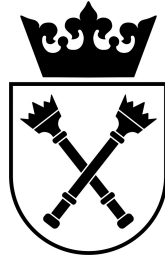


UNIwersytet Jagielloński
Instytut Fizyki



**Macierzowe techniki fizyki teoretycznej
w telekomunikacji i innych realnych
układach złożonych**

Grzegorz Łukaszewski

Rozprawa doktorska
opracowana w Zakładzie Teorii Układów Złożonych
pod kierunkiem prof. dr hab. Macieja Nowaka

Kraków 2012

Serdecznie dziękuję promotorowi prof. dr hab. Maciejowi Nowakowi za wskazanie tematu pracy, liczne konsultacje połączone z nauką oraz wiele cennych uwag podczas redagowania pracy.

Dziękuję również prof. dr hab. Jerzemu Jurkiewiczowi za bardzo wartościowe konsultacje oraz życzliwą pomoc naukową.

Pragnę także serdecznie podziękować żonie i rodzicom, którzy nieustannie wspierali mój wysiłek w pisaniu tej pracy.

Grzegorz Łukaszewski, Kraków, maj 2012

Spis treści

Rozdział 1. Wstęp	7
Rozdział 2. Organizacja pracy	13
Rozdział 3. Podstawowe zagadnienia i definicje	15
3.1. Definicje	15
3.2. Podstawowe narzędzia rachunkowe	17
3.3. Transformacje R,S (lub B, N)	19
Rozdział 4. Funkcja Greena, wolne kumulanty - diagramatyka	22
4.1. Diagramy Feynmana - podstawowe informacje	22
4.2. Funkcja Greena 1-punktowa - rozkład Gaussa	24
4.3. Funkcja Greena 1-punktowa - rozkład Wisharta	27
4.4. Funkcja Greena 2-punktowa	31
4.4.1. Funkcja Greena 2-punktowa, rozkład Gaussa	32
4.4.2. Funkcja Greena 2-punktowa, rozkład Wisharta	34
4.5. Wolne kumulanty	36
Rozdział 5. Funkcja Greena dla momentów odwrotnych	38
Rozdział 6. Związki pomiędzy momentami macierzowymi	41
6.1. Związek momentów granicznych z obserwowanymi	41
6.2. Związek macierzy dyspersji z momentami 1-rzędu	44
Rozdział 7. Rekonstrukcja widma - konstrukcja estymatorów	49
7.1. Estymacja widma - założenia ogólne	50
7.2. Estymator analityczny	51
7.2.1. Wartość I_{\max} w estymatorze analitycznym	55
7.3. Estymator statystyczny	57
7.4. Estymatory dualne	61
7.4.1. Estymator analityczny dualny	61
7.4.2. Estymator statystyczny dualny	64
Rozdział 8. Rekonstrukcja widma - symulacje	66
8.1. Eksperyment wstępny	66
8.2. Istotne parametry	69
8.3. Miara niedokładności estymacji	71
8.4. Wnioskowanie z pojedynczego pomiaru, mapa niedokładności	72
8.5. Minimalna liczba powtórzeń	73
8.6. Eksperyment 1 - estymatory analityczny i statystyczny	76
8.7. Porównanie estymatorów	77
8.8. Eksperyment 2 - estymator analityczny zwykły oraz dualny	80
8.9. Poziomice na mapie niedokładności	82
8.10. Analiza wektorów własnych	86
8.11. Przykład estymacji przy $\dim \Theta = 5$	87
8.12. Porównanie do estymatora Girko przy $\dim \Theta = 7$	88
Rozdział 9. Podsumowanie	92

Dodatek A. Konwencje w telekomunikacji i fizyce	94
A.1. Funkcja Greena oraz transformata Stieltjesa	94
A.2. 1-punktowa funkcja Greena oraz transformata Cauchy'ego	95
A.3. 2-punktowa funkcja Greena oraz transformata Cauchy'ego	95
A.4. Wolne kumulanty w podejściu Voiculescu oraz Zee	96
A.5. Pojemność informacyjna, wolna energia oraz funkcja Blue	97
Dodatek B. Przykłady rachunków FRV	101
B.1. Relacje dla momentów macierzy kowariancji	101
B.2. Rozkład Marčhenko-Pastura	104
Dodatek C. Tabele momentów macierzowych 1-go oraz 2-go rzędu	107
Dodatek D. Interpretacja topologiczna diagramów Feynmana	116
Bibliografia	118

Rozdział 1

Wstęp

We współczesnym świecie ilości gromadzonych, przetwarzanych i przesyłanych danych rosną w ogromnym tempie. Dane przechowywane są w postaci bloków dużych macierzy, ich przesyłanie odbywa się poprzez transmitowanie całych wektorów sygnału, sieci komunikacyjne zapewniają równoczesny dostęp wielu użytkownikom zarówno po stronie nadawczej jak też odbiorczej, na dodatek sam proces przesyłu danych odbywa się z coraz większą prędkością. Kluczową kwestią staje się maksymalnie skuteczne wykorzystanie dostępnych zasobów w postaci mediów pośredniczących, jak też poszukiwanie szybko i również skutecznie działających algorytmów wykonujących niezbędne do pracy systemów komunikacyjnych obliczenia. Wszystko to skutkuje coraz wyższymi wymaganiami stawianymi nowym technologiom, które aby móc w efekcie końcowym zapewnić ich użytkownikom zadowalające rezultaty muszą tym wymaganiom sprostać.

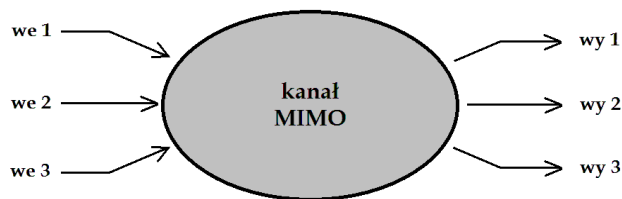
Niezwykle atrakcyjną metodą przekazywania informacji jest komunikacja za pomocą medium w postaci fal elektromagnetycznych, które w łatwy sposób mogą dotrzeć praktycznie wszędzie, zapewniając przy tym użytkownikom swobodę w postaci mobilności. Te podstawowe własności fal E-M decydują o atrakcyjności telekomunikacji i sprawiają, że jest ona obecnie jednym z najbardziej pożądanych sposobów przekazywania informacji. Z drugiej strony ogromnym problemem są ograniczone zasoby w postaci pasma, którym wraz z rosnącym zapotrzebowaniem na przesył coraz większych ilości danych zmuszeni jesteśmy oszczędnie gospodarować. W tej sytuacji przedmiotem żywego zainteresowania stało się poszukiwanie nowych technologii, cechujących się mniejszym zapotrzebowaniem na zajmowane pasmo przy zadanej prędkości transmisji. Dostępnych jest wiele pozycji literaturowych dotyczących transmisji bezprzewodowej, począwszy od podstaw telekomunikacji [1] po bardziej współczesne podręczniki dotyczące teorii informacji, przetwarzania i przesyłania sygnałów cyfrowych [2].

Na uwagę w sposób szczególny zasługuje komunikacja wielowymiarowa realizowana przez kanał typu MIMO (z ang. „Multiple-Input Multiple-Output”), a więc kanał komunikacyjny o wielu wejściach oraz wielu wyjściach. W przypadku komunikacji bezprzewodowej wyjściami kanału są sygnały nadawane przez układ wielu anten, oraz analogicznie wejściami są sygnały odbierane przez układ wielu anten. Pierwsze pionierskie prace w tym zakresie [3, 4] ukazały się w latach 1998-1999, a więc dopiero kilkanaście lat temu. Atrakcyjność kanału typu MIMO polegała na tym, że jak wynikało z obliczeń, pojemnością kanału (z ang. „Capacity”) rozumiana jako maksymalna możliwa do osiągnięcia prędkość transmisji pozbawionej jeszcze błędów, była większa niż w przypadku telekomunikacji klasycznej, przy założeniu wykorzystania tego

samego pasma w obydwu przypadkach. Wynikający z rachunków wzrost pojemności był tym większy, im więcej anten posiadał rozpatrywany kanał. Były to oczywiście przesłanki niezwykle obiecujące, tematyka kanałów MIMO stała się więc szybko bardzo atrakcyjna. Praktycznie natychmiast nastąpił okres dynamicznego rozwoju [5, 6, 7, 8, 9], przy czym wiele uwagi poświęcono projektowaniu oraz analizie modeli komunikacji pod kątem ich własności granicznych [10, 11, 12].

Ważnym aspektem stała się praktyczna umiejętność wykorzystania możliwości jakie kryje w sobie komunikacja MIMO. Konstruowano więc coraz skuteczniejsze algorytmy detekcji sygnału, które pozwalały uzyskać coraz większe prędkości transmisji. Ostatecznym celem było oczywiście zbliżenie się do fundamentalnej granicy opisywanej przez pojemność informacyjną kanału. Wymieniając główne metody detekcji sygnału MIMO należy przede wszystkim wspomnieć o detektorach typu ZF-DF (Zero-Forcing with Decision Feedback) [13], SD (Sphere Decoding) [14], SDR (Semidefinite-Relaxation) [15, 16], LR (Lattice Reduction) [17], oraz o najbardziej technologicznie zaawansowanych algorytmach detekcji SD (Soft Decision) [18, 19], pozwalających realnie uzyskać prędkości transmisji zbliżone do limitu Capacity.

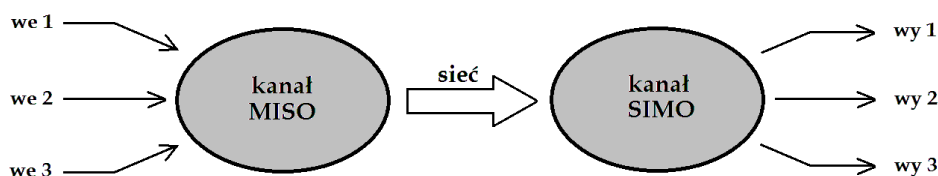
Komunikacja poprzez kanał typu MIMO została schematycznie pokazana na Rysunku 1.1, przy czym w ogólności liczba wejść oraz wyjść nie muszą być takie same. Istotnym faktem jest zachodząca w kanale transmisyjnym interferencja pomiędzy poszczególnymi sygnałami nadawanymi (z tego względu kanał tego typu nazywany jest też „kanałem interferencyjnym”). Oznacza to, że sygnały oddziałują między sobą w pewien sposób. Dodatkowo sygnał jest zakłócany przez szum addytywny. Warto zauważyć, że badania nad układami, gdzie obecnych jest wiele cząstek oddziałujących wzajemnie rozpoczęto w fizyce już dawno - potrafimy statystycznie opisać zachowanie gazów czy cieczy. Istniejące analogie pomiędzy zachowaniem sygnałów w komunikacji a zachowaniem cząstek w fizyce statystycznej pozwalają zastosować niektóre narzędzia wywodzące się z fizyki do telekomunikacji, dzięki czemu między innymi rozwój w tej dziedzinie następuje tak szybko.



Rysunek 1.1. Kanał komunikacyjny MIMO, sygnały wejściowe interferują ze sobą podczas procesu przesyłu.

Ze względów praktycznych systemy telekomunikacyjne projektowane i analizowane są często w znacznie uproszczony sposób, mianowicie proces komunikacji podzielony jest na kolejne etapy, tak jak to pokazano na Rysunku 1.2. W takim modelu sygnał pochodzący z wielu źródeł trafia do kanału MISO (Multiple-Input Single-Output, wiele wejść, jedno wyjście) a następnie za pośrednictwem sieci przekazywany jest

do kanału SIMO (Single-Input Multiple-Output, jedno wejście, wiele wyjść). Kanał wejściowy nazywamy kanałem wielodostępu (Multiple-Access channel), natomiast kanał wyjściowy to kanał rozgłoszeniowy (Broadcast channel). Należy podkreślić, że tego typu system jest co prawda systemem MIMO (posiada bowiem wiele wejść oraz wiele wyjść), ale nie jest realizowany poprzez kanał MIMO.



Rysunek 1.2. Uproszczony model kanału komunikacyjnego, sygnały nadawane trafiają najpierw do wielodostępowego kanału MISO, następnie przez sieć przekazywane są do kanału rozgłoszeniowego SIMO.

Powróćmy do modelu komunikacji przez kanał MIMO, pokazanego na Rysunku 1.1. Jeśli przez x oznaczymy wektor sygnału nadanego, przez n oznaczymy wektor szumu, natomiast przez H oznaczymy macierz kanałową, to wektor y sygnału odebranego możemy zapisać w postaci

$$y = Hx + n, \quad (1.1)$$

lub też w równoważnej postaci możemy zapisać

$$r = H^\dagger y = H^\dagger Hx + H^\dagger n, \quad (1.2)$$

gdzie sygnałem odebrany jest r . W rezultacie każde z wyjść (każda ze składowych y lub r) zawiera informacje pochodzące z każdego z wejść (składowe wektora x), oraz dodatkowo odbierany sygnał zakłócony jest szumem addytywnym. Co ważne [20], wektor r zawiera dokładnie takie same informacje na temat x co wektor y . Oznacza to w praktyce, że interesująca nas informacja na temat sygnału nadanego x może być dokładnie w takim samym stopniu odtworzona na podstawie y lub r , a więc istotnie kanały 1.1 oraz 1.2 są równoważne.

W zależności od konkretnego systemu znaczenie składowych poszczególnych wektorów oraz samej macierzy H jest różne. Wymieńmy kilka podstawowych zastosowań, skupiając uwagę na systemach bezprzewodowych:

- Systemy wieloantenowe MIMO - składowe wektorów x oraz y reprezentują sygnały nadawane oraz odbierane przez sieć K anten nadawczych oraz N anten odbiorczych. Macierz H opisuje interferencję pomiędzy sygnałami zachodzącą w przestrzeni (nakładanie sygnałów, odbicia itp.). W praktyce tego typu systemy stosowane są do poprawy prędkości transmisji pomiędzy nadajnikiem a odbiornikiem, a więc kanał MIMO 1.1 służy w istocie do realizacji systemu typu SISO (Single-Input Single-Output, jedno wejście, jedno wyjście).
- Systemy CDMA (Code-Division Multiple-Access) - mają na celu zapewnić dostęp do sieci wielu użytkownikom zarówno po stronie nadawczej jak też odbiorczej.

- Konstrukcja tego typu systemu oparta jest o ideę wielodostępu oraz rozgłaszania, które realizowane są w praktyce za pomocą tzw. techniki rozproszonego widma (z ang. „spread spectrum”). W kanale wielodostępu (reverse link, uplink) składowe wektora x oznaczają dane wejściowe pochodzące od K użytkowników, natomiast wektor y stanowi pojedyncze wyjście wielowymiarowego sygnału, który jest nadawany. Po stronie rozgłoszeniowej (forward link) składowe wektora r to sygnał odbierany przez K użytkowników, podczas gdy wektor y jest traktowany jako pojedynczy wielowymiarowy sygnał wejściowy. W obydwu przypadkach macierz H zawiera sekwencje rozpraszające dla każdego z K użytkowników (nadających, odbierających), zapisane w kolejnych kolumnach. System CDMA jest więc formalnie systemem typu MIMO, realizowanym za pomocą współpracujących ze sobą kanałów typu MISO oraz SIMO. (taki system MIMO nie jest kanałem MIMO, który rozumieć należy w sensie obecnej w kanale interferencji sygnałów).
- System OFDM (Orthogonal Frequency-Division Multiple-Access) - oparty jest o podział „nośnika” informacji (z ang. „carrier”) na wiele „sub-carriers” (polskie tłumaczenie jest w tym przypadku mało zgrabne: pod-nośniki). Składowe wektorów x oraz y reprezentują sygnał przesyłany za pośrednictwem poszczególnych „sub-carriers” po stronie nadawczej oraz odbiorczej, natomiast macierz H opisuje interferencję pomiędzy poszczególnymi „sub-carriers”. System tego typu w zależności od implementacji może zawierać jedno lub wiele wejść oraz jedno lub wiele wyjść.

Kluczową kwestią jest, że w celu analizy własności statystycznych kanału 1.1 lub 1.2 możemy posłużyć się jego modelem, w którym za macierz kanałową H weźmiemy macierz losową z rozkładu o określonych własnościach, w możliwie najbardziej wierny sposób oddających własności rzeczywistego systemu. W ten właśnie sposób w komunikacji wielowymiarowej pojawiają się macierze losowe [3, 4].

Warto zwrócić uwagę na pewien istotny fakt, mianowicie kiedy w latach 1998-1999 uświadomiono sobie możliwość modelowania kanału MIMO za pomocą macierzy losowych, matematyka i fizyka dysponowały już gotowym narzędziem w postaci Teorii Macierzy Przypadkowych [21, 22, 23], idealnie pasującym do opisu rozważanego zagadnienia. Co więcej, na tamtą chwilę od około dziesięciu lat istniała zasługująca na szczególną uwagę koncepcja swobodnych zmiennych przypadkowych (w skrócie FRV - z ang. „Free Random Variables”), która pojawiła się po raz pierwszy w roku 1985 [24] a następnie w latach 90-tych była już sukcesywnie rozwijana [25, 26]. Przy założeniu, że dla rozważanych macierzy spełniony jest jej podstawowy warunek nazywany „freeness” dysponujemy narzędziami w postaci transformacji R oraz S [27]. Z ich pomocą możliwe jest sprawne przeprowadzanie wielu rachunków trudnych lub wręcz niewykonalnych innymi metodami. Narzędzia te w zastosowaniu do telekomunikacji wielowymiarowej okazały się bardzo przydatne.

Szybki rozwój telekomunikacji w zakresie analizy własności kanałów MIMO nastąpił więc w znacznym stopniu dzięki zastosowaniu gotowego narzędzia na gruncie nowych problemów, do których jak wspomniano teoria pasowała wręcz idealnie. W szczególności możliwe stało się modelowanie kanałów komunikacyjnych, zarówno tych znanych jak też zupełnie nowych. Ponadto można było udzielić odpowiedzi na szereg

ważnych pytań związanych z własnościami statystycznymi kanału, czego przykładem jest obliczenie wspomnianej już pojemności informacyjnej kanału, będącej jednym z jego najważniejszych parametrów [3, 4, 10, 6, 28].

Co ciekawe dokładnie ten sam opis matematyczny, podobne z formalnego punktu widzenia modele itd., pojawiają się także w innych dziedzinach. Wymienimy dwa przykłady, choć nie są one z pewnością jedyne. Pierwszym jest opis zachowania notowań cen akcji na giełdach papierów wartościowych. Pierwsze pionierskie prace w tym zakresie ukazały się już w latach 50-tych [29]. W istocie giełda jest niezwykle złożonym i skomplikowanym systemem. Jeśli pominąć dokładne mechanizmy nią rządzące, zwracając jedynie uwagę na ceny akcji w kolejnych chwilach czasu, to zachowanie giełdy można zapisać w postaci dużej macierzy, a dokładniej rzecz ujmując interesują nas względne zmiany cen akcji. Podobnie jak w przypadku telekomunikacji zachowanie giełdy z powodzeniem można modelować przyjmując pewne założenia za temat macierzy notowań. Okazuje się, że ceny akcji poszczególnych spółek nie są niezależne, ale występują między nimi pewne korelacje. Analizując macierz z danymi giełdowymi możemy na przykład odtworzyć sektory gospodarcze oraz wyszczególnić konkretne spółki powiązane gospodarczo. Interesujące jest także zjawisko występowania tzw. korelacji czasowych, będących z oczywistych względów przedmiotem niezwykle żywego zainteresowania inwestorów. Popularnymi przykładami zastosowania Teorii Macierzy Przypadkowych do giełdy są na przykład problem stworzenia tzw. „optymalnego portfela inwestycyjnego” czy obliczenie „Value-at-Risk” oraz wiele podobnych zagadnień, będących przedmiotem zainteresowania ekonofizyki [30, 31, 32, 33, 34, 35].

Innym, dosyć zaskakującym, przykładem zastosowania Teorii Macierzy Przypadkowych jest analiza danych neurobiologicznych. W tym przypadku sygnał pochodzi bezpośrednio z mózgu pacjenta, przy czym aktywność poszczególnych jego obszarów rejestrowana jest dzięki wykorzystaniu techniki EEG (elektroencefalografia). Pierwsze prace pionierskie dotyczące obserwacji aktywności mózgu za pomocą EEG ukazały się w latach 70-tych [36, 37], kiedy to zaobserwowano, że w rejestrowanych sygnałach pojawiają się pewne charakterystyczne częstotliwości. Dalszy rozwój w tej dziedzinie polegał na doskonaleniu instrumentów pomiarowych, poszukiwaniu ogólnych prawidłowości rejestrowanego sygnału czy też jego korelacji z różnego rodzaju bodźcami. Natomiast niecałe dziesięć lat temu zauważono, że sygnał EEG zapisany w postaci macierzy można w pewnych warunkach modelować za pomocą macierzy przypadkowych [38]. Badania danych neurobiologicznych z użyciem Teorii Macierzy Przypadkowych są jednak na chwilę obecną w dosyć początkowej fazie.

Warto wspomnieć, że rozważając dany model (kanał MIMO, notowania giełdowe itd.), pojawiające się w nim macierze najczęściej traktujemy jako Gaussowskie, a więc macierz kowariancji jest macierzą Wisharta (choć nie zawsze takie założenie jest całkiem dobre, np. w finansach rozważa się też modele zbudowane w oparciu o macierze określane mianem macierzy z „ciężkimi ogonami”, jak na przykład macierze Lévy’ego [33], czy też inne zespoły o podobnych własnościach). Z punktu widzenia analizy własności systemów MIMO, ale także konstrukcji konkretnych algorytmów detekcji, niezwykle ważnym zagadnieniem jest znalezienie aktualnego widma

macierzy kowariancji (aktualnego dlatego, że kanał zwykle zmienia się w czasie). Z tego względu w literaturze wiele uwagi poświęcono właśnie temu zagadnieniu. Dokładniej rzecz ujmując interesuje nas możliwość wnioskowania na temat widma macierzy kowariancji na podstawie możliwego do zmierzenia w wyniku przeprowadzonych obserwacji (pomiarów) widma tzw. doświadczalnej macierzy kowariancji. Zagadnienie to obecne jest w matematyce od dłuższego czasu, przy czym obecny stan wiedzy na jego temat zawierają prace [39, 40, 41, 42, 43]. Co ważne, w praktycznych zastosowaniach istotne jest zarówno możliwie wierne odtworzenie widma macierzy kowariancji jak też wykonanie tego zadania możliwie szybko, bowiem najczęściej systemy telekomunikacji muszą działać w czasie rzeczywistym.

Prezentowana praca doktorska wpisuje się w zarysowany powyżej nurt. Poruszane w niej zagadnienia dotyczą metod i narzędzi przydatnych podczas przetwarzania i obróbki danych macierzowych. Szczególny nacisk położony został na wykorzystanie w obliczeniach metod diagramatycznych, wykorzystaniu koncepcji swobodnych zmiennych przypadkowych oraz na zagadnieniu estymacji widma zaszumionej macierzy kowariancji. Zaproponowana w pracy nowa, nie prezentowana dotąd metoda odtwarzania widma (nazwana roboczo „analitycznym estymatorem widma”) wydaje się być atrakcyjną alternatywą dla metod obecnie stosowanych, zwłaszcza ze względu na brak konieczności określenia na wstępie „multiplicity” dla poszczególnych wartości własnych, ale także ze względu na dużą szybkość jej działania. Ponadto zaproponowana została prosta i przy tym przejrzysta metoda badania zakresu stosowalności badanego estymatora widma (zakres rozumiany w sensie wymiarów macierzy obserwacji), która przy okazji może służyć jako wygodne narzędzie porównawcze dla różnych estymatorów. Z tego punktu widzenia spora część pracy dotyczy rozwoju skutecznie i niezawodnie działających metod służących przetwarzaniu danych macierzowych. Poruszono także ważne zagadnienie jakim jest pojemność systemów komunikacyjnych opartych o kanał typu MIMO.

Rozdział 2

Organizacja pracy

W Rozdziale 3 umieszczone zostały definicje podstawowych pojęć, którymi będziemy się posługiwać w dalszej części pracy. Między innymi została wyjaśniona koncepcja swobodnych zespołów macierzowych oraz przedstawiono kilka przykładów jej zastosowania. Przybliżono także podstawowe narzędzia obliczeniowe z zakresu rachunku swobodnych macierzy przypadkowych w postaci transformacji R oraz S .

Rozdział 4 przedstawia diagramatykę Feynmana jako bardzo wygodne podejście upraszczające w znaczący sposób rachunki, w których pojawia się rozwinięcie funkcji Greena. W szczególności przeprowadzone zostało wyprowadzenie funkcji Greena 1-punktowej w przypadkach zespołów Gaussa oraz Wisharta, czego wynikami są odpowiednio półkole Wignera oraz rozkład Marčhenko-Pastura. Następnie, również z użyciem metod diagramatycznych, zostały obliczone funkcje Greena 2-punktowe w przypadkach zespołu Gaussa oraz Wisharta, oraz pokazano wyprowadzenie wzoru definiującego wolne kumulanty.

Kolejny Rozdział 5 przedstawia rachunek, którego wynikiem są wzory pozwalające obliczyć 1-punktową oraz 2-punktową funkcję Greena dla odwrotności danego zespołu macierzowego, przy czym odwrotność zespołu rozumiana jest jako zespół złożony z odwrotności macierzy tworzących zespół wyjściowy.

W Rozdziale 6 pokazany został sposób uzyskania relacji wyrażających kolejne momenty macierzowe 1-rzędu doświadczalnej macierzy kowariancji S (gdzie S to macierz kowariancji macierzy obserwacji X o wymiarze $N \times M$) za pomocą momentów macierzy kowariancji Σ , oraz relacji do nich odwrotnych. Pokazano także jak na podstawie wyniku rachunku przedstawionego w Rozdziale 4 można wyrazić momenty macierzowe 2-rzędu za pomocą momentów macierzowych 1-rzędu. Wszystkie wspomniane rachunki zostały przeprowadzone także dla macierzy odwrotnych. Na koniec obydwie wzory (w wersji podstawowej oraz w wersji dla macierzy odwrotnych) wiążące momenty macierzowe 2-rzędu z momentami 1-rzędu zostały numerycznie sprawdzone dla różnych wymiarów macierzy obserwacji X .

Kolejny Rozdział 7 przybliży problem estymacji widma macierzy kowariancji Σ na podstawie znajomości doświadczalnej macierzy kowariancji. Przedstawiono szczegółowo konstrukcję dwóch estymatorów, analitycznego oraz statystycznego, które reprezentują zupełnie odmienne podejścia do zagadnienia. Rozważony został wpływ liczby różnych wartości własnych wchodzących w skład widma na działanie estymatora analitycznego. Dodatkowo pokazany został sposób konstrukcji dodatkowych estymatorów, dualnych do analitycznego oraz statystycznego, bazujących na znajo-

ności relacji dotyczących momentów macierzowych dla macierzy odwrotnych.

Rozdział 8 dotyczy implementacji oraz wzajemnego porównania rozważanych estymatorów widma. W ramach przygotowania do przeprowadzenia zaplanowanych symulacji rozważone zostały zagadnienia takie jak: ustalenie parametrów istotnych z punktu widzenia działania estymatorów, na tej podstawie zaproponowano miarę pozwalającą w sposób ilościowy opisać niedokładność uzyskanych estymacji (dla danego estymatora, na podstawie macierzy obserwacji o danych wymiarach), wprowadzono pojęcie mapy niedokładności oraz podjęta została próba oszacowania minimalnej statystyki koniecznej dla uzyskania wyników o rozsądnej wiarygodności. Następnie wykonany został 'Eksperyment 1', mający na celu porównanie działania estymatora analitycznego oraz statystycznego. Kolejny 'Eksperyment 2' służył porównaniu działania estymatora analitycznego w wersji podstawowej oraz dualnej, przy czym zbadano także jak zmienia się różnica pomiędzy badanymi estymatorami wraz z przeskalowaniem wartości własnych wchodzących w skład widma. Zgodnie z koncepcją prezentacji wyników symulacji na mapach niedokładności wszystkie symulacje zostały wykonane w szerokim zakresie wymiarów macierzy obserwacji X . W następnej kolejności podjęto próbę analizy przekrojów przez powierzchnię uzyskaną jako wynik 'Eksperymentu 1' oraz zbadano orientację wektorów własnych. Pokazany został przykład działania estymatora analitycznego dla większej liczby stopni swobody. W Rozdziale 8.12 wykonano kilka symulacji służących porównaniu estymatora analitycznego do estymatora Girko (tzw. „G-estymator”).

Ostatni Rozdział 9 zawiera podsumowanie pracy oraz krótkie omówienie głównych jej wyników.

Dodatek A stanowi pewnego rodzaju „słownik” pomiędzy definicjami i nazewnictwem stosowanymi przez środowiska fizyków, matematyków oraz inżynierów np. telekomunikacji. Pokazano na czym konkretnie polegają różnice wynikające z używania różnych definicji do tych samych lub analogicznych obiektów. Jednym z przykładów jest obliczenie pojemności informacyjnej dla kanału MIMO.

W Dodatku B pokazano przykłady rachunków wykonanych z użyciem transformacji R oraz S , a więc narzędzi wywodzących się z koncepcji swobodnych zmiennych przypadkowych.

Dodatek C zawiera tabele relacji pomiędzy kolejnymi momentami macierzowymi, które ze względu na dużą objętość nie zostały umieszczone w Rozdziale 6.

W Dodatku D przedstawiona została topologiczna interpretacja diagramów Feynmana. Rozważano charakterystykę Eulera „grafów bez końców”. Pokazano związek tych grafów z grafami stanowiącymi elementy rozwinięcia funkcji Greena, ze szczególnym uwzględnieniem grafów planarnych.

Rozdział 3

Podstawowe zagadnienia i definicje

Dla utrzymania przejrzystości dalszej części pracy, a także pewnego rodzaju wygody, wszelkie definicje oraz podstawowe narzędzia dotyczące macierzy przypadkowych zostały umieszczone w tym rozdziale.

3.1. Definicje

Definicja 1 (Momenty oraz kumulanty klasyczne) *Rozważmy zmienną losową x o rozkładzie prawdopodobieństwa $p(x)$, dla której zdefiniujemy funkcję $F_x(q)$ generującą momenty oraz funkcję $C_x(q)$ generującą kumulanty*

$$F_x(q) = \int e^{qx} p(x) dx,$$

$$C_x(q) = \log F_x(q).$$

Momentami zmiennej losowej x nazywamy współczynniki m_n rozwinięcia funkcji generującej momenty w postaci

$$F_x(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{n!} \int x^n p(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{n!} m_n,$$

natomiast *kumulantami* będziemy nazywać współczynniki κ_k rozwinięcia funkcji generującej kumulanty, co możemy zapisać w postaci

$$F_x(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{n!} m_n = \exp \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^k}{k!} \kappa_k \right]$$

Powyższa definicja kumulant pozwala w sposób rekurencyjny wyrazić moment m_n za pomocą kumulant κ_k , gdzie $k = 1, \dots, n$. Kilka pierwszych relacji wygląda następująco

$$\begin{aligned} m_1 &= \kappa_1 \\ m_2 &= \kappa_2 + \kappa_1^2 \\ m_3 &= \kappa_3 + 3\kappa_2\kappa_1 + \kappa_1^3 \end{aligned}$$

Definicja 2 (Średnia macierzowa) *Rozważmy zespół macierzy M o wymiarach $N \times N$ wraz z miarą macierzową dM oraz pewnym potencjałem $V(M)$ definiującym rozkład prawdopodobieństwa dla tego zespołu jako $P(M) = \exp[-N\text{Tr}V(M)]$. Dla*

funkcji $F(M)$ możemy zdefiniować średnią $\langle F(M) \rangle$ po zespole macierzowym M jako całkę

$$\langle F(M) \rangle = \int dM P(M) F(M) = \int dM \exp[-N \text{Tr} V(M)].$$

Definicja 3 (Średnia macierzowa „connected”) Rozważmy zespolony macierzy A oraz B o wymiarach $N \times N$ oraz przyjmijmy, że spełnione są założenia Definicji 2. Wówczas dla zespolonych macierzy A oraz B możemy zdefiniować **średnią macierzową „connected”** w postaci

$$\langle AB \rangle_c = \langle AB \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle$$

Definicja 4 (Funkcja Greena) Dla zespolonego macierzowego H zdefiniujemy funkcję Greena (rezolwentę) w postaci

$$G(z) = \left\langle \frac{1}{N} \text{Tr} \frac{1}{\mathbf{1}_N z - H} \right\rangle.$$

Definicja 5 (Momenty macierzowe) Niech $A = (A_N)_{N \in \mathbb{N}}$ oznacza zespół macierzowy o rzeczywistych wartościach własnych. Wówczas zdefiniujemy **momenty macierzowe pierwszego rzędu** w postaci

$$\alpha_j^A = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\langle \frac{1}{N} \text{Tr} (A_N^j) \right\rangle$$

oraz **momenty macierzowe drugiego rzędu** jako

$$\alpha_{i,j}^A = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\langle \text{Tr} (A_N^i), \text{Tr} (A_N^j) \right\rangle_{\text{con}},$$

przy czym $\langle AB \rangle_{\text{con}} = \langle AB \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle$.

Definicja 6 (Szeregi potęgowe) Rozważmy zespół macierzowy A o rzeczywistych wartościach własnych, posiadający momenty macierzowe pierwszego oraz drugiego rzędu. Zdefiniujemy **szereg potęgowy pierwszego rzędu** jako

$$M_A(x) = 1 + \sum_{j \geq 1} \alpha_j^A x^j \quad (3.1)$$

oraz **szereg potęgowy drugiego rzędu** w postaci

$$M_A(x, y) = \sum_{i, j \geq 1} \alpha_{i,j}^A x^i y^j. \quad (3.2)$$

Definicja 7 (Swobodne kumulanty) Swobodne kumulanty zgodnie z terminologią wprowadzoną przez Voiculescu [25] definiujemy w sposób pośredni poprzez ich funkcję tworzącą $R(x)$ oraz funkcję Greena $G(x)$ jako

$$R(x) = \sum_{n \geq 1} \kappa_n x^{n-1}, \text{ gdzie } \frac{1}{G(x)} + R(G(x)) = x.$$

W zależności od stosowanej konwencji definicja kumulant może przybierać także inną postać, co zostało przybliżone w Dodatku A.4.

Definicja 8 (Rozkład graniczny momentów 2-go rzędu) *Zespół macierzowy $(A_N)_{N \in \mathbb{N}}$ posiada rozkład graniczny momentów 2-go rzędu pod warunkiem, że jego momenty α_j^A and $\alpha_{i,j}^A$ istnieją i mają skończone wartości oraz warunek*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \kappa_r \left[\text{Tr} \left(A_N^{i(1)} \right), \dots, \text{Tr} \left(A_N^{i(r)} \right) \right] = 0$$

jest spełniony dla wszystkich $j \geq 3$ oraz wszystkich $i(1), \dots, i(r) \in \mathbb{N}$, gdzie κ_r oznacza r -tą kumulantę klasyczną.

Definicja 9 (Wektor fluktuacji momentów macierzowych) *Niech zespół macierzowy A_N posiada graniczny rozkład momentów 2-go rzędu. Fluktuacje momentów macierzowych pierwszego rzędu zapiszemy w postaci wektora o nieskończonym wymiarze w postaci*

$$(v)_j = \text{Tr} A^j - \langle \text{Tr} A^j \rangle.$$

3.2. Podstawowe narzędzia rachunkowe

Rachunki w bazie diagonalnej

Zapisując rozważany problem w bazie diagonalnej pojawiają się takie pojęcia jak spektralna gęstość prawdopodobieństwa $\rho(\lambda)d\lambda$ oraz równoważne z Definicją 5 momenty spektralne wyrażone jako

$$m_k = \left\langle \frac{1}{N} \text{Tr} \left(A_N^k \right) \right\rangle = \int \rho(\lambda) \lambda^k d\lambda.$$

W przypadku kiedy widmo jest dyskretne zapiszemy odpowiednio prawdopodobieństwo p_i pojawienia się w widmie wartości własnej λ_i , natomiast momenty spektralne wynosić będą $m_k = \sum_i (\lambda_i)^k p_i$.

Ponadto mamy możliwość skorzystania relacji w postaci

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda \pm \epsilon} = \mathbf{P} \left(\frac{1}{\lambda} \right) \mp i\pi\delta(\lambda),$$

oraz ze związku łączącego gęstość prawdopodobieństwa $\rho(\lambda)$ z funkcją Greena

$$\rho(\lambda) = -\frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Im G(z)|_{z=\lambda+i\epsilon}.$$

Możemy też oczywiście wyrazić funkcję Greena za pomocą wartości własnych w postaci

$$G(z) = \left\langle \frac{1}{N} \text{Tr} \frac{1}{\mathbf{1}_N z - H} \right\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^{k+1}} \left\langle \frac{1}{N} \text{Tr} H^k \right\rangle$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^{k+1}} m_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^{k+1}} \int \rho(\lambda) \lambda^k d\lambda.$$

Freeness

Koncepcja "Swobodnych zmiennych przypadkowych" (z ang. "Free Random Variables", w skrócie „FRV”) dotycząca rachunku macierzy przypadkowych jest odpowiednikiem niezależności zmiennych losowych w klasycznej teorii prawdopodobieństwa. Termin ten pojawia się zamiennie z równoważnym określeniem „Swobodne macierze przypadkowe”. W środowisku matematyków można spotykać się też z określeniem "Wolne macierze przypadkowe”.

