^2}{4\epsilon}}. \quad (\text{E.11})$$

Dzięki znanej parametryzacji dystrybucji delty Diraca,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\sqrt{\pi\epsilon}} e^{-\frac{x^2}{4\epsilon}} = \delta(x), \quad (\text{E.12})$$

(E.11) redukuje się do postaci

$$\langle E|E'\rangle_{n_F} = \frac{1}{2} k^{-2} \delta(k-k'), \quad (\text{E.13})$$

gdzie wprowadziliśmy pędy \vec{k} oraz \vec{k}' i ich moduły k, k' równe $2E = |\vec{k}|^2 = k^2$ oraz $2E' = |\vec{k}'|^2 = k'^2$.

Pokazaliśmy zatem, że stany własne o różnej energii są do siebie ortogonalne zarówno dla skończonego obciążenia jak i w granicy kontinuum. W obydwóch sektorach stany mają taką samą normalizację. Jej poprawność możemy sprawdzić poprzez ustalenie energii E' i wycałkowanie po E . Uwzględniając jacobian zmiany zmiennych do zmiennych sferycznych, otrzymujemy wynik 2π .

E.1.2 Funkcje falowe

W przypadku modelu $SU(2)$ możemy jawnie obliczyć transformatę Fouriera stanów o energii $|E\rangle$, tzn. dla funkcji falowej $\langle n|E\rangle$ definiujemy

$$\langle n|R\rangle \equiv n!(2\pi)^{-\frac{3}{2}} \iiint_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}_n^{\frac{1}{2}}(k^2) e^{-\frac{1}{2}k^2} e^{i(k_x r_x + k_y r_y + k_z r_z)} dk_x dk_y dk_z, \quad (\text{E.14})$$

przy czym $2R = |\vec{r}|^2 = r^2$. W wyniku otrzymujemy stany o określonym położeniu $|R\rangle$. Zgodnie z oczekiwaniem, postać funkcjonalna $|R\rangle$ jest taka sama jak stanów $|E\rangle$,

$$|R\rangle_{n_F=0} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n L_n^{\frac{1}{2}}(2R) e^{-\frac{1}{2}r^2} |n\rangle, \quad (\text{E.15})$$

gdzie czynnik $(-1)^n$ pochodzi z transformaty Fouriera. Sugerując się tym wynikiem postulujemy stan odpowiadający $|E\rangle_{n_F=1}$,

$$|R\rangle_{n_F=1} = \sqrt{2R} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n L_n^{\frac{3}{2}}(2R) e^{-\frac{1}{2}r^2} (f^\dagger a^\dagger) |n\rangle. \quad (\text{E.16})$$

Operator jedynki w sektorach bozonowym i z jednym kwantem fermionowym można zapisać jako

$$\mathcal{I}_{n_F=0} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(\mathcal{N}_m^{n_F=0})^2} |m\rangle \langle m|, \quad \mathcal{I}_{n_F=1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(\mathcal{N}_m^{n_F=1})^2} (f^\dagger a^\dagger) |m\rangle \langle m| (fa), \quad (\text{E.17})$$

gdzie stała normalizacji $(\mathcal{N}_m^{n_F})^2$ jest dana wzorami (E.4). Chcąc obliczyć funkcję falową w reprezentacji położenia zapisujemy

$$\begin{aligned} {}_{n_F=0}\langle R|E\rangle_{n_F=0} &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{{}_{n_F=0}\langle R|m\rangle \langle m|E\rangle_{n_F=0}}{(\mathcal{N}_m^{n_F=0})^2}, \\ {}_{n_F=1}\langle R|E\rangle_{n_F=1} &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{{}_{n_F=1}\langle R|m\rangle \langle m|E\rangle_{n_F=1}}{(\mathcal{N}_m^{n_F=1})^2}. \end{aligned} \quad (\text{E.18})$$

Podstawiając jawne wyrażenia na rozwinięcia stanów własnych w bazie otrzymujemy po wykonaniu sumy

$$\begin{aligned} {}_{n_F=0}\langle R|E\rangle_{n_F=0} &= \mathcal{N}_0 \frac{\sin kr}{kr}, \\ {}_{n_F=1}\langle R|E\rangle_{n_F=1} &= \mathcal{N}_1 \left(\frac{\sin kr}{(kr)^2} - \frac{\cos kr}{kr} \right). \end{aligned} \quad (\text{E.19})$$

Są to rozwiązania Claudsona i Halperna. \mathcal{N}_0 i \mathcal{N}_1 są nieistotnymi czynnikami normalizacyjnymi. Zgodność uzyskaliśmy dzięki poprawnemu uwzględnieniu dodatkowego czynnika normalizacyjnego $k = \sqrt{2E}$ w sektorze z $n_F = 1$.

Bezpośrednią konsekwencją tego faktu jest brak fermionowego stanu o zerowej energii, gdyż jego norma wynosi zero.

E.1.3 Zupełność

Zupełność pokażemy wykazując, że macierz transformacji zbioru stanów bazowy w zbiór rozwiązań jest nieosobliwa. We wstępie przekonaliśmy, że stany ba jest poprawną bazą w przestrzeni Hilberta, wynika z powyższego że zbiór rozwiązań również jest poprawną bazą.

Dla skończonego obciążenia macierz przejścia z bazy Focka do bazy tworzonej przez rozwiązania opisane powyżej jest postaci

$$\begin{pmatrix} |E_1\rangle \\ |E_2\rangle \\ \vdots \\ |E_m\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_0^\alpha(2E_1) & L_1^\alpha(2E_1) & \dots & L_{m-1}^\alpha(2E_1) \\ L_0^\alpha(2E_2) & L_1^\alpha(2E_2) & \dots & L_{m-1}^\alpha(2E_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ L_0^\alpha(2E_m) & L_1^\alpha(2E_m) & \dots & L_{m-1}^\alpha(2E_m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |0\rangle \\ |1\rangle \\ \vdots \\ |m-1\rangle \end{pmatrix}$$

gdzie $\alpha = \frac{1}{2}$ dla rozwiązań z sektora bozonowego natomiast $\alpha = \frac{3}{2}$ dla rozwiązań z sektora $n_F = 1$. Energie E_i są dane poprzez warunek kwantyzacji $\mathcal{L}_m^\alpha(E) = 0$. Zbiór rozwiązań $\{|E\rangle\}$ będzie poprawną bazą jeśli macierz przejścia od bazy Focka będzie nieosobliwa. Można pokazać że wyznacznik tej macierzy jest równy wyznacznikowi Vandermonde'a względem energii E_i . Każdy wielomian $\mathcal{L}_n^\alpha(E)$ można zapisać jako

$$\mathcal{L}_n^\alpha(E) = \frac{1}{n!} E^n + \sum_{k=0}^{n-1} c_{n,k} \mathcal{L}_k^\alpha(E) \quad (\text{E.20})$$

gdzie $c_{n,k}$ są pewnymi stałymi. Tak więc, dodając do każdej kolumny odpowiednią kombinację liniową poprzedzających ją kolumn, zaczynając od ostatniej, a kończąc na drugiej, otrzymamy równoważny wyznacznik postaci

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} & \frac{1}{\Gamma(\alpha+2)} 2E_1 & \frac{1}{2\Gamma(\alpha+3)} (2E_1)^2 & \dots & \frac{1}{(m-1)!\Gamma(\alpha+m)} (2E_1)^{m-1} \\ \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} & \frac{1}{\Gamma(\alpha+2)} 2E_2 & \frac{1}{2\Gamma(\alpha+3)} (2E_2)^2 & \dots & \frac{1}{(m-1)!\Gamma(\alpha+m)} (2E_2)^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} & \frac{1}{\Gamma(\alpha+2)} 2E_m & \frac{1}{2\Gamma(\alpha+3)} (2E_m)^2 & \dots & \frac{1}{(m-1)!\Gamma(\alpha+m)} (2E_m)^{m-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\prod_{i=0}^{m-1} \frac{1}{i! \Gamma(\alpha+1+i)} \right) \prod_{1 \leq i < j \leq m} (2E_j - 2E_i) \quad (\text{E.21})$$

Ponieważ E_i są zerami wielomianu $\mathcal{L}_m^\alpha(E)$, z definicji są różne, a więc i odpowiadający wyznacznik Vandermonde'a jest niezerowy.