Termin "Freeness" po raz pierwszy został użyty przez Voiculescu [24], [25] a precyzuje go następująca

Definicja 10 (Swobodne zespoły macierzowe - warunek „Freeness”) Niech będą dane zespoły macierzowe H_1, H_2, \dots, H_m oraz wielomiany P jednej zmiennej zdefiniowane dla każdego z zespołów, przy czym zmienną każdego z wielomianów jest inny zespół macierzowy

$$P_1(H_{i(1)}), \dots, P_k(H_{i(k)}), \\ i(1) \neq i(2) \neq \dots \neq i(k).$$

Zakładamy ponadto, że średnia macierzowa dla każdego z wielomianów wynosi zero

$$\forall_{j=1, \dots, k} \langle P_j(H_{i(j)}) \rangle = 0.$$

Mówimy, że zespoły macierzy H_1, H_2, \dots, H_m są swobodne (lub też równoważnie, że zespoły te spełniają warunek „Freeness”), jeśli zachodzi

$$\langle P_1(H_{i(1)}) \cdots P_k(H_{i(k)}) \rangle = 0$$

Przykłady obliczenia momentów mieszanych

Z technicznego punktu widzenia warunek Freeness jest sposobem na policzenie momentów mieszanych zespołów H_1, H_2, \dots, H_m o ile tylko znane są kolejne momenty H_i . Ideę przeprowadzania rachunków zaprezentujemy na kilku prostych przypadkach.

Przykład 1

Dane są dwa zespoły macierzowe A oraz B , przy czym założenia Definicji 10 spełnione są przez zespoły $\tilde{A} = A - \mathbf{1} \langle A \rangle$ oraz $\tilde{B} = B - \mathbf{1} \langle B \rangle$ (dla wygody rachunku będziemy pomijać w zapisie macierzową jedynkę). Chcąc obliczyć moment $\langle AB \rangle$ zapiszemy

$$0 = \langle \tilde{A}\tilde{B} \rangle = \langle (A - \langle A \rangle)(B - \langle B \rangle) \rangle = \langle AB \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle,$$

a więc $\langle AB \rangle = \langle A \rangle \langle B \rangle$.

Przykład 2

Dla tych samych zespołów co w powyższym przykładzie chcemy policzyć moment $\langle AB^2 \rangle$. Rozważmy wyrażenie

$$0 = \langle \tilde{A}\tilde{B}\tilde{B} \rangle = \langle (A - \langle A \rangle)(B - \langle B \rangle)(B - \langle B \rangle) \rangle,$$

przy czym wszystkie składniki postaci $\langle A \langle B \rangle B \rangle$, $\langle AB \langle B \rangle \rangle$, $\langle A \langle B \rangle \langle B \rangle \rangle$, $\langle \langle A \rangle \langle B \rangle \langle B \rangle \rangle$, zgodnie z wynikiem Przykładu 1 wynoszą $\langle B \rangle \langle AB \rangle = \langle B \rangle \langle A \rangle \langle B \rangle = \langle A \rangle \langle B \rangle^2$. Ostatecznie otrzymujemy

$$\langle AB^2 \rangle = \langle A \rangle \langle B^2 \rangle .$$

Przykład 3

Chcąc obliczyć moment $\langle ABA \rangle$ rozważamy wyrażenie

$$0 = \langle (A - \langle A \rangle)(B - \langle B \rangle)(A - \langle A \rangle) \rangle ,$$

które po wymnożeniu wszystkich składników i skorzystaniu z wyniku Przykładu 1 zapiszemy w postaci

$$\langle ABA \rangle = \langle A^2 \rangle \langle B \rangle .$$

Przykład 4

Postępując w podobny sposób, czyli mnożąc wszystkie składniki odpowiedniego wyrażenia oraz posługując się wynikiem Przykładu 1, otrzymujemy moment $\langle A^2 B^2 \rangle$ w postaci

$$\langle A^2 B^2 \rangle = \langle A^2 \rangle \langle B^2 \rangle .$$

Przykład 5

Obliczmy moment typu $\langle ABAB \rangle$. W tym celu należy zapisać wyrażenie

$$0 = \langle \tilde{A}\tilde{B}\tilde{A}\tilde{B} \rangle = \langle (A - \langle A \rangle)(B - \langle B \rangle)(A - \langle A \rangle)(B - \langle B \rangle) \rangle ,$$

które po krótkim rachunku przekształcamy do postaci

$$\begin{aligned} \langle ABAB \rangle &= - \langle A \rangle^2 \langle B \rangle^2 + \langle AB^2 \rangle \langle A \rangle + \langle ABA \rangle \langle B \rangle \\ &+ \langle A \rangle \langle BAB \rangle - \langle A \rangle^2 \langle B^2 \rangle + \langle A^2 B \rangle \langle B \rangle - \langle A^2 \rangle \langle B \rangle^2 . \end{aligned}$$

Skorzystamy następnie z rezultatów przedstawionych w Przykładzie 2 oraz Przykładzie 3. Otrzymujemy

$$\langle ABAB \rangle = \langle A^2 \rangle \langle B \rangle^2 + \langle A \rangle^2 \langle B^2 \rangle - \langle A \rangle^2 \langle B \rangle^2 .$$

3.3. Transformacje R,S (lub B, N)

Transformacja R - funkcja Blue

Dane są zespoły swobodnych macierzy hermitowskich H_1 oraz H_2 , dla których możemy zapisać funkcje Greena $G_{H_1}(z)$ oraz $G_{H_2}(z)$. Interesuje nas obliczenie momentów dla rozkładu będącego sumą H_1 oraz H_2 , czyli innymi słowy chcielibyśmy znać postać funkcji Greena $G_{H_1+H_2}(z)$. Zauważmy, że funkcja Greena nie jest w prosty sposób addytywna, przez co zadanie jest nietrywialne. Sposobem na obliczenie poszukiwanej funkcji Greena jest zastosowanie transformacji R [25]. Dla macierzy H_1 oraz H_2 zapiszmy funkcję Blue spełniającą

$$B_{H_i}(G_{H_i}(z)) = z,$$

która związana jest z transformacją R zależnością

$$R_{H_i}(z) = B_{H_i}(z) - \frac{1}{z}.$$

Tak obliczona funkcja $R_{H_i}(z)$, nosząca miano transformaty R, jest addytywna i zachodzi $R_{H_1+H_2}(z) = R_{H_1}(z) + R_{H_2}(z)$. Jej zastosowanie pozwala w prosty sposób obliczyć poszukiwaną funkcję Greena $G_{H_1+H_2}(z)$. Więcej informacji na temat funkcji Blue oraz funkcji R znajduje się w Dodatku A.4.

Transformacja S - transformacja N

Rozpatrujemy ponownie przypadek dwóch swobodnych zespolów macierzy hermitowskich H_1 oraz H_2 , dla których możemy zapisać funkcje Greena $G_{H_1}(z)$ oraz $G_{H_2}(z)$. Tym razem interesuje nas obliczenie momentów dla rozkładu będącego iloczynem $H = H_1 \cdot H_2$, a więc poszukiwać będziemy funkcji Greena $G_{H_1 \cdot H_2}(z)$. Zauważmy, że macierz H nie jest w ogólności hermitowska, tym samym jej widmo nie musi być rzeczywiste. Rozwiązaniem tak postawionego problemu jest transformacja S [25]. Znając funkcje $G_{H_i}(z)$ wyliczamy najpierw funkcje pomocnicze $\chi_i(z)$ rozwiązując równania

$$\frac{1}{\chi_i(z)} G_{H_i} \left(\frac{1}{\chi_i(z)} \right) = z + 1. \quad (3.3)$$

Wówczas transformacja S zadana jest wzorem

$$S_i(z) = \frac{1+z}{z} \chi_i(z), \quad (3.4)$$

która jest obiektem multiplikatywnym, a więc zachodzi $S_{H_1 \cdot H_2}(z) = S_{H_1}(z) \cdot S_{H_2}(z)$. Tak więc chcąc uzyskać funkcję Greena $G_{H_2 \cdot H_2}(z)$ należy najpierw obliczyć funkcje $G_{H_1}(z)$ oraz $G_{H_2}(z)$, następnie na ich podstawie funkcję $S_{H_1 \cdot H_2}(z)$ a następnie postępując w kolejności odwrotnej do powyższej otrzymujemy poszukiwaną funkcję Greena $G_{H_2 \cdot H_2}(z)$.

Warto wspomnieć, że zastąpienie zaprezentowanej powyżej funkcji $\chi(z)$ jej odwrotnością $N(z) = \frac{1}{\chi(z)}$ [44] niesie pewne wymierne korzyści, wobec czego jej wprowadzenie jest uzasadnione. Mianowicie z jednej strony podstawienie takie upraszcza nieco rachunki, z drugiej strony związek funkcji $N(z)$ z funkcją generującą momenty jest znacznie bardziej intuicyjny niż w przypadku pierwotnej funkcji $\chi(z)$. Zapiszemy zatem definicję transformacji N jako

$$N_H(z) G_H(N_H(z)) - 1 = z, \quad (3.5)$$

przy czym wynikające z własności multiplikatywności transformacji S prawo mnożenia dla transformacji N przyjmie postać

$$N_{H_1 \cdot H_2} = \frac{z}{z+1} N_{H_1}(z) N_{H_2}(z). \quad (3.6)$$

Jak wspomniano, transformacja N jest w bardzo przejrzysty sposób związana z funkcją generującą momenty, która jest zdefiniowana jako

$$z G_H(z) - 1 = M_H(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{m_H^n}{z^n}. \quad (3.7)$$

Porównując (3.5) oraz (3.7) widzimy, że funkcja generująca momenty $M_H(z)$ jest funkcjonalną odwrotnością transformacji N , co zapiszemy jako

$$N_H(M_H(z)) = M_H(N_H(z)) = z. \quad (3.8)$$

W praktyce mając daną postać transformacji N funkcję generującą momenty otrzymujemy podstawiając $N \rightarrow z$ oraz $z \rightarrow M$.

Pomimo faktu, że zespoły macierzy niehermitowskich wykraczają poza zakres tematyki niniejszej pracy, warto jednak wspomnieć, że na chwilę obecną dysponujemy narzędziami [45, 46] będącymi uogólnieniem transformacji R oraz S także dla macierzy niehermitowskich.

Rozdział 4

Funkcja Greena, wolne kumulanty - diagramatyka

Podójście diagramatyczne pozwala na stosunkowo szybkie i przejrzyste wyprowadzenie wielu przydatnych w dalszej części pracy relacji. W poniższym rozdziale w pierwszej kolejności zostaną przybliżone ogólne reguły związane z posługiwaniem się diagramami Feynmana. Następnie pokazane zostaną wyprowadzenia 1-punktowej oraz 2-punktowej funkcji Greena bazujące właśnie na metodzie diagramatycznej, przy czym rozważone zostaną osobno przypadki zespołu Gaussa oraz Wisharta. Pokazana zostanie także diagramatyczna konstrukcja wolnych kumulant.

4.1. Diagramy Feynmana - podstawowe informacje

Aby posługiwać się sprawnie diagramami Feynmana przybliżymy najpierw reguły z nimi związane (patrz np. [23] rozdział 3). Na Rysunku 4.1 pokazano podstawowe elementy składowe z których będą budowane grafy. Reguły budowania grafów w przypadku zespołów Gaussa oraz Wisharta zostaną omówione osobno.

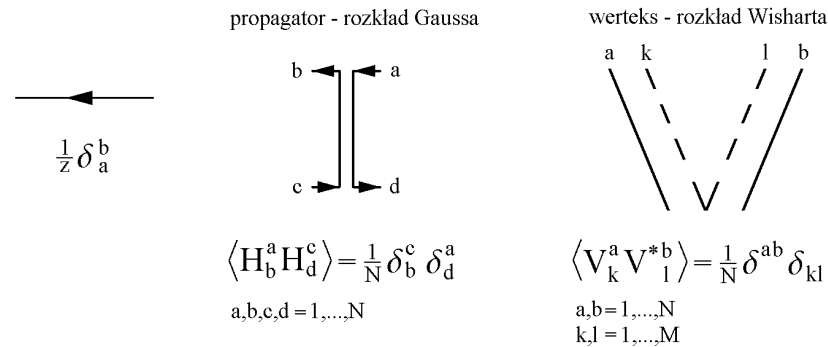
Rozważymy najpierw najprostszy przypadek zespołu Gaussa, kiedy to podstawowym składnikiem rozważanych funkcji Greena są fragmenty typu H^2 , a więc propagatory. Macierze H są kwadratowe o wymiarze $N \times N$. Reguły budowania grafów są następujące:

- Każdemu propagatorowi odpowiada czynnik $\frac{1}{N}$,
- Każdej utworzonej pętli odpowiada czynnik N .
- Istotny wkład pochodzi tylko od grafów planarnych (bez przecięć, komentarz poniżej).
- Jeżeli rozpatrujemy funkcję od dwóch zmiennych, wówczas każdej zmiennej odpowiadają osobne linie, których nie można ze sobą mieszać (komentarz poniżej).

W przypadku zespołu Wisharta reguły ulegają pewnej modyfikacji. Przede wszystkim dla rozkładu Wisharta podstawowy składnik z którego będą budowane grafy wygląda inaczej, mamy bowiem macierze V występujące w parach jako $H = V^\dagger V$, a zatem podstawowym składnikiem będzie w tym przypadku nie propagator ale raczej werteks, przy czym wymiar V to $N \times M$ oraz $M/N = m$. Dodatkowo w tym przypadku należy rozróżniać linie niosące N oraz M składników, co jest związane z tym, po której krawędzi macierzy V liczymy. W praktyce rysujemy linie niosące M składników linią kreskowaną, linie niosące N składników linią ciągłą.

Wymieńmy reguły budowania grafów dla zespołu Wisharta

- Każdemu werteksowi odpowiada czynnik $\sqrt{\frac{1}{N}}$.



Rysunek 4.1. Reguły dla grafów Feynmana - przypadek rozkładu Gaussa oraz Wisharta

- Linie odpowiadające krawędzi macierzy V o wymiarze N rysujemy linią ciągłą, dla krawędzi o wymiarze M linią przerywaną.
- Każdej pętli utworzonej z linii ciągłej odpowiada czynnik N , pętli utworzonej z linii przerywanej czynnik wynosi M .
- Istotny wkład mają tylko grafy planarne (bez przecięć, komentarz poniżej).
- Jeżeli rozpatrujemy funkcję od dwóch zmiennych, wówczas każdej zmiennej odpowiada osobne linie, których nie można ze sobą mieszać. Dotyczy to zarówno linii ciągłych jak również przerywanych (komentarz poniżej).

Grafy planarne

Wyjaśnijmy dlaczego bierzemy pod uwagę tylko grafy planarne. Należy pamiętać, że rozwinięcie funkcji Greena rozpatrujemy w granicy dużych N . Jak zostało wspomniane każdy propagator / werteks daje czynnik $\frac{1}{N}$ / $\sqrt{\frac{1}{N \text{ lub } M}}$, natomiast każda pętla to czynnik N lub M . Jeśli zatem w rozpatrywanym grafie liczba utworzonych pętli jest zbyt mała w stosunku do liczby propagatorów / werteksów, wówczas w granicy dużych N taki graf będzie dawał wkład dążący do zera. Jak łatwo się przekonać, w praktyce są to grafy, w których po narysowaniu linie przecinają się, nazywamy je „grafami nieplanarnymi”. Grafy tego typu po prostu pomijamy jako nie dające w granicy dużych N istotnego wkładu do rozpatrywanego wyrażenia, rozważamy tylko grafy planarne a więc bez przecięć. Rysunek 4.2 pokazuje kilka najprostszych przykładów grafów planarnych oraz nieplanarnych. Dodatkowe informacje na temat interpretacji topologicznej diagramów Feynmana znajdują się w Dodatku D.



Rysunek 4.2. Przykłady grafów: grafy a) oraz b) planarne, graf c) nieplanarny

Grafy funkcji dwóch zmiennych

Na koniec należy jeszcze wspomnieć o tym jak rysować grafy jeśli rozpatrujemy funkcje od dwóch zmiennych. W takim przypadku należy pamiętać o rozróżnieniu linii dla zmiennych z oraz w , rysując je na przykład innym kolorem lub też zastosować

jakiś inny wyróżnik. W naszym przypadku grafy będziemy rysować na pierścieniach o dwóch krawędziach, przy czym każdej krawędzi będzie odpowiadać jedna zmienna. Na przykład można ustalić, że zewnętrznej krawędzi pierścienia odpowiada ją linie $\frac{1}{z}$, natomiast wewnętrznej krawędzi odpowiada ją linie $\frac{1}{w}$.

4.2. Funkcja Greena 1-punktowa - rozkład Gaussa

Rozważmy równanie 1-punktowej funkcji Greena w postaci

$$G(z) = \left\langle \frac{1}{N} \text{Tr} \frac{1}{\mathbf{1}_N z - H} \right\rangle,$$

gdzie $\mathbf{1}_N$ oznacza macierz jednostkową o wymiarze $N \times N$. W dalszej części pracy zgodnie z powszechną praktyką w zapisie funkcji Greena będziemy zwykle pomijać jedynkę $\mathbf{1}_N$, co upraszcza nieco notację nie prowadząc równocześnie do nieporozumień. Powyższe równanie funkcji Greena rozwinie w szereg wokół $z = \infty$ otrzymując

$$G(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \left\langle \frac{1}{N} \text{Tr} H \right\rangle + \frac{1}{z^3} \left\langle \frac{1}{N} \text{Tr} H^2 \right\rangle + \frac{1}{z^4} \left\langle \frac{1}{N} \text{Tr} H^3 \right\rangle + \dots \quad (4.1)$$

W języku grafów Feynmana funkcję Greena będziemy rysować w postaci zakresowanego skośnie koła. Zgodnie z regułami przedstawionymi w Rozdziale 4.1 Równanie (4.1) wyglądać będzie tak jak to pokazano na Rysunku 4.3.

Rysunek 4.3. Funkcja Greena w przypadku zespołu Gaussa. Niektóre z tworzących ją grafów są typu 1PI, natomiast inne nie.

Zauważmy następnie, że w zapisie funkcji Greena pojawiają się zasadniczo dwa rodzaje diagramów, mianowicie niektóre z grafów nie dają się rozdzielić po przecięciu dowolnej z linii wewnętrznych. Są to tzw. grafy 1-cząstkowo nieredukowalne (diagramy tęczowe), które w skrócie nazywane są też 1PI (z ang. 1PI = 1 particle irreducible). Zgrupujemy ze sobą wszystkie grafy 1-cząstkowo nieredukowalne nazywając ich sumę Σ , tak jak to pokazano na Rysunku 4.4. Tak zdefiniowany szereg Σ

Rysunek 4.4. Suma grafów 1PI w przypadku rozkładu Gaussa

pozwała zapisać funkcję Greena w nowy sposób. Łatwo bowiem zauważyć, że jedynie poza pierwszym składnikiem wynoszącym $\frac{1}{z}$, każdy z grafów wchodzących w skład funkcji Greena jest albo jednym ze składników szeregu Σ , albo jest połączeniem kilku składników Σ . Możemy zatem zapisać funkcję Greena w postaci przedstawionej na Rysunku 4.5,

Rysunek 4.5. Funkcja Greena jako szereg geometryczny Σ

co odpowiada równaniu

$$G(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z}\Sigma\frac{1}{z} + \frac{1}{z}\Sigma\frac{1}{z}\Sigma\frac{1}{z} + \frac{1}{z}\Sigma\frac{1}{z}\Sigma\frac{1}{z}\Sigma\frac{1}{z} + \dots =$$

$$= \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\Sigma}{z}\right)^n = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{\Sigma}{z}},$$

które zapiszemy ostatecznie w postaci

$$G(z) = \frac{1}{z - \Sigma(z)}. \quad (4.2)$$

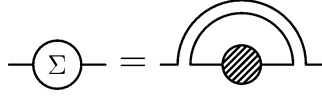
Warto w tym momencie wspomnieć, że symbol Σ pojawia się w niniejszej pracy w dwóch kontekstach. W odniesieniu do grafów Feynmana oznacza on sumę wszystkich grafów 1-cząstkowo nieredukowalnych, tak jak to zostało pokazane powyżej. Z drugiej strony w odniesieniu do widma macierzy macierzy przypadkowych (Rozdział 6 oraz kolejne) oznaczać będzie prawdziwą macierz kowariancji. Stosowanie tego samego symbolu nie jest wbrew pozorom mylące i tym samym nie prowadzi do żadnych problemów czy pomyłek, gdyż w konkretnym przypadku zawsze dokładnie wiadomo o które znaczenie chodzi. W tej sytuacji zdecydowano, że nie ma większego sensu zmieniać ogólnie przyjętej terminologii i pozostawiono wspólny symbol Σ w obydwu przypadkach.

Półkole Wignera

Rozpatrujemy przypadek, kiedy potencjał w mierze $\langle \dots \rangle$ wynosi $V(H) = H^2$, a więc przypadek Gaussowski. Funkcje Greena oraz Σ zostały już co prawda pokazane na Rysunkach 4.3 oraz 4.4, jednak dopiero ich zestawienie bezpośrednio obok siebie, tak jak to pokazano na Rysunku 4.6, pozwala zauważyć pewną zależność.

Rysunek 4.6. Funkcja Σ w przypadku Gaussa, łatwo zauważyć duże podobieństwo do funkcji Greena

Widzimy teraz wyraźnie, że każdy z diagramów składowych funkcji Σ utworzony jest z jednego z diagramów tworzących funkcję Green'a przez dodanie propagatora łączącego końce tego diagramu, przy czym wykorzystane w ten sposób zostaną wszystkie diagramy składowe tworzące funkcję Greena. Wniosek z tego jest taki, że funkcja



Rysunek 4.7. Równanie Schwingera-Dysona

Σ to nic innego jak funkcja Greena „obłożona” jednym dodatkowym propagatorem (równanie Schwingera-Dysona). Fakt ten można zapisać za pomocą diagramów Feynmana tak jak to pokazano na Rysunku 4.7, co oznacza, że możemy zapisać

$$\Sigma = \frac{1}{N} \text{Tr} G \mathbf{1}_N = \frac{1}{N} G N = G,$$

a zatem Równanie Schwingera-Dysona (4.2) w rozważanym przypadku rozkładu Gaussa przyjmuje ostatecznie postać

$$G = \frac{1}{z - G}, \quad (4.3)$$

którego rozwiązaniem jest

$$G(z) = \frac{1}{2} [z \pm \sqrt{z^2 - 4}],$$

przy czym dla odtworzenia poprawnego zachowania funkcji Greena dla argumentów $z \rightarrow \infty$ należy wybierać rozwiązanie ze znakiem „-”. Istotnie możemy sprawdzić, że

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{1}{2} [z - \sqrt{z^2 - 4}] = \frac{1}{2} \frac{(z - \sqrt{z^2 - 4})(z + \sqrt{z^2 - 4})}{z + \sqrt{z^2 - 4}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{4}{z + \sqrt{z^2 - 4}} \xrightarrow{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z}, \end{aligned}$$

tak więc zapiszemy ostatecznie

$$G(z) = \frac{1}{2} [z - \sqrt{z^2 - 4}]. \quad (4.4)$$

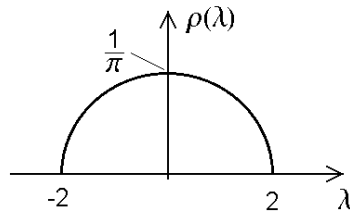
Znając postać funkcji Greena jesteśmy w stanie wyliczyć rozkład wartości własnych w widmie. Zapiszemy zatem równanie

$$\rho(\lambda) = -\frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Im G(z)|_{z=\lambda+i\epsilon} = \Im \frac{1}{2} [z - \sqrt{z^2 - 4}]|_{z=\lambda+i\epsilon},$$

którego rozwiązaniem dla $x^2 - 4 \geq 0$ jest 0, natomiast dla $x^2 - 4 < 0$ otrzymujemy

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{2} (z - \sqrt{z^2 - 4}). \quad (4.5)$$

Jest to znany wynik nazywany półkolem Wignera, który przedstawiono na Rysunku 4.8.



Rysunek 4.8. Rozkład wartości własnych dla zespołu Gaussa - półkole Wignera.

4.3. Funkcja Greena 1-punktowa - rozkład Wisharta

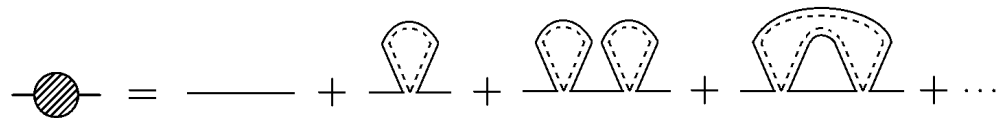
Rozpatrzmy ponownie 1-punktową funkcję Greena

$$G(z) = \left\langle \frac{1}{N} \text{Tr} \frac{1}{z - H} \right\rangle,$$

którą rozwiniemy w szereg wokół $z = \infty$, przy czym dla rozkładu Wisharta mamy $H = V^\dagger V$, zapiszemy zatem

$$G(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \left\langle \frac{1}{N} \text{Tr} V^\dagger V \right\rangle + \frac{1}{z^3} \left\langle \frac{1}{N} \text{Tr} (V^\dagger V)^2 \right\rangle + \frac{1}{z^4} \left\langle \frac{1}{N} \text{Tr} (V^\dagger V)^3 \right\rangle + \dots$$

Podstawowym elementem w powyższym równaniu są werteksy $H = V^\dagger V$, których sposób rysowania zgodny z nomenklaturą diagramów Feynmana został pokazany graficznie na Rysunku 4.1. Należy pamiętać, że prostokątne macierze V w praktyce oznaczają, że sumowanie po pętli utworzonej z linii ciągłej daje czynnik N , natomiast dla sumowania po linii przerywanej mamy czynnik M . Równanie 1-punktowej funkcji Greena zapisane za pomocą diagramów Feynmana pokazano na Rysunku 4.9.



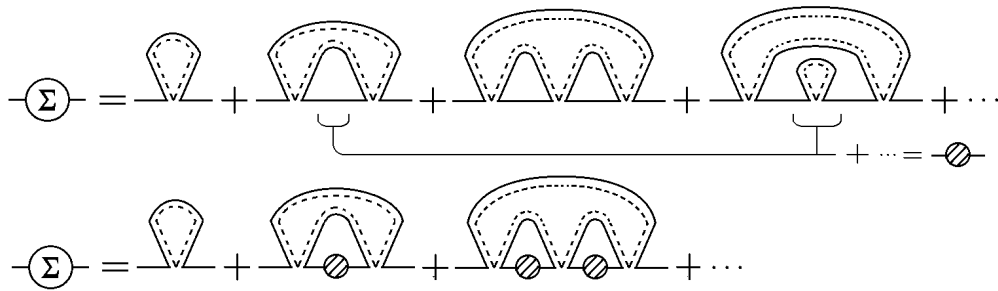
Rysunek 4.9. Funkcja Green'a dla zespołu Wisharta.

Zgrupujmy następnie ze sobą wszystkie grafy 1-cząstkowo nieredukowalne, których sumę oznaczmy symbolem Σ . Postępując analogicznie jak w przypadku Gaussowskim, funkcję Greena można wyrazić w postaci nieskończonego szeregu geometrycznego w którym pojawiają się kolejne potęgi Σ , co zapiszemy w postaci

$$G(z) = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z} \Sigma \right)^n = \frac{1}{z - \Sigma(z)}. \tag{4.6}$$

Zastanówmy się teraz jak w rozważanym przypadku zespołu Wisharta wygląda Σ . Odpowiednie diagramy dla wyrazów najniższych rzędów jak H^1 , H^2 czy H^3 bardzo łatwo narysować, tak jak pokazano w górnej części Rysunku 4.10. Rysując grafy wyższych rzędów możemy zauważyć dwie reguły. Po pierwsze kiedy kolejny fragment

grafu wyższego rzędu narysujemy wewnątrz mniejszej tarczy, wówczas obserwujemy, że wewnątrz wspomnianej mniejszej tarczy zaczynają pojawiać się kolejne fragmenty funkcji Greena, a więc po zsumowaniu przyczynków od wszystkich rzędów ostatecznie pojawia się tam cała funkcja Greena. Proces ten nazywamy „ubieraniem” poziomej linii ciągłej. Z drugiej strony, rysując grafy w innej konfiguracji, wewnątrz zewnętrznej podwójnej tarczy ale równocześnie na zewnątrz mniejszych, wówczas otrzymujemy kolejne mniejsze tęcze ułożone jedna za drugą. Zgodnie z pierwszą obserwacją wewnątrzna linia ciągła dla każdej z wewnętrznych tarczy jest zawsze ubrana do pełnej funkcji Greena, tak jak to pokazano w dolnej części Rysunku 4.10.



Rysunek 4.10. Szereg Σ dla zespołu Wisharta, pokazano proces „ubierania” linii wewnątrz mniejszych tarczy.

Dla poprawienia przejrzystości dalszego rachunku wprowadzamy dwa pomocnicze oznaczenia. Wyobraźmy sobie najpierw, że ze wszystkich grafów wchodzących w skład Σ usuwamy zewnętrzną linię ciągłą oraz przecinamy domykającą je od góry linię przerywaną. Otrzymujemy szereg składający się z grafów, które zaczynają i kończą się linią przerywaną. Sumę wszystkich takich grafów oznaczmy za pomocą pogrubionej linii poziomej. Po drugie szereg Σ z przeciętą zewnętrzną podwójną tarczą oznaczmy literą F , tak jak pokazano na Rysunku 4.11.

$$F = \text{---} \text{---} \text{---}$$

$$\text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} = mF$$

Rysunek 4.11. U góry oznaczenie pomocnicze „F”, z dołu równanie Schwingera-Dysona w przypadku zespołu Wisharta.

Warto zauważyć, że dorysowanie do F brakującej do Σ zewnętrznej podwójnej tarczy oznacza uzupełnienie linii ciągłej oraz domknięcie pętli utworzonej z linii przerywanej, a więc otrzymujemy relację

$$\Sigma = \frac{M}{N} F = mF. \quad (4.7)$$

Zapis szeregu Σ z użyciem tak zdefiniowanych oznaczeń pomocniczych pozwala zauważyć, że nieskończony szereg Σ daje się w istocie zapisać w bardziej zwartej postaci. Staje się to jasne, kiedy zapiszemy w sposób jawny jak wyglądają kolejne składniki szeregu F , co pokazano na Rysunku 4.12.

$$\begin{aligned} \text{---} \text{V} \text{---} &= \text{---} \text{V} \text{---} + \text{---} \text{V} \text{---} + \text{---} \text{V} \text{---} + \text{---} \text{V} \text{---} + \dots \\ &= \text{---} \text{V} \text{---} + \text{---} \text{V} \text{---} \end{aligned}$$

Rysunek 4.12. Równanie Schwingera-Dysona dla zespołu Wisharta, w wyniku zwinienia szeregu F otrzymujemy relację $F = 1 + FG$.

Zwróćmy uwagę na fakt, że obserwujemy tu pewną analogię otrzymanych grafów do równania $B = 1 + A + AA + AAA + \dots$, które można zapisać w postaci $B = 1 + A(1 + A + AA + AAA + \dots) = 1 + AB$. W podobny sposób postępujemy z rozważanymi grafami, co pozwala nam na wyrażenie szeregu F w postaci skończonego wyrażenia. Rezultatem otrzymanego równania w postaci grafów Feynmana jest relacja

$$F = 1 + FG. \quad (4.8)$$

Z (4.6), (4.7) oraz (4.8) otrzymujemy natychmiast równanie

$$zG^2(z) + G(z)(m - z - 1) + 1 = 0,$$

którego rozwiązaniem jest

$$G(z) = \frac{1}{2z} \left[z - m + 1 \pm \sqrt{(m - z - 1)^2 - 4z} \right],$$

przy czym dla poprawnego odtworzenia zachowania funkcji Greena dla $z \rightarrow \infty$ należy wybrać rozwiązanie ze znakiem „-”. Możemy szybko sprawdzić, że jest to poprawny wybór. Wprowadźmy oznaczenie pomocnicze w postaci $z + 1 - m = k$, zapiszemy wówczas

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{1}{2z} \left[k - \sqrt{k^2 - 4z} \right] = \frac{(k - \sqrt{k^2 - 4z})(k + \sqrt{k^2 - 4z})}{2z(k + \sqrt{k^2 - 4z})} \\ &= \frac{k^2 - k^2 + 4z}{2z(k + \sqrt{k^2 - 4z})} = \frac{2}{(k + \sqrt{k^2(1 - \frac{4z}{k^2})})}, \end{aligned}$$

przy czym dla $z \rightarrow \infty$ zachodzi $k \rightarrow \infty$ oraz $\frac{4z}{k^2} \rightarrow 0$, a więc otrzymujemy

$$G(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z}.$$

A zatem ostatecznym rozwiązaniem wynikającym z równań (4.6), (4.7) oraz (4.8) o poprawnym zachowaniu asymptotycznym jest funkcja

$$G(z) = \frac{1}{2z} \left[z - m + 1 - \sqrt{(m - z - 1)^2 - 4z} \right]. \quad (4.9)$$

Obliczmy jeszcze rozkład wartości własnych w widmie, zapiszemy

$$\begin{aligned} \rho(\lambda) &= -\frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Im G(z)|_{z=\lambda+i\epsilon} = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Im \left[1 + \frac{1-m}{z} - \frac{\sqrt{(m-z-1)^2 - 4z}}{z} \right] \Big|_{z=\lambda+i\epsilon} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Im \frac{\sqrt{(m-z-1)^2 - 4z}}{z} \Big|_{z=\lambda+i\epsilon}. \end{aligned}$$

Wyrażenie pod pierwiastkiem przekształcimy do postaci

$$(m-z-1)^2 - 4z = z^2 - 2z(m+1) + (m-1)^2.$$

Jego miejsca zerowe to

$$z_{\pm} = m+1 \pm 2\sqrt{m} = (\sqrt{m} \pm 1)^2,$$

zapiszemy zatem

$$\rho_{MP}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Im \frac{\sqrt{(z-z_+)(z-z_-)}}{z} \Big|_{z=\lambda+i\epsilon},$$

tak więc ostatecznie rozkład wartości własnych w przypadku zespołu Wisharta opisany będzie wzorem

$$\rho_{MP}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{(\lambda_- - \lambda)(\lambda - \lambda_+)}}{\lambda}, \quad (4.10)$$

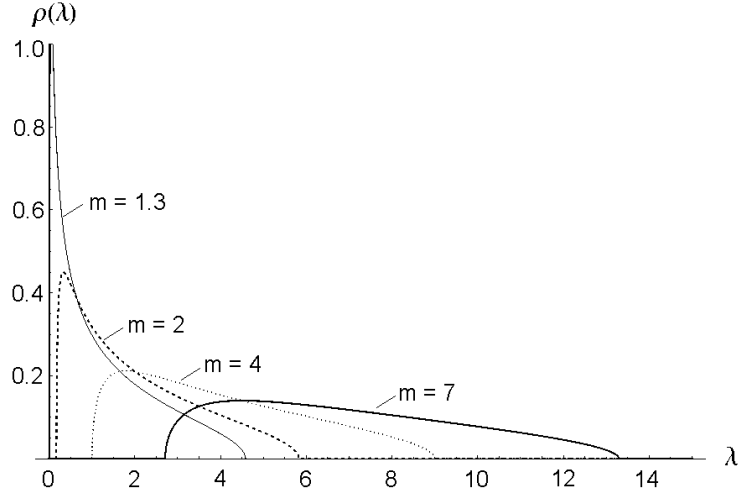
gdzie $m = \frac{M}{N}$ oraz $\lambda_{\pm} = (\sqrt{m} \pm 1)^2$, przy czym dla $\lambda \notin \langle \lambda_-, \lambda_+ \rangle$ zachodzi $\rho_{MP}(\lambda) = 0$. Równanie (4.10) to wynik znany jako wzór Marčhenko-Pastura [47]. Na Rysunku 4.13 został pokazany wykres ilustrujący rozważany rozkład wartości własnych dla kilku przykładowych wartości parametru m .