Aby otrzymać analogiczny wynik w granicy kontinuum, należy pokazać że w granicy nieskończonego stopnia, wielomiany Laguerre'a posiadają wyłącznie pojedyncze zera. Można to łatwo zobaczyć wykorzystując następujący związek

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\alpha} \mathcal{L}_n^\alpha\left(\frac{z}{n}\right) = z^{-\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(2\sqrt{z}). \quad (\text{E.22})$$

Funkcja Bessela $J_\alpha(2\sqrt{z})$ posiada przeliczalnie wiele, pojedynczych miejsc zerowych. Wynika z tego że w granicy kontinuum zera wielomianów Laguerre'a pozostają zerami pojedynczymi, wobec czego odpowiadający, nieskończony wyznacznik Vandermonde'a będzie niezerowy. Oznacza to że macierz przejścia od bazy Focka do bazy rozwiązań jest nieosobliwa, również w granicy kontinuum.

E.2 Własności rozwiązań modelu $SU(3)$

Obecnie uogólnimy rachunki przedstawione dla modelu $SU(2)$ do przypadku modelu $SU(3)$.

E.2.1 Ortogonalność i normalizacja

W celu sprawdzenia ortogonalności rozwiązań konieczne jest obliczenie iloczynów skalarnych stanów bazowych. Niestety nie ma ogólnego wzoru podającego wartości takich iloczynów skalarnych. Poniżej podajemy przykładowe rezultaty,

$$\begin{aligned}
 \langle n, 0 | m, 0 \rangle &= \delta_{mn} \frac{1}{6} \Gamma(n+1) \Gamma(n+4), \\
 \langle n, 2 | m, 2 \rangle &= \delta_{mn} \frac{1}{1728} \Gamma(n+1) \Gamma(n+7) (n^3 + 15n^2 + 101n + 255), \\
 \langle n, 4 | m, 4 \rangle &= \delta_{mn} \frac{1}{995328} \Gamma(n+1) \Gamma(n+10) (7n^6 + 255n^5 + 4087n^4 \\
 &\quad + 38157n^3 + 236710n^2 + 960192n + 1838880), \\
 \langle n, 2 | m+3, 0 \rangle &= \delta_{mn} \frac{1}{144} \Gamma(n+4) \Gamma(n+7), \\
 \langle n, 4 | m+6, 0 \rangle &= \delta_{mn} \frac{1}{1728} \Gamma(n+7) \Gamma(n+10), \\
 \langle n, 4 | m+3, 2 \rangle &= \delta_{mn} \frac{1}{82944} \Gamma(n+4) \Gamma(n+10) (5n^3 + 129n^2 + 1234n + 4200),
 \end{aligned} \tag{E.23}$$

Rozwiązania analityczne sugerują sposób konstrukcji ortogonalnych stanów bazowych

$$\begin{aligned}
 \overline{|m, 2\kappa\rangle} &= |m, 2\kappa\rangle + \sum_{t=1}^{\kappa} \Gamma_{\kappa-1, \kappa-t}^{even} |m+3t, 2\kappa-2t\rangle, \\
 \overline{|m, 2\kappa+1\rangle} &= |m, 2\kappa+1\rangle + \sum_{t=1}^{\kappa} \Gamma_{\kappa-1, \kappa-t}^{odd} |m+3t, 2\kappa-2t+1\rangle.
 \end{aligned} \tag{E.24}$$

Najprostsze podzbiory to,

$$\begin{aligned}
 \overline{|m, 0\rangle} &= |m, 0\rangle, \\
 \overline{|m, 2\rangle} &= |m, 2\rangle - \frac{1}{24} |m+3, 0\rangle, \\
 \overline{|m, 4\rangle} &= |m, 4\rangle - \frac{1}{8} |m+3, 2\rangle + \frac{1}{576} |m+6, 0\rangle.
 \end{aligned}$$

Faktycznie, dzięki wzorom (E.23) możemy sprawdzić, że (dla $\kappa, \chi = 0, 2, 4$)

$$\overline{\langle m, \kappa | n, \chi \rangle} = \delta_{\kappa\chi} \delta_{mn} \mathcal{N}_m^\kappa, \tag{E.25}$$

gdzie

$$(\mathcal{N}_m^\kappa)^2 = \frac{1}{6} \frac{1}{24^\kappa} \Gamma(m+1) \Gamma(3\kappa+4+m). \tag{E.26}$$

W języku stanów $|\overline{m}, 2\kappa\rangle$ parzyste rozwiązania bozonowe modelu $SU(3)$ przyjmują wyjątkowo prostą postać

$$|E, \kappa\rangle_{even}^{n_F=0} = e^{-E}(2E)^{3\kappa} \sum_{m=0}^{d_\kappa-1} L_m^{6\kappa+3}(2E) \overline{|m, 2\kappa\rangle}. \quad (\text{E.27})$$

Ogólny iloczyn skalarny stanów $|E, \alpha\rangle$ oraz $|E', \beta\rangle$ ma postać

$$\langle E, \alpha | E', \beta \rangle = e^{-(E+E')}(2E)^{3(\alpha+\beta)} \sum_{n=0}^{d_\alpha-1} \sum_{m=0}^{d_\beta-1} \frac{\mathcal{L}_n^{6\alpha+3}(2E)}{\Gamma(6\alpha+4+n)} \frac{\mathcal{L}_m^{6\beta+3}(2E')}{\Gamma(6\beta+4+m)} \overline{\langle n, 2\alpha | m, 2\beta \rangle} \quad (\text{E.28})$$

Ortogonalność stanów bazowych pozwala wykonać jedną z sum, natomiast druga suma w wyrażeniu (E.28) może być obliczona korzystając ze wzoru (A.10). Otrzymujemy

$$\langle E, \alpha | E', \beta \rangle = \delta_{\alpha\beta} e^{-(E+E')} \frac{(d_\alpha)!}{\Gamma(d_\alpha+6\alpha+4)} \frac{(2E)^{6\alpha}}{2(E-E')} \left[\mathcal{L}_{d_\alpha-1}^{6\alpha+3}(2E) \mathcal{L}_{d_\alpha}^{6\alpha+3}(2E') - \mathcal{L}_{d_\alpha}^{6\alpha+3}(2E) \mathcal{L}_{d_\alpha-1}^{6\alpha+3}(2E') \right] = 0, \quad (\text{E.29})$$

gdzie znikanie wynika z warunków kwantyzacji, $\mathcal{L}_{d_\alpha}^{6\alpha+3}(2E') = 0$ oraz $\mathcal{L}_{d_\alpha}^{6\alpha+3}(2E) = 0$.

Rozwiązania w granicy kontinuum mają postać

$$|E, \kappa\rangle_{even}^{n_F=0} = e^{-E}(2E)^{3\kappa} \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{6\kappa+3}(2E) \overline{|n, 2\kappa\rangle}, \quad (\text{E.30})$$

gdzie E może być dowolną dodatnią liczbą całkowitą. Wykorzystując wzór (A.11) dostajemy

$$\langle E, \kappa | E', \beta \rangle = \delta_{\alpha\kappa} (4EE')^{-\frac{3}{2}} \lim_{z \rightarrow 1} (1-z)^{-1} \exp\left(-z \frac{2(E+E')}{1-z}\right) z^{-\frac{6\kappa+3}{2}} I_{6\kappa+3}\left(\frac{4\sqrt{EE'}z}{1-z}\right) \quad (\text{E.31})$$

Podobnie jak w rachunkach dla modelu $SU(2)$ wprowadzamy nową zmienną $\epsilon = \frac{1}{4}(1-z)$, korzystamy z asymptotyki funkcji Bessela dla dużych wartości argumentu (E.10) oraz parametryzacji delty Diraca (E.12) i w rezultacie dostajemy

$$\langle E, \kappa | E', \beta \rangle = \delta_{\kappa\beta} \frac{1}{2} k^{-7} \delta(k-k'). \quad (\text{E.32})$$