Warto wspomnieć, że wzór Marčhenko-Pastura pojawia się często w literaturze także w nieco odmiennej niż (4.10) postaci, co wynika z posługiwania się parametrem $r = \frac{N}{M}$ zamiast $m = \frac{M}{N}$. Różnica jest co prawda banalna, jednak warto pokazać na czym polega. Rozważmy prawdopodobieństwo $\rho_{MP}(\lambda)d\lambda$, które zapiszemy w zmiennych $\Lambda = r\lambda$, gdzie $r = \frac{1}{m}$. Otrzymujemy wówczas

$$\lambda_{\pm} = (\sqrt{m} \pm 1)^2 = \frac{(1 \pm \sqrt{r})^2}{r} = \frac{\Lambda_{\pm}}{r}$$

oraz $d\lambda = \frac{1}{r}d\Lambda$. Interesować nas będzie prawdopodobieństwo $\rho'_{MP}(\Lambda)d\Lambda$, oczywiście musi zachodzić $\rho_{MP}(\lambda)d\lambda = \rho'_{MP}(\Lambda)d\Lambda$, możemy zatem zapisać

$$\rho_{MP}(\lambda)d\lambda = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{(\frac{\lambda_-}{r} - \frac{\Lambda}{r})(\frac{\Lambda}{r} - \frac{\lambda_+}{r})}}{\frac{\Lambda}{r}} \frac{1}{r} d\Lambda = \rho'_{MP}(\Lambda)d\Lambda.$$



Rysunek 4.13. Ilustracja wzoru Marčhenko-Pastura, rozkład wartości własnych dla zespołu Wisharta w zależności od wartości $m = \frac{M}{N}$.

Ostatecznie wzór Marčhenko-Pastura przyjmie postać

$$\rho'_{MP}(\Lambda) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{(\Lambda_- - \Lambda)(\Lambda - \Lambda_+)}}{\Lambda r}, \quad (4.11)$$

gdzie $r = \frac{N}{M}$ oraz $\Lambda_{\pm} = (1 \pm \sqrt{r})^2$, przy czym dla $\Lambda \notin \langle \Lambda_-, \Lambda_+ \rangle$ zachodzi $\rho'_{MP}(\Lambda) = 0$. Wzory (4.10) oraz (4.11) są oczywiście równoważne.

Na koniec rozważań dotyczących rozkładu Marčhenko-Pastura warto uświadomić sobie, że gęstość prawdopodobieństwa $\rho_{MP}(\Lambda)$ opisana wzorem (4.10) dotyczy sytuacji, kiedy macierz $V^\dagger V$ jest wymiaru $N \times N$ i tym samym nie zawiera modów zerowych. Można jednak równie dobrze rozważać macierze VV^\dagger , które będą miały wymiar $M \times M$, a więc będą to macierze większe, przy czym zwiększenie wymiaru wiązać się będzie z pojawieniem się modów zerowych. Dokładnie rzecz ujmując w widmie takich macierzy pojawi się N wartości własnych niezerowych oraz $M - N$ modów zerowych. Ich obecność nie wnosi co prawda żadnych dodatkowych informacji, które wpływałyby w istotny sposób na kształt funkcji gęstości prawdopodobieństwa, jednak należy pamiętać, że po wycalkowaniu dają one niezerowy wkład do normy. Tak więc ze względu na konieczność utrzymania prawidłowej normalizacji w obecności modów zerowych rozważana funkcja musi ulec modyfikacji do postaci

$$\rho_{MP}^0(\lambda) = \frac{M - N}{M} \delta(0) + \frac{N}{M} \rho_{MP}(\lambda),$$

która po wycalkowaniu daje prawidłową normę równą jedności.

4.4. Funkcja Greena 2-punktowa

Przedstawiony poniżej rachunek, mający na celu zapis funkcji Greena 2-punktowej za pomocą funkcji Greena 1-punktowej, opiera się na metodzie diagramatycznej. Wynik

obowiązujący dla zespołu Gaussa otrzymany przez [48] został uogólniony [49] także dla przypadku zespołu Wisharta. Zapiszmy najpierw ogólną definicję 2-punktowej funkcji Green'a

$$G(z, w) = \frac{1}{N^2} \left\langle \text{Tr} \frac{1}{z - H} \text{Tr} \frac{1}{w - H} \right\rangle_c,$$

którą możemy przekształcić do równoważnej postaci

$$G(z, w) = \frac{1}{N^2} \frac{1}{z} \frac{1}{w} \left\langle \text{Tr} \frac{1}{1 - \frac{H}{z}} \text{Tr} \frac{1}{1 - \frac{H}{w}} \right\rangle_c,$$

przy czym należy zwrócić uwagę, że funkcja Greena 2-punktowa zdefiniowana jest poprzez średnia macierzową „connected”, zgodnie Definicją 3. Wyrażenie powyższe rozwijamy do postaci szeregu geometrycznego

$$\begin{aligned} G(z, w) &= \frac{1}{N^2} \frac{1}{z} \frac{1}{w} \left\langle \text{Tr} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{H}{z} \right)^n \text{Tr} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{H}{w} \right)^k \right\rangle_c = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} \frac{1}{w^{k+1}} \left\langle \frac{1}{N} \text{Tr} H^n \frac{1}{N} \text{Tr} H^k \right\rangle_c, \end{aligned}$$

możemy je także zapisać w równoważnej postaci

$$G(z, w) = \partial_z \partial_w \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} \frac{1}{w^k} \left\langle \frac{1}{Nn} \text{Tr} H^n \frac{1}{Nk} \text{Tr} H^k \right\rangle_c. \quad (4.12)$$

Wyrażenie funkcji Greena w tej formie pozwala na posłużenie się zapisem za pomocą diagramów Feynmana. Zgodnie z ogólnymi regułami wymienionymi w Rozdziale 4.1 grafy będziemy rysować na pierścieniach o dwóch krawędziach. Dalsza część rachunku przebiegać będzie inaczej w zależności o rozważanego rozkładu macierzowego, rozpatrzmy osobno rozkład Gaussa oraz rozkład Wisharta.

4.4.1. Funkcja Greena 2-punktowa, rozkład Gaussa

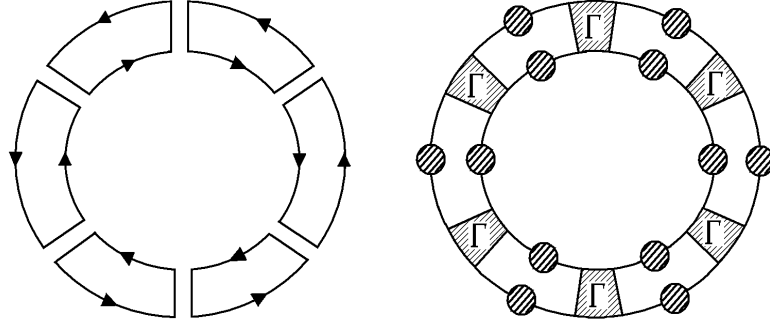
Rozważmy najpierw fragment wyrażenia (4.12) pochodzący od członów dla $n = k$, które można w pewnym sensie nazwać 'członami diagonalnymi'. Odpowiadające takim przypadkom grafy Feynmana można narysować w postaci pierścienia, tak jak to pokazano na Rysunku 4.14 po lewej stronie.

Otrzymany graf rozdziela się na n rozłącznych pętli, przy czym liczba propagatorów oraz liczba utworzonych pętli jest w tym przypadku równa i wynosi n , zatem $\langle \text{Tr} H^n \text{Tr} H^n \rangle_c = n$. Zapiszemy

$$G(z, w)|_{\text{diag}} = \frac{1}{N^2} \partial_z \partial_w \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{zw} \right)^n \frac{1}{n}, \quad (4.13)$$

przy czym składnik sumy dla $n = 0$ wynosi $\frac{1}{n}$ co sprawia, że znika on po wykonaniu różniczkowania. Wyrażenie przyjmuje postać

$$G(z, w)|_{\text{diag}} = \frac{1}{N^2} \partial_z \partial_w \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{zw} \right)^n \frac{1}{n}.$$



Rysunek 4.14. Dwupunktowa funkcja Green'a dla rozkładu Gaussa, po lewej człon diagonalny dla $n = k = 6$, po prawej pokazano „ubieranie” linii

Pomnóżmy następnie wszystkie składniki szeregu przez jedność w postaci $(-1^n)(-1^n)$ otrzymując

$$G(z, w)|_{\text{diag}} = -\frac{1}{N^2} \partial_z \partial_w \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(-\frac{1}{zw}\right)^n \frac{1}{n},$$

co pozwoli na bezpośrednie zastosowanie rozwinięcia Maclaurina logarytmu $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ obowiązującego dla $-1 < x \leq +1$ i zapisanie wyrażenia w postaci

$$G(z, w)|_{\text{diag}} = -\frac{1}{N^2} \partial_z \partial_w \ln \left(1 - \frac{1}{zw}\right). \quad (4.14)$$

Pozostaje zastanowić się co się dzieje w przypadkach kiedy $n \neq k$. W takiej sytuacji nie jest możliwe narysowanie grafów z użyciem tej samej liczby elementów jak dla $n = k$ i z tego powodu grafy będą wyglądały inaczej, pojawią się pewne modyfikacje. W tych fragmentach grafów, gdzie uprzednio występowały linie $\frac{1}{z}$ oraz $\frac{1}{w}$ pojawią się różnego rodzaju rozgałęzienia, przy czym należy oczywiście pamiętać o uwzględnieniu wszystkich możliwych kombinacji dla danych n oraz k . W efekcie końcowym prowadzi to do tego, że zamiast każdej z linii pojawią się 1-punktowe funkcje Greena $G(z)$ oraz $G(w)$. Proces ten nazywamy „ubieraniem” linii. Skutkuje on w praktyce zastąpieniem linii $\frac{1}{z}$ funkcjami Greena $G(z)$ oraz analogicznie linie $\frac{1}{w}$ zastępowane są funkcjami Greena $G(w)$. Drugim efektem wynikającym z $n \neq k$ będą modyfikacje dotyczące samego propagatora, który w ogólności będzie należało zastąpić 2-cząstkowo nieredukowalnym jądrem $\Gamma(z, w)$. Przykładowy graf Feynmana opisujący ten przypadek pokazano na Rysunku 4.14 po prawej stronie. Funkcję Greena zapiszemy

$$G(z, w) = -\frac{1}{N^2} \partial_z \partial_w \ln [1 - G(z)G(w)\Gamma(z, w)].$$

W przypadku rozkładu Gaussa, kiedy potencjał $V(H)$ jest kwadratowy, a więc nie zawiera oddziaływań o stopniu wyższym niż 2, jądro $\Gamma(z, w)$ można zapisać jako $\Gamma_{abcd} = \frac{1}{N} \delta_{cb} \delta_{ad}$, a zatem ostatecznie wyrażenie na funkcję Green'a przyjmie postać

$$G(z, w) = -\frac{1}{N^2} \partial_z \partial_w \ln [1 - G(z)G(w)]. \quad (4.15)$$

Przekształćmy jeszcze powyższy wzór (4.15) do nieco innej postaci. Skorzystamy w tym celu z równania Schwingera-Dysona dla zespołu Gaussa (4.3) zapisanego jako $\frac{1}{G(x)} = x - G(x)$, gdzie x jest równe z lub w . Rozważmy następnie tożsamość

$$\frac{1}{G(z)} - \frac{1}{G(w)} = \frac{G(w) - G(z)}{G(w)G(z)},$$

którą po skorzystaniu z równania Schwingera-Dysona możemy zapisać w postaci

$$G(z)G(w) = \frac{1}{\frac{z-w}{G(w)-G(z)} + 1}.$$

Zatem argument logarytmu ze wzoru (4.15) możemy zapisać jako

$$1 - G(z)G(w) = \frac{z-w}{G(z) - G(w)} G(z)G(w),$$

natomiast cały logarytm wyniesie

$$\ln[1 - G(z)G(w)] = \ln[G(z)] + \ln[G(w)] + \ln\left[\frac{z-w}{G(w) - G(z)}\right].$$

W kolejnych kroku wykonamy podwójne różniczkowanie powyższego wzoru, z którego jako niezerowy pozostanie tylko ostatni składnik. Możemy zatem zapisać funkcję Greena w postaci

$$G(z, w) = \frac{1}{N^2} \partial_z \partial_w \ln\left[\frac{G(w) - G(z)}{z - w}\right], \quad (4.16)$$

która jak się niedługo przekonamy (patrz rachunek pokazany w Rozdziale 4.4.2) jest postacią uniwersalną. Na koniec wykonajmy jeszcze w sposób jawny podwójne różniczkowanie po $\partial_z \partial_w$, co pozwala zapisać 2-punktową funkcję Greena dla zespołu Gaussa w postaci

$$G(z, w) = \frac{1}{N^2} \left[\frac{G'(z)G'(w)}{[G(z) - G(w)]^2} - \frac{1}{(z-w)^2} \right], \quad (4.17)$$

przy czym dla wygody zapisu $G'(x)$ oznacza $\partial_x G(x)$, gdzie x to z lub w .

4.4.2. Funkcja Greena 2-punktowa, rozkład Wisharta

Początkowa część rachunku przebiega analogicznie jak w przypadku zespołu Gaussa - wychodzimy z definicji funkcji Greena 2-punktowej przekształcając ją do postaci (4.12). W tym momencie dokładamy informację o zespole Wisharta zapisując macierze H jako $H = V^\dagger V$, rozważane równanie przyjmuje zatem postać

$$G(z, w) = \partial_z \partial_w \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} \frac{1}{w^k} \left\langle \frac{1}{Nn} \text{Tr}(V^\dagger V)^n \frac{1}{Nk} \text{Tr}(V^\dagger V)^k \right\rangle_c. \quad (4.18)$$

Rozpatrzmy najpierw jak wyglądają człony dla $n = k$, które ponownie nazwiemy umownie 'członami diagonalnymi'. Graf Feynmana ilustrujący ten przypadek pokazano na Rysunku 4.15 po lewej stronie.

który będziemy chcieli przekształcić i zapisać w innej postaci. Podobnie jak w poprzednim przypadku skorzystamy z równania Schwingera-Dysona dla zespołu Wisharta, a więc przywołamy wzory (4.6), (4.7) oraz (4.8) z których w sposób bezpośredni wynika relacja $\frac{1}{G(x)} = x - \frac{m}{1-G(x)}$, gdzie w roli zmiennej x występuje z lub w . Następnie rozważmy tożsamość

$$G(w) - G(z) = G(z)G(w) \left[\frac{1}{G(z)} - \frac{1}{G(w)} \right],$$

którą po skorzystaniu z wynikającej z równania Schwingera-Dysona relacji możemy zapisać w postaci

$$G(w) - G(z) = G(w)G(z) \left[z - w + m \frac{1 - G(z) - [1 - G(w)]}{[1 - G(w)][1 - G(z)]} \right].$$

Dzieląc obie strony powyższej równości przez wyrażenie $G(w) - G(z)$ a następnie wyciągając logarytm otrzymujemy

$$\ln \left[1 - m \frac{G(z)}{1 - G(z)} \frac{G(w)}{1 - G(w)} \right] = \ln G(w) + \ln G(z) + \ln \frac{z - w}{G(w) - G(z)}.$$

Powyższe równanie jest już bliskie funkcji Greena (4.19), którą postanowiliśmy wyrazić w innej postaci. Z dokładnością do stałej brakuje jedynie podwójnego różniczkowania po obydwu zmiennych, w wyniku którego po prawej stronie równości zostanie tylko ostatni składnik. Ostatecznie zatem 2-punktową funkcję Greena dla zespołu Wisharta możemy zapisać w postaci

$$G(z, w) = \frac{1}{N^2} \partial_z \partial_w \ln \left[\frac{G(w) - G(z)}{z - w} \right], \quad (4.20)$$

natomiast po wykonaniu różniczkowania otrzymujemy wzór

$$G(z, w) = \frac{1}{N^2} \left[\frac{G'(z)G'(w)}{[G(z) - G(w)]^2} - \frac{1}{(z - w)^2} \right]. \quad (4.21)$$

Zauważmy, że powyższe wzory (4.20) oraz (4.21) są identyczne z uzyskanymi poprzednio wzorami (4.16) oraz (4.17). Oznacza to, że 2-punktowa funkcja Greena w przypadku zespołu Gaussa oraz zespołu Wisharta wyrażają się przez 1-punktowe funkcje Greena w taki sam sposób. W przypadku zespołu GOE obserwacja jest zgodna z wynikiem pracy [50], natomiast w gólniejszym przypadku jest potwierdzeniem pewnej głębszej uniwersalności zaobserwowanej przez [51].

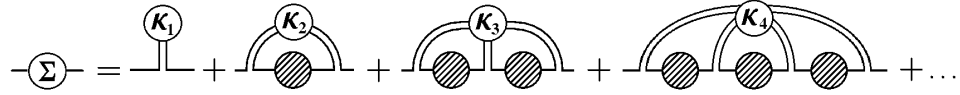
4.5. Wolne kumulanty

Interesujące jest wyprowadzenie wzoru definiującego wolne kumulanty posługujące się diagramami Feynmana. Do tej pory rozważaliśmy dosyć szczególne przypadki bardzo prostych potencjałów, ale zastanówmy się czym w bardziej ogólnym przypadku jest Σ . Interesować nas będzie jaką ogólną postać przyjmuje Σ . Przypomnijmy, że zgodnie z podstawowym założeniem szereg Σ to suma wszystkich grafów 1-cząstkowo nieredukowalnych. Jak już wspomniano w ogólnym przypadku potencjał w mierze $\langle \dots \rangle$ może być inny niż Gaussowski $V = H^2$, co jest najprostszym

rozważanym przypadkiem. Jeśli na przykład będzie on zawierał człon H^3 , wówczas w diagramach pojawią się potrójne rozgałęzienia. Potencjał może również zawierać różne inne składniki, które będą w różny sposób komplikowały grafy. Pozostaje jednak faktem, że funkcję Σ zawsze można zdefiniować jako sumę wszystkich grafów 1PI, oraz że funkcję Greena zawsze można będzie wyrazić za pomocą Σ w postaci szeregu geometrycznego w zmiennej Σ , którego wartość po wysumowaniu wyniesie

$$G(z) = \frac{1}{z - \Sigma(z)}. \quad (4.22)$$

W przypadku kiedy bierzemy pod uwagę wszelkie możliwe postaci potencjału V najbardziej ogólna postać Σ będzie wyglądać tak jak to przedstawiono na Rysunku 4.17.



Rysunek 4.17. Ogólna postać funkcji Σ

Na marginesie można w tym momencie podać przykład dotyczący równania Schwingera-Dysona dla przypadku Gaussa, które zostało przedstawione graficznie na Rysunku 4.7. Otóż w języku omawianego właśnie uogólnionego zapisu funkcji Σ z użyciem kumulant powiedzieli byśmy, że w przypadku Gaussowskim kumulanta $\kappa_2 = 1$ natomiast pozostałe kumulanty wynoszą zero.

Wracając do tematu, grafy przedstawione na Rysunku 4.17 możemy zapisać w postaci równania

$$\begin{aligned} \Sigma(z) &= \kappa_1 + \kappa_2 G(z) + \kappa_3 G(z)^2 + \kappa_4 G(z)^3 + \dots \\ \Sigma(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \kappa_k G(z)^{k-1} = R(G(z)), \end{aligned} \quad (4.23)$$

które stanowi w istocie szereg definiujący kumulanty macierzowe κ_k poprzez funkcję $R(G)$ Voiculescu. Po skorzystaniu z równania (4.22) zapiszemy

$$z - \frac{1}{G(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} \kappa_k G(z)^{k-1} = R(G(z)), \quad (4.24)$$

natomiast po wprowadzeniu funkcji Blue $B(G) = R(G) + \frac{1}{G}$ okazuje się, że powyższe Równanie (4.24) możemy zapisać w równoważnej postaci $B(G(z)) = z$.

Rozdział 5

Funkcja Greena dla momentów odwrotnych

Celem rachunku przedstawionego w niniejszym rozdziale jest wyrażenie dwupunktowej funkcji Greena $G_{H^{-1}}(\frac{1}{z}, \frac{1}{w})$ za pomocą 1-punktowych funkcji Greena $G_{H^{-1}}(\frac{1}{z})$. Macierz H musi być oczywiście odwracalna. Ponadto zakładamy, że istnieją wszystkie momenty macierzowe $\alpha_i^{H^{-1}}$. Najpierw jednak rozpatrzmy funkcję Greena 1-punktową. Zapiszmy jej definicję dla macierzy H^{-1} posługując się zmiennymi $\frac{1}{z}$

$$G_{H^{-1}}\left(\frac{1}{z}\right) = \left\langle \frac{1}{N} \text{Tr} \frac{1}{\frac{1}{z} - H^{-1}} \right\rangle,$$

przy czym po przejściu do diagonalnej bazy macierzy H^{-1} zachodzi $H^{-1} = \frac{1}{H}$, wówczas wyrażenie możemy przekształcić do postaci

$$\begin{aligned} G_{H^{-1}}\left(\frac{1}{z}\right) &= \left\langle \frac{1}{N} \text{Tr} \frac{Hz}{H-z} \right\rangle = z \left\langle \frac{1}{N} \text{Tr} \frac{H-z+z}{H-z} \right\rangle = \\ &= z \left\langle \frac{1}{N} \text{Tr} \left(1 - \frac{z}{z-H}\right) \right\rangle. \end{aligned}$$

Otrzymujemy zatem wzór

$$G_{H^{-1}}\left(\frac{1}{z}\right) = z(1 - zG_H(z)), \quad (5.1)$$

oraz po prostym przekształceniu analogiczny wzór w postaci

$$G_H(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} G_{H^{-1}}\left(\frac{1}{z}\right). \quad (5.2)$$

Następnie przypomnijmy definicję dwupunktowej funkcji Greena

$$G_H^c(z, w) = G_H(z, w) - G_H(z)G_H(w),$$

gdzie

$$G_H(z, w) = \left\langle \frac{1}{N} \text{Tr} \frac{1}{z-H} \frac{1}{N} \text{Tr} \frac{1}{w-H} \right\rangle.$$

Rozważmy zatem dwupunktową funkcję Greena zapisaną dla odwrotności macierzy kowariancji

$$G_{H^{-1}}^c\left(\frac{1}{z}, \frac{1}{w}\right) = G_{H^{-1}}\left(\frac{1}{z}, \frac{1}{w}\right) - G_{H^{-1}}\left(\frac{1}{z}\right) G_{H^{-1}}\left(\frac{1}{w}\right),$$

gdzie składnik sumy $G_{H^{-1}}\left(\frac{1}{z}, \frac{1}{w}\right)$ oznaczmy jako S_1 natomiast pozostałą część prawej strony równości oznaczmy jako S_2 . Obliczmy najpierw S_1 , otrzymujemy

$$\begin{aligned} S_1 &= \left\langle \frac{1}{N^2} \text{Tr} \frac{1}{\frac{1}{z} - H^{-1}} \text{Tr} \frac{1}{\frac{1}{w} - H^{-1}} \right\rangle = \left\langle \frac{zw}{N^2} \text{Tr} \frac{-H}{z - H} \text{Tr} \frac{-H}{w - H} \right\rangle = \\ &= \left\langle \frac{zw}{N^2} \text{Tr} \left(1 - z \frac{1}{z - H} \right) \text{Tr} \left(1 - w \frac{1}{w - H} \right) \right\rangle = \\ &= \left\langle zw \left(1 - z \frac{1}{N} \text{Tr} \frac{1}{z - H} \right) \left(1 - w \frac{1}{N} \text{Tr} \frac{1}{w - H} \right) \right\rangle, \end{aligned}$$

zatem składnik S_1 wynosi

$$S_1 = zw + z^2 w^2 G_H(z, w) - z^2 w G_H(z) - z w^2 G_H(w). \quad (5.3)$$

Obliczmy następnie składnik S_2 wynoszący

$$S_2 = G_{H^{-1}}\left(\frac{1}{z}\right) G_{H^{-1}}\left(\frac{1}{w}\right),$$

po skorzystaniu ze wzoru (5.2) otrzymujemy

$$\begin{aligned} S_2 &= z(1 - z G_H(z))(w(1 - w G_H(w))) = \\ S_2 &= zw - z w^2 G_H(w) - z^2 w G_H(z) + z^2 w^2 G_H(z) G_H(w). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Korzystając z (5.3) oraz (5.4) możemy ostatecznie obliczyć $G_{H^{-1}}^c\left(\frac{1}{z}, \frac{1}{w}\right) = S_1 - S_2$, gdzie jak łatwo się przekonać większość wyrazów ulega skróceniu, pozostawiając krótkie wyrażenie

$$G_{H^{-1}}^c\left(\frac{1}{z}, \frac{1}{w}\right) = z^2 w^2 [G_H(z, w) - G_H(z) G_H(w)] = z^2 w^2 G_H^c(z, w). \quad (5.5)$$

Skorzystamy następnie z omawianego w dalszej części pracy wzoru (A.9) wyrażającego 2-punktową funkcję Greena $G_H^c(z, w)$ poprzez 1-punktową funkcję Greena $G_H(z)$ i tym samym zapiszemy równanie (5.5) w postaci

$$G_{H^{-1}}^c\left(\frac{1}{z}, \frac{1}{w}\right) = z^2 w^2 \left[\frac{\frac{d}{dz} G_H(z) \frac{d}{dw} G_H(w)}{(G_H(z) - G_H(w))^2} - \frac{1}{(z - w)^2} \right]. \quad (5.6)$$

Jak łatwo sprawdzić zmiana zmiennych różniczkowania na $\frac{1}{x}$ likwiduje czynnik $z^2 w^2$ w pierwszej części wyrażenia, gdyż $\frac{d}{dx} = -\frac{1}{x^2} \frac{d}{d\frac{1}{x}}$. Wzór (5.6) możemy więc zapisać w postaci

$$G_{H^{-1}}^c\left(\frac{1}{z}, \frac{1}{w}\right) = \frac{\frac{d}{d\frac{1}{z}} G_H(z) \frac{d}{d\frac{1}{w}} G_H(w)}{(G_H(z) - G_H(w))^2} - \frac{1}{\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{w}\right)^2}. \quad (5.7)$$

Pozostaje skorzystać ze wzoru (5.2) zgodnie z którym $G_H(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} G_{H^{-1}}\left(\frac{1}{z}\right)$ i zapisać prawą stronę równości w całości w zmiennych $\frac{1}{x}$ jako

$$G_{H^{-1}}^c\left(\frac{1}{z}, \frac{1}{w}\right) = \frac{\frac{d}{d\frac{1}{z}} \left[\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} G_{H^{-1}}\left(\frac{1}{z}\right) \right] \frac{d}{d\frac{1}{w}} \left[\frac{1}{w} - \frac{1}{w^2} G_{H^{-1}}\left(\frac{1}{w}\right) \right]}{\left[\left[\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} G_{H^{-1}}\left(\frac{1}{z}\right) \right] - \left[\frac{1}{w} - \frac{1}{w^2} G_{H^{-1}}\left(\frac{1}{w}\right) \right] \right]^2} - \frac{1}{\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{w}\right)^2}. \quad (5.8)$$

Przekształćmy jeszcze powyższy wzór zapisując go w języku szeregów potęgowych, zgodnie z Definicją 6. Skorzystamy w tym celu z definicji transformat Cauchy'ego 1-punktowej (A.5) oraz 2-punktowej (A.8), które są równoważne funkcji Greena 1 oraz 2-punktowej. Wspomniane wzory zapiszemy od razu w zmiennych $\frac{1}{x}$

$$G_{H^{-1}}\left(\frac{1}{x}\right) = xM_{H^{-1}}(x), \text{ gdzie } M_{H^{-1}}(x) = 1 + \sum_{n \geq 1} \alpha_n^{H^{-1}} x^n, \quad (5.9)$$

$$G_{H^{-1}}\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) = xyM_{H^{-1}}(x, y), \text{ gdzie } M_{H^{-1}}(x, y) = \sum_{i, j \geq 1} \alpha_{i, j}^{H^{-1}} x^i y^j. \quad (5.10)$$

Korzystając z (5.9) rozważmy powtarzający się we wzorze (5.8) fragment $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} G_{H^{-1}}\left(\frac{1}{x}\right)$, przy czym wynik dla poprawienia przejrzystości dalszych rachunków oznaczmy nowym symbolem

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} G_{H^{-1}}\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{1}{x} [1 - M_{H^{-1}}(x)] = \\ &= - \sum_{n \geq 1} \alpha_n^{H^{-1}} x^{n-1} = -\tilde{M}_{H^{-1}}(x). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Następnie korzystając z (5.10), (5.11) oraz zmieniając zmienne z powrotem na x równanie (5.8) możemy ostatecznie zapisać jako

$$M_{H^{-1}}(z, w) = zw \left[\frac{\frac{d}{dz} \tilde{M}_{H^{-1}}(z) \frac{d}{dw} \tilde{M}_{H^{-1}}(w)}{[\tilde{M}_{H^{-1}}(z) - \tilde{M}_{H^{-1}}(w)]^2} - \frac{1}{(z-w)^2} \right] \quad (5.12)$$

gdzie

$$\tilde{M}_{H^{-1}}(x) = \sum_{n \geq 1} \alpha_n^{H^{-1}} x^{n-1} = -\frac{1}{x} [1 - M_{H^{-1}}(x)].$$

Otrzymane relacje (5.12) oraz (5.8) są oczywiście równoważne, niemniej wzór (5.12) w sposób bardziej bezpośredni wyraża związek pomiędzy momentami macierzowymi drugiego oraz pierwszego rzędu dla odwrotności macierzy kowariancji. Tym samym z punktu widzenia implementacji algorytmu generującego kolejne relacje pomiędzy momentami 2-go oraz 1-go rzędu dla rozważanych macierzy wzór (5.12) będzie bardziej praktyczny.

Rozdział 6

Związki pomiędzy momentami macierzowymi

W Rozdziale 7 będziemy rozważać widmo macierzy kowariancji S powstałej w następujący sposób. Danych jest M pomiarów x_m , z których każdy jest N -wymiarowym wektorem opisanym rozkładem Gaussa o zerowej średniej oraz dodatnio zdefiniowanej macierzy kowariancji Σ , przy czym $M > N$. Wektory pomiarów można zapisać w postaci macierzy $X = [x_1, \dots, x_M]$, na podstawie której definiujemy doświadczalną macierz kowariancji $S = \frac{1}{M}XX^\dagger$.

Zagadnieniem, na którym skupimy naszą uwagę w sposób szczególny, jest możliwość wnioskowania na temat widma macierzy Σ na podstawie znajomości doświadczalnej macierzy kowariancji S oraz wymiarów N oraz M . Taki zabieg nazywany jest estymacją widma macierzy kowariancji. Do skonstruowania kolejnych estymatorów widma macierzy kowariancji potrzebna będzie znajomość relacji wiążących momenty macierzowe 1-rzędu macierzy S oraz macierzy Σ , oraz możliwość wyrażenia momentów macierzowych 2-go rzędu danej macierzy przez jej momenty macierzowe 1-go rzędu. Ponadto do konstrukcji pewnej grupy estymatorów (estymatory dualne) niezbędna okaże się znajomość analogicznych do wspomnianych relacji, jednak obowiązujących dla odwrotności rozpatrywanych macierzy. Wszystkie wspomniane powyżej relacje istnieją, natomiast sposób ich uzyskania zostanie pokazany w niniejszym rozdziale.

Przypomnijmy jeszcze, że symbol Σ pojawił się już w Rozdziale 4 przy okazji diagramatycznego zapisu funkcji Greena jako suma wszystkich grafów 1-cząstkowo nieredukowalnych, a więc w zupełnie innej roli niż macierz kowariancji Σ . Tak jak już wspomniano, stosowanie w tych dwóch przypadkach tego samego symbolu jest powszechną praktyką, która nie prowadzi do żadnych nieporozumień ze względu na wynikające zawsze jasno z kontekstu znaczenie pojawiającego się Σ .

6.1. Związek momentów granicznych z obserwowanymi

Interesuje nas zależność pomiędzy widmem macierzy kowariancji Σ oraz widmem macierzy S będącej pewnym estymatorem macierzy Σ . Rozważmy zatem te macierze oraz ich momenty macierzowe pierwszego rzędu zdefiniowane jako

$$\alpha_k^\Sigma = \frac{1}{N} \text{Tr} \Sigma^k,$$
$$\alpha_k^S = \frac{1}{N} \text{Tr} S^k.$$

Zgodnie z ogólnie przyjętym żargonem dla wygody momenty α_k^Σ będziemy nazywać „momentami prawdziwymi” lub „momentami granicznymi” (z ang. „true moments”),

natomiast momenty α_k^S będziemy nazywać „momentami obserwowanymi” lub „momentami doświadczalnymi” (z ang. „sample moments”). Interesująca nas zależność między widmem macierzy Σ oraz macierzy S wyraża się właśnie poprzez relację między momentami obserwowanymi a prawdziwymi, która została wyprowadzona w pracy [52] (patrz także [53, 54]) i przyjmuje postać

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^S}{z^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^\Sigma}{z^k} \left(1 + r \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\alpha_l^S}{z^l} \right)^k. \quad (6.1)$$

Warto podkreślić obecność i znaczenie parametru $r = \frac{n}{k}$, gdzie n oraz k to wymiary macierzy obserwacji X . Jeśli obserwacje są długie, wówczas mamy do czynienia z macierzami o dużym wydłużeniu, czyli parametr r jest mały. W takiej sytuacji poprawka zawierająca r po prawej stronie równości ma niewielkie znaczenie, momenty obserwowane są bliskie prawdziwym. Zupełnie inaczej jest kiedy obserwacje trwają krótko i parametr r przyjmuje większą wartość, w praktyce może on nieraz być nawet bliski jedności. Wówczas poprawka zawierająca r zaczyna mieć istotny wkład w wartość wyrażenia.

Po ustaleniu rzędu K_{\max} momentów jakie nas interesują oraz rozwiązaniu powyższego równania jesteśmy w stanie uzyskać dwa komplety wzorów, wyrażające momenty obserwowane w funkcji momentów prawdziwych oraz w relację stronę przeciwną. Dla wygody oznaczmy lewą stronę równania jako $f(\frac{1}{z})$ a następnie wykonajmy podstawienie $\frac{1}{z} = x$, wówczas możemy przepisać równanie (6.1) do wygodniejszej postaci

$$f(x) = \sum_{k=1}^{K_{\max}} x^k \alpha_k^S = \sum_{k=1}^{K_{\max}} x^k \alpha_k^\Sigma \left(1 + r \sum_{l=1}^{K_{\max}} x^l \alpha_l^S \right)^k. \quad (6.2)$$

Jak widać momenty obserwowane α_k^S są kolejnymi wyrazami rozwinięcia Taylora funkcji $f(x)$ w zmiennej x . Widać także, że momenty α_k^S uzyskane bezpośrednio z wyrazów rozwinięcia Taylora będą się wyrażały nie tylko przez kolejne momenty α_k^Σ ale także przez momenty α_k^S niższych rzędów. Dlatego też aby uzyskać komplet wzorów dla momentów do rzędu K_{\max} należy rozwiązać najpierw równanie dla wszystkich niższych rzędów $K \leq K_{\max}$, rugując systematycznie α_k^S pojawiające się we kolejnych wzorach wzorach na α_K^S , gdzie $k < K$. Ostatecznie uzyskujemy zestaw wzorów wyrażający α_k^S przez α_l^Σ , gdzie $l = 1, \dots, k$

$$\begin{aligned} \alpha_1^S &= \alpha_1^\Sigma \\ \alpha_2^S &= \alpha_2^\Sigma + r (\alpha_1^\Sigma)^2 \\ \alpha_3^S &= \alpha_3^\Sigma + 3r \alpha_1^\Sigma \alpha_2^\Sigma + r^2 (\alpha_1^\Sigma)^3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

oraz zestaw wzorów dla relacji w stronę przeciwną, wyrażających α_k^Σ przez α_l^S , gdzie $l = 1, \dots, k$

$$\begin{aligned} \alpha_1^\Sigma &= \alpha_1^S \\ \alpha_2^\Sigma &= \alpha_2^S - r (\alpha_1^S)^2 \\ \alpha_3^\Sigma &= \alpha_3^S - 3r \alpha_1^S \alpha_2^S + 2r^2 (\alpha_1^S)^3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Interesować nas będzie także związek pomiędzy widmem odwrotności macierzy kowariancji Σ oraz widmem odwrotności macierzy S . Odpowiednia relacja pomiędzy momentami α_{-k}^{Σ} oraz α_{-k}^S również została wyprowadzona w pracy [52] i przyjmuje postać

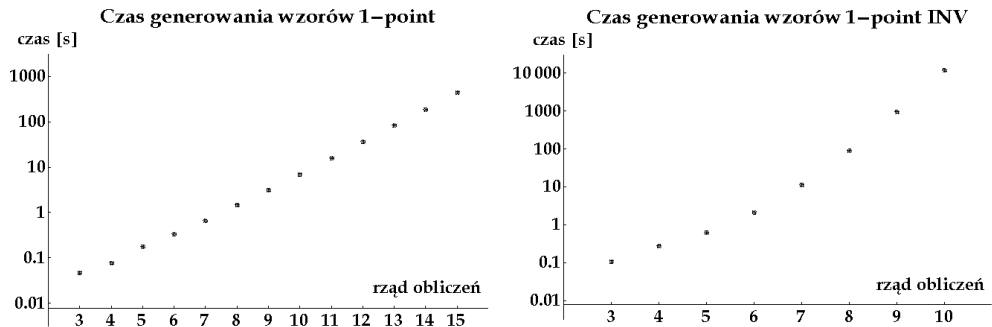
$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{-k}^{\Sigma} Z^k = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{-k}^S Z^k \left(1 - r - r \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_{-l}^{\Sigma} Z^l \right)^k. \quad (6.3)$$

Sposób postępowania jest podobny jak w poprzednim przypadku. Interesuje nas rozwinięcie Taylora prawej strony równości w zmiennej z . Analogicznie jak w poprzednim przypadku uzyskane w ten sposób wzory na momenty α_{-K}^{Σ} będą zawierały momenty niższych rzędów α_{-k}^{Σ} , gdzie $k < K$, które należy wyrugować wykonując kolejne podstawienia. Ostatecznie uzyskujemy komplet wzorów wyrażający α_{-k}^{Σ} przez α_{-l}^S , gdzie $l = 1, \dots, k$

$$\begin{aligned} \alpha_{-1}^{\Sigma} &= (1-r)\alpha_{-1}^S \\ \alpha_{-2}^{\Sigma} &= (1-r)^2\alpha_{-2}^S - r(1-r)(\alpha_{-1}^S)^2 \\ \alpha_{-3}^{\Sigma} &= \alpha_{-3}^S - 3r\alpha_{-1}^S\alpha_{-2}^S + 2r^2(\alpha_{-1}^S)^3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

oraz odpowiadający im komplet wzorów dla relacji w stronę przeciwną

$$\begin{aligned} \alpha_{-1}^S &= \frac{1}{1-r}\alpha_{-1}^{\Sigma} \\ \alpha_{-2}^S &= \frac{1}{(1-r)^2}\alpha_{-2}^{\Sigma} + \frac{r}{(1-r)^3}(\alpha_{-1}^{\Sigma})^2 \\ \alpha_{-3}^S &= \frac{1}{(1-r)^3}\alpha_{-3}^{\Sigma} + \frac{3r}{(1-r)^4}\alpha_{-1}^{\Sigma}\alpha_{-2}^{\Sigma} + \frac{2r^2}{(1-r)^5}(\alpha_{-1}^{\Sigma})^3 \\ &\vdots \end{aligned}$$



Rysunek 6.1. Czas obliczania kompletu wzorów na momenty macierzowe graniczne pierwszego rzędu. Po lewej stronie przypadek dla macierzy kowariancji, po prawej dla jej odwrotności. Podstawowa specyfikacja komputera: procesor Intel Core 2 Duo 6400 ($2 \times 2.0\text{GHz}$), pamięć RAM 4GB, system Windows 7, program Mathematica 7.

Rysunek 6.1 pokazuje czas obliczeń potrzebny na uzyskanie kompletu wzorów w

zależności od rzędu obliczeń. Po lewej stronie pokazano czas obliczania wzorów na podstawie relacji danej wzorem (6.2), natomiast po prawej stronie pokazano czas obliczeń wzorów na podstawie relacji danej wzorem (6.3). Dla pionowej osi obrazującej czas zastosowano skalę logarytmiczną. Dzięki zastosowaniu takiego sposobu obrazowania możemy między innymi stwierdzić, że zapotrzebowanie na czas obliczeń wraz ze wzrostem rzędu obliczeń rośnie z dobrym przybliżeniem eksponencjalnie w przypadku wykresu po lewej stronie, oraz wyraźnie szybciej niż eksponencjalnie w przypadku wykresu po prawej stronie.

6.2. Związek macierzy dyspersji z momentami 1-rzędu

W dalszej części pracy podczas konstrukcji estymatorów statystycznego oraz statystycznego dualnego (patrz Rozdział 7) pojawią się we wzorach macierze dyspersji odpowiednio dla zespołu macierzy S oraz zespołu macierzy S^{-1} , zapisane w wyrażeniach typu $\log \det Q$. Macierz dyspersji Q z definicji wyrażona jest przez momenty macierzowe drugiego rzędu $\alpha_{i,j}$, których niestety nie potrafimy w sposób bezpośredni obliczyć. W obydwu wspomnianych przypadkach istnieją natomiast ściśle relacje wiążące momenty macierzowe drugiego rzędu z momentami macierzowymi pierwszego rzędu, dzięki czemu zagadnienie jest możliwe do rozwiązania.

Macierz dyspersji dla macierzy S

Rozważmy najpierw zespół macierzowy S wraz z jego szeregami potęgowymi pierwszego oraz drugiego rzędu $M_S(y)$, $M_S(x, y)$. Interesuje nas postać macierzy dyspersji dla rozważanego zespołu, zadanej z definicji poprzez momenty macierzowe drugiego rzędu $\alpha_{i,j}^S$. Jak się okazuje [55], [49], [40] pomiędzy szeregami pierwszego oraz drugiego rzędu istnieje relacja, która pozwala wyrazić momenty macierzowe drugiego rzędu $\alpha_{i,j}^S$ za pomocą momentów macierzowych pierwszego rzędu α_i^S . Warto zauważyć, że prace [49] oraz [40] pojawiły się praktycznie równocześnie.

Interesująca nas relacja wyrażona w języku 2-punktowych funkcji Greena [49] przyjmuje zwartą i elegancką postać

$$G(x, y) = \frac{1}{N^2} [\partial_x \partial_y \ln (1 - G(x)G(y))], \quad (6.4)$$

natomiast w [40] pojawia się obszerniejszy wzór, za to od razu zapisany za pomocą szeregów macierzowych w postaci

$$M_S(x, y) = \frac{2}{\beta} xy \left(\frac{\frac{d}{dx} (xM_S(x)) \cdot \frac{d}{dy} (yM_S(y))}{xM_S(x) - yM_S(y)} - \frac{1}{(x-y)^2} \right), \quad (6.5)$$

gdzie β wynosi 1 lub 2 w zależności czy rozważane macierze S są rzeczywiste czy zespolone. Jak już wspomniano można pokazać, że wzory (6.5) oraz (6.4) są tożsame, co zostało wykazane w Dodatku A.3.

Bezpośrednio z definicji 6 szeregów potęgowych wynika, że prawa strona równania (6.5) wyrażona jest przez momenty macierzowe pierwszego rzędu, natomiast lewą stronę równości stanowią momenty macierzowe drugiego rzędu, a więc rzeczywiście

istnieje pomiędzy nimi ścisła relacja.

Równanie (6.5) przyjmuje wygodniejszą do przeprowadzenia obliczeń numerycznych postać po wprowadzeniu pomocniczej funkcji $H_S(x) = x M_S(x)$ oraz $H_S(y) = y M_S(y)$, możemy wówczas zapisać

$$M_S(x, y) = \sum_{i, j \geq 1} \alpha_{i, j}^S x^i y^j = xy \left[\frac{\frac{d}{dx} H(x) \frac{d}{dy} H(y)}{(H(x) - H(y))^2} - \frac{1}{(x - y)^2} \right], \quad (6.6)$$

gdzie $H_S(x) = x \left(1 + \sum_{j \geq 1} \alpha_j^S x^j \right)$.

Wyliczenie $\alpha_{i, j}^S$ będzie zatem polegało na obliczeniu kolejnych wyrazów i, j rozwinięcia Taylora drugiego rzędu prawej strony równania (6.6). W celu numerycznego wyliczenia kompletu wzorów do ustalonego rzędu K_{\max} należy najpierw w (6.6) urywać nieskończone szeregi przy $i, j \leq K_{\max}$ a następnie dla każdej pary i, j obliczyć rozwinięcie Taylora prawej strony (6.6). Warto zauważyć, że rozważane równanie (6.6) jest symetryczne ze względu na zamianę indeksów i, j , zatem $\alpha_{i, j}^S = \alpha_{j, i}^S$. Wystarczy zatem obliczyć $\alpha_{j, i}^S$ tylko dla $i \leq j$. Obliczenia zostały wykonane przy użyciu programu Mathematica 6. Ze względu na szybko rosnącą wraz z rzędem obliczeń złożoność wyniku poniżej zostały wypisane tylko elementy macierzy dyspersji o wymiarze 2×2 . Wzory dla macierzy 5×5 zamieszczone zostały w Tabeli C.6 znajdującej się w Dodatku C. Dla poprawienia przejrzystości pominięto indeks S wskazujący na zespół macierzowy.

$$\begin{aligned} \alpha_{1,1} &= -\alpha_1^2 + \alpha_2 \\ \alpha_{1,2} &= 2(\alpha_1^3 - 2\alpha_1\alpha_2 + \alpha_3) \\ \alpha_{2,2} &= -6\alpha_1^4 + 16\alpha_1^2\alpha_2 - 6\alpha_2^2 - 8\alpha_1\alpha_3 + 4\alpha_4 \end{aligned}$$



Rysunek 6.2. Czas obliczania kompletu wzorów na momenty macierzowe drugiego rzędu. Podstawowa specyfikacja komputera: procesor Intel Core 2 Duo 6400 ($2 \times 2.0\text{GHz}$), pamięć RAM 4GB, system Windows 7, program Mathematica 7.

Rysunek 6.2 pokazuje czas obliczeń potrzebny na uzyskanie kompletu wzorów na momenty drugiego rzędu w funkcji momentów pierwszego rzędu w zależności od rzędu obliczeń. Dla pionowej osi obrazującej czas zastosowano skalę logarytmiczną. Obserwujemy wyraźnie szybszy niż eksponencyjny wzrost zapotrzebowania na moc obliczeniową wraz z rzędem przeprowadzanych obliczeń.

Macierz dyspersji dla macierzy S^{-1}

W tym przypadku rozważamy zespół macierzy S^{-1} wraz z jego szeregami potęgowymi pierwszego oraz drugiego rzędu $M_{S^{-1}}(y)$, $M_{S^{-1}}(x, y)$. Interesuje nas postać macierzy dyspersji dla zespołu S^{-1} , której elementy zadane są poprzez momenty macierzowe drugiego rzędu $\alpha_{i,j}^{S^{-1}}$. Punktem wyjścia dla skonstruowania algorytmu generującego relacje wyrażające momenty macierzowe drugiego rzędu macierzy odwrotnych $\alpha_{i,j}^{S^{-1}}$ w funkcji momentów macierzowych pierwszego rzędu $\alpha_k^{S^{-1}}$ będzie wzór (5.12). Przypomnijmy, że przyjmuje on postać

$$M_{S^{-1}}(x, y) = xy \left[\frac{\frac{d}{dx} \tilde{M}_{S^{-1}}(x) \frac{d}{dy} \tilde{M}_{S^{-1}}(y)}{\left[\tilde{M}_{S^{-1}}(x) - \tilde{M}_{S^{-1}}(y) \right]^2} - \frac{1}{(x-y)^2} \right], \quad (6.7)$$

gdzie

$$M_{S^{-1}}(x, y) = \sum_{i,j \geq 1} \alpha_{i,j}^{S^{-1}} x^i y^j,$$

oraz

$$\tilde{M}_{S^{-1}}(x) = \sum_{n \geq 1} \alpha_n^{S^{-1}} x^{n-1} = -\frac{1}{x} [1 - M_{S^{-1}}(x)].$$

Analogicznie jak w poprzednim przypadku rozwiązanie zagadnienia polega na obliczeniu kolejnych wyrazów i, j rozwinięcia Taylora prawej strony równania (6.7). W celu uzyskania wzorów do pewnego ustalonego rzędu K_{\max} należy najpierw obciąć wszystkie pojawiające się w równaniu szeregi do wyrazów $i, j \leq K_{\max}$. Ponadto, tak samo jak w poprzednim przypadku, zauważamy, że (6.7) jest symetryczne ze względu na zamianę indeksów występujących w definicji momentów macierzowych, a zatem $\alpha_{i,j}^{S^{-1}} = \alpha_{j,i}^{S^{-1}}$, co w praktyce oznacza, że wystarczy ograniczyć się do obliczenia momentów $\alpha_{i,j}^{S^{-1}}$ dla $i \leq j$. Rachunek został wykonany numerycznie przy użyciu programu Mathematica 6. Ze względu na szybko rosnącą wraz z rzędem obliczeń objętość uzyskanych wzorów poniżej zamieszczono tylko elementy macierzy dyspersji o wymiarze 2x2.

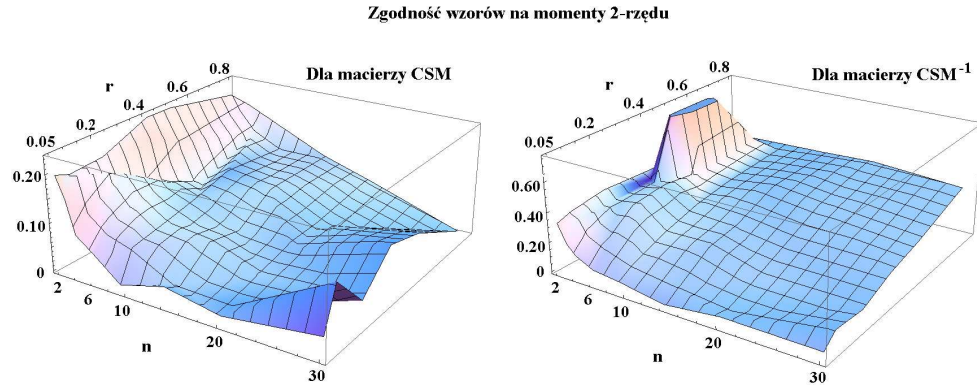
$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{1,1} &= (-\tilde{\alpha}_3^2 + \tilde{\alpha}_2 \tilde{\alpha}_4) / \tilde{\alpha}_2^2 \\ \tilde{\alpha}_{1,2} &= (2(\tilde{\alpha}_3^3 - 2\tilde{\alpha}_2 \tilde{\alpha}_3 \tilde{\alpha}_4 + \tilde{\alpha}_2^2 \tilde{\alpha}_5)) / \tilde{\alpha}_2^3 \\ \tilde{\alpha}_{2,2} &= (2(-3\tilde{\alpha}_3^4 + 8\tilde{\alpha}_2 \tilde{\alpha}_3^2 \tilde{\alpha}_4 - 4\tilde{\alpha}_2^2 \tilde{\alpha}_3 \tilde{\alpha}_5 + \tilde{\alpha}_2^2 (-3\tilde{\alpha}_4^2 + 2\tilde{\alpha}_2 \tilde{\alpha}_6))) / \tilde{\alpha}_2^4 \end{aligned}$$

Symbol $\tilde{}$ oznacza, że oznaczone nim momenty macierzowe odnoszą się do odwrotności macierzy kowariancji Σ^{-1} . Wzory dla macierzy 5x5 zamieszczone zostały w Tabeli C.7 znajdującej się w Dodatku C. Ponownie, dla utrzymania przejrzystości zapisu, indeks S został pominięty.

Numeryczne sprawdzenie wzorów

Istnieje prosta metoda pozwalająca na sprawdzenie poprawności uzyskanych wzorów na momenty 2-go rzędu. Mamy bowiem dwie metody ich wyznaczenia, bezpośrednio z definicji oraz za pomocą wyprowadzonych wzorów. Symulacja służąca takiemu właśnie sprawdzeniu została wykonana dla macierzy obserwacji X o wymiarach $N \in \langle 2, 30 \rangle$ oraz $r = \frac{N}{M} \in \langle 0.05, 0.75 \rangle$. Dla każdego z wymiarów próba liczyła 100 macierzy, przy czym były one losowane z rozkładu zawierającego jedną wartość

własną równą 1. Dla każdego z wylosowanych w ten sposób zespołów obliczone zostały kolejne momenty macierzowe 1-rzędu do rzędu 6 włącznie, na których podstawie za pomocą wyprowadzonych relacji obliczono momenty macierzowe 2-rzędu do rzędu (3, 3) włącznie. Następnie bezpośrednio z Definicji 5 obliczono momenty macierzowe



Rysunek 6.3. Średnie kwadratowe odchylenie wartości momentów 2-rzędu wyliczonych ze wzorów z wartością otrzymaną bezpośrednio z definicji. Obliczenia wykonane na podstawie statystyki liczącej 100 powtórzeń (mała statystyka może tłumaczyć widoczne na wykresach dosyć mocne fluktuacje).

2-rzędu, również do rzędu (3, 3) włącznie. Za miarę odstępstwa wartości momentów $\alpha_{l,m}^{\text{Defin.}}$ wyliczonych z definicji od momentów $\alpha_{l,m}^{\text{Wzór}}$ wyliczonych za pomocą wzoru przyjęto

$$\eta = \frac{1}{6} \sqrt{\sum_{l=1}^3 \sum_{m=l}^3 (\alpha_{l,m}^{\text{Defin.}} - \alpha_{l,m}^{\text{Wzór}})^2}.$$

Parametr η obliczony został dla kolejnych wymiarów (N, r) . W ten sposób sprawdzona została poprawność działania wzorów w dosyć szerokim zakresie wymiarów macierzy obserwacji X . Rezultat przeprowadzonych symulacji pokazany został na Rysunku 6.3. Jak widzimy dla najmniejszych z badanych wymiarów macierzy X parametr η utrzymuje się dosyć niskim poziomie poniżej 0.2 dla przypadku macierzy SCM oraz poniżej 0.3 dla przypadku macierzy SCM^{-1} , przy czym dla większych wymiarów macierzy wartości te szybko spadają i nie przekraczają wartości rzędu kilku procent. Oznacza to, że odstępstwa wartości momentów 2-go rzędu wyliczone za pomocą wzorów są bliskie wartościom obliczonym bezpośrednio z definicji. Tym samym przeprowadzony eksperyment można uznać za dostatecznie potwierdzenie prawidłowego działania relacji łączących momenty macierzowe 2-rzędu z momentami 1-rzędu.

Na koniec wyjaśnijmy, że statystyka licząca w naszym przypadku tylko 100 powtórzeń jest tak naprawdę z punktu widzenia specyfiki obliczeń pojawiających się w przeprowadzonej symulacji zdecydowanie mała, co skutkuje pojawieniem się niepożądanych fluktuacji, które możemy obserwować na przedstawionych wykresach. Ponadto obliczenia co prawda wykonano dla macierzy X o różnych wymiarach, jednak wszystkie one były stosunkowo małe. Ze względu na bardzo duże zapotrzebowa-

nie na moc obliczeniową przeprowadzonej symulacji wprowadzenie takich ograniczeń było koniecznością. Na przykład obliczenia dla jednego tylko punktu na wykresie odpowiadającego wymiarowi $\dim X = 30 \times 600$ trwały około 15 godzin dla komputera z procesorem $2 \times 2\text{GHz}$, pamięć RAM 4GB, przy czym obliczenia wykonano w programie Mathematica 7.

Rozdział 7

Rekonstrukcja widma - konstrukcja estymatorów

Typowym zagadnieniem dotyczącym analizy zespołów macierzowych jest badanie ich macierzy kowariancji, w szczególności zaś należy podkreślić duże znaczenie zespołów Wisharta [56]. Obliczenie wartości własnych doświadczalnej macierzy kowariancji tylko w przypadku gdy wymiary macierzy obserwacji są bardzo duże ($N \rightarrow \infty$) prowadzi do właściwych wyników, natomiast w przypadku N skończonego otrzymane widmo jest przesunięte w stosunku do widma macierzy kowariancji rozważanego zespołu. Powszechnie posługujemy się wygodnymi terminami: widmo „prawdziwej” macierzy kowariancji, widmo „doświadczalnej” macierzy kowariancji, estymator widma (rozumiany jako metoda estymacji widma prawdziwej macierzy kowariancji na podstawie obserwacji widma doświadczalnej macierzy kowariancji). W praktycznych zastosowaniach macierz obserwacji zwykle jest utworzona z szeregów czasowych otrzymanych poprzez rejestrację wartości poszczególnych zmiennych w kolejnych chwilach czasu. Wykonanie pomiaru o nieskończonej długości jest z oczywistych względów niemożliwe. Co gorsza często bywa tak, że długość otrzymanej macierzy obserwacji jest porównywalna z liczbą zmiennych. Zaczęto więc poszukiwać skutecznych estymatorów widma. Obserwowane przesunięcia pomiędzy wspomnianymi widmami sugerowały intuicyjnie, że najprawdopodobniej położenie obserwowanych wartości własnych należy skorygować. W ten sposób powstały pierwsze estymatory widma [57, 58, 59]. Działanie innych estymatorów polegało na analizie pewnej kwadratowej „funkcji straty” [60, 61]. Następnie, już nieco bardziej współcześnie, pojawił się pomysł opierający się na estymacji widma na podstawie wykonania dłuższej obserwacji [62], czy też metoda estymacji oparta o analizę wielomianów charakterystycznych [63].

W roku 2007 pojawił się dosyć atrakcyjny pomysł [39] konstrukcji estymatora w oparciu o statystyczne własności zespołu, który wkrótce zyskał sporą popularność [40]. Mniej więcej w tym samym czasie (rok 2006) pojawił się pomysł tzw. „G-estymatora” [42, 43], będącego aktualnie jednym z najnowszych stosowanych rozwiązań.

Przedmiotem niniejszego rozdziału jest przedstawienie konstrukcji kilku estymatorów widma, które po zaimplementowaniu zostały sprawdzone numerycznie (wyniki i dokładny opis przeprowadzonych symulacji znajdują się w Rozdziale 8). Pierwszym z nich jest nowy estymator nazwany roboczo „estymatorem analitycznym”, którego idea oparta jest o rozwinięcie 1-punktowej funkcji Greena oraz o rozwiązanie tak otrzymanego równania z użyciem transformacji Padé. Metoda ta odkryta została przez [64], przy czym nie była dotąd publikowana. Jeden z fragmentów konstrukcji omawianego estymatora analitycznego korzysta bezpośrednio z wyników opublikowanych w [52]. Kolejny estymator, który w obrębie pracy nazywamy „estymatorem statystycznym”,

zaproponowano w pracach [39, 40]. Jego konstrukcja została odtworzona zgodnie ze wskazówkami autorów. Następnie do obydwu wspomnianych estymatorów zostaną przedstawione nowe konstrukcje nazwane „estymatorami dualnymi”, opierające się na analizie momentów macierzonych dla odwrotności macierzy kowariancji.

7.1. Estymacja widma - założenia ogólne

Rozważmy M niezależnych pomiarów x_m , z których każdy opisany jest N -wymiarowym rozkładem Gaussa o zerowej średniej oraz dodatnio zdefiniowanej macierzy kowariancji Σ . Każdy z pomiarów traktować będziemy jako N -wymiarowy wektor pomiaru. Zakładamy, że $M > N$, co oznacza że liczba pomiarów jest większa niż liczba składowych poszczególnych obserwacji. Zapiszmy teraz wszystkie M wektorów w postaci macierzy $X = [x_1, \dots, x_M]$, której wymiar będzie równy $M \times N$. Zdefiniujemy doświadczalną macierz kowariancji (z ang. „Sample Covariance Matrix”) jako

$$S = \frac{1}{M} X X^\dagger,$$

o wymiarze $N \times N$. Można również posługiwać się analogicznym do S obiektem modyfikując powyższą definicję do postaci $\tilde{S} = \frac{1}{N} X^\dagger X$, co da w efekcie macierz o wymiarze $M \times M$, a więc większym niż w poprzednim przypadku. Zabieg taki nie wniesie jednak do rozważań żadnej dodatkowej informacji, macierze S oraz \tilde{S} różnią się bowiem między sobą jedynie liczbą modów zerowych. Fakt ten staje się jasny kiedy rozważymy równanie własne dla macierzy S w postaci

$$S \varphi_n = X X^\dagger \varphi_n = \lambda_n \varphi_n,$$

gdzie φ_n to wektor własny do wartości własnej λ_n . Pomnóżmy powyższe równanie od lewej strony przez X^\dagger , otrzymujemy

$$X^\dagger X X^\dagger \varphi_n = \lambda_n X^\dagger \varphi_n,$$

które w bazie przetransformowanych wektorów własnych $X^\dagger \varphi_n = \tilde{\varphi}_n$ możemy zapisać w postaci

$$X^\dagger X \tilde{\varphi}_n = \tilde{S} \tilde{\varphi}_n = \lambda_n \tilde{\varphi}_n.$$

Tak więc równania własne dla macierzy \tilde{S} oraz dla macierzy S zawierają w sobie dokładnie te same wartości własne λ_n . Można zatem powiedzieć, że z punktu widzenia ilości zawartej informacji nie ma żadnego znaczenia którą macierzą się posługujemy. W takiej sytuacji wybieramy macierz S , jako wygodniejszą ze względu na brak nie wnoszących modów zerowych i posiadającą tym samym mniejszy wymiar.

Głównym celem dalszej części pracy będzie próba odtworzenia widma „prawdziwej” macierzy kowariancji Σ na podstawie doświadczalnej macierzy kowariancji S , pochodzącej od macierzy obserwacji X o skończonych wymiarach. Będziemy zatem po-

szukiwać macierzy Λ będącej diagonalną postacią macierzy kowariancji $\Sigma = U\Lambda U^\dagger$, którą zapiszemy w postaci

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mathbb{I}_{n_1} & & & \\ & \lambda_2 \mathbb{I}_{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{I_{\max}} \mathbb{I}_{n_{I_{\max}}} \end{pmatrix}.$$

Zakładamy, że w widmie macierzy kowariancji Σ znajduje się I_{\max} różnych wartości własnych, przy czym każda z nich pojawia się n_i razy, a zatem $\sum_{i=1}^{I_{\max}} n_i = N$. Każdej z wartości własnych λ_i można przyporządkować prawdopodobieństwo jej wystąpienia w widmie macierzy Λ , które wynosi $t_i = n_i/N$. Ponadto zakładamy, że wartości własne λ_i ułożone są w kolejności rosnącej. Posługując się tą notacją można zdefiniować wektor parametrów widma

$$\Theta = (\lambda_1, \dots, \lambda_{I_{\max}}, t_1, \dots, t_{I_{\max}-1}),$$

opisujący w sposób jednoznaczny widmo macierzy Λ . Problem rekonstrukcji widma granicznego na podstawie macierzy obserwacji o skończonych wymiarach można zatem sformułować w postaci równoważnej jako poszukiwanie oszacowania dla wektora Θ , dzięki czemu zadanie przybiera bardziej zwartą postać. Algorytm wyznaczenia przybliżenia widma granicznego w postaci wektora Θ nazywać będziemy w skrócie estymatorem wektora Θ , natomiast wynik jego zastosowania nazywany będzie w skrócie estymacją widma bądź też estymacją wektora Θ . Warto w tym momencie podkreślić, że nie istnieje jedyna właściwa metoda konstrukcji estymatora Θ . W kolejnych fragmentach pracy przedstawiona zostanie konstrukcja kilku możliwych realizacji estymatora widma, które następnie zostaną przetestowane i porównane ze sobą.

Należy pamiętać, że warunki w jakich opisywane estymatory wektora Θ mają docelowo pracować podyktowane są naturą różnego rodzaju zastosowań praktycznych, wraz ze wszystkimi ograniczeniami dotyczącymi zbierania informacji jakie z niej wynikają. W szczególności w dalszej części pracy weźmiemy pod uwagę przypadek, gdy jesteśmy ograniczeni do zarejestrowania tylko pojedynczej macierzy obserwacji X . Sytuacja taka jakkolwiek niekorzystna często ma miejsce, choćby na przykład w przypadku rynków finansowych, gdzie powtórzenie eksperymentu oznaczało by cofnięcie czasu. Zakładamy zatem, że dysponujemy pojedynczą macierzą S . Estymację wektora Θ w takich warunkach nazywać będziemy wnioskowaniem na podstawie pojedynczej obserwacji.

7.2. Estymator analityczny

Z racji swojej prostoty oraz pewnego rodzaju matematycznej elegancji jako pierwszy estymator wektora Θ zostanie przedstawiony estymator analityczny. Jego konstrukcja bazuje na triku w postaci zastosowania estymaty Padé do obciążonego rozwinięcia 1-punktowej funkcji Greena, co w efekcie pozwala zapisać przybliżenie funkcji Greena

w postaci funkcji wymiernej. Od tego momentu pozostaje już tylko krok do ostatecznego rozwiązania problemu. Prześledźmy zatem główne etapy wyprowadzenia wspomnianego estymatora.

Zapiszmy definicję 1-punktowej funkcji Greena

$$G(z) = \left\langle \frac{1}{N} \text{Tr} \frac{1}{\mathbf{1}z - H} \right\rangle,$$

którą zapiszemy w postaci

$$G(z) = \left\langle \frac{1}{N} \frac{1}{z} \text{Tr} \frac{1}{\mathbf{1} - \frac{H}{z}} \right\rangle.$$

Następnie rozważmy jej rozwinięcie w szereg wokół $z = \infty$

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{1}{z} \frac{1}{N} \left\langle \text{Tr} \left(\mathbf{1} + \frac{1}{z}H + \left(\frac{1}{z}H\right)^2 + \dots \right) \right\rangle \\ &= \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \left\langle \frac{1}{N} \text{Tr}H \right\rangle + \frac{1}{z^3} \left\langle \frac{1}{N} \text{Tr}H^2 \right\rangle + \dots \end{aligned}$$

Rozważmy powyższy wzór w przypadku granicznym, kiedy wymiary macierzy H dążą do nieskończoności. Wówczas zgodnie z definicją 5 momentów macierzowych 1-rzędu α możemy zapisać

$$zG_0(z) = 1 + \frac{1}{z}\alpha_1^H + \frac{1}{z^2}\alpha_2^H + \dots = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^k \alpha_k^H.$$

Macierzą H w naszym przypadku jest macierz kowariancji Σ , zapiszemy zatem

$$zG_0(z) = 1 + \frac{1}{z}\alpha_1^\Sigma + \frac{1}{z^2}\alpha_2^\Sigma + \dots = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^k \alpha_k^\Sigma, \quad (7.1)$$

a więc funkcja Greena określona jest przez szereg zawierający wszystkie momenty macierzowe 1-go rzędu α_k^Σ . Funkcję Greena możemy wyrazić także nieco inaczej. Przejdźmy w tym celu do diagonalnej postaci macierzy Σ , wówczas momenty macierzowe α_k^Σ możemy zapisać w wygodnej postaci

$$\alpha_k^\Sigma = \left\langle \frac{1}{N} \text{Tr} \Sigma^k \right\rangle = \left\langle \frac{1}{N} \text{Tr} \left(U \Lambda_\Theta U^\dagger \right)^k \right\rangle = \left\langle \frac{1}{N} \text{Tr} (\Lambda_\Theta)^k \right\rangle = \frac{1}{N} \sum_i^{I_{\max}} (\lambda_i^\Sigma)^k p_i^\Sigma.$$

Dla utrzymania przejrzystości rachunku przyjęto, że indeks i numerować będzie kolejne wartości własne wraz z ich prawdopodobieństwami, natomiast indeks k zarezerwowany będzie do numerowania kolejnych momentów macierzowych. Możemy przepisać (7.1) do postaci

$$zG_0(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^k \frac{1}{N} \sum_i^{I_{\max}} (\lambda_i^\Sigma)^k p_i^\Sigma. \quad (7.2)$$

Z równań (7.1) oraz (7.2) wynika relacja wiążąca momenty α_k^Σ z parametrami widma λ_i^Σ oraz p_i^Σ

$$zG_0(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^k \alpha_k^\Sigma = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^k \frac{1}{N} \sum_i^{I_{\max}} (\lambda_i^\Sigma)^k p_i^\Sigma. \quad (7.3)$$

Warto podkreślić, że kolejne momenty pojawiające się w powyższym równaniu oznaczone są symbolem Σ co oznacza, że są to tzw. „momenty prawdziwe” (lub też „momenty graniczne”) związane z macierzą kowariancji Σ . Wówczas kolejne λ_i^Σ oraz p_i^Σ po prawej stronie równości to interesujące nas składowe wektora Θ . Niestety wzór (7.3) nie jest dla nas w sposób bezpośredni użyteczny, na co składa się kilka przyczyn. Poważnym problemem jest założenie o nieskończonym rozmiarze macierzy H , gdyż przeprowadzając obserwacje w skończonym czasie dysponujemy jedynie macierzami o skończonych wymiarach. Ponadto zgodnie z definicją funkcji Greena powinniśmy przeprowadzić uśrednianie po całym nieskończonym zespole macierzowym, co w przypadku próby wykonania oszacowania na podstawie kilku pomiarów lub nawet pojedynczego pomiaru jest absolutnie nieosiągalne. Niestety z takimi właśnie danymi mamy w praktyce do czynienia. Z tych powodów tak naprawdę nie ma możliwości bezpośredniego obliczenia momentów α_k^Σ , a wręcz można powiedzieć, że nawet ich oszacowanie jest sprawą trudną. Kolejnym istotnym problemem jest nieskończona liczba momentów wchodzących w skład szeregu. Tak więc dalsze wyprowadzenie będzie polegało na wprowadzeniu kolejnych przybliżeń i oszacowań.

Rozważmy najpierw wzór (7.3) w postaci przybliżonej, urywając szereg na K_{\max} składnikach. Należy zauważyć, że urywając szereg zmieniamy wartość obydwu stron równości, a więc zamiast λ_i^Σ oraz p_i^Σ pojawią się tam $\bar{\lambda}_i$ oraz \bar{p}_i , będące przybliżeniami oryginalnych parametrów widma. Zapiszmy zatem

$$zG_0(z) \cong 1 + \sum_{k=1}^{K_{\max}} \left(\frac{1}{z}\right)^k \alpha_k^\Sigma = 1 + \sum_{k=1}^{K_{\max}} \left(\frac{1}{z}\right)^k \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{I_{\max}} (\bar{\lambda}_i)^k \bar{p}_i. \quad (7.4)$$

Jak już wspomniano, obliczenie lewej strony równania stanowi pewien problem. W tym momencie z pomocą przychodzą nam relacje wyprowadzone w pracy [52] wyrażające momenty macierzowe α_k^Σ (tzw. „momenty graniczne”) za pomocą momentów macierzowych α_k^S (tzw. „momenty eksperymentalne”, czyli momenty eksperymentalnej macierzy kowariancji S) przy zadanym współczynniku prostokątności $r = \frac{N}{M}$ (ang. rectangularity) i skończonych wymiarach N oraz M . Załóżmy zatem, że znane nam są relacje $\alpha_k^\Sigma = f\left(\{\alpha_l^S\}_{l=1}^{l=k}, r\right)$. Nie mamy jednak możliwości prawidłowego obliczenia α_l^S , do czego potrzebne by było wykonanie średniej po całym zespole macierzowym. W praktyce mamy do czynienia z pewną skrajnością, mianowicie w przypadku oszacowania bazującego na pojedynczym pomiarze dysponujemy tylko jedną macierzą obserwacji. W tej sytuacji zmuszeni jesteśmy przyjąć przybliżenie momentów eksperymentalnych pierwszego rzędu w postaci $\langle \frac{1}{N} \text{Tr} S^k \rangle = \alpha_k^S \cong \tilde{\alpha}_k^S = \frac{1}{N} \text{Tr} S^k$. Warto mieć świadomość, że jest to przybliżenie mogące w niektórych przypadkach mocno mijać się z prawdą, gdyż odzwierciedla wszystkie fluktuacje zespołu macierzowego. W tej sytuacji relacje wiążące momenty eksperymentalne i graniczne również dadzą przybliżony i fluktuujący wynik

$$\alpha_k^\Sigma \cong \tilde{\alpha}_k^\Sigma = f\left(\{\tilde{\alpha}_l^S\}_{l=1}^{l=k}\right).$$

Wstawiając tak otrzymane $\tilde{\alpha}_k^\Sigma$ do lewej strony wzoru (7.4) będzie on od tej pory zależny od reprezentanta zespołu macierzowego, którego akurat bardziej lub mniej szczęśliwie wybierzemy do eksperymentu. Inaczej mówiąc wszystkie składniki szeregu będą podatne na fluktuacje. Nie mamy już zatem $\bar{\lambda}_i$ oraz \bar{p}_k , zamiast nich pojawią się ich fluktuujące przybliżenia, które oznaczymy jako $\hat{\alpha}_i$ oraz \hat{p}_k . Ostatecznie wzór wynikający z zastosowania kolejnych przybliżeń dla funkcji Greena przyjmie postać

$$zG_0(z) \cong 1 + \sum_{k=1}^{K_{\max}} \left(\frac{1}{z}\right)^k \tilde{\alpha}_k^\Sigma = 1 + \sum_{k=1}^{K_{\max}} \left(\frac{1}{z}\right)^k \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{I_{\max}} (\hat{\lambda}_i)^k \hat{p}_i. \quad (7.5)$$

Pozostaje kwestia jego rozwiązania, co nie jest trywialne, gdyż jak widać jest to w istocie układ K_{\max} równań nieliniowych w zmiennych $\frac{1}{z}$ zawierający parametry $\hat{\lambda}_i$ oraz \hat{p}_i . Prawdopodobieństwa \hat{p}_i muszą się sumować do jedności, zatem układ równań posiada $2I_{\max} - 1$ stopni swobody. Parametry $\hat{\lambda}_i$ oraz \hat{p}_i nazywać będziemy estymatorami poszczególnych parametrów widma macierzy kowariancji Σ , lub też w skrócie cały zbiór $\hat{\lambda}_i$ oraz \hat{p}_i nazywać będziemy estymatorem widma Σ .