Tym samym, pokazaliśmy, że rozwiązania są do siebie ortogonalne. Uwzględnienie odpowiednich czynników normalizacyjnych $(2E)^\delta$, $\delta > 0$ dla rodzin rozwiązań f_κ , $\kappa > 0$ spowodowało, że otrzymana normalizacja jest taka sama dla wszystkich rodzin. Warto zauważyć, że czynnik k^{-7} uprościłby się z jacobianem zmiany zmiennych do 8-wymiarowych zmiennych sferycznych, gdyby takie zmienne poprawnie opisywały rozmaitość grupy $SU(3)$. Dla modelu $SU(2)$ możliwe było wprowadzenie 3-wymiarowych zmiennych sferycznych i jacobian uprościł się z poprawnym czynnikiem k^{-2} .

Bezpośrednią konsekwencją tego jest znikanie wszystkich rozwiązań o zerowej energii, oprócz rozwiązania należącego do rodziny f_0 .

E.2.2 Zupełność

Podczas dyskusji zupełności rozwiązań modelu $SU(2)$ wykazaliśmy, że dla rozwiązań opisanych wielomianami Laguerre'a z indeksem α wyznacznik odpowiedniej macierzy transformacji bazy Focka w bazę rozwiązań modelu jest wyznacznikiem Vandermonde'a V^α i wynosi

$$V^\alpha = \left(\prod_{i=0}^{m-1} \frac{1}{i! \Gamma(\alpha + 1 + i)} \right) \prod_{1 \leq i < j \leq m} (2E_j - 2E_i), \quad (\text{E.33})$$

gdzie E_i są dostępnymi energiami własnymi wyznaczonymi przez odpowiedni warunek kwantyzacji.

Pokazaliśmy również, że rozwiązania modelu $SU(3)$ grupują się w rodziny i wyrażają się poprzez wielomianami Laguerre'a z takimi samymi indeksami dla wszystkich rozwiązań należących do danej rodziny. Wykażemy teraz, że wyznacznik pełnej macierzy transformacji bazy Focka w bazę rozwiązań jest dany poprzez iloczyn wyznaczników Vandermonde'a dla wszystkich rodzin.

Rozwiązania zapiszmy używając zortogonalizowanej bazy Focka, $\{ |m, \kappa\rangle \}$. Dla każdej rodziny rozwiązań wyznacznik transformacji od bazy danej przez $\{ |m, \kappa\rangle \}$ do bazy rozwiązań $\{ |E, \kappa\rangle \}$ jest dany przez wyznacznik Vandermonde'a. Ponieważ rozwiązania należące do różnych rodzin rozprzegają się pełny wyznacznik transformacji od zortogonalizowanej bazy do bazy rozwiązań jest równy iloczynowi wyznaczników Vandermonde'a od wszystkich rodzin. Łatwo się przekonać, że macierz transformacji bazy $\{ |m, n\rangle \}$ do zortogonalizowanej bazy Focka jest macierzą trójkątną z elementami na diagonalu równymi 1, wobec czego jej wyznacznik jest równy 1. Tak więc,

$$\det(\text{pełnej macierzy transformacji}) = \prod_{k=0}^{\lfloor \frac{N_{cut}}{3} \rfloor} V^{3k+3}. \quad (\text{E.34})$$

Dla każdej rodziny wyznacznik V^{3k+3} jest różny od zera, a zatem pełny wyznacznik też będzie różny od zera. Wynika z tego, że rozwiązania modelu $SU(3)$ stanowią poprawną bazę dla skończonego obciążenia.

Wykazaliśmy, że w granicy nieskończonego stopnia zera wielomianów Laguerre'a pozostają zerami pojedynczymi, a zatem odpowiedni wyznacznik Vandermonde'a pozostaje niezerowy. Oznacza to, że zbiór rozwiązań stanowi poprawną bazę również w granicy kontinuum.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Y.A. Gol'fand and E.P. Likhtam. 'Extensions of the algebra of Poincare group generators and violation of P invariance'. *JETP Lett.*, 13:323, 1971.
- [2] D.V. Volkov and V.P. Akulov. 'Is the neutrino a Goldstone particle'. *Phys. Lett. B*, 46:109, 1973.
- [3] J. Wess and B. Zumino. 'Supergauge transformations in four dimensions'. *Nucl. Phys. B*, 70:39, 1974.
- [4] M. Sohnius. 'Introducing supersymmetry'. *Phys. Rep.*, 128:39, 1985.
- [5] R. Haag, J.T. Łopuszański, and M. Sohnius. 'All possible generators of supersymmetries of the S-matrix'. *Nucl. Phys. B*, 88:257, 1975.
- [6] J. Zinn-Justin. '*Quantum Field Theory and Critical Phenomena*'. Clarendon Press - Oxford, 1996.
- [7] P. Fayet and J. Iliopoulos. 'Spontaneously broken supergauge symmetries and Goldstone spinors'. *Phys. Lett. B*, 51:461, 1974.
- [8] P. Fayet. 'Spontaneous supersymmetry breaking without gauge invariance'. *Phys. Lett. B*, 58:67, 1975.
- [9] L. O'Raifeartaigh. 'Spontaneous symmetry breaking for chiral scalar superfields'. *Nucl. Phys. B*, 96:331, 1975.
- [10] E. Witten. 'Constraints on supersymmetry breaking'. *Nucl. Phys. B*, 202:253, 1982.
- [11] R.W. Heymaker and A.R.P. Rau. 'Supersymmetry in quantum mechanics'. *Am. J. Phys.*, 54:928, 1986.
- [12] A. Valance, T.J. Morgan, and H. Bergeron. 'Eigensolution of the Coulomb Hamiltonian via supersymmetry'. *Am. J. Phys.*, 58:487, 1990.
- [13] R. Dutt, A. Khare, and U. Sukhatme. 'Supersymmetry, shape invariance, and exactly solvable potentials'. *Am. J. Phys.*, 56:163, 1988.

-
- [14] T. Banks, W. Fischler, S. Shenker, and L. Susskind. 'M-theory as a matrix model: a conjecture'. *Phys. Rev. D*, 55:6189, 1997.
- [15] P. West. '*Introduction to supersymmetry and supergravity*'. World Scientific, 1986.
- [16] D. Bailin and A. Love. '*Supersymmetric Gauge Field Theory and Strong Theory*'. Institute of Physics Publishing, 1994.
- [17] L. Brink, J. Schwarz, and J. Scherk. 'Supersymmetric Yang-Mills theories'. *Nucl. Phys. B*, 121:77, 1977.
- [18] W. Greiner and J. Reinhardt. '*Field quantization*'. Springer, 1996.
- [19] J.D. Bjorken. 'Elements of quantum chromodynamics'. SLAC-PUB-2372, 1979.
- [20] G. Dissertori, I. Knowles, and M. Schmelling. '*Quantum Chromodynamics. High Energy Experiments and Theory*'. Oxford Science Publications, 2009.
- [21] M. Luescher. 'Some analytic results concerning the mass spectrum of Yang-Mills gauge theories on a torus'. *Nucl. Phys. B*, 219:233, 1983.
- [22] M. Luescher and G. Muenster. 'Weak-coupling expansion of the low-lying energy values in the $SU(2)$ gauge theory on a torus'. *Nucl. Phys. B*, 232:445, 1984.
- [23] J. Koller and P. van Baal. 'A non-perturbative analysis in finite volume gauge theory'. *Nucl. Phys. B*, 302:1.
- [24] J. Koller and P. van Baal. 'A rigorous nonperturbative result for the glueball mass and electric flux energy in a finite volume'. *Nucl. Phys. B*, 273:387, 1986.
- [25] P. van Baal. 'QCD in a finite volume'. contributed to the Festschrift in honor of B.L. Ioffe, edited by M. Shifman.
- [26] P. van Baal and J. Koller. 'QCD on a torus, and electric flux energies from tunneling'. *Annals of Physics*, 174:299, 1987.
- [27] J. Hoppe. '*Quantum theory of a massless relativistic surface and a two dimensional bound state problem*'. PhD thesis, MIT, 1982. Scanned version available at <http://www.aei-potsdam.mpg.de/hoppe>.
- [28] W. Taylor. 'M(atrix) theory: matrix quantum mechanics as a fundamental theory'. *Rev. Mod. Phys.*, 73:419, 2001.
- [29] M. Trzetrzelewski. '*Supersymmetric Yang-Mills quantum mechanics with arbitrary number of colors*'. PhD thesis, Jagiellonian University, 2006.
- [30] B. de Wit, J. Hoppe, and H. Nicolai. 'On the quantum mechanics of supermembranes'. *Nucl. Phys. B*, 305:545, 1988.
- [31] B. Zwiebach. '*A First Course in String Theory*'. Cambridge University Press, 2004.
- [32] K. Becker, M. Becker, and J. Schwarz. '*String theory and M-theory. A modern introduction*'. Cambridge University Press, 2007.