Zaprezentujemy teraz metodę pozwalającą w łatwy sposób rozwiązać równanie (7.5). Zapiszmy najpierw jego prawą stronę w nieco innej postaci. Jeszcze raz wyjdziemy od ogólnej postaci funkcji Greena, którą zapiszemy w bazie diagonalnej jako

$$zG_0(z) = z \left\langle \frac{1}{N} \text{Tr} \frac{1}{\mathbf{1}z - H} \right\rangle \cong z \sum_{i=1}^{I_{\max}} \frac{p_i}{z - \lambda_i} = \sum_{i=1}^{I_{\max}} \frac{p_i}{1 - \frac{1}{z}\lambda_i},$$

gdzie I_{\max} oznacza liczbę różnych wartości własnych. Zauważmy, że we wszystkich składnikach szeregu wyrażenie $\frac{1}{z}$ pojawia się tylko w mianowniku kolejno dodawanych ułamków. Zatem po wykonaniu sumowania otrzymamy funkcję wymierną w zmiennych $\frac{1}{z}$, której licznik będzie rzędu $I_{\max} - 1$ natomiast mianownik będzie rzędu I_{\max} . Licznik oraz mianownik można tak jak wspomniano zapisać bezpośrednio w zmiennych $\frac{1}{z}$, lub też po trywialnym podstawieniu w nieco wygodniejszych zmiennych $x = \frac{1}{z}$

$$zG_0(z) = \sum_{i=1}^{I_{\max}} \frac{p_i}{1 - \frac{1}{z}\lambda_i} = \frac{A_{I_{\max}-1}(\frac{1}{z})}{B_{I_{\max}}(\frac{1}{z})} = \frac{A_{I_{\max}-1}^{\text{inv}}(x)}{B_{I_{\max}}^{\text{inv}}(x)}. \quad (7.6)$$

Kluczową kwestią jest założenie, że znamy lub też potrafimy w jakikolwiek sposób prawidłowo określić liczbę różnych wartości własnych w estymowanym widmie równą I_{\max} , co jest równoznaczne z określeniem rzędów licznika oraz mianownika A oraz B . Posiadając te informacje oraz znając wartość lewej strony równania możemy uzyskać numeryczną wartość licznika i mianownika, stosując aproksymację Padé [65]. Jest to algorytm pozwalający zapisać dowolną funkcję w postaci funkcji wymiernej o zadanych rzędach licznika oraz mianownika, a więc idealnie pasujący do problemu który mamy do rozwiązania. Aktualnie aproksymacja Padé jest częścią pakietu Mathematica, dzięki czemu jest stosunkowo łatwa do implementacji.

Należy pamiętać, że w praktyce nigdy nie znamy prawdziwej wartości $zG_0(z)$, musimy zatem zgodne ze lewą stroną równania (7.5) skorzystać z oszacowania w postaci

$$zG_0(z) \cong z\hat{G}_0(z) = 1 + \sum_{k=1}^{K_{\max}} \left(\frac{1}{z}\right)^k \tilde{\alpha}_k^\Sigma, \quad \text{gdzie } \tilde{\alpha}_k^S = \frac{1}{N} \text{Tr} S^k. \quad (7.7)$$

W konsekwencji zastosowania przybliżenia (7.7) w równaniu (7.6) zamiast prawdziwych λ_i oraz p_i pojawiają się ich estymatory $\hat{\lambda}_i$ oraz \hat{p}_i , zapiszemy

$$z\hat{G}_0(z) = \sum_{i=1}^{I_{\max}} \frac{\hat{p}_i}{1 - \frac{1}{z}\hat{\lambda}_i} = \frac{\hat{A}_{I_{\max}-1}(\frac{1}{z})}{\hat{B}_{I_{\max}}(\frac{1}{z})} = \frac{\hat{A}_{I_{\max}-1}^{\text{inv}}(x)}{\hat{B}_{I_{\max}}^{\text{inv}}(x)}. \quad (7.8)$$

Założmy zatem, że znamy właściwą wartość I_{\max} , oraz że stosując aproksymatę Padé uzyskaliśmy postać funkcyjną licznika oraz mianownika. Łatwo zauważyć, że estymatory kolejnych wartości własnych $\hat{\lambda}_i$ równe są odwrotnościom kolejnych miejsc zerowych mianownika $\hat{B}_{I_{\max}}(\frac{1}{z})$. Ponadto można wykazać, że prawdopodobieństwa \hat{p}_i odpowiadające kolejnym wartościom własnym można obliczyć jako

$$\hat{p}_i = \frac{1}{z} \frac{\hat{A}(\frac{1}{z})}{\frac{d}{dz} [\hat{B}(\frac{1}{z})]} \Bigg|_{z=\hat{\lambda}_i}. \quad (7.9)$$

Zapis licznika oraz mianownika rozważanej funkcji wymiernej w zmiennych $x = \frac{1}{z}$ może być z praktycznego punktu widzenia nieco wygodniejszy. Krótki rachunek prowadzi do wzoru na kolejne p_i zapisanego w zmiennych x w postaci

$$\hat{p}_i = -\frac{1}{x} \frac{\hat{A}^{\text{inv}}(x)}{\frac{d}{dx} [\hat{B}^{\text{inv}}(x)]} \Bigg|_{x=\frac{1}{\hat{\lambda}_i}}. \quad (7.10)$$

Podsumujmy zatem krótko główne kroki konstrukcji estymatora analitycznego.

- wykonujemy pomiar otrzymując macierz obserwacji X ,
- obliczamy $S = \frac{1}{N} X X^\dagger$ oraz momenty $\tilde{\alpha}_k^S$,
- stosujemy wzory wyrażające momenty $\tilde{\alpha}_k^\Sigma$ za pomocą parametru r oraz zbioru momentów $\tilde{\alpha}_j^S$ gdzie $j = 1, \dots, k$,
- obliczamy $z\tilde{G}_0(\frac{1}{z}) = 1 + \sum_{k=1}^{K_{\max}} (\frac{1}{z})^k \tilde{\alpha}_k^\Sigma$,
- znając wartość I_{\max} (lub robiąc założenie na ten temat) obliczamy aproksymatę Padé funkcji Greena $z\tilde{G}_0(\frac{1}{z}) = \frac{\hat{A}_{I_{\max}-1}(\frac{1}{z})}{\hat{B}_{I_{\max}}(\frac{1}{z})}$,
- kolejne $\hat{\lambda}_i$ to odwrotności miejsc zerowych funkcji $\hat{B}_{I_{\max}}(\frac{1}{z})$, natomiast odpowiadające im \hat{p}_i obliczamy ze wzoru (7.9) lub (7.10).

7.2.1. Wartość I_{\max} w estymatorze analitycznym

Tak jak już wspomniano, liczba różnych wartości własnych I_{\max} to założenie. Przyjęcie wartości I_{\max} niezgodnej z naturą badanego modelu prowadzi do uzyskania nieprawidłowego wyniku aproksymacji Padé. Zbyt mała wartość I_{\max} w oczywisty sposób spowoduje pominięcie niektórych wartości własnych widma, przez co uzyskane wyniki estymacji mogą być mocno przesunięte w stosunku do właściwych wartości własnych. Z drugiej strony przyjęcie zbyt dużej wartości I_{\max} również jest błędem i należy spodziewać się związanych z tym nieprawidłowości dotyczących wyników estymacji.

Dla zilustrowania tego zagadnienia wykonanych zostało kilka przykładowych estymacji, zgodnie z opisaną powyżej procedurą. Macierze obserwacji miały wymiar $\dim X = 320 \times 1000$, wylosowane zostały z rozkładu zawierającego 3 wartości własne równe $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ oraz $\lambda_3 = 5$ z prawdopodobieństwami odpowiednio $p_1 = 0.5$ oraz $p_2 = p_3 = 0.25$. Wyniki estymacji zaplanowano przedstawić w postaci tabeli, co praktycznie wyklucza sensowność wykonania dużej liczby powtórzeń ze względu na zupełną utratę czytelności w takim przypadku. Dlatego też wylosowanych zostało tylko 6 macierzy obserwacji X . Kolejne estymacje wykonane zostały przy założeniu wartości I_{\max} w zakresie od 1 do 5. Estymowane wartości własne oraz ich prawdopodobieństwa zostały odpowiednio pogrupowane. Wynik wykonanych symulacji przedstawia Rysunek 7.1.

$I_{\max} = 1$ $\begin{pmatrix} 2.265 \\ 1.000 \\ 2.256 \\ 1.000 \\ 2.243 \\ 1.000 \\ 2.252 \\ 1.000 \\ 2.252 \\ 1.000 \\ 2.252 \\ 1.000 \end{pmatrix}$ λ_1	$I_{\max} = 2$ $\begin{pmatrix} 4.913 & (1.221) \\ 0.2830 & (0.7170) \\ 4.926 & (1.225) \\ 0.2785 & (0.7215) \\ 4.821 & (1.211) \\ 0.2858 & (0.7142) \\ 4.901 & (1.227) \\ 0.2790 & (0.7210) \\ 4.826 & (1.214) \\ 0.2873 & (0.7127) \\ 4.879 & (1.225) \\ 0.2811 & (0.7189) \end{pmatrix}$ $\lambda_2 \quad \lambda_1$	$I_{\max} = 3$ $\begin{pmatrix} 5.051 & (1.911) & (0.9771) \\ 0.2519 & 0.2807 & (0.4674) \\ 5.189 & (2.741) & (1.083) \\ 0.2172 & 0.1694 & (0.6134) \\ 4.993 & 2.223 & (1.035) \\ 0.2449 & 0.2008 & (0.5542) \\ 5.073 & 2.038 & (0.9879) \\ 0.2408 & 0.2672 & (0.4920) \\ 4.943 & 1.613 & (0.8037) \\ 0.2609 & 0.4552 & (0.2839) \\ 5.243 & 3.198 & (1.112) \\ 0.1917 & 0.1670 & (0.6412) \end{pmatrix}$ $\lambda_3 \quad \lambda_2 \quad \lambda_1$
$I_{\max} = 4$ $\begin{pmatrix} 15.90 & (5.049) & (1.894) & (0.9712) \\ (1.137 \times 10^{-7}) & 0.2522 & 0.2877 & (0.4600) \\ 6.923 & (5.030) & (2.050) & (0.9978) \\ 0.003425 & 0.2424 & 0.2474 & (0.5068) \\ 7.840 & (4.950) & (1.907) & (0.9685) \\ 0.0003123 & 0.2538 & 0.2783 & (0.4676) \\ 10.64 & (5.079) & (2.089) & (1.001) \\ (-5.562 \times 10^{-6}) & 0.2394 & 0.2527 & (0.5079) \\ 5.743 & (5.090) & (2.057) & (0.9954) \\ (-0.02594) & 0.2712 & 0.2532 & (0.5015) \\ 6.269 & (4.798) & (1.812) & (0.9644) \\ (0.01917) & 0.2456 & 0.2884 & (0.4469) \end{pmatrix}$ $\lambda_4 \quad \lambda_3 \quad \lambda_2 \quad \lambda_1$		
$I_{\max} = 5$ $\begin{pmatrix} 6.274 + 0.652 i & (6.274 - 0.652 i) & (5.113) & (1.974) & (0.9887) \\ (-0.004199 - 0.000398 i) & (-0.004199 + 0.000398 i) & 0.2564 & 0.2669 & (0.4851) \\ (-30.95) & (6.924) & (5.030) & (2.050) & (0.9979) \\ (2.174 \times 10^{-13}) & (0.003418) & 0.2424 & 0.2473 & (0.5068) \\ 6.590 + 1.536 i & (6.590 - 1.536 i) & (4.982) & (1.958) & (0.9788) \\ (-0.0006540 + 0.0001517 i) & (-0.0006540 - 0.0001517 i) & 0.2525 & 0.2663 & (0.4825) \\ 6.897 & (5.139) & (3.739) & (1.927) & (0.9780) \\ (-0.0009709) & (0.2239) & (0.03310) & 0.2707 & (0.4733) \\ 5.771 + 1.193 i & (5.771 - 1.193 i) & (4.981) & (2.018) & (0.9898) \\ (0.002727 + 0.000053 i) & (0.002727 - 0.000053 i) & 0.2432 & 0.2582 & (0.4931) \\ 5.432 + 1.019 i & (5.432 - 1.019 i) & (5.229) & (2.024) & (1.001) \\ (-0.01680 + 0.02352 i) & (-0.01680 - 0.02352 i) & 0.2829 & 0.2463 & (0.5044) \end{pmatrix}$ $\lambda_5 \quad \lambda_4 \quad \lambda_3 \quad \lambda_2 \quad \lambda_1$		

Rysunek 7.1. Wpływ wartości parametru I_{\max} na wynik estymacji. Przykład pokazany na podstawie 6 macierzy obserwacji o wymiarze $\dim X = 320 \times 1000$, wygenerowanych dla $\Theta_{\text{true}} = (1, 2, 5, 0.5, 0.25)$.

W przypadku przyjęcia zbyt małej wartości I_{\max} obserwujemy znaczne przesunięcie estymowanych parametrów w stosunku do położenia właściwych wartości własnych

widma. W przypadku kiedy przyjęto zbyt dużą wartość I_{\max} zaobserwować można kilka ciekawych zachowań:

- Pierwsze trzy wartości własne mają wartości bliskie właściwym. Dodatkowe (nieprawidłowe) wartości własne są rzeczywiste albo urojone, przy czym urojone wartości własne pojawiają się dopiero dla $I_{\max} = 5$.
- Pierwsze trzy (prawidłowe) wartości własne oraz ich prawdopodobieństwa praktycznie nie ulegają zmianie.
- Prawdopodobieństwa dodatkowych (nieprawidłowych) wartości własnych są bardzo małe.

Oczywiste jest, że ostatnia obserwacja jest właściwie wnioskiem z drugiej. Warto jednak wspomnieć, że możliwe jest ich konstruktywne wykorzystanie. Mianowicie możliwe jest skonstruowanie dosyć prostego i przy tym, jak się wydaje, dosyć skutecznego narzędzia służącego określeniu liczby różnych wartości własnych zawartych w widmie otrzymanej macierzy obserwacji X .

Intuicja podpowiada także jeszcze inną możliwość reakcji na zbyt dużą wartość I_{\max} , polegającą na pojawieniu się w wynikach estymacji zdublowanych albo bardzo bliskich sobie wartości własnych, przy czym odpowiadające im prawdopodobieństwa dawałyby łącznie wartość prawdopodobieństwa otrzymanego dla estymacji kiedy przyjęto prawidłową wartość I_{\max} . Jednak w wyniku przeprowadzonych krótkich symulacji nie zaobserwowano w sposób bezpośredni podobnego zjawiska.

7.3. Estymator statystyczny

Przedstawimy teraz zupełnie inne podejście do estymacji wektora Θ , bazujące na twierdzeniu o Gaussowskim charakterze fluktuacji momentów macierzowych. Niezbędne okażą się także wzory wyrażające momenty macierzowe drugiego rzędu w funkcji momentów macierzowych pierwszego rzędu. Metoda ta została zaproponowana w pracy doktorskiej [39] a następnie w [40]. W porównaniu do estymatora analitycznego konstrukcja estymatora statystycznego jest bardziej skomplikowana a jego implementacja wymaga zapewnienia znacznie większej mocy obliczeniowej.

Rozważmy zatem fluktuacje kolejnych momentów macierzowych oraz zdefiniujmy na tej podstawie nieskończony wektor fluktuacji.

Definicja 11 (Wektor fluktuacji momentów macierzowych) *Niech zespół macierzowy A_N posiada graniczny rozkład momentów 2-go rzędu. Fluktuacje momentów macierzowych pierwszego rzędu zapiszemy w postaci wektora o nieskończonym wymiarze w postaci*

$$(v)_j = \text{Tr}A^j - \langle \text{Tr}A^j \rangle.$$

Rozkład rozważanych fluktuacji momentów macierzowych pierwszego rzędu przyjmuje dosyć szczególną postać. Okazuje się, że w przypadku dużych macierzy fluktuacje te dadzą się opisać wielowymiarowym rozkładem Gaussa. Zapiszemy tę własność w postaci twierdzenia, którego oryginalną postać oraz dowód znaleźć można w pracach [40, 39].

Twierdzenie 1 (O fluktuacjach momentów macierzowych) Weźmy pod uwagę zespół macierzy H o dużych wymiarach, posiadający graniczny rozkład momentów 2-go rzędu. Rozważmy nieskończony wektor fluktuacji dla tego zespołu

$$(v_{\Theta})_j = \text{Tr}H^j - \langle \text{Tr}H^j \rangle,$$

który możemy również zapisać w postaci

$$(v_{\Theta})_j = \text{Tr}H^j - N\alpha_j^H.$$

Wówczas rozkład wektora v_{Θ} opisany jest wielowymiarowym rozkładem Gaussa, przy czym macierz dyspersji tego rozkładu tworzą momenty macierzowe drugiego rzędu

$$(v_{\Theta})_j \propto N(\mu_{\Theta}, Q_{\Theta}), \text{ gdzie } [Q_{\Theta}]_{l,m} = \alpha_{l,m}^H.$$

Indeksy Θ oznaczają zależność wektora v oraz macierzy Q od rozkładu widma granicznego będącego przedmiotem naszego zainteresowania. Równocześnie zauważmy, że Twierdzenie 1 jest ważne dla macierzy o dużych rozmiarach, ale niekoniecznie w granicy $r \rightarrow 0$. W praktyce oznacza to, że możemy je z powodzeniem zapisać dla macierzy H , a więc dla macierzy pochodzącej od skończonego wektora obserwacji X .

Powyższe twierdzenie pełni z punktu widzenia naszych rozważań niezwykle ważną rolę, stanowi bowiem punkt wyjścia dla konstrukcji estymatora statystycznego. Na jego podstawie funkcję gęstości prawdopodobieństwa wektora v_{Θ} zapiszemy w postaci

$$f(v_{\Theta}) = \mu_{\Theta} + \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\det Q_{\Theta}|^{\frac{1}{2}}} \exp \left[-\frac{1}{2} v_{\Theta}^{\dagger} Q_{\Theta}^{-1} v_{\Theta} \right].$$

Kierując się zasadą maksymalnej wiarygodności będziemy poszukiwać takiego wektora Θ , który maksymalizuje gęstość prawdopodobieństwa $f(v_{\Theta})$. Zadanie staje się znacznie łatwiejsze po zlogarytmowaniu wyrażenia, co jest formalnie poprawne, gdyż logarytm jest funkcją monotoniczną natomiast gęstość prawdopodobieństwa przyjmuje wartości nieujemne. Będziemy zatem rozważać pewną funkcję pomocniczą $g(\Theta)$ zdefiniowaną jako

$$g(\Theta) = v_{\Theta}^{\dagger} Q_{\Theta}^{-1} v_{\Theta} + \log \det Q_{\Theta}.$$

Tak więc estymator $\hat{\Theta}$ parametrów widma granicznego zdefiniowany będzie jako parametr Θ ekstremalizujący zapisaną powyżej funkcję pomocniczą $g(\Theta)$, co zapiszemy jako

$$\hat{\Theta} = \Theta \text{ taki, że: } g(\Theta) = v_{\Theta}^{\dagger} Q_{\Theta}^{-1} v_{\Theta} + \log \det Q_{\Theta} \text{ osiąga minimum.} \quad (7.11)$$

Zgodnie z treścią Twierdzenia 1 macierz dyspersji Q_{Θ} zdefiniowana jest poprzez momenty macierzowe drugiego rzędu $\alpha_{l,m}^H$, natomiast wektor v_{Θ} zdefiniowany jest za pomocą momentów macierzowych pierwszego rzędu α_k^H oraz obserwacji związanej z konkretną wartością Θ w postaci eksperymentalnej macierzy kowariancji H . Zarówno wektor v_{Θ} oraz macierz Q_{Θ} mają nieskończony wymiar.

Przystępując do konstrukcji estymatora statystycznego najpierw za macierze H weźmiemy doświadczalne macierze kowariancji S obliczone na podstawie kolejnych macierzy obserwacji X o wymiarze $\dim X = N \times M$. Ponadto w praktycznych zastosowaniach będziemy musieli ograniczyć wymiary obiektów wchodzących w skład funkcji $g_{(\Theta)}$. Załóżmy zatem, że wektor v_{Θ} jest wymiaru $1 \times K_{\max}$, natomiast macierz Q jest wymiaru $K_{\max} \times K_{\max}$, wówczas możemy zapisać

$$g_{\Theta} = g_{\Theta} \left(\{\alpha_{l,m}\}_{l,m=1}^{K_{\max}}, \{\alpha_k\}_{k=1}^{2 \cdot K_{\max}}, S \right)$$

Głównym problemem są pojawiające się momenty macierzowe drugiego rzędu, które nie są w bezpośredni sposób mierzalne. Istotnie, wyrażenie (7.11) będzie stanowiło podstawę konstrukcji użytecznego narzędzia w momencie kiedy zdołamy zapisać je w postaci zawierającej wielkości bezpośrednio mierzalne, czyli macierz S , parametr r oraz poszukiwane parametry widma, czyli wartości własne λ_i wraz z odpowiadającymi im prawdopodobieństwami p_i . Jak już wspomniano istnieją ściśle wzory pozwalające zapisać momenty macierzowe drugiego rzędu za pomocą momentów macierzowych pierwszego rzędu, działające zarówno w przypadku macierzy Σ jak też S . Sposób generowania wzorów został wyjaśniony w Rozdziale 6.2, natomiast w Dodatku C zostały one wypisane do rzędu $\alpha_{5,5}$.

Możemy więc przyjąć, że relacje $\alpha_{l,m}^S = f \left(\{\alpha_k^S\}_{k=1}^{2 \cdot \max\{l,m\}} \right)$ są znane do takiego rzędu do którego będzie to potrzebne, przy czym czas potrzebny na ich wygenerowanie jest w tym momencie kwestią drugorzędną. Przy ustalonej wartości K_{\max} wyrażenie na g_{Θ} możemy zapisać w postaci

$$g_{\Theta} = g_{\Theta} \left(\{\alpha_k^S\}_{k=1}^{2 \cdot K_{\max}}, S \right).$$

Pozostaje przejść od zapisu zawierającego momenty α^S do zapisu zawierającego momenty α^{Σ} . Jest to zabieg podobny do wykonanego przy wyprowadzeniu metody analitycznej, jednak zauważmy, że tym razem potrzebne będą związki $\alpha_k^S = f \left(\{\alpha_m^{\Sigma}\}_{m=1}^k, r \right)$, a więc w stronę odwrotną niż poprzednio. Zakładamy, że relacje te są znane. Po skorzystaniu z nich wyrażenie na g_{Θ} przyjmuje postać

$$g_{\Theta} = g_{\Theta} \left(\{\alpha_i^{\Sigma}\}_{i=1}^{2 \cdot K_{\max}}, S, r \right).$$

Kolejny krok polega na zaobserwowaniu, że jeśli znamy wymiar wektora Θ wówczas momenty graniczne α_i^{Σ} można zapisać za pomocą składowych wektora Θ , gdyż

$$\alpha_k^{\Sigma} = \frac{1}{N} \langle \text{Tr}(\tilde{\Sigma})^k \rangle = \frac{1}{N} \langle \text{Tr}(\Lambda_{\Theta})^k \rangle = \frac{1}{N} \sum_i (\lambda_i^{\Sigma})^k p_i^{\Sigma}.$$

W ogólnym przypadku nie wszystkie składowe wektora Θ muszą być niezależne. Jeśli posiadamy dodatkową wiedzę na temat więzów łączących niektóre parametry widma, to stosując powyższą notację więzy te można w niezwykle prosty i przejrzysty sposób zaimplementować.

Ostatecznie rozważaną funkcję g_{Θ} jesteśmy w stanie zapisać explicite w interesujących nas zmiennych

$$g_{\Theta} = g_{\Theta} \left(\{\lambda_i^{\Sigma}, p_i^{\Sigma}\}_{i=1}^{I_{\max}}, S, r \right). \quad (7.12)$$

Estymacja wektora Θ polegać więc będzie na zapisaniu funkcji g_Θ w powyższej postaci a następnie odszukaniu wartości składowych wektora Θ , który ją minimalizuje.

Warto w tym momencie zauważyć, że poszukiwanie ekstremum funkcji wielu zmiennych niesie ze sobą pewną uciążliwość, mianowicie konieczność wystartowania algorytmu z jakiegoś punktu, którego położenie niestety z rozważanej metody nie wynika. Na domiar złego w wielu sytuacjach jego wybór może być decydujący dla uzyskanego wyniku, gdyż funkcja pomocnicza może nie posiadać ekstremum globalnego ale więcej ekstremów lokalnych. Żeby nasze postępowanie miało w takim przypadku w ogóle sens punkt startowy musi być położony wystarczająco blisko 'właściwego' ekstremum, to znaczy ogólnie mówiąc na tyle blisko, żeby procedura poszukiwania ekstremum nie trafiała do sąsiedniego ekstremum. Jest to oczywiście problem ważny już przez sam fakt zaistnienia. Ponadto im większa liczba zmiennych w funkcji g_Θ tym więcej ekstremów lokalnych może się pojawić. W praktyce punkt startowy dla metody statystycznej jest bardzo ważny i tym samym musi być starannie wybrany. Można na przykład za punkt startowy przyjąć wynik końcowy estymacji wykonanej inną metodą, na przykład opisaną w poprzednim rozdziale metodą analityczną, lub też skorzystać z dodatkowych informacji, o ile takie oczywiście posiadamy.

Z powodu nietrywialnego problemu wyboru punktu startowego w praktyce w większości przypadków estymator statystyczny należy traktować jako korektę innego estymatora, od którego pochodzi punkt startowy. Dokładnie taka sytuacja ma miejsce w naszym przypadku, estymator statystyczny służy do obliczenia poprawki dla wyniku uzyskanego za pomocą estymatora analitycznego.

Z oczywistych względów liczba niezależnych zmiennych w rozważanym modelu nie może być większa od liczby równań które jesteśmy w stanie zapisać, stąd spełniony musi być warunek $\dim(v_\Theta) \geq \dim(\Theta)$. Zgodnie z sugestiami autorów metody [40] w praktycznych zastosowaniach najlepiej żeby wymiar wektora v_Θ był równy liczbie niezależnych zmiennych.

Podsumujmy zatem krótko główne kroki konstrukcji estymatora statystycznego.

- wykonujemy pomiar otrzymując macierz obserwacji X ,
- obliczamy S oraz momenty $\tilde{\alpha}_k^S$,
- zapisujemy funkcję g_Θ zgodnie ze wzorem (7.11);
- stosujemy wzory wyrażające momenty $\alpha_{l,m}^S$ przez $\{\alpha_k^S\}_{k=1}^{2 \cdot \max\{l,m\}}$
- a następnie wzory wyrażające α_k^S przez $\{\alpha_m^\Sigma\}_{m=1}^k$,
- momenty α_k^Σ zapisujemy za pomocą λ_i oraz p_i , uzyskując zapis funkcji g_Θ w postaci (7.12),
- ustalamy punkt startowy Θ_0 , w pobliżu którego spodziewamy się odnaleźć minimum funkcji g_Θ ,
- szukamy minimum funkcji g_Θ w zmiennych Θ uzyskując estymację parametrów widma $\hat{\Theta}$.

Wstępne porównanie estymatorów:

- W metodzie estymatora statystycznego stosunkowo łatwo wprowadzić więzy pomiędzy parametrami widma w przypadku posiadania wiedzy o ich istnieniu. W przypadku estymatora analitycznego nie ma takiej możliwości.
- Estymator statystyczny wymaga wystartowania ze starannie wybranego punktu startowego, co sprowadza się do konieczności posiadania dodatkowej wiedzy na ten temat, w praktyce więc ogranicza to jego możliwości. Estymator analityczny jest w tym sensie samodzielny i nie wymaga żadnej dodatkowej wiedzy.
- Implementacja estymatora statystycznego wydaje się być zdecydowanie bardziej skomplikowana. W efekcie należy się spodziewać, że obliczenia numeryczne będą wymagały dużej mocy obliczeniowej. Estymator analityczny najprawdopodobniej jest znacznie mniej wymagający pod tym względem. Przypuszczenia te w sposób zdecydowany potwierdziły się podczas wykonywania symulacji opisanych w dalszej części pracy.

7.4. Estymatory dualne

Zauważmy, że w rozważanym przez nas modelu macierz obserwacji X jest prostokątna, czyli o współczynniku wydłużenia opisywanym przez parametr r mniejszym od jedności, co w praktyce oznacza, że liczba zarejestrowanych próbek jest większa od liczby zmiennych. Wówczas dla macierzy kowariancji S nie występuje tzw. 'mod zerowy' skupiający część widma w punkcie zero, a zatem jej wszystkie wartości własne rozłożone są na dodatniej części osi X . Wynika stąd, że jeśli rozważyć odwrotność macierzy kowariancji S^{-1} , wówczas jej wartości własne na pewno nie będą skupione w nieskończoności. Jeśli zatem dla macierzy S^{-1} zapiszemy funkcję Greena $G_{S^{-1}}(z)$, wówczas możliwe będzie jej rozwinięcie wokół nieskończoności. Rozumowanie to stanowi punkt wyjścia dla konstrukcji kolejnych estymatorów, które nazywać będziemy dualnymi do ich podstawowych postaci.

Motyacją dla wprowadzenia estymatorów dualnych jest podejrzenie, że być może w niektórych przypadkach uda się uzyskać lepszą skuteczność ich działania w porównaniu do form podstawowych. W sposób szczególny należy skupić uwagę na przypadkach, gdzie widmo składa się głównie z wartości własnych większych od jedności, gdyż w takim przypadku kolejne momenty macierzowe macierzy S rosną eksponencjalnie, podczas gdy momenty macierzowe macierzy S^{-1} maleją. Przesłanka ta nakazuje sprawdzić, czy estymatory bazujące na kolejnych momentach macierzy S^{-1} okażą się rzeczywiście w pewnych przypadkach skuteczne.

7.4.1. Estymator analityczny dualny

Wyprowadzenie estymatora analitycznego dualnego przebiega analogicznie do wyprowadzenia jego podstawowej postaci, dlatego pokażemy tylko główne kroki z pominięciem części komentarzy, które pozostają bez zmian. Rozważmy macierz hermitowską

H nie posiadającą modów zerowych oraz jej odwrotność H^{-1} , dla której możemy zapisać funkcję Green'a w postaci

$$G_{H^{-1}}(z) = \left\langle \frac{1}{N} \text{Tr} \frac{1}{\mathbf{1}z - H^{-1}} \right\rangle.$$

Następnie dzięki założeniu o braku modów zerowych macierzy H możemy rozważyć rozwinięcie funkcji Green'a macierzy H^{-1} w szereg wokół $z = \infty$

$$\begin{aligned} G_{H^{-1}}(z) &= \frac{1}{z} \frac{1}{N} \left\langle \text{Tr} \left(\mathbf{1} + \frac{1}{z} H^{-1} + \left(\frac{1}{z} H^{-1} \right)^2 + \dots \right) \right\rangle \\ &= \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \left\langle \frac{1}{N} \text{Tr} H^{-1} \right\rangle + \frac{1}{z^3} \left\langle \frac{1}{N} \text{Tr} (H^{-1})^2 \right\rangle + \dots \end{aligned}$$

W przypadku granicznym kiedy wymiary macierzy H^{-1} dążą do nieskończoności powyższy wzór możemy wyrazić poprzez momenty macierzowe pierwszego rzędu α jako

$$zG_{H^{-1}}(z) = 1 + \frac{1}{z} \alpha_1^{H^{-1}} + \frac{1}{z^2} \alpha_2^{H^{-1}} + \dots = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z} \right)^k \alpha_k^{H^{-1}}.$$

Macierzą H^{-1} w naszym przypadku jest odwrotność macierzy kowariancji Σ^{-1} , zapiszemy zatem

$$zG_{\Sigma^{-1}}(z) = 1 + \frac{1}{z} \alpha_1^{\Sigma^{-1}} + \frac{1}{z^2} \alpha_2^{\Sigma^{-1}} + \dots = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z} \right)^k \alpha_k^{\Sigma^{-1}}. \quad (7.13)$$

W kolejnym kroku wykonujemy przybliżenie polegające na urywaniu szeregu na składniku K_{\max} otrzymując

$$zG_{\Sigma^{-1}}(z) \cong 1 + \sum_{k=1}^{K_{\max}} \left(\frac{1}{z} \right)^k \alpha_k^{\Sigma^{-1}}.$$

Należy zauważyć, że momenty $\alpha_k^{\Sigma^{-1}}$ nie są w bezpośredni sposób mierzalne, możemy jednak skorzystać ze wzorów wyrażających je za pomocą momentów eksperymentalnych $\alpha_i^{S^{-1}}$. Metoda pochodzi z pracy [52], została ona omówiona w Rozdziale 6.1, natomiast wzory o których mowa wypisane zostały w Tabelicy C.3 w Dodatku C. Przyjmujemy zatem, że relacje

$$\alpha_k^{\Sigma^{-1}} = f \left(\left\{ \alpha_i^{S^{-1}} \right\}_{i=1}^{i=k}, r \right)$$

są znane. W praktyce prawidłowe obliczenie $\alpha_i^{S^{-1}}$ również nie będzie możliwe ze względu na fakt, że dysponujemy tylko pojedynczym pomiarem X . Zatem kolejne przybliżenie jakie stosujemy będzie postaci $\langle \frac{1}{p} \text{Tr} (S^{-1})^j \rangle = \alpha_i^{S^{-1}} \cong \tilde{\alpha}_i^{S^{-1}} = \frac{1}{p} \text{Tr} (S^{-1})^i$, ostatecznie relacje między momentami granicznymi a obserwowanymi przyjmą postać

$$\alpha_k^{\Sigma^{-1}} \cong \tilde{\alpha}_k^{\Sigma^{-1}} = f \left(\left\{ \tilde{\alpha}_i^{S^{-1}} \right\}_{i=1}^{i=k}, r \right).$$

W efekcie na podstawie przeprowadzonego eksperymentu jesteśmy w stanie obliczyć przybliżoną wartość funkcji Green'a

$$zG_{\Sigma^{-1}}(z) \cong z\tilde{G}_{\Sigma^{-1}}(z) = 1 + \sum_{k=1}^{K_{\max}} \left(\frac{1}{z}\right)^k \tilde{\alpha}_k^{\Sigma^{-1}}. \quad (7.14)$$

Następnie zauważmy, że funkcję Green'a $G_{\Sigma^{-1}}(z)$ po przejściu do diagonalnej bazy macierzy Σ^{-1} oraz przy założeniu, że znamy liczbę różnych wartości własnych tworzących jej widmo można wyrazić za pomocą poszukiwanych parametrów widma w postaci funkcji wymiernej w zmiennej $\frac{1}{z}$ lub równoważnie w zmiennej $x = \frac{1}{z}$

$$zG_{\Sigma^{-1}}(z) \cong \sum_{k=1}^{K_{\max}} \frac{p_k^*}{1 - \frac{1}{z}\lambda_k^*} = \frac{A_{K_{\max}-1}^*\left(\frac{1}{z}\right)}{B_{K_{\max}}^*\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{\tilde{A}_{K_{\max}-1}^*(x)}{\tilde{B}_{K_{\max}}^*(x)}. \quad (7.15)$$

Symbol $*$ w powyższym zapisie oznacza powiązanie z macierzą Σ^{-1} . Wartości $K_{\max}-1$ oraz K_{\max} oznaczają rzędy wielomianów A^* oraz B^* . Znając zadaną wzorem (7.14) przybliżoną postać funkcji $zG_{\Sigma^{-1}}(z)$, którą wstawiamy do wzoru (7.15) oraz zakładając prawidłowo wartość K_{\max} jesteśmy w stanie uzyskać funkcyjną postać A^* oraz B^* poprzez wykonanie procedury aproksymacji Padé.