- [33] E. Cremmer, B. Julia, and J. Scherk. 'Supergravity theory in eleven dimensions'. *Phys. Lett. B*, 1978.
- [34] E. Witten. 'Bound states of strings and p -branes'. *Nucl. Phys. B*, 460:335, 1996.
- [35] J. Kogut and L. Susskind. 'The parton picture of elementary particles'. *Phys. Rep.*, 8:75, 1973.
- [36] S. Sethi and M. Stern. 'D-Brane bound states redux'. *Commun. Math. Phys.*, 194:675, 1998.
- [37] M.B. Green and M. Gutperle. 'D-Particle bound states and the D-instanton measure'. *JHEP*, 01:005, 1998.
- [38] G. Moore, N. Nekrasov, and S. Shatashvili. 'D-Particle bound states and generalized instantons'. *Commun. Math. Phys.*, 209:77, 2000.
- [39] M. Staudacher. 'Bulk Witten indices and the number of normalizable ground states in supersymmetric quantum mechanics of orthogonal, symplectic and exceptional groups'. *Phys. Lett. B*, 488:194, 2000.
- [40] M.B. Halpern and C. Schwartz. 'Asymptotic search for ground states of $SU(2)$ Matrix Theory'. *Int. J. Mod. Phys. A*, 13:4367, 1998.
- [41] J. Wosiek. 'On the $SO(9)$ structure of supersymmetric Yang-Mills quantum mechanics'. *Phys. Lett. B*, 619:171, 2005.
- [42] J. Hoppe, D. Lundholm, and M. Trzetrzelewski. 'Construction of the zero-energy state of $SU(2)$ -Matrix Theory: near the origin'. *Nucl. Phys. B*, 817:155, 2009.
- [43] F. Cooper, A. Khare, and U. Sukhatme. 'Supersymmetry and Quantum Mechanics'. *Phys. Rept.*, 251:267, 1995.
- [44] M. Trzetrzelewski. 'Reduction of $SU(N)$ loop tensors to trees'. *J. Math. Phys.*, 46:103512, 2005.
- [45] B. Simon. 'Coupling constant analyticity for the anharmonic oscillator'. *Ann. of Phys.*, 58:76, 1970.
- [46] M. Hamermesh. '*Group theory and its application to physical problems*'. Addison-Wesely, Reading Mass, 1962.
- [47] M. Byrd. 'The geometry of $SU(3)$ ', 1997.
- [48] T. Tilma and E.C.G. Sudarshan. 'Generalized Euler Angle Parametrization for $SU(N)$ '. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 35:10467, 2002.
- [49] H. Weyl. '*The Theory of Groups and Quantum Mechanics*'. Methuen & Co. Ltd., 1931.
- [50] M. Campostrini and J. Wosiek. 'Exact Witten index in D=2 supersymmetric Yang-Mills quantum mechanics'. *Phys. Lett. B*, 550:121, 2002.
- [51] M. Campostrini and J. Wosiek. 'High precision study of the structure of D=4 supersymmetric Yang-Mills quantum mechanics'. *Nucl. Phys. B*, 703:454, 2004.

-
- [52] M. Trzetrzelewski and J. Wosiek. 'Quantum systems in a cut Fock space'. *Acta Phys. Polon. B*, 35:1615, 2004.
- [53] M. Trzetrzelewski. 'Quantum mechanics in a cut Fock space'. *Acta Phys. Polon. B*, 35:2393, 2004.
- [54] P. Korcyl. 'Classical trajectories and quantum supersymmetry'. *Phys. Rev. D*, 74:115012, 2006.
- [55] J. Wosiek. 'Spectra of supersymmetric Yang-Mills quantum mechanics'. *Nucl. Phys. B*, 644:85, 2002.
- [56] M. Claudson and M.B. Halpern. 'Supersymmetric ground state wave functions'. *Nucl. Phys.*, 250:689, 1985.
- [57] G. Veneziano and J. Wosiek. 'A supersymmetric matrix model: II. Exploring higher-fermion-number sectors'. *JHEP*, 0610:033, 2006.
- [58] J. Wosiek. 'Supersymmetric Yang-Mills quantum mechanics in various dimensions'.
- [59] M. Trzetrzelewski. 'Supersymmetry and Lie groups'. *J. Math. Phys.*, 48:083508, 2007.
- [60] J. Kotanski. 'Virial theorem for four-dimensional supersymmetric Yang-Mills quantum mechanics with SU(2) gauge group'. *Acta Phys. Pol B*, 37:3659, 2006.
- [61] J. Kotanski. 'Energy spectrum and wave-functions of four-dimensional supersymmetric Yang-Mills quantum mechanics for very high cut-offs'. *Acta Phys. Pol B*, 37:2813, 2006.
- [62] P. Korcyl. 'Invariant plane wave solutions to $D = 2$ Supersymmetric Yang-Mills Quantum Mechanics'. in preparation.
- [63] L.D. Landau and E.M. Lifschitz. '*Quantum mechanics: non-relativistic theory*'. 11, 1999.
- [64] V. Corato, P. Silvestrini, A. Goerlich, P. Korcyl, J. Wosiek, and L. Stodolsky. 'Simulation of some quantum gates, with decoherence'. *Phys. Rev. B.*, 75:184507, 2007.
- [65] P. Korcyl, L. Stodolsky, and J. Wosiek. 'Studies in a Random Noise Model of Decoherence'. arXiv: 0911.4368.
- [66] K.N. Anagnostopoulos, M. Hanada, J. Nishimura, and S. Takeuchi. 'Monte Carlo Studies of Supersymmetric Matrix Quantum Mechanics with Sixteen Supercharges at Finite Temperature'. *Phys. Rev. Lett.*, 100:021601, 2008.
- [67] M. Hanada, A. Miwa, J. Nishimura, and S. Takeuchi. 'Schwarzschild radius from Monte Carlo calculation of the Wilson loop in supersymmetric matrix quantum mechanics'. *Phys. Rev. Lett.*, 102:181602, 2009.
- [68] S. Catterall and T. Wiseman. 'Towards lattice simulation of the gauge theory duals to black holes and hot strings'. *JHEP*, 0712:104, 2007.
- [69] S. Catterall and T. Wiseman. 'Black hole thermodynamics from simulations of lattices Yang-Mills theory'. *Phys. Rev. D*, 78:041502, 2008.
- [70] S. Catterall and T. Wiseman. 'Extracting black hole physics from the lattice'.

- [71] S. Samuel. 'Solutions of extended supersymmetric matrix models for arbitrary gauge groups'. *Phys. Lett B*, 411:268, 1997.
- [72] M. Trzetrzelewski. 'Spiky membranes'. *Phys. Lett. B*, 684:256, 2010.
- [73] M. Abramowitz and I.A.Stegun. '*Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*'. Dover Publications, 1968.
- [74] H. Bateman. '*Higher Transcendental functions, vol II, Bateman Manuscript Project*'. McGraw-Hill, 1953.
- [75] G. Szego. '*Orthogonal polynomials*'. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 1975.