Na podstawie tak otrzymanych wielomianów A^* oraz B^* możemy już obliczyć parametry widma p_k^* oraz λ_k^* . Zauważamy, że zera mianownika $B^*\left(\frac{1}{z}\right)$ wyznaczają odwrotności wartości własnych λ_k^* , natomiast odpowiadające im prawdopodobieństwa p_k^* obliczamy korzystając ze wzoru

$$p_k^* = \frac{1}{z} \frac{A^*\left(\frac{1}{z}\right)}{\frac{d}{dz} [B^*\left(\frac{1}{z}\right)]} \Bigg|_{z=\lambda_k^*}, \quad (7.16)$$

lub z równoważnego wzoru zapisanego w zmiennej x w postaci

$$p_k^* = -\frac{1}{x} \frac{\tilde{A}^*(x)}{\frac{d}{dx} [\tilde{B}^*(x)]} \Bigg|_{x=\frac{1}{\lambda_k^*}}. \quad (7.17)$$

Ostatecznie interesuje nas widmo macierzy Σ nie zaś jej odwrotności Σ^{-1} . Widma te ze sobą w trywialny sposób powiązane, co staje się jasne kiedy rozpatrzymy równanie własne macierzy Σ w postaci

$$\Sigma\varphi_k = \lambda_k\varphi_k,$$

gdzie φ_k to wektor własny do wartości własnej λ_k . Pomnożenie równania od lewej strony przez Σ^{-1} daje

$$\Sigma^{-1}\Sigma\varphi_k = \varphi_k = \Sigma^{-1}\lambda_k\varphi_k,$$

a więc

$$\Sigma^{-1}\varphi_k = \frac{1}{\lambda_k}\varphi_k = \lambda_k^*\varphi_k,$$

czyli jak widzimy wartości własne macierzy Σ oraz Σ^{-1} są swoimi odwrotnościami $\lambda_k = (\lambda_k^*)^{-1}$, prawdopodobieństwa natomiast są sobie równe $p_k = p_k^*$.

Poniżej przedstawiono krótkie podsumowanie konstrukcji estymatora analitycznego dualnego.

- wykonujemy pomiar otrzymując macierz obserwacji X ,
- obliczamy $S^{-1} = (\frac{1}{n}XX^\dagger)^{-1}$ oraz momenty $\tilde{\alpha}_j^{S^{-1}}$,
- stosujemy wzory wyrażające momenty $\tilde{\alpha}_k^{\Sigma^{-1}}$ za pomocą momentów $\left\{ \tilde{\alpha}_j^{S^{-1}} \right\}_{j=1}^{j=k}$ oraz parametru r ,
- obliczamy $z\tilde{G}_{\Sigma^{-1}}(\frac{1}{z}) = 1 + \sum_{k=1}^{K_{\max}} (\frac{1}{z})^k \tilde{\alpha}_k^{\Sigma^{-1}}$,
- znając wartość liczby K_{\max} obliczamy aproksymatę Padé funkcji Greena $z\tilde{G}_{\Sigma^{-1}}(\frac{1}{z}) = \frac{A_{K_{\max}-1}^*(\frac{1}{z})}{B_{K_{\max}}^*(\frac{1}{z})}$,
- kolejne λ_i to miejsca zerowe funkcji $B^*(\frac{1}{z})$, natomiast odpowiadające im $p_k = p_i^*$ obliczamy ze wzoru (7.16) lub (7.17).

7.4.2. Estymator statystyczny dualny

Rozpatrzmy zespół macierzy hermitowskich H nie posiadających modów zerowych. Interesować nas będzie zespół H^{-1} składający się z odwrotności macierzy H , przy czym zakładamy, że zespół H^{-1} spełnia założenia Twierdzenia 1. Wówczas zgodnie z tezą Twierdzenia 1 rozkład wektorów fluktuacji zdefiniowanych jako $(v_\Theta)_j = \text{Tr}(H^{-1})^j - \langle \text{Tr}(H^{-1})^j \rangle$ opisany będzie rozkładem normalnym $N(\mu_\Theta^{H^{-1}}, Q_\Theta^{H^{-1}})$ o dyspersji, której poszczególne elementy równe są kolejnym momentom macierzowym 2-go rzędu $(Q_\Theta^{H^{-1}})_{i,j} = \alpha_{i,j}^{H^{-1}}$.

Analogicznie jak podczas wyprowadzenia podstawowej wersji estymatora, na podstawie funkcji gęstości prawdopodobieństwa dla (v_Θ) zapiszemy funkcję pomocniczą

$$g_{(\Theta)} = v_\Theta^\dagger (Q_\Theta^{H^{-1}})^{-1} v_\Theta + \log \det Q_\Theta^{H^{-1}},$$

która jak się spodziewamy będzie miała ekstremum dla pewnego argumentu Θ . Zatem zgodnie z zasadą maksymalnego prawdopodobieństwa estymator $\hat{\Theta}$ parametrów widma granicznego dla zespołu macierzy H^{-1} zdefiniowany będzie jako parametr Θ ekstremalizujący funkcję pomocniczą $g_{(\Theta)}$

$$\hat{\Theta} = \Theta \text{ taki, że: } g_{(\Theta)} \text{ osiąga minimum.} \quad (7.18)$$

Ostatecznym celem jest wyznaczenie estymacji dla parametrów widma granicznego macierzy Σ^{-1} , a więc w powyższym wzorze (7.18) należy odpowiednio zdefiniować funkcję $g_{(\Theta)}$, tak by zbudowana była właśnie z parametrów widma granicznego czyli kolejnych $\lambda_i^{\Sigma^{-1}}$ oraz $p_i^{\Sigma^{-1}}$. W tym celu za macierze H^{-1} weźmiemy odwrotności macierzy kowariancji S^{-1} , przy czym macierze kowariancji S pochodzą z obserwacji X i zbudowane są sposób zapewniający brak modów zerowych. Jeśli więc macierze obserwacji X mają wymiar $\dim X = N \times M$, gdzie $N < M$, wówczas macierz S powinna mieć wymiar $\dim S = N \times N$. Ponadto nieskończonych rozmiarów obiekty wchodzące w skład definicji funkcji $g_{(\Theta)}$ obetniemy do założonego rzędu, czyli do K_{\max} dla momentów 2-go rzędu oraz do $2 \times K_{\max}$ dla momentów 1-go rzędu.

Następnie elementy macierzy dyspersji $\alpha_{l,m}^{S^{-1}}$ zapiszemy za pomocą momentów macierzowych pierwszego rzędu $\alpha_k^{S^{-1}}$. Zakładamy w tym momencie, że relacje $\alpha_{l,m}^{S^{-1}} = f\left(\left\{\alpha_k^{S^{-1}}\right\}_{k=1}^{k=2 \cdot K_{\max}}\right)$ są znane do takiego rzędu, do jakiego tego potrzebujemy. Ich wyprowadzenie znajduje się w Rozdziale 6.2, natomiast wzory do rzędu $K_{\max} = 5$ (dla macierzy $\alpha_{5,5}^{S^{-1}}$ włącznie) zostały wypisane w Tabeli C.7 znajdującej się w Dodatku C. Na koniec należy skorzystać z relacji wyrażających momenty macierzowe $\alpha_k^{S^{-1}}$ za pomocą momentów granicznych $\alpha_k^{\Sigma^{-1}}$, przy czym ponownie zakładamy, że są one znane. Relacje te wyprowadzone zostały w pracy [52], na potrzeby niniejszej pracy algorytm ich generowania został powtórzony a wyniki dla kilku początkowych rzędów zostały zamieszczone w Tabeli C.5 w Dodatku C.

W obecnej postaci funkcja $g(\Theta)$ zdefiniowana jest za pomocą momentów $\alpha_k^{\Sigma^{-1}}$, Pozostaje więc już tylko wyrazić je za pomocą kolejnych $\lambda_i^{\Sigma^{-1}}$ oraz $p_i^{\Sigma^{-1}}$. W tym momencie musimy zrobić założenie na temat znajomości liczby I_{\max} różnych wartości własnych wchodzących w skład widma macierzy Σ^{-1} . Wówczas po przejściu do diagonalnej postaci macierzy Σ^{-1} zapiszemy

$$\alpha_k^{\Sigma^{-1}} = \frac{1}{N} \langle \text{Tr}(\Sigma^{-1})^k \rangle = \frac{1}{N} \langle \text{Tr}(\Lambda^{-1})^k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{I_{\max}} \left(\lambda_i^{\Sigma^{-1}}\right)^k p_i^{\Sigma^{-1}}.$$

Ostatecznie funkcja $g(\Theta)$ przyjmie postać wyrażoną przez parametry $\lambda_i^{\Sigma^{-1}}$ oraz $p_i^{\Sigma^{-1}}$, należy odszukać jej ekstremum w przestrzeni tych parametrów otrzymując w ten sposób estymatory parametrów widma granicznego $\hat{\lambda}_i^{\Sigma^{-1}}$ oraz $\hat{p}_i^{\Sigma^{-1}}$. Interesujące nas docelowo estymatory parametrów widma macierzy Σ związane są z nimi prostą relacją

$$\hat{\lambda}_i^{\Sigma} = (\hat{\lambda}_i^{\Sigma^{-1}})^{-1} \text{ oraz } \hat{p}_i^{\Sigma} = \hat{p}_i^{\Sigma^{-1}}. \quad (7.19)$$

Rozdział 8

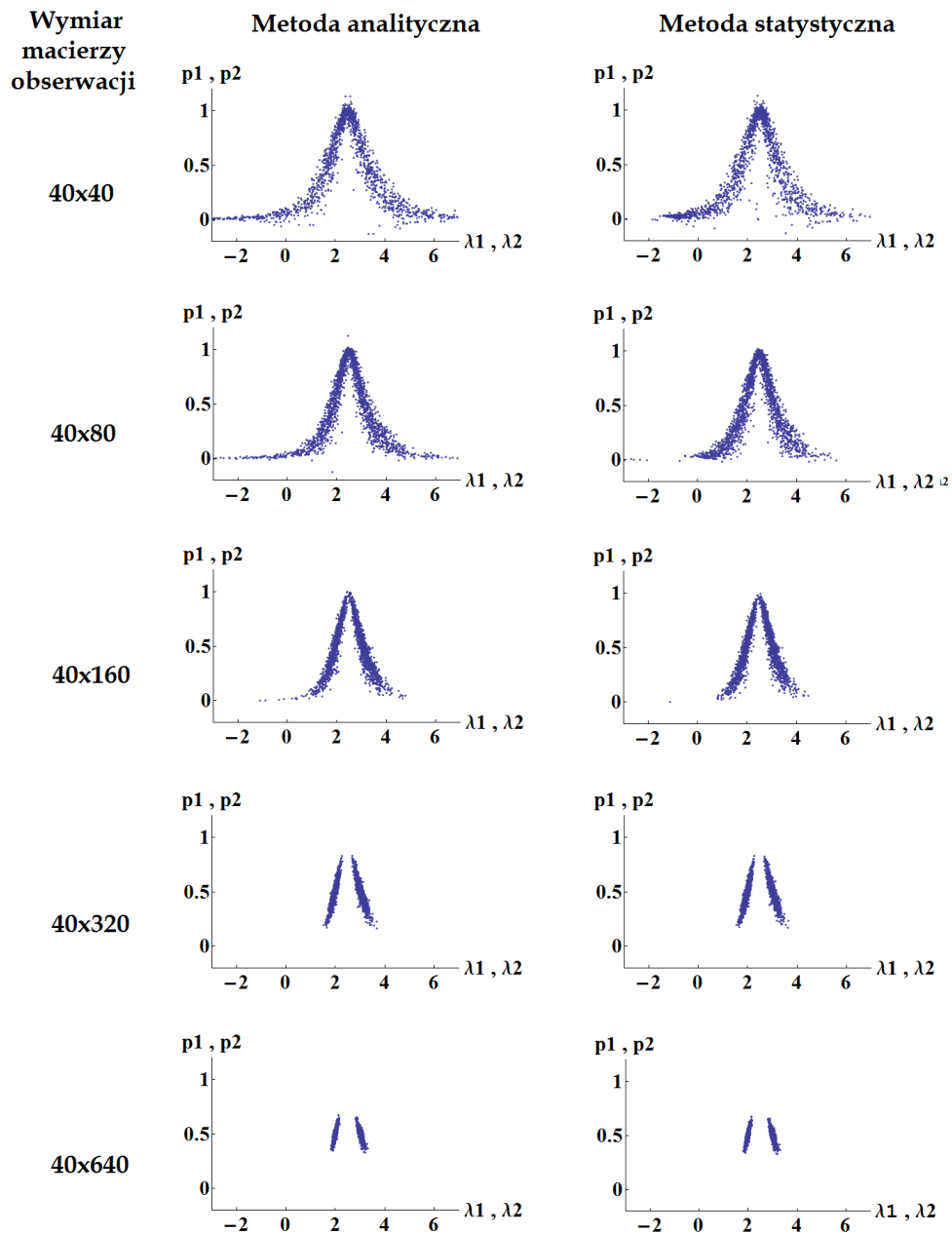
Rekonstrukcja widma - symulacje

Postaramy się teraz zbadać w praktyce przedstawione w poprzednim rozdziale estymatory widma. Głównym celem tej części pracy jest określenie zakresu stosowalności poszczególnych estymatorów a następnie wzajemne porównanie skuteczności ich działania pod kątem takich cech jak precyzja estymacji oraz czas obliczeń. Konieczne okazało się podzielenie pracy na kilka etapów. Najpierw należy zastanowić się które z parametrów estymacji mają istotny wpływ na jej wynik. W ten sposób zostanie zdefiniowana przestrzeń parametrów w której będą one badane i będzie można w konkretny sposób określić zakres przeprowadzanych symulacji. Następnie trzeba będzie w jakiś sposób wybrać miarę adekwatną do specyfiki badanych estymatorów, która w sposób ilościowy pozwoli określić jakość uzyskiwanego wyniku. Wprowadzenie takiej miary umożliwi porównanie estymatorów między sobą w wybranym wcześniej zakresie istotnych parametrów.

8.1. Eksperyment wstępny

Jak dotąd wiemy jak wygląda od strony teoretycznej konstrukcja kilku metod estymacji widma. Zanim przejdziemy do dalszej części pracy sprawdzimy najpierw w sposób pobieżny działanie estymatorów na kilku wybranych przykładach. W tym celu ustalono parametry widma granicznego równe $\Theta_{\text{true}} = (2, 3, 0.5)$, mniejszy wymiar macierzy obserwacji równy 40 oraz wybrano kilka różnych współczynników prostokątności macierzy, żeby zaobserwować zmienność pracy estymatorów ze względu na ten parametr. Macierze X w kolejnych eksperymentach wstępnych miały wymiary kolejno 40×640 , 40×320 , 40×160 , 40×80 oraz 40×40 . W eksperymencie do obliczeń wziętych zostało 6 kolejnych momentów macierzowych pierwszego rzędu. Symulacje w każdej z 5 kombinacji wykonano równoległe z użyciem estymatora analitycznego oraz statystycznego, aby zaobserwować ewentualne różnice z skuteczności ich działania. Dla każdego z estymatorów w każdej z kombinacji eksperyment składał się z 500 powtórzeń. Warto podkreślić, że wybór żadnej z wymienionych liczb nie był niczym konkretnym podyktowany, chodziło jedynie o wykonanie wstępnego testu, na podstawie którego miał zostać zaprojektowany eksperyment właściwy.

Rezultat eksperymentu zapisano w postaci macierzy wyników o wymiarze 3×500 , gdzie kolejne wiersze to wyniki pojedynczej estymacji w postaci trójki liczb $(\lambda_1, \lambda_2, p_1)$. Pierwszym pomysłem analizy uzyskanych wyników było przedstawienie ich na wykresie w zmiennych $p(\lambda)$. Rzeczywiście łatwo zauważyć, że wynik pojedynczej estymacji $(\lambda_1, \lambda_2, p_1)$ można zobrazować na takim wykresie w postaci 2 punktów o współrzędnych (λ_1, p_1) oraz $(\lambda_2, p_2) = (\lambda_2, 1 - p_1)$. Intuicyjnie spodziewamy się, że jeśli λ_1 nie leży zbyt blisko λ_2 , wówczas wyniki estymacji powinny tworzyć dwa rozłączne

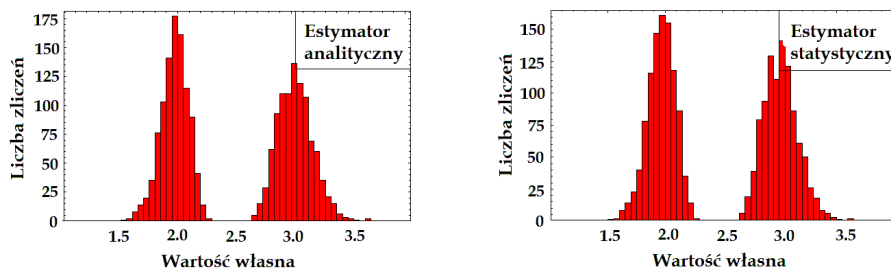


Rysunek 8.1. Estymacja dla $\Theta_{\text{true}} = (2, 3, 0.5)$, seria 500 powtórzeń. Obserwujemy wyraźną separację estymowanych parametrów wraz z wydłużeniem macierzy obserwacji X .

obszary skupione wokół punktów o współrzędnych $(2, 0.5)$ oraz $(3, 0.5)$, które odpowiadają $\Theta_{\text{true}} = (2, 3, 0.5)$. Trzeba pamiętać, że postępując w ten sposób tak naprawdę na jednym wykresie zamieszczamy dwa wykresy nałożone na siebie. Jest to w naszym przypadku uzasadnione, gdyż spodziewamy się, że punkty pochodzące od pierwszej i drugiej wartości własnej powinny leżeć w innych miejscach na wykresie. Rezultaty wykonanych symulacji zostały zebrane i przedstawione zbiorczo na rysunku 8.1. Po lewej stronie zamieszczono wyniki estymacji metodą analityczną, po prawej stronie

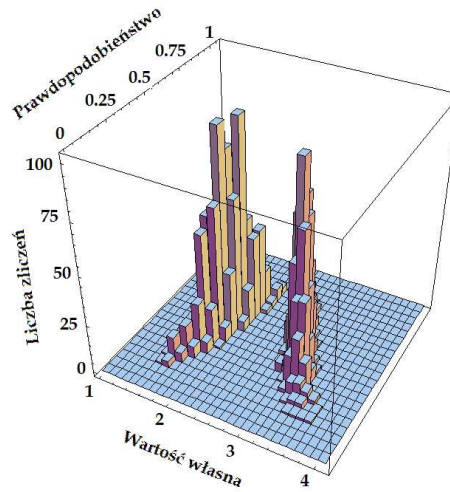
metodą statystyczną.

Przede wszystkim należy zwrócić uwagę na fakt, że przy odpowiednio dużych macierzach obserwacji rozważane estymatory w ogólności działają. Im większa długość macierzy X tym lepsze są uzyskiwane rezultaty i obserwujemy zgodne z przewidywaniem rozdzielanie punktów na dwie rozłączne wyspy skupione wokół punktów o spodziewanych współrzędnych. Przy coraz mniejszych macierzach wyspy stają się coraz bardziej rozległe co odpowiada coraz większemu rozrzutowi estymowanych parametrów, aż w końcu przestają być wyraźnie rozróżnialne. W przypadku bardzo małych macierzy wyniki estymacji zaczynają być mocno przekłamane, często pojawiają się liczby nie mające sensu fizycznego. Porównując wzajemnie działanie metod w przypadku małych macierzy należy stwierdzić, że przy użyciu metody statystycznej pojawia się zdecydowanie mniej ujemnych wartości własnych. Mimo to wiarygodność wyników estymacji w przypadku małych macierzy pozostawia wiele do życzenia, należy raczej uznać że obydwa estymatory w tym zakresie wymiarów macierzy obserwacji po prostu nie nadają się do użycia. Natomiast w przypadku większych macierzy (40×320 oraz 40×640) obserwujemy zgodne z przewidywaniem rozdzielanie punktów na dwa rozłączne obszary skupione wokół punktów o współrzędnych $(2, 0.5)$ oraz $(3, 0.5)$, oraz bardzo duże podobieństwo wykresów uzyskanych dla obydwu metod. Sugeruje to podobne działanie estymatorów w warunkach gdzie wyniki estymacji są zadowalające. Spostrzeżenie to wymaga dokładniejszego sprawdzenia, co zostało zrobione i opisane w dalszej części pracy.



Rysunek 8.2. Histogramy dla estymacji przy $\Theta_{\text{true}} = (2, 3, 0.5)$, $\dim X = 40 \times 320$, 500 powtórzeń.

Kolejnym pomysłem było wykonanie histogramów z tak uzyskanych wykresów poprzez ich zrzutowanie na poziomą oś. Rezultat został pokazany na rysunku 8.2. Widzimy wyraźne rozseparowanie estymowanych wartości własnych, które są skupione wokół wartości 2 oraz 3, czyli wokół takich wartości jak należało się spodziewać. Histogramy uzyskane dla obydwu metod nie są co prawda w 100% identyczne, jednak na pewno należy podkreślić bardzo duże wzajemne podobieństwo. Można również pokusić się o bezpośrednie wykreślenie histogramu 3-wymiarowego. Przykład dla estymatora analitycznego został zaprezentowany na rysunku 8.3. Analogiczny histogram 3-wymiarowy dla estymatora statystycznego jest praktycznie taki sam, dlatego nie został już zamieszczony.



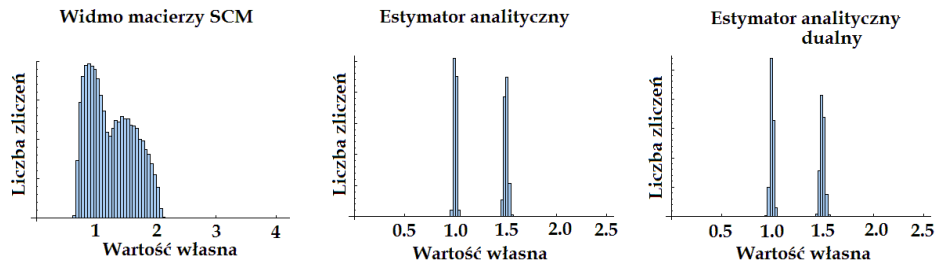
Rysunek 8.3. Histogram 3-D dla estymatora analitycznego, $\Theta_{\text{true}} = (2, 3, 0.5)$, $\dim X = 40 \times 320$, 500 powtórzeń.

8.2. Istotne parametry

Rozważmy macierz obserwacji M o wymiarach $k \times n$, gdzie $k > n$ pochodzącą z zespołu macierzowego określonego przez wektor parametrów widma Θ_{true} . Zakładamy, że liczba poszukiwanych wartości własnych oraz odpowiadających im prawdopodobieństw jest znana. Możemy zatem uruchomić wybraną procedurę estymacji otrzymując w ten sposób estymację parametrów widma Θ . Następnie powtarzamy procedurę wielokrotnie, za każdym razem wybierając z tego samego zespołu macierzowego kolejnego reprezentanta. W efekcie uzyskamy pewien wielowymiarowy rozkład estymowanych parametrów.

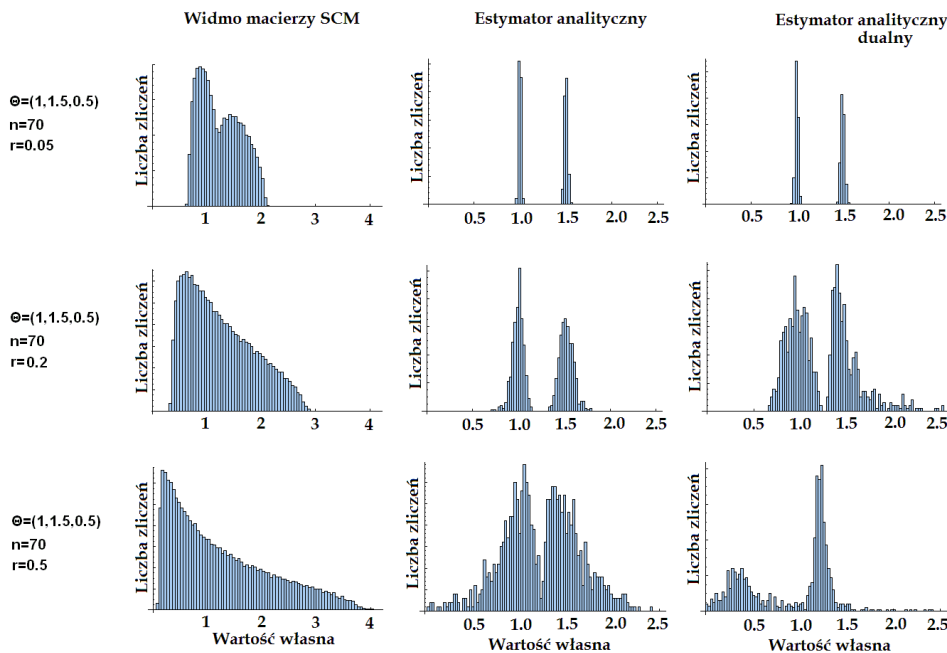
Na rysunku 8.4 pokazany został przykład dla zespołu macierzowego opisanego przez $\Theta_{\text{true}} = (1, 1.5, 0.5)$. Wymiary macierzy obserwacji M wynosił 70×1400 , natomiast statystyka liczyła 500 powtórzeń. Wykres z lewej strony przedstawia histogram wartości własnych obliczanych bezpośrednio z kolejnych macierzy obserwacji. Kolejne 2 rysunki przedstawiają histogramy wartości własnych uzyskanych jako wynik estymacji kolejno estymatora analitycznego (środkowy rysunek) oraz estymatora analitycznego dualnego (rysunek po prawej stronie).

Już pobieżna ocena pozwala stwierdzić, że zastosowanie estymatora daje w porównaniu do bezpośredniego obliczania wartości własnych znacznie lepszy rezultat. Uzyskane widmo jest wąskie, co oznacza, że kolejne estymacje dają zbliżone wyniki, ponadto wyniki te są skupione wokół właściwych wartości. Ogólnie rzecz biorąc wydaje się, że efekt jest bardzo zadowalający. Należy jednak być ostrożnym przy wyciąganiu tego typu wniosków, gdyż te same metody użyte dla macierzy obserwacji o innych wymiarach lub innej wartości Θ_0 mogą dawać wyniki odbiegające od właściwych wartości albo na przykład bardzo mocno rozrzucone. W takim przypadku dany estymator w ogóle nie będzie spełniał swojego zadania. Odpowiedni przykład



Rysunek 8.4. Przykład estymacji dla $\Theta_{true} = (1, 1.5, 0.5)$, wybrano macierze X o wymiarach $n = 70$, $r = 0.05$. Estymowane wartości własne skupiają się wokół prawidłowych wartości, duża powtarzalność estymacji.

został pokazany na rysunku 8.5, gdzie widać silną zależność szerokości uzyskiwanego widma w zależności od większego wymiaru macierzy obserwacji.



Rysunek 8.5. Zmiana niedokładności estymacji wraz ze wzrostem r . Skracanie macierzy obserwacji powoduje wyraźne rozmycie estymowanych parametrów.

Jeden z celów jakie sobie stawiamy w tej pracy polega na zbadaniu jak zmienia się precyzja estymacji danego estymatora w funkcji parametrów, które mogą na tę precyzję wpływać. Parametry te będziemy określać mianem istotnych. Zakładamy zatem, że parametrami istotnymi w tym kontekście są: mniejszy wymiar macierzy obserwacji n , 'prostokątność' r macierzy obserwacji wyrażona jako stosunek jej długości do szerokości oraz cały wektor parametrów Θ_{true} określający zespół macierzowy z którego losowane są macierze obserwacji. Rozważaną niedokładność estymacji za-

pisywać będziemy jako

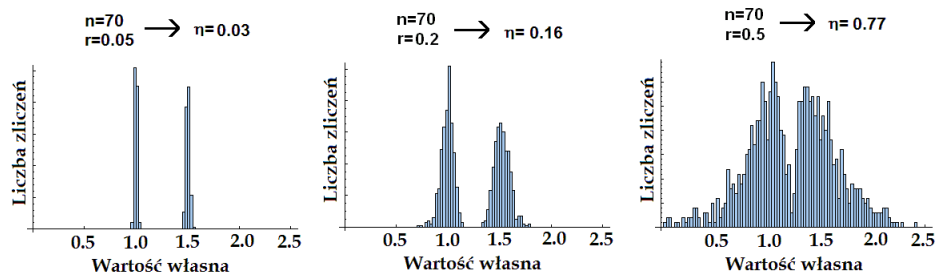
$$\eta^{\text{estym}} = \eta^{\text{estym}}(r, n, \Theta_{\text{true}}), \quad (8.1)$$

gdzie indeks 'estym' numerować będzie kolejno rozważane estymatory.

Jak pamiętamy od początku zakładamy, że macierze obserwacji są duże a obserwacje trwają długo, co oznacza dużą wartość n oraz małą wartość r . Odpowiada to wymiarom macierzy, dla których spodziewamy się najlepszego działania estymatorów. Ponadto można wysunąć pewne intuicyjne przypuszczenie na temat zależności niedokładności estymacji od wektora Θ_{true} , mianowicie jeśli wartości własne będą od siebie wystarczająco oddalone wówczas estymator powinien działać lepiej niż w przypadku kiedy wartości własne będą leżeć blisko siebie. Jakościowe określenia typu duża macierz obserwacji, długie obserwacje, wartości własne leżące blisko lub daleko od siebie oraz lepsza lub gorsza estymacja są oczywiście bardzo ogólne i nieprecyzyjne. Posługujemy się nimi w tym momencie jedynie w celu wstępnego, intuicyjnego przybliżenia się do badanego zagadnienia. Ich precyzyjne, ilościowe odpowiedniki pojawią się w kolejnych fragmentach pracy.

8.3. Miara niedokładności estymacji

Powtarzając wielokrotnie procedurę rekonstrukcji widma granicznego będziemy otrzymywać kolejne estymacje Θ . Spodziewamy się, że będą one w pewien sposób rozłożone wokół pewnego punktu w przestrzeni parametrów Θ . Pojawiają się w tym momencie dwa ważne pytania, mianowicie jak bardzo wyniki kolejnych estymacji są względem siebie rozrzucone oraz czy punktem ich skupienia jest tak jak się spodziewamy Θ_{true} , czy też rozkład estymacji skupiony jest w innym jakimś innym punkcie. Odpowiedzi na te pytania prowadzą do takich pojęć jak dobrze pracujący estymator, czy też estymator dający przeważnie wyniki bliskie prawdy. Estymator dobrze pracujący to po prostu taki, którego statystyka jest mocno skupiona wokół właściwego punktu Θ_{true} . Pojęcia takie dobrze rozumiemy intuicyjnie, jednak znacznie lepiej było by mieć do dyspozycji jakąś miarę ilościową, która za pomocą jednej liczby w sposób konkretny opisywała by ten aspekt działania rozważanej metody estymacji widma. Wówczas możliwe stanie się porównanie efektywności działania danej metody testowanej w różnych warunkach określonych przez zbiór istotnych parametrów, czy też porównanie różnych metod w całym zakresie rozważanych parametrów istotnych.



Rysunek 8.6. Miara niedokładności η , kilka przykładów dla $\Theta_{\text{true}} = (1, 1.5, 0.5)$.

Ostateczna postać miary niedokładności estymacji nie jest wcale oczywista ze względu na fakt, że wynik estymacji Θ jest f -wymiarowym wektorem. Wykonując m powtórzeń otrzymujemy macierz wyników estymacji o wymiarze $k \times m$. Kolejne wyniki są zatem pewnego rodzaju chmurą w f -wymiarowej przestrzeni. Miarą niedokładności rozważanego estymatora może być zatem wielkość mówiąca na przykład o objętości tej chmury, lub też w nieco uproszczonej wersji o jej maksymalnej szerokości. Oznaczmy wspomnianą macierz wyników estymacji przez $E_{r,n,\Theta_{\text{true}}}^{\text{estym}}$. Wówczas kolejne wartości własne macierzy kowariancji $\text{Cov}[E_{r,n,\Theta_{\text{true}}}^{\text{estym}}]$ dadzą nam informacje na temat kwadratu szerokości rozkładu wyników estymacji w kolejnych kierunkach własnych. Wystarczy wybrać kierunek własny w którym rozkład jest najszerszy. Przyjęta przez nas miara niedokładności estymacji przyjmie zatem postać

$$\eta_{\text{estym}}(r, n, \Theta_{\text{true}}) = \left[\text{Max} \left\{ \text{Eig}[\text{Cov}[E_{r,n,\Theta_{\text{true}}}^{\text{estym}}]] \right\} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (8.2)$$

Na rysunku 8.6 został pokazany przykład zastosowania tak zdefiniowanej miary niedokładności estymacji w kilku przypadkach. Jak widać w sytuacji gdy mamy do czynienia z powtarzalnymi estymacjami, które są skupione wokół właściwych wartości Θ_{true} nasza miara niedokładności η przyjmuje małe wartości, natomiast w przypadku estymacji mocno rozrzuconych η ma dużą wartość, co jest zgodne z przyjętymi założeniami.

Warto na koniec wspomnieć, że zaproponowana miara niedokładności jest miarą absolutną, czyli informuje nas o bezwzględnej wartości szerokości rozkładu wyników estymacji (błąd bezwzględny). Wydaje się, że w niektórych przypadkach informacja taka może być myląca, na przykład gdy całe estymowane widmo zawiera wszystkie wartości własne o dużych wartościach. Możliwe zatem, że w ogólności lepiej sprawdziła by się inna miara, uwzględniająca położenie wartości własnych wchodzących w skład estymowanego widma. Problem jednak w tym, że w sytuacji kiedy wartości własnych w widmie jest wiele zaproponowanie sensownej względnej miary niedokładności wcale nie jest sprawą trywialną i w ramach tej pracy nie będziemy się tym zagadnieniem dokładniej zajmować.

8.4. Wnioskowanie z pojedynczego pomiaru, mapa niedokładności

Opisana powyżej miara niedokładności estymacji jest bardzo pożytecznym narzędziem, gdyż dostarcza informacji na temat skali rozrzutu estymowanych parametrów. Im mniejsza jest jej wartość tym lepiej, gdyż estymacje dające wynik daleki od prawdy zdarzają się rzadko i tym samym zdecydowana większość estymacji jest skupiona wokół prawidłowych wartości. Można powiedzieć, że wynik takich estymacji jest wiarygodny. Jej obliczenie wymaga jednak dysponowania statystyką, czyli wielokrotnego powtórzenia eksperymentu. Sprawia to, że w przypadku wykonania pojedynczego pomiaru jest ona bezużyteczna. Niestety w zastosowaniach praktycznych sytuacja gdzie nie ma możliwości powtórzenia pomiaru jest dosyć częsta. Obliczenie miary niedokładności w takich warunkach jest oczywiście niemożliwe, ale pojawia się pytanie czy jesteśmy wtedy całkowicie pozbawieni wiedzy na temat wiarygodności takiego pomiaru i czy rzeczywiście nic już więcej nie można zrobić?

Pomysł na poradzenie sobie z tym problemem polega na tym, żeby wiedzę na temat skuteczności działania danej metody estymacji zdobyć wcześniej, jeszcze zanim właściwy pomiar zostanie wykonany. W tym celu należy przeprowadzić symulację wielokrotnego pomiaru przy założeniu, że wszystkie parametry istotne podczas tej symulacji są takie same jak podczas docelowego pojedynczego pomiaru. Oczywiście aby taki sposób postępowania był sensowny zbiór branych pod uwagę parametrów istotnych musi być kompletny. Chcemy bowiem uniknąć sytuacji w której przez niewiedzę nie wzięli byśmy czegoś ważnego pod uwagę i z tego powodu niedokładność estymacji podczas docelowego pomiaru okazała by się inna niż wcześniej oszacowaliśmy. Mogło by to prowadzić do błędnej interpretacji uzyskanego wyniku. Zakładamy zatem, że ustalony zbiór parametrów istotnych dla działania rozważanych metod określony wzorem(8.1) został wybrany w sposób właściwy i rzeczywiście jest kompletny.

W naturalny sposób nasuwa się kolejny pomysł polegający na wielokrotnym wykonaniu opisanego powyżej oszacowania, jednak za każdym razem dla innych wartości parametrów istotnych. W ten sposób jesteśmy w stanie odtworzyć wielowymiarową funkcję niedokładności działania danej metody, której argumentami będą właśnie parametry istotne. Tak zdefiniowaną funkcję będziemy nazywać mapą niedokładności danej metody estymacji.

Odtworzenie mapy niedokładności metody daje zupełnie nową możliwość spojrzenia na problem globalnie. W postaci jednej funkcji mamy bowiem zawartą informację o skuteczności działania metody w całym rozważanym zakresie parametrów istotnych. Można na przykład zakładając jakiś akceptowalny poziom niedokładności estymacji pokusić się o próbę zbadania zakresu stosowalności danej metody. Zakres ten powinien być widoczny w postaci pewnego obszaru, gdzie uzyskana funkcja będzie przyjmowała małe wartości, co odpowiada dobrej powtarzalności uzyskiwanych estymacji bliskich wartościom prawdziwym, tak jak w przykładzie zilustrowanym na rysunku 8.4. Ostatecznie także wzajemne porównanie skuteczności działania kilku metod estymacji widma powinno być w takim podejściu stosunkowo łatwe.

8.5. Minimalna liczba powtórzeń

Zaproponowana miara niedokładności estymacji jest obliczana na podstawie wyników estymacji uzyskanych za jej pomocą i przyjmuje postać

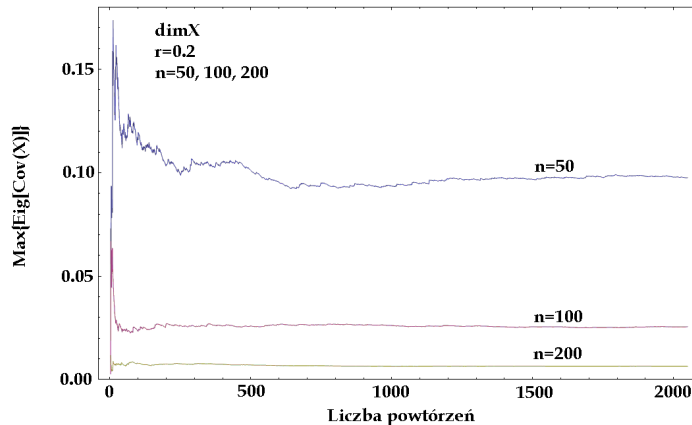
$$\eta_{\text{estym}}(r, n, \Theta_{\text{true}}) = \left[\text{Max} \left\{ \text{Eig}[\text{Cov}[E_{r,n,\Theta_{\text{true}}}^{\text{estym}}]] \right\} \right]^{\frac{1}{2}},$$

gdzie macierz $E_{r,n,\Theta_{\text{true}}}^{\text{estym}}$ zawiera estymowane parametry uzyskane z kolejnych powtórzeń. Chcielibyśmy oczywiście, żeby uzyskana w ten sposób liczba dostarczała sensownej informacji na temat rozważanej metody. W szczególności niedokładność η przy powtórnym jej obliczeniu powinna za każdym razem przyjmować taką samą wartość oraz nie może się ona zmieniać w zależności od liczebności branej pod uwagę statystyki. Najprostszym sposobem wydaje się po prostu wykonanie bardzo dużej liczby powtórzeń dla każdego zbioru parametrów istotnych. Natychmiast pojawia się jednak pytanie czy ta bardzo duża liczba powtórzeń jest rzeczywiście aż tak duża,

żeby funkcja η spełniała powyższe warunki? Jeśli tak to z kolei czy nie zmarnujemy przypadkiem zbyt dużo mocy obliczeniowej podczas symulacji, być może mniejsza statystyka była by w zupełności wystarczająca?

Aby odpowiedzieć na te pytania rozważmy najpierw pomocniczą funkcję $\eta(x)$, gdzie x jest liczebnością statystyki branej pod uwagę. Dla uproszczenia zapisu pominięte zostały pozostałe argumenty funkcji η . Spodziewamy się, że $\eta(x)$ okaże się pewną fluktuującą funkcją, której fluktuacje wraz ze wzrostem argumentu będą maleć, aż w końcu jej wartość się ustabilizuje. Naszym celem będzie sprawdzenie jak przedstawiają się wspomniane fluktuacje i ustalenie minimalnej liczebności statystyki $x = x_{\text{stab}}$, która zapewnia zadowalającą stabilność funkcji $\eta(x)$. W ten sposób zostanie ustalony pewien kompromis pozwalający w sposób w miarę optymalny zaprojektować późniejsze symulacje.

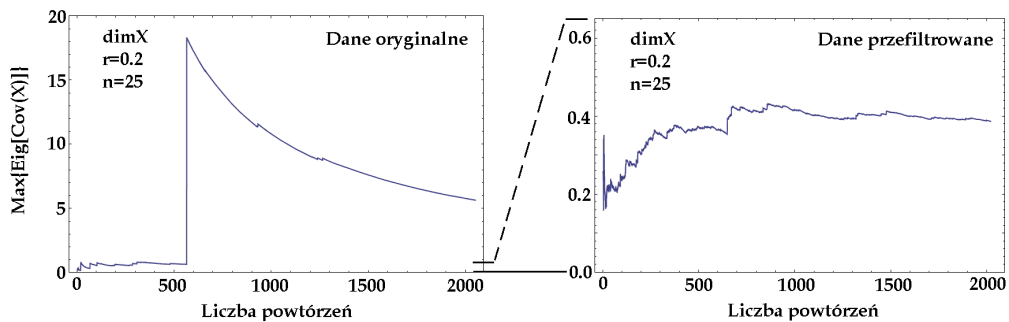
Eksperyment pomocniczy wykonany został w kilku wersjach, przy warunkach $\Theta_{\text{true}} = (2, 3, 0.5)$ oraz mniejszym wymiarze n macierzy X równym kolejno 200, 100, 50 oraz 25. Współczynnik prostokątności w każdym z przypadków był równy $r = \frac{n}{m} = 0.2$. Warunki te ustalono w taki właśnie sposób dlatego, że późniejsze symulacje mają zostać wykonane również w podobnym zakresie. Funkcja $\eta(x)$ badana była w zakresie $x \in \langle 10, 2200 \rangle$, który to zakres jak się okazało był wystarczający aby zaobserwować spodziewane własności. Rezultat przeprowadzonego eksperymentu pomocniczego został pokazany na Rysunku 8.7.



Rysunek 8.7. Zależność η^2 od liczby powtórzeń

Linia znajdująca się najniżej odpowiada przypadkowi $n = 200$, następnie pośrodku jest $n = 100$ oraz $n = 50$ na górze. Można zaobserwować, że stabilizacja funkcji $\eta(x)$ następuje przy różnej wielkości statystyki w zależności od wymiarów macierzy, jednak liczebność równa 500 wydaje się wystarczająca w każdym z przypadków. Przy okazji można zauważyć pewną ciekawą zależność, mianowicie wydaje się, że spełniony jest warunek w postaci $\lim_{x \rightarrow \infty} \lambda_{\text{max}} \cdot n^2 = \text{const}$, gdzie λ_{max} oznacza stabilną wartość badanej największej wartości własnej dla danego n . Warunek ten można zapisać w równoważnej postaci jako $\lim_{x \rightarrow \infty} n \cdot \eta(x) = \text{const}$.

Jak widać na Rysunku 8.7 nie został ujęty przypadek dla $n = 25$, który wymaga osobnego komentarza. Został on rozważony osobno i pokazany po lewej stronie Rysunku 8.8. Widzimy, że w pewnym momencie, około powtórzenia 600-nego, rozważana funkcja rośnie bardzo gwałtownie, a następnie stopniowo opada, jednak wartości funkcji od momentu skoku są zaskakująco duże. Ponadto własność graniczna wspomniana powyżej nie jest spełniona. Możemy także zauważyć znacznie mniejsze skoki wartości funkcji około powtórzenia 1000 oraz 1300.



Rysunek 8.8. Zależność η^2 od liczby powtórzeń w przypadku małych macierzy - wpływ skrajnie nieprawidłowych estymacji na miarę niedokładności oraz ilustracja prostej filtracji danych

Pojawia się podejrzenie, że być może od czasu do czasu wynik kolejnej estymacji jest bardzo mocno oddalony od pozostałych, wówczas pamiętając o postaci rozważanej funkcji należało by się spodziewać dokładnie takiego jej zachowania. Wystarczyło przejrzeć wyniki kolejnych estymacji w miejscu pojawienia się nagłego skoku aby się przekonać, że dokładnie takie było jego źródło. Ponadto można się było przekonać, że podobnych przypadków estymacji bardzo mocno odbiegających od spodziewanych wartości (2,3,0.5) jest więcej. Mówimy tutaj o estymacjach zawierających liczby rzędu kilkadziesiąt, czasem powyżej 100 lub też ujemne, które w ewidentny sposób są niewłaściwe. Ten przypadek, który się przydarzył około 600-nego powtórzenia stanowił akurat największe odstępstwo, dlatego najwyraźniej zaznaczył się na wykresie. Należy podkreślić, że przypadki skrajnie niewłaściwych estymacji występowały równocześnie w metodach analitycznej oraz statystycznej. Zatem można wysnuć wniosek, że w przypadku macierzy o małych wymiarach obydwie metody estymacji zaczynają mocno szwankować produkując od czasu do czasu wyniki bardzo mocno oddalone od właściwych i tym samym przestają być wiarygodne.

Ciekawość nakazuje sprawdzić co by zmieniło usunięcie ze zbioru wykonanych estymacji wyników ewidentnie niewłaściwych. Żeby tak móc zrobić w praktyce potrzebna jest oczywiście dodatkowa wiedza na temat zakresu wartości własnych, spoza którego wynik na pewno jest zły. Inna sprawa to liczby ujemne, które można odrzucić od razu. Dla testu ustanowiono warunek dla akceptowalnych wartości własnych w postaci przedziału $\lambda \in \langle 0, 10 \rangle$. Wynik dla tak przefiltrowanych danych pokazany

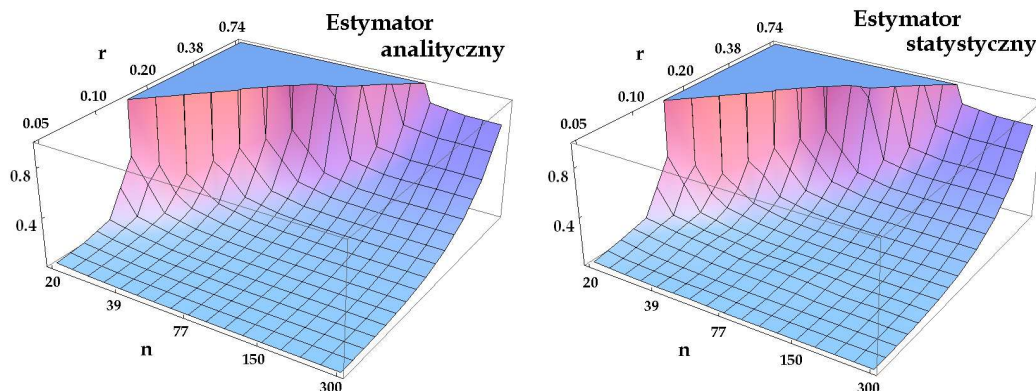
został po prawej stronie rysunku 8.8. Co ciekawe okazuje się, że wspomniana już własność $\lim_{x \rightarrow \infty} n \cdot \eta(x) = \text{const}$ znowu jest spełniona.

8.6. Eksperyment 1 - estymatory analityczny i statystyczny

Posiadamy już miarę niedokładności estymacji, za pomocą której możemy badać rozważany estymator. Sprawdziliśmy też jak dużo powtórzeń potrzebujemy, aby używana przez nas miara stała się użytecznym i wiarygodnym narzędziem. Ponadto zaproponowana została idea mapy niedokładności, gdzie mają zostać zebrane wartości niedokładności estymacji zmierzone przy różnych wymiarach macierzy obserwacji X , co umożliwi przejrzyste przedstawienie uzyskanych wyników i znacznie ułatwi ich analizę. Przystąpmy zatem do przeprowadzenia symulacji numerycznych, których celem będzie sprawdzenie działania estymatorów analitycznego oraz statystycznego.

Szczegóły eksperymentu

Symulacje przeprowadzono z udziałem macierzy X o wymiarach z zakresu $n \in \langle 20, 300 \rangle$ oraz $r \in \langle 0.05, 0.74 \rangle$ o widmie granicznym $\Theta_{\text{true}} = (2, 3, 0.5)$. Została użyta skala logarymiczna zdefiniowana jako $n = 20 \cdot (1, 4)^{n_i}$ oraz $r = 0,05 \cdot (1, 4)^{r_i}$, gdzie $n_i \in \langle 0, 8 \rangle$ oraz $r_i \in \langle 0, 8 \rangle$. Ostatecznie zatem na wykresie znalazło się 81 punktów. W każdym z punktów pomiar powtórzony został 900 razy, aby uzyskana funkcja nie była obciążona szkodliwymi fluktuacjami także w rejonie mniejszych wymiarów macierzy. Obliczenia trwające ostatecznie 4 tygodnie bez przerwy wykonano w programie Mathematica 6, który uruchomiono na komputerze Pentium 4 2000MHz. Uzyskane wyniki zebrane zostały w postaci map niedokładności, które pokazano na Rysunku 8.9.



Rysunek 8.9. Mapy niedokładności dla estymatorów analitycznego oraz statystycznego, $\Theta_{\text{true}} = (2, 3, 0.5)$

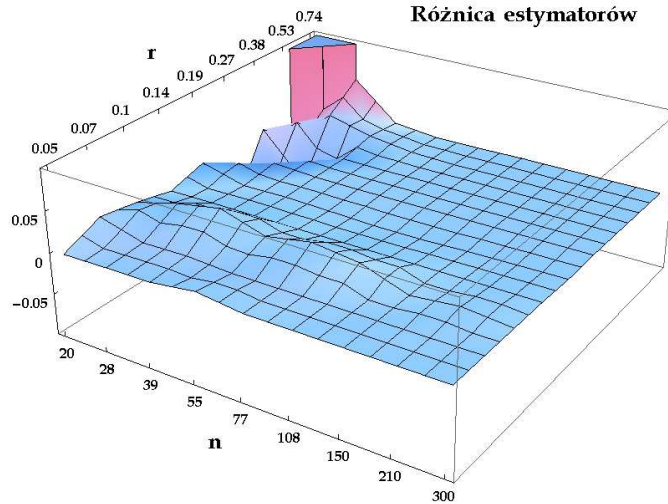
Przypomnijmy, że małe wartości na wykresie oznaczają wiarygodne estymacje, gdzie estymowane parametry skupione są wokół prawdziwych wartości oraz rozrzut estymacji z kolejnych powtórzeń jest mały. Zatem krótko mówiąc - im mniejsze wartości na mapie niedokładności tym lepiej. Rezultat symulacji przedstawiony na rysunku 8.9 pozwala na sformułowanie kilku wstępnych wniosków:

- Najlepsze wyniki obserwujemy w rejonie małych wartości r przy równocześnie dużych wartościach n . Jest to wynik, którego należało się spodziewać, gdyż ten rejon odpowiada dużym macierzom o dużym wydłużeniu.
- Niedokładność pozostaje na niskim poziomie także w przypadku bardzo małych macierzy ale o dużym wydłużeniu (małe n oraz małe r). Jest to raczej zaskakujący rezultat, gdyż z założenia rozważania dotyczyły małych macierzy.
- Nawet w przypadku dużych macierzy (duże n) wraz ze wzrostem r powierzchnia wykresu wyraźnie podnosi się, co oznacza że estymacje stają się coraz mniej dokładne. Rosnący parametr r oznacza coraz mniej wydłużone macierze i tym samym coraz krótsze obserwacje. Parametr r bliski jedności oznacza, że macierz obserwacji jest już prawie kwadratowa, czyli dysponujemy bardzo krótkimi obserwacjami, gdzie liczba zarejestrowanych próbek zbliża się do liczby zmiennych. Wobec tego należy się spodziewać pogorszenia dokładności estymacji, co właśnie obserwujemy.
- W obszarze małych macierzy o małym wydłużeniu (małe n oraz duże r) niedokładność estymacji jest bardzo duża. Estymacje dają wyniki bardzo nieprawidłowe, czyli krótko mówiąc estymatory w tym rejonie po prostu nie działają.
- Widać wyraźnie, że nie jest prawdą, że niedokładność estymacji zależy tylko od wydłużenia macierzy r lub tylko od jej wielkości zdefiniowanej przez n . Ciekawym zagadnieniem wydaje się zatem próba odpowiedzi na pytanie od czego tak naprawdę zależy niedokładność estymacji, czyli zbadanie rejonu na mapie niedokładności gdzie wartości gwałtownie rosną. Zagadnienie to jest interesujące, gdyż tak zdefiniowany obszar można interpretować jako granicę stosowalności metod. Z tego względu powrócimy do niego jeszcze.
- Rzucą się w oczy bardzo duże podobieństwo obydwu wykresów, które wręcz wydają się być takie same. W rzeczywistości nie są one identyczne, co łatwo potwierdzić porównując parami liczby dla losowo wybranych punktów na wykresach. Podobieństwo jednak jest bardzo duże. W dalszej części pracy zostanie sprawdzone, czy pomiędzy mapami niedokładności uzyskanymi dla poszczególnych estymatorów istnieją statystycznie istotne różnice.

8.7. Porównanie estymatorów

Jak już zostało wspomniane mapy niedokładności uzyskane dla obydwu estymatorów są do siebie niezwykle podobne. Chcielibyśmy sprawdzić jakie różnice występują pomiędzy nimi, w szczególności czy któryś z estymatorów okazuje się być skuteczniejszy od drugiego. Jednym z prostszych sposobów, dających szybką i czytelną odpowiedź na tak postawione pytanie, jest obliczenie różnicy wykresów lub też obliczenie ich ilorazu. W przypadku obliczenia różnicy wartości na wykresie większe od zera oznaczały by większe błędy pierwszej metody, podobnie jak wartości większe od jedności w przypadku obliczenia ilorazu. Zdecydowano się obliczyć różnicę wykresów, od mapy niedokładności estymatora statystycznego odjęto mapę estymatora analitycznego, wynik pokazany został na Rysunku 8.10. Obserwowane różnice są bardzo małe, co uzmysławia zakres wartości na pionowej skali. Ponadto w niektórych miejscach wartości na wykresie są dodatnie, w innych natomiast ujemne. W tej sytuacji rozsądne wydaje się postawienie oraz przetestowanie hipotezy o braku istotnych różnic pomiędzy obydwoma wykresami. Posłużymy się w tym celu standardową metodą

statystyczną w postaci testu Pearsona.



Rysunek 8.10. Różnica niedokładności estymatorów analitycznego i statystycznego

Współrzędne na wykresach oznaczymy przez n_i, r_j , natomiast wartości na mapach dla estymatora analitycznego oraz statystycznego oznaczymy odpowiednio jako $A_{i,j}$ oraz $S_{i,j}$. Należy w tym momencie podkreślić, że porównywanie uzyskanych powierzchni ma fizyczne uzasadnienie jedynie w tych rejonach, gdzie obydwie metody w ogóle działają. Zatem z porównywanych map niedokładności pozostawimy jedynie te rejony gdzie wartości są stosunkowo małe równocześnie dla obydwu metod. Pozostałe rejony odrzucamy. Za wartość graniczną niedokładności przyjmujemy 0.6, gdyż wydaje się, że jest to mniej więcej wartość graniczna powyżej której wyniki estymacji przestają być wiarygodne. Rzeczywiście analizując wnikliwiej kilka przypadków dla których miara η przyjmuje wartości poniżej 0.6 można stwierdzić, że wyniki estymacji przedstawione na wykresie $p_{(\Lambda)}$ tworzą jeszcze rozłączne wyspy, natomiast w pozostałych przypadkach wyspy zaczynają się już zlewać.

Kolejną ważną sprawą jest normalizacja obciętych funkcji, która została wykonana w zmiennych n_i, r_j , czyli każdemu z punktów na mapie niedokładności odpowiadała jednostkowa powierzchnia podstawy. Tak obcięte a następnie znormalizowane funkcje zapisywać będziemy jako $\check{A}_{i,j}$ oraz $\check{S}_{i,j}$. Zatem wartość statystyki testowej należy obliczyć ze wzoru

$$test = \sum_{i,j} \frac{(\check{A}_{i,j} - \check{S}_{i,j})^2}{\check{A}_{i,j}}$$

który po wykonaniu obliczeń daje wynik 0.022. Liczba stopni swobody w naszym przypadku wynosi 2 oraz ustalamy poziom istotności standardowo równy 0.05, co pozwala odczytać z tablic wartość graniczną dla obszaru krytycznego równą 5.99. Nie ma zatem podstaw dla odrzucenia testowanej hipotezy zerowej, którą wobec tego przyjmujemy jako prawdziwą. W związku z tym od tej pory uważać będziemy, że mapy niedokładności uzyskane dla metod statystycznej oraz analitycznej nie różnią

się między sobą w sposób istotny.

Podsumujmy zatem jak przedstawiają się od strony praktycznej estymatory analityczny oraz statystyczny. Informacje zostały przedstawione w postaci zbiorczej w Tabeli 8.1.

Tablica 8.1. Porównanie działania estymatorów analitycznego oraz statystycznego

	Estymator statystyczny	Estymator analityczny
Algorytm	dosyć skomplikowany ze względu na rozbudowaną konstrukcję oraz zawarte w nim momenty macierzowe drugiego rzędu	prosty i przejrzysty
Liczba wymaganych momentów pierwszego rzędu przy f stopniach swobody	$2f$	f
Dodatkowe informacje potrzebne do uruchomienia estymatora	potrzebny jest punkt startowy dla procedury poszukiwania ekstremum, estymator może być czuły na odpowiedni wybór tego punktu	brak
Obliczenia numeryczne	czasochłonne, wymagana jest duża moc obliczeniowa	dosyć szybkie
Możliwości uzyskania potencjalnie lepszej precyzji poprzez zaangażowanie większej liczby momentów macierzowych	jest	brak możliwości, algorytm wykorzystuje dokładnie f momentów
Możliwości wykorzystania informacji o więzach	jest	brak możliwości

8.8. Eksperyment 2 - estymator analityczny zwykły oraz dualny

Będziemy chcieli sprawdzić jak wypada porównanie działania estymatora analitycznego w postaci podstawowej oraz dualnej. Symulacje wykonane zostały w takim samym zakresie zmiennych istotnych co poprzednio, czyli dla macierzy X o wymiarach z zakresu $n \in \langle 20, 300 \rangle$ oraz $r \in \langle 0.05, 0.74 \rangle$. Została użyta skala logarytmiczna zdefiniowana jako $n = 20 \cdot (1,4)^{n_i}$ oraz $r = 0,05 \cdot (1,4)^{r_i}$, gdzie $n_i \in \langle 0, 8 \rangle$ oraz $r_i \in \langle 0, 8 \rangle$. Do badania jakości estymacji również użyto tej samej miary niedokładności. Eksperyment przeprowadzono dla 5 różnych wartości wektora Θ_{true} wymienionych poniżej

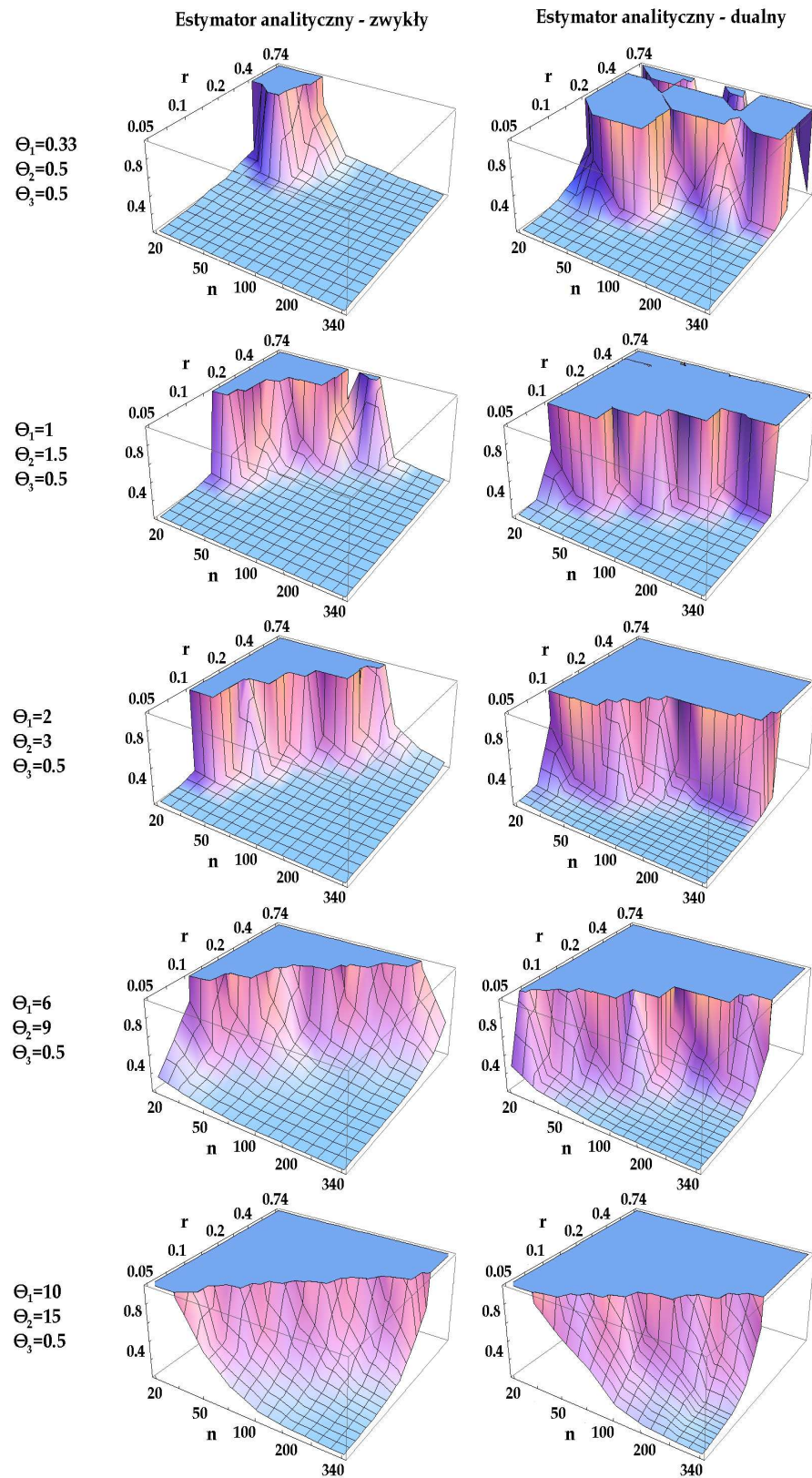
$$\begin{aligned}\Theta_1 &= (0.33, 0.5, 0.5), \\ \Theta_2 &= (1, 1.5, 0.5), \\ \Theta_3 &= (2, 3, 0.5), \\ \Theta_4 &= (6, 9, 0.5), \\ \Theta_5 &= (10, 15, 0.5).\end{aligned}$$

Dla wygody prowadzenia dalszej dyskusji w niniejszym rozdziale przyjmiemy umownie, że wartości własne rzędu około jedności lub mniejsze nazywać będziemy „małymi”, natomiast wartości własne równe 10 lub więcej nazywać będziemy „dużymi”. Zgodnie z powyższą konwencją wartości własne wchodzące w skład Θ_1 oraz Θ_2 nazwalibyśmy małymi, wektory Θ_3 oraz Θ_4 zawierałyby średnie wartości własne, natomiast wektor Θ_5 zawierałby duże wartości własne. Należy przy tym mieć na uwadze, że jest to w gruncie rzeczy podział bardzo umowny i służyć ma jedynie wygodzie prowadzonej dyskusji.

W stosunku do poprzedniego eksperymentu zakres wartości własnych wchodzących w skład Θ_{true} został poszerzony, w szczególności pod uwagę zostały wzięte przypadki gdzie pojawiają się średnie oraz stosunkowo duże wartości własne. Chcemy bowiem sprawdzić, czy estymator analityczny dualny rzeczywiście będzie wykazywał lepsze od formy podstawowej własności przy coraz większych wartościach własnych. Rezultat przeprowadzonych symulacji został pokazany na Rysunku 8.11.

Przede wszystkim należy wyjaśnić dlaczego uzyskane powierzchnie nie są tak gładkie jak te z poprzedniego eksperymentu. Jest to zapewne wina zbyt małej liczebności statystyki, która w naszym przypadku liczyła około 100 powtórzeń dla każdego z wykresów. Jak pamiętamy aby uzyskać zadowalającą stabilność stosowanej miary niedokładności minimalna wielkość statystyki powinna wynosić 500 powtórzeń lub więcej. W przeciwnym wypadku miara niedokładności wykazuje wciąż stosunkowo duże fluktuacje, co właśnie obserwujemy na wykresach. Niemniej wyniki eksperymentu pozostają cenne, gdyż fluktuacje zaburzające gładkość uzyskanych powierzchni są i tak dużo mniejsze niż obserwowane różnice pomiędzy wykresami dla porównywanych metod.

Przeanalizujmy najpierw uzyskane wyniki w obrębie jednej metody. Skupmy uwagę na mapach niedokładności estymatora analitycznego w podstawowej wersji, są to wykresy umieszczone po lewej stronie Rysunku 8.11. Zauważamy, że wraz ze wzrostem wartości własnych wchodzących w skład Θ_{true} niedokładność estymacji rośnie i zmniejsza się obszar gdzie niedokładność estymacji jest stosunkowo niska. Zgadza się



Rysunek 8.11. Porównanie podstawowej oraz dualnej postaci estymatora analitycznego

to z przewidywaniem, gdyż coraz większe wartości własne przekładają się na szybszy wzrost wartości momentów macierzowych. Natomiast dosyć zaskakujące jest to, co obserwujemy analizując wykresy po prawej stronie, uzyskane dla dualnej postaci estymatora. W tym przypadku również skuteczność działania estymacji pogarsza się ze wzrostem wartości własnych wektora Θ_{true} , natomiast spodziewaliśmy się raczej, że estymacje będą się polepszać ze względu na malejące wartości momentów macierzowych.

Porównajmy jeszcze metody między sobą rozważając pary wykresów uzyskane dla coraz większych wartości własnych. Można zaobserwować następujące prawidłowości. Po pierwsze im większe wartości własne wchodzące w skład widma tym bardziej mapy niedokładności uzyskane dla obydwu metod stają się do siebie podobne. Dla ostatniego przypadku Θ_5 podobieństwo jest największe i można przypuszczać, że dla widma składającego się z jeszcze większych wartości własnych obydwa estymatory będą działały z podobną skutecznością. Po drugie jak widać w przypadku średnich oraz małych wartości własnych estymator analityczny dualny daje rezultaty raczej kiepskie w stosunku do estymatora w postaci podstawowej. Obszar gdzie wartości niedokładności estymacji utrzymują się na stosunkowo niskim poziomie jest znacznie mniejszy niż w przypadku estymatora analitycznego w postaci pierwotnej, który wraz z malejącymi wartościami własnymi widma działa wyraźnie coraz lepiej.

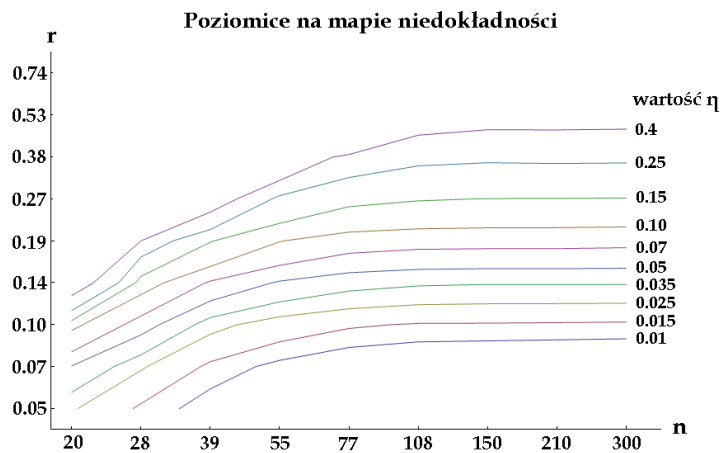
Podsumowując należy stwierdzić, że przeprowadzony eksperyment jednoznacznie wskazał na przewagę oryginalnej postaci estymatora analitycznego nad jego dualną wersją bazującą na momentach macierzowych pochodzących od odwrotności macierzy kowariancji.

8.9. Poziomice na mapie niedokładności

Przypuśćmy, że interesuje nas odpowiedź na pytanie w jakim zakresie parametrów rozważany estymator daje wyniki o niedokładności poniżej określonego poziomu. Informacja ta jest oczywiście zawarta w mapie niedokładności uzyskanej dla tego estymatora, nie jest jednak w tej formie zbyt przejrzysta. W celu poprawienia czytelności mapy niedokładności można na przykład nanieść na nią kilka poziomicy zadanych przez warunek $\eta = \text{const}$, czyli linii łączących punkty o tej samej wartości niedokładności. Zadanie nie wydaje się specjalnie trudne, natomiast z zastosowania tego prostego obrazowania wynikają oczywiste korzyści. Na przykład odpowiedź na pytanie o kształt granicy poza którą niedokładność estymacji wzrasta powyżej założonego poziomu staje się banalna, gdyż będzie widoczna w bezpośredni sposób właśnie w postaci jednej ze wspomnianych poziomicy. Z tego względu kształt i położenie krzywych tworzących poziomice wydaje się ciekawym pytaniem.

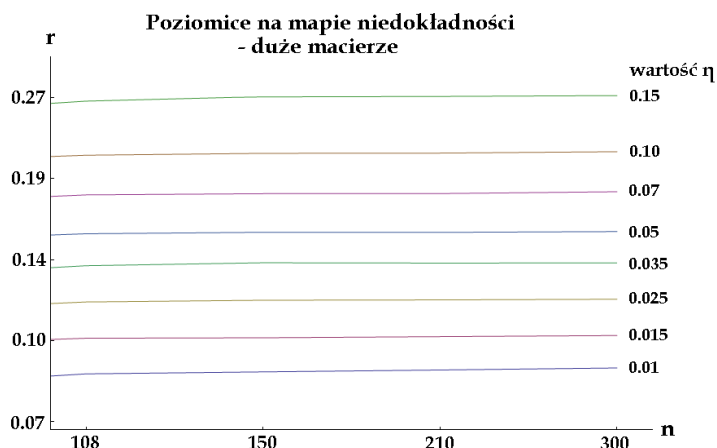
W związku z faktem, że nie stwierdzono istotnych różnic pomiędzy mapami niedokładności dla estymatorów analitycznego oraz statystycznego w rozdziale tym rozważać będziemy poziomice na mapie niedokładności uzyskanej dla estymatora analitycznego. W celu wyznaczenia punktów tworzących ostatecznie daną poziomice założono, że wartość niedokładności pomiędzy sąsiednimi punktami na mapie niedokładności zmienia się liniowo w obydwu kierunkach. Zatem każda z poziomicy

utworzona została ze zbioru punktów, których współrzędne na wykresie obliczone zostały na podstawie interpolacji liniowej wartości niedokładności pomiędzy sąsiednimi punktami na mapie. Pod uwagę wzięte zostały obydwie kierunki na wykresie, to znaczy współrzędnych punktów poziomicy poszukiwano najpierw pomiędzy punktami mapy o tej samej współrzędnej poziomej, a następnie pomiędzy punktami mapy o tej samej współrzędnej pionowej. Ten prosty trick pozwolił wykreślić poszukiwane poziomicie z dosyć zadowalającą rozdzielczością. Ostatecznie wyznaczono 10 poziomic, natomiast wartości niedokładności dla jakich je wyznaczono wybrane zostały z przedziału $\eta \in \langle 0.01, 0.40 \rangle$ w taki sposób, aby odstęp między kolejnymi poziomiami były mniej więcej podobne. Wynik został pokazany na rysunku 8.12.



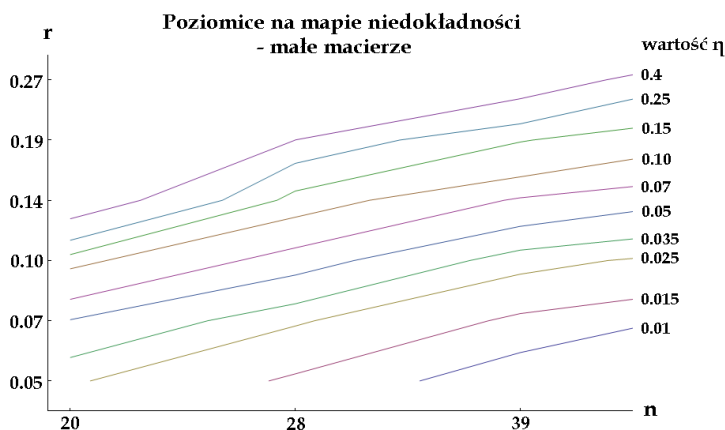
Rysunek 8.12. Przekroje przez mapę niedokładności dla $\Theta = (2, 3, 0.5)$. Kolejne poziomicie wyznaczają obszary wymiarów macierzy, dla których niedokładność estymacji utrzymuje się poniżej ustalonego poziomu η .

Analizując wstępnie uzyskany wykres nasuwa się od razu pewne spostrzeżenie, mianowicie dla większych wartości n wynoszących mniej więcej powyżej 100 poziomicie przebiegają praktycznie poziomo. Łatwo to potwierdzić analizując nachylenie kolejnych poziomic w rejonie dużych n , które wynosi praktycznie zero. Bezpośrednim wnioskiem z tej obserwacji jest fakt, że kolejne poziomicie wyznaczone są poprzez warunek $B_1 = r$, gdzie B_1 będzie dodatkowym parametrem numerującym poziomicie. Widać zatem, że dla dużych n kolejne poziomicie wyznaczone są bezpośrednio przez współczynnik r wydłużenia macierzy X . Oznacza to, że o ile tylko mniejszy wymiar macierzy obserwacji jest wystarczająco duży, wówczas niedokładność estymacji nie zależy w ogóle od konkretnej wartości tego wymiaru, ale już tylko od proporcji między wymiarami macierzy X . Warto podkreślić, że określenie "wymiar n wystarczająco duży" jest dosyć nieprecyzyjne, w przeprowadzonym eksperymencie wydaje się, że wartością tą jest akurat wymiar n powyżej 100. Niemniej warte odnotowania jest, że dla n powyżej pewnej wartości nachylenie wszystkich poziomic wynosi praktycznie zero. Na Rysunku 8.13 zostało pokazane przybliżenie prawej strony wykresu przedstawionego na Rysunku 8.12.



Rysunek 8.13. Przekroje przez mapę niedokładności dla $\Theta = (2, 3, 0.5)$ - obszar dużych macierzy.

Kolejna obserwacja dotyczy kształtu poziomic w rejonie małych wartości parametru n . Ponownie należy wyjaśnić, że określenie „mała wartość n ” jest umowne. Należy je rozumieć w ten sposób, że poniżej pewnej wartości n obserwujemy, że kształt poziomic przyjmuje szczególną postać, przy czym w gruncie rzeczy nie wiemy dlaczego jest to akurat taka a nie inna wartość n . Istotne jest, że wartość n poniżej której kształt poziomic można zaklasyfikować w pewien określony sposób w ogóle istnieje. Przybliżenie lewej części wykresu zostało pokazane na rysunku 8.14. Poziomicę w tym rejonie wydają się przebiegać wzdłuż linii prostych, jednak pod pewnym niezerowym kątem do poziomu. Zrobimy zatem założenie, że dla $n < 40$ poziomicę są w rozważanych zmiennych dodatnio nachylonymi funkcjami liniowymi.



Rysunek 8.14. Przekroje przez mapę niedokładności dla $\Theta = (2, 3, 0.5)$ - obszar małych macierzy.

Jak pamiętamy rozważane wykresy pokazane są w zmiennych logarytmicznych, gdzie kolejne współrzędne wyznaczone są jako $n = 20 \cdot (1.4)^{n_i}$ oraz $r = 0,05 \cdot (1,4)^{r_i}$. Tym

samym obserwowana na wykresach liniowa postać fragmentów poziomicy w rejonie małych wartości r jest liniowością w zmiennych n_i, r_i . Wzory opisujące poziomice należy zapisać w postaci $r_i = a \cdot n_i + b$, przy czym dla wygody w zapisie tym pomijamy indeks numerujący kolejne poziomice. Jeżeli dodatkowo przyjąć założenie, że obserwowane poziomice są do siebie równoległe, co nie wydaje się zbyt odstępować od prawdy, będzie to oznaczało, że parametr a dla wszystkich poziomicy jest taki sam. Wówczas kolejne poziomice podobnie jak w poprzednim przypadku będą numerowane przez jeden parametr, którym jest b . Zobaczmy co wynika z powyższych założeń.

Rozpocznijmy od oszacowania wartości parametru a , który przyjmujemy równy średniej uzyskanej dla poszczególnych fragmentów poziomicy. Wynikiem jest $a = 0.8$, równanie dla poziomicy przyjmuje zatem postać

$$r_i = 0.8 \cdot n_i + b.$$

Możemy teraz przejść do interesujących nas współrzędnych n oraz r przepisując powyższe równanie do postaci

$$\log_{1.4}(20r) = 0.8 \log_{1.4}\left(\frac{n}{20}\right) + b,$$

które po pozbyciu się logarytmu zapiszemy jako

$$20r = \left(\frac{n}{20}\right)^{0.8} \cdot (1.4)^b.$$

Przybliżymy $20^{0.8}$ do 11 oraz przyjmijmy oznaczenie $(1.4)^b = B_2$, przy czym należy zauważyć, że z faktu monotoniczności funkcji wykładniczej wynika, że B_2 jest jednoznacznie wyznaczone przez b i na odwrót. Wniosek z tego jest taki, że nowy parametr B_2 może z powodzeniem służyć do numerowania kolejnych poziomicy w obszarze małych wartości n , a więc jego rola będzie analogiczna jak B_1 wprowadzonego w przypadku obszaru dużych wartości n . Powyższe równanie przyjmie postać

$$B_2 = 220 \frac{r}{n^{0.8}} = 220 \frac{n^{0.2}}{m}. \quad (8.3)$$

Warto zauważyć, że dla $n \in \langle 20, 40 \rangle$ wyrażenie w liczniku $n^{0.2}$ przyjmuje wartości z zakresu od 1.82 do 2.09, czyli jest raczej wolno zmienną funkcją. Przybliżymy więc $n^{0.2}$ wokół środka rozważanego przedziału za pomocą rozwinięcia Taylora zapisanego do wyrazu liniowego

$$\begin{aligned} n^{0.2}/_{n=30} &= n^{0.2}/_{n=30} + 0.2n^{-0.8}/_{n=30}(n - 30) + \dots \\ &= 1.58 + 0.013n + \dots \end{aligned}$$

Zgodnie z powyższym równanie 8.3 zapiszemy w postaci uproszczonej jako

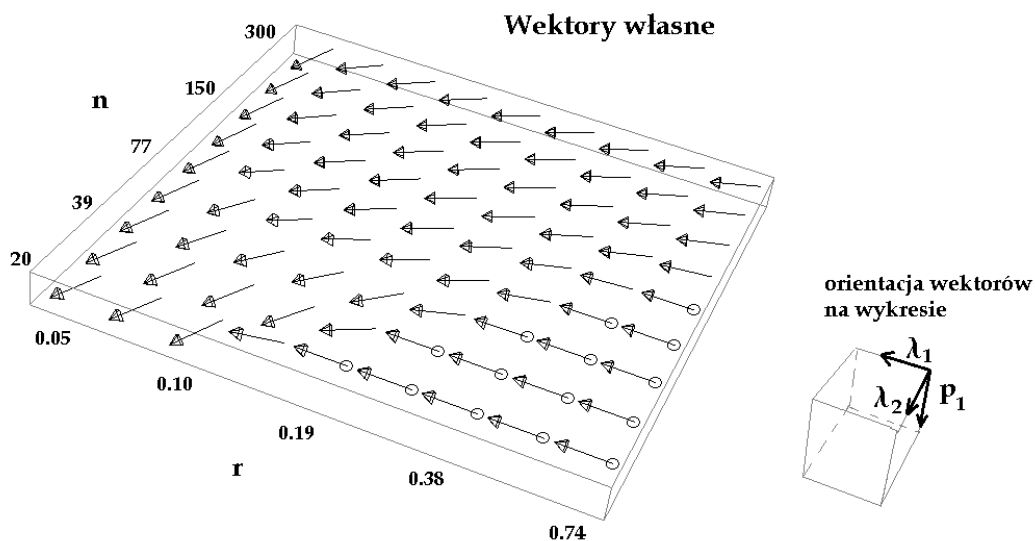
$$B_2 \cong 345 \frac{1}{m} + 2,86r. \quad (8.4)$$

Sprawdźmy, czy któryś z parametrów ma wyraźnie większy wkład do wartości całego wyrażenia, co pozwalało by na pominięcie znaczenia drugiego z nich. W rozważanym zakresie $n \in \langle 20, 40 \rangle$ oraz $r \in \langle 0.05, 0.2 \rangle$ parametr m przyjmuje wartości

$m \in \ll 100, 800 \gg$. Zatem pierwszy składnik sumy w równaniu 8.4 przyjmuje wartości z zakresu około $\langle 0.43, 3, 47 \rangle$, natomiast drugi z zakresu $\langle 0.15, 0.58 \rangle$. Wkład drugiego składnika jest względnie najmniejszy kiedy rozpatrujemy przypadek małych r oraz równocześnie również małych m , jednak w pozostałych sytuacjach taki wniosek przestaje być już prawdziwy. Nie można zatem mówić o wyraźnej dominacji któregośkolwiek z parametrów.

8.10. Analiza wektorów własnych

Celem skonstruowania mapy niedokładności jest zobrazowanie niedokładności estymacji wykonywanych w określonych warunkach. Informacje te zawarte są w macierzy kowariancji macierzy obserwacji $\text{Cov}(X)$, a konkretnie w maksymalnej wartości własnej tej macierzy. Orientacja wektora własnego odpowiadającego tej wartości własnej wydaje się zagadnieniem wartym zbadania, gdyż uzupełnia informacje przedstawione na mapie niedokładności. Do każdego z punktów na mapie niedokładności można obliczyć odpowiadający mu wektor własny, które to wektory można nanieść na mapę niedokładności. Uzyskujemy w ten sposób mapę wektorów własnych zawierającą informacje na temat kierunku korelacji maksymalnych fluktuacji w przestrzeni $\{\lambda_1, \lambda_2, p_1\}$ dla poszczególnych wymiarów macierzy obserwacji. Uzyskana mapa wektorów własnych została zobrazowana za pomocą wykresu 3-D pokazanego na rysunku 8.15. Po prawej stronie rysunku został naszkicowany sześcian, którego orientacja jest taka sama jak mapy wektorów własnych, który pokazuje orientację wektorów własnych w przestrzeni $\{\lambda_1, \lambda_2, p_1\}$.



Rysunek 8.15. Wektory własne macierzy $\text{Cov}(X)$ od max. wartości własnej

Analizując uzyskaną mapę wektorów własnych należy zwrócić uwagę na następujące fakty.

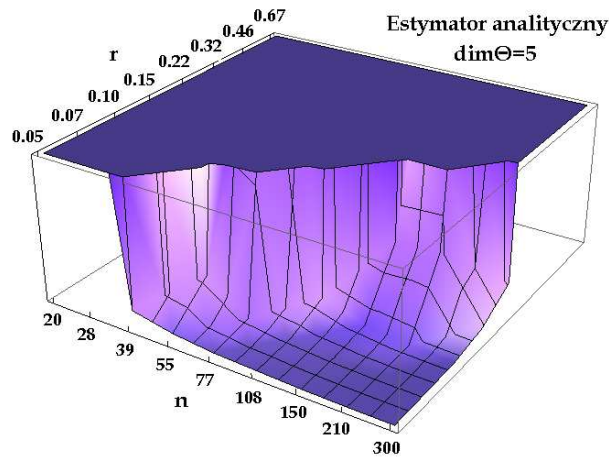
- Część wektorów własnych jest ustawiona w jednym kierunku, po wnikliwszym sprawdzeniu ich składowych okazują się wynosić niemal dokładnie $(1,0,0)$. Wektory te zostały zaznaczone na wykresie za pomocą dodatkowego symbolu kółeczka u swojej podstawy. Położenie tych wektorów dokładnie pokrywa się z regionem gdzie estymatory praktycznie przestają działać i miara niedokładności staje się bardzo duża, to jest z obszarem małych macierzy. Ustawienie wektorów własnych w kierunku $(1,0,0)$ oznacza, że praktycznie wszystkie fluktuacje pochodzą od pierwszej składowej estymowanego wektora Θ .
- W pozostałej części wykresu wektory obracają się od tego kierunku, zatem żadna ze składowych estymowanej trójki Θ nie ma już znacząco większego wkładu do fluktuacji niż pozostałe składowe. Ponadto należy stwierdzić, że wektory obracają się w zdecydowanie nieprzypadkowy sposób. Wszystkie składowe wektorów są tego samego znaku, poza tym odnosi się wrażenie, że zmiana kierunku jest 'płynna' od punktu do punktu. Należy jednak przede wszystkim stwierdzić, że w zależności od wymiarów macierzy kierunek wektora własnego jest różny. Zatem w ogólnym przypadku badając szerokość rozkładu estymowanych parametrów nie można zaniedbać wkładu żadnego z nich.

8.11. Przykład estymacji przy $\dim \Theta = 5$

W przykładzie rozważanym dotychczas wektor Θ składał się z dwóch nieznanymi wartości własnych oraz jednego prawdopodobieństwa, zatem jego wymiar wynosił $\dim \Theta = 3$. Wykonane zostało porównanie rozważanych metod estymacji ze wskazaniem na duży stopień skomplikowania oraz duże zapotrzebowanie na moc obliczeniową w przypadku metody statystycznej. Rozważmy teraz przypadek kiedy w widmie granicznym spodziewamy się nie dwóch ale trzech wartości własnych, czyli wymiar wektora parametrów wzrasta do $\dim \Theta = 5$. Warto podkreślić, że implementacja estymatora statystycznego staje się już dosyć trudnym zadaniem, który wymaga przeprowadzenia obliczeń z użyciem aż 10 momentów macierzowych pierwszego rzędu, przez co czas obliczeń dramatycznie rośnie. Pokażemy, że estymator analityczny również przy wprowadzeniu większej liczby stopni swobody jest narzędziem możliwym do zastosowania i w określonych warunkach dającym zadowalające rezultaty.

Założmy na potrzeby tego eksperymentu, że dane generowane są dla widma granicznego o parametrach $\Theta_{\text{true}} = (2, 3, 4, 0.4, 0.3)$, natomiast wymiary macierzy X określone są za pomocą parametrów $n \in \langle 20, 300 \rangle$ oraz $r \in \langle 0.05, 0.67 \rangle$. Współrzędne w jakich sporządzony będzie wykres to $n = 20 \cdot (1, 4)^{n_i}$ oraz $r = 0,05 \cdot (1, 45)^{r_i}$, gdzie $n_i = 0, \dots, 8$ oraz $r_i = 0, \dots, 7$. Ze względu na wydłużony czas obliczeń wielkość statystyki ograniczono 10-krotnie, czyli do 90 powtórzeń dla każdego punktu. Jest prawdopodobnie zbyt mała wartość aby mówić o dobrej stabilności stosowanej miary niedokładności, ale wydaje się być wartością wystarczającą dla realizacji postawionego celu, czyli pokazania, że metoda analityczna jest w stanie sprostać takiemu zadaniu.

Miara niedokładności w rozważanym przypadku $\dim \Theta = 5$ została skonstruowana dokładnie tak samo jak w przypadku $\dim \Theta = 3$, czyli jest to pierwiastek kwadratowy



Rysunek 8.16. Ilustracja działania estymatora analitycznego przy większej liczbie stopni swobody, przykład dla $\Theta_{\text{true}} = (2, 3, 4, 0.4, 0.3)$. Obserwujemy, że obszar prawidłowych estymacji zmniejszył się w stosunku do poprzednich symulacji, jednak nadal dla pewnego zakresu wymiarów niedokładność estymacji pozostaje stosunkowo niska.

obliczony z maksymalnej wartości własnej macierzy $\text{Cov}(X)$. Rysunek 8.16 przedstawia uzyskany rezultat. Ogólna zależność jest podobna jak poprzednio, to znaczy estymacja widma działa najlepiej w przypadku dużych macierzy o dużym wydłużeniu. Natomiast wyraźna różnica dotyczy obszaru stosowalności metody, który to uległ znacznemu pomniejszeniu. Podsumowując, w przypadku $\dim \Theta = 5$ estymacja widma jest nadal możliwa, ale już tylko dla większych macierzy, w dodatku o większym współczynniku wydłużenia niż to obserwowaliśmy w przypadku $\dim \Theta = 3$.

Nasuwa się w tym momencie ciekawe pytanie, czy między mapami niedokładności uzyskanymi dla przypadków $\dim \Theta = 3$ oraz $\dim \Theta = 5$ istnieje jakaś ścisła relacja, a jeśli tak to jaka jest jej postać albo przynajmniej od czego ona zależy. Intuicja podpowiada, że relacja ta o ile istnieje zależeć powinna od tych samych parametrów istotnych co stosowana miara niedokładności, czyli wymiarów macierzy X oraz od wektora Θ_{true} . Nawet znajomość tego typu relacji działającej tylko w obrębie $\dim \Theta = \text{const}$ była by już niezmiernie użyteczna, jednak jej postać nie została dotąd odkryta i pytanie to jak na razie pozostaje bez odpowiedzi.

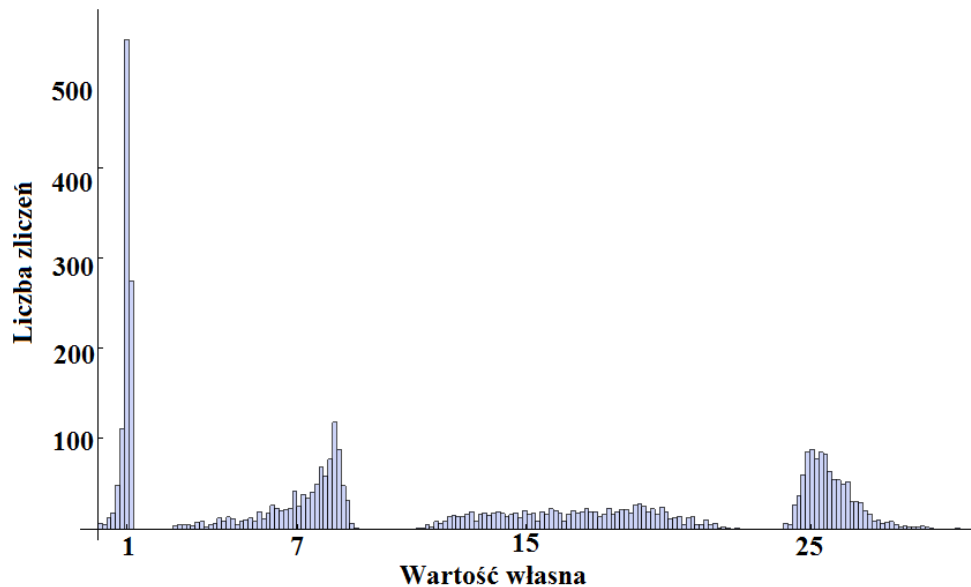
8.12. Porównanie do estymatora Girko przy $\dim \Theta = 7$

Pokażemy teraz działanie estymatora analitycznego przy czterech poszukiwanych wartościach własnych. W przeciwieństwie do poprzednio prezentowanych symulacji, które obejmowały pewną przestrzeń wymiarów macierzy obserwacji X , w tym przypadku zostały one wykonane dla konkretnie ustalonych wymiarów macierzy X . Motywacją przeprowadzenia takich właśnie symulacji było uzyskanie wyników, które będzie można w sposób bezpośredni odnieść do opublikowanych w ostatnim czasie wyników [43] będących implementacją estymatora Girko (w skrócie „G-estimator”).

Na wstępie należy wspomnieć o bardzo istotnej z praktycznego punktu widzenia różnicy pomiędzy estymatorem analitycznym a wspomnianym estymatorem Girko. Mianowicie jednym z założeń konstrukcji G-estymatora jest dokładna znajomość „multiplicity” (jest to parametr informujący ile razy dana wartość własna pojawia się w widmie, a więc jest on równy Np_i , gdzie N to mniejszy wymiar macierzy obserwacji X , natomiast p_i to prawdopodobieństwo pojawienia się w widmie wartości własnej λ_i) wszystkich wartości własnych wchodzących w skład widma, podczas gdy w przypadku estymatora analitycznego takiego założenia nie ma i tym samym „multiplicity” poszczególnych wartości własnych są kolejnymi z estymowanych parametrów. Różnica ta jest bardzo istotna, ponieważ ostatecznie estymatory pracują w przestrzeniach parametrów o innych wymiarach. W rozpatrywanym przypadku widmo macierzy obserwacji X zawiera 4 nieznane wartości własne i taki jest wymiar przestrzeni estymowanych parametrów w jakiej pracuje G-estymator. Równocześnie jeśli założymy, że nie znamy ich „multiplicity”, wówczas mamy tak naprawdę już 7 nieznanymi parametrów, które wyznaczają wymiar przestrzeni estymowanych parametrów dla estymatora analitycznego.

Symulacje podzielone zostały na 3 części, przy czym w każdym z wymienionych przypadków statystyka macierzy obserwacji X liczyła 1200 powtórzeń. Macierze X losowane były z następujących rozkładów:

- część 1 - $\dim X = 8 \times 25$ oraz $\Theta_{\text{true}} = (1, 7, 15, 25, 0.5, 0.25, 0.125)$,
- część 2 - $\dim X = 320 \times 1000$ oraz $\Theta_{\text{true}} = (1, 7, 15, 25, 0.5, 0.25, 0.125)$,
- część 3 - $\dim X = 320 \times 1000$ oraz $\Theta_{\text{true}} = (1, 7, 15, 25, 0.5, 0.25, 0.2469)$.



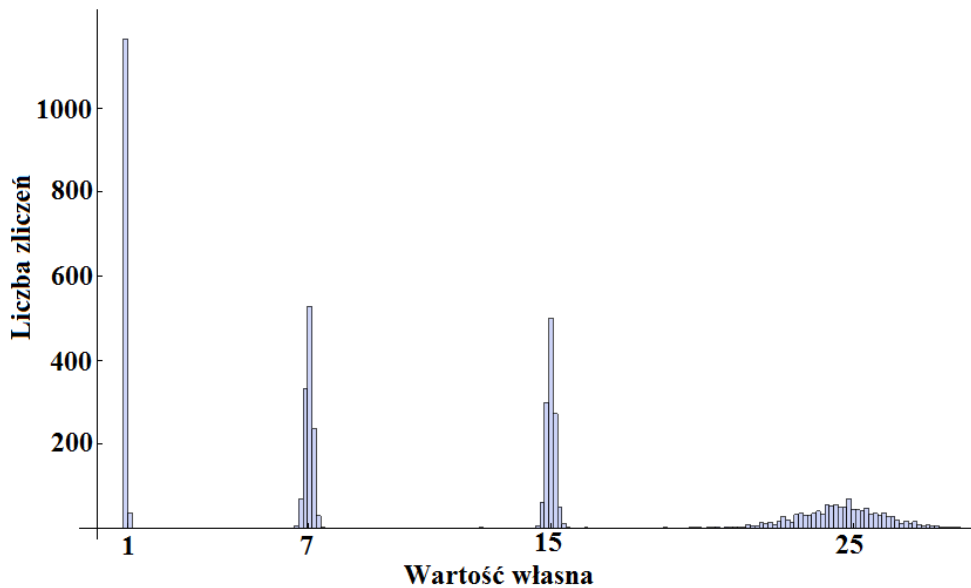
Rysunek 8.17. Histogram estymowanych wartości własnych dla $\dim X = 320 \times 1000$ oraz $\Theta_{\text{true}} = (1, 7, 15, 25, 0.5, 0.25, 0.125)$. Mimo pewnego rozmycia obserwujemy separację estymowanych wartości własnych.

Pierwsza część eksperymentu nie powiodła się, przy tak małym wymiarze macierzy

Tablica 8.2. Symulacja 2 - porównanie działania proponowanego estymatora analitycznego do estymatora Girko, symulacje dla $\dim X = 320 \times 1000$.

i	λ_i	p_i	Estymator analityczny				G-estymator			
			$E(\lambda_i)$	$\sigma^2(\lambda_i)$	$E(p_i)$	$\sigma^2(p_i)$	$E(\lambda_i)$	$\sigma^2(\lambda_i)$	$E(p_i)$	$\sigma^2(p_i)$
1	1	0.5	0.9910	0.1623	0.4959	0.0501	0.9997	0.0031	-	-
2	7	0.25	7.2255	1.3738	0.2674	0.0223	6.9972	0.0325	-	-
3	15	0.125	16.7095	2.6153	0.1315	0.0297	14.9771	0.1072	-	-
4	25	0.125	25.6615	0.8818	0.1049	0.0254	25.0014	0.1620	-	-

obserwacji estymator analityczny praktycznie nie działa. W przypadku drugim obserwujemy rozdzielone estymowane wartości własnych, jednak należy przyznać, że są one dosyć mocno rozmyte i do tego trochę przesunięte w stosunku do właściwych położenia. Rezultat ten pokazany został na Rysunku 8.17. Za to w przypadku trzeciej części eksperymentu otrzymano bardzo zadowalające wyniki, co przedstawia Rysunek 8.18. Estymowane wartości własne są bardzo dobrze zlokalizowane i do tego mocno skupione, co daje w efekcie bardzo dobrą ich separację. Jedyne największa wartość własna $\lambda_4 = 25$ jest dosyć rozmyta, jednak należy pamiętać, że jej „multiplicity” wynosiło tylko 1 dając prawdopodobieństwo $p_4 = 0.0031$, co może tłumaczyć większe rozmycie.



Rysunek 8.18. Histogram otrzymany dla $\dim X = 320 \times 1000$ oraz $\Theta_{\text{true}} = (1, 7, 15, 25, 0.5, 0.25, 0.0031)$. Obserwujemy wyraźne rozdzielone poszczególnych wartości własnych widma i dobrą ich lokalizację.

Wyniki estymacji zostały rozdzielone na 4 części uzyskując w ten sposób osobne serie dla kolejnych wartości własnych. Następnie dla każdej z serii zostały obliczone średnia oraz średnie odchylenie standardowe. Wyniki w tej postaci można już było bezpośrednio porównać do wyników dla G-estymatora [43]. Rezultat przedstawiony

został w Tabelach 8.2 oraz 8.3.

Tablica 8.3. Symulacja 3 - porównanie działania proponowanego estymatora analitycznego do estymatora Girko, symulacje dla $\dim X = 320 \times 1000$.

i	λ_i	p_i	Estymator analityczny				G-estymator			
			$E(\lambda_i)$	$\sigma^2(\lambda_i)$	$E(p_i)$	$\sigma^2(p_i)$	$E(\lambda_i)$	$\sigma^2(\lambda_i)$	$E(p_i)$	$\sigma^2(p_i)$
1	1	0.5	1.0000	0.0083	0.5003	0.0023	0.9997	0.0032	-	-
2	7	0.25	7.0093	0.1257	0.2504	0.0044	6.9942	0.0343	-	-
3	15	0.2469	15.002	0.1519	0.2453	0.0075	14.9556	0.0681	-	-
4	25	0.0031	24.563	1.4329	0.0040	0.0048	24.9892	1.0713	-	-

Analizując przeprowadzone symulacje należy stwierdzić, że we wszystkich badanych przypadkach G-estymator dał wyniki dokładniej zlokalizowane i o mniejszym rozmyciu w stosunku do estymatora analitycznego, przy czym w przypadku pierwszej symulacji estymator analityczny dał wyniki bardzo odbiegające od właściwych. W przypadku macierzy X o wymiarze $\dim X = 320 \times 1000$ estymator analityczny dał wyniki pozwalające w zdecydowany sposób rozdzielić otrzymane wartości własne, ale wciąż wyniki te są gorsze niż uzyskiwane za pomocą G-estymatora. Z drugiej jednak strony należy pamiętać, że estymator analityczny pracował w trudniejszych warunkach, gdyż liczba estymowanych parametrów tak naprawdę była większa. Co więcej, w sytuacji kiedy nie mamy wiedzy na temat „multiplicity” poszczególnych wartości własnych w widmie G-estymator jest całkowicie bezradny, podczas gdy zastosowanie estymatora analitycznego pozwala uzyskać całkiem zadowalające wyniki, o ile tylko macierze obserwacji X nie są zbyt małe. Z tego też powodu pomimo widocznych różnic w dokładności uzyskanych estymacji niemożliwe jest wskazanie któregośkolwiek z estymatorów jako bezwzględnie lepszego. Należy raczej pamiętać o praktycznych różnicach pomiędzy nimi i wynikających z tego innych obszarach potencjalnego zastosowania.

Rozdział 9

Podsumowanie

Obserwowany w ostatnich latach niezwykle dynamiczny rozwój w dziedzinie przesyłu informacji zaowocował powstaniem nowych technologii, takich jak komunikacja MIMO, stanowiąca zupełnie nową jakość w telekomunikacji. Dla pełnego wykorzystania możliwości, jakie kryje w sobie komunikacja wielowymiarowa, konieczne są wydajne algorytmy detekcji sygnału, do których działania z kolei niezbędne są skutecznie działające metody estymacji widma macierzy kowariancji na podstawie zaszumionych macierzy danych. Podobna sytuacja ma miejsce w przypadku ekono-fizyki. Dobór spółek do tzw. optymalnego portfela inwestycyjnego również wymaga znajomości macierzy kowariancji, którą musimy oszacować na podstawie obserwowanych notowań. W pracy zaproponowanych zostało kilka zupełnie nowych, nie prezentowanych dotąd metod odtwarzania widma. Spośród nich należy wymienić zwłaszcza metodę nazwaną roboczo estymatorem analitycznym [64]. W wyniku przeprowadzonych symulacji okazało się, że zarówno powtarzalność uzyskiwanych w wyniku jej zastosowania estymacji, jak też i prędkość działania są bardzo zadowalające. Ponadto jedną z naturalnych własności estymatora analitycznego jest estymacja wartości własnych tworzących widmo wraz z odpowiadającymi im prawdopodobieństwami. Wspomniane własności stanowią o jego dużej atrakcyjności. Dzieje się tak dlatego, że inne stosowane obecnie estymatory albo zakładają znajomość prawdopodobieństw wartości własnych (G-estymator) i tym samym są mniej uniwersalne, albo co prawda nie mają takiego ograniczenia, ale za to są bardzo wymagające obliczeniowo i przez to działają wyraźnie wolniej (estymator statystyczny).

Jednym z nowych estymatorów zaproponowanych w pracy była dualna postać estymatora analitycznego, którego konstrukcja oparta była na znajomości relacji dotyczących momentów macierzowych odwrotności macierzy kowariancji. Jak się okazało, we wszystkich testowanych przypadkach (różne wartości własne tworzące widmo, różne wymiary macierzy obserwacji) estymator ten dawał gorsze rezultaty w stosunku do swojej oryginalnej postaci.

Dużą część pracy stanowiło zaimplementowanie algorytmów estymacji widma (estymator statystyczny, estymator analityczny, estymator analityczny dualny) oraz przeprowadzenie szeregu symulacji a następnie analiz otrzymanych rezultatów. Na potrzeby dokonania porównania działania różnych estymatorów widma zaproponowano nieskomplikowaną metodę wizualizacji niedokładności estymacji danego estymatora w postaci tzw. „mapy niedokładności”. Przy okazji zabieg ten okazał się przydatny dla określenia zakresu stosowalności danego estymatora w sensie wymiarów macierzy obserwacji, przy założonej postaci widma. Rozważano także zagadnienie określenia warunku jaki muszą spełniać wymiary macierzy obserwacji, aby spodziewać się nie-

dokładności estymacji na poziomie nie gorszym od założonego. Odpowiedź na tak postawione pytanie jest możliwa, ale znowu pod warunkiem, że znane jest widmo macierzy kowariancji. Powodem tego jest fakt, że uzyskiwana dla danego estymatora widma mapa niedokładności zmienia się wraz z samym widmem. Nie udało się natomiast niestety udzielić odpowiedzi na pytanie w jaki dokładnie sposób mapa ulega zmianie, tak więc problem ten na chwilę obecną pozostaje nierozwiązany.

W Dodatku B.2 wyprowadzony został znany już wzór Marčhenko-Pastura, jednak rachunek przeprowadzono w oparciu o zastosowanie transformacji B (równoważnej do transformacji R), a więc narzędzia wywodzącego się z koncepcji swobodnych zmiennych przypadkowych.

Nowym wynikiem jest także relacja uzyskana dla odwrotności macierzy kowariancji, wyrażająca funkcję Greena 2-punktową przez funkcję Greena 1-punktową. Na jej podstawie skonstruowany został algorytm pozwalający wyrazić momenty macierzowe drugiego rzędu przez kolejne momenty macierzowe pierwszego rzędu. Rozdział 5 przedstawia przebieg rachunków, natomiast w Tabelach C.7 oraz C.8 zamieszczonych w Dodatku C wypisano pierwszych kilka z uzyskanych wzorów.

Znajomość wspomnianej relacji pozwoliła na przeprowadzenie konstrukcji jeszcze jednej metody estymacji widma - dualnej postaci estymatora statystycznego. Jednak z uwagi na fakt niezadawalającego działania zarówno estymatora analitycznego dualnego jak też statystycznego (w porównaniu do estymatora analitycznego: estymator analityczny dualny - stosunkowo duży rozrzut kolejnych estymacji, estymator statystyczny - wolne działanie) zdecydowano zrezygnować z jego implementacji, przedstawiona została tylko jego konstrukcja.

Dodatek A

Konwencje w telekomunikacji i fizyce

Podczas rozważania zagadnień zawartych w niniejszej pracy stosowane były narzędzia fizyki teoretycznej oraz terminologia i notacja wywodzące się z fizyki. Jak się często okazuje bardzo podobne lub nieraz takie same wręcz problemy poruszane są także w innych dziedzinach nauki, jak na przykład telekomunikacja. Trzeba pamiętać, że w obrębie każdej dziedziny naukowej mamy do czynienia ze specyficzną terminologią, która wykształciła się na przestrzeni czasu. W przypadku telekomunikacji terminologia zaczerpnięta została głównie z matematyki. Z tego względu te same zagadnienia na ogół bywają nieco odmiennie sformułowane oraz pojawiają się wynikające ze stosowania odmiennych definicji większe lub mniejsze różnice we wzorach. Wszystko to skutkuje tym, że przepływ informacji pomiędzy specjalistami z różnych dziedzin jest coraz bardziej utrudniony, nawet w sytuacjach kiedy rozważają oni podobne zagadnienia. Rozdział ten służyć ma właśnie usystematyzowaniu terminologii używanej w fizyce oraz telekomunikacji. Wskazane zostaną różnice w stosowanych definicjach oraz wykazana zostanie równoważność pomiędzy niektórymi wzorami.

A.1. Funkcja Greena oraz transformata Stieltjesa

W fizyce posługujemy się funkcją Greena oraz jej odwrotnością zdefiniowanymi jako

$$G(z) = \left\langle \frac{1}{N} \text{Tr} \frac{1}{z - H} \right\rangle, \quad (\text{A.1})$$

$$p_G(x) = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \Im G(x + i\epsilon). \quad (\text{A.2})$$

Natomiast w języku telekomunikacji mamy do czynienia z transformatą Stieltjesa wraz z transformatą do niej odwrotną, które zadane są poprzez formuły

$$S(z) = \int \frac{dP(x)}{x - z}, \quad (\text{A.3})$$

$$p_S(x) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \Im S(x + iy). \quad (\text{A.4})$$

Definicje funkcji Greena (A.1) oraz transformaty Stieltjesa (A.3) jak widzimy różnią się jedynie znakiem, natomiast ich odwrotności (A.2) oraz (A.4) są tożsame. Zapiszemy zatem

$$S(z) = -G(z), \\ p_G(x) = p_S(x) = p(x).$$

A.2. 1-punktowa funkcja Greena oraz transformata Cauchy'ego

Kolejnym interesującym nas obiektem jest transformata Cauchy'ego zdefiniowana w oparciu o szereg potęgowy, których definicje są następujące

$$G_C(x) = \frac{1}{x} M\left(\frac{1}{x}\right), \text{ gdzie } M(x) = 1 + \sum_{n \geq 1} \alpha_n x^n. \quad (\text{A.5})$$

Pokażemy teraz, że tak zdefiniowana transformata Cauchy'ego jest tożsama z używaną w fizyce funkcją Greena (A.1). Zapišmy najpierw funkcję Greena rozwijając ją w szereg do postaci

$$G(z) = \left\langle \frac{1}{N} \text{Tr} \frac{1}{z - H} \right\rangle = \frac{1}{z} + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{z^{n+1}} \left\langle \frac{1}{N} \text{Tr} H^n \right\rangle \right),$$

a następnie zapišmy transformatę Cauchy'ego korzystając bezpośrednio z definicji (A.5) oraz z definicji momentów α_n

$$\begin{aligned} G_C(x) &= \frac{1}{x} M\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} \left[1 + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{x^n} \alpha_n \right) \right] = \\ &= \frac{1}{x} + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{x^{n+1}} \left\langle \frac{1}{N} \text{Tr} H^n \right\rangle \right). \end{aligned}$$

Otrzymujemy ostatecznie dokładnie te same wyrażenia, zatem możemy zapišać

$$G_C(x) = G(x).$$

A.3. 2-punktowa funkcja Greena oraz transformata Cauchy'ego

Stosowana w fizyce 2-punktowa funkcja Greena oraz 2-punktowa transformata Cauchy'ego używana w telekomunikacji są nieco odmiennie zdefiniowane, jednak również i w tym przypadku można wykazać ich równoważność. Zapišmy najpierw dwupunktową funkcję Greena zgodnie z konwencją stosowaną w fizyce jako

$$G(x, y) = \frac{1}{N^2} \partial_x \partial_y \ln \frac{G(y) - G(x)}{x - y}. \quad (\text{A.6})$$

W Rozdziale 4.4 zostało wykazane, że definicja ta obowiązuje zarówno w przypadku zespołu Gaussa jak również zespołu Wisharta. Analogiczny obiekt pojawiający się w telekomunikacji zdefiniowany jest w oparciu o szereg $M(x, y)$ i przyjmuje postać

$$M(x, y) = xy \left[\frac{\frac{d}{dx}(xM(x)) \frac{d}{dy}(yM(y))}{(xM(x) - yM(y))^2} - \frac{1}{(x - y)^2} \right], \quad (\text{A.7})$$

przy czym 2-punktowa transformata Cauchy'ego zdefiniowana jest jako

$$G_C(x, y) = \frac{M\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)}{xy}, \text{ gdzie } M(x, y) = \sum_{i, j \geq 1} \alpha_{i, j} x^i y^j. \quad (\text{A.8})$$

Zmieńmy najpierw zmienne w równaniu (A.7) na $k = \frac{1}{x}$ oraz $l = \frac{1}{y}$, nie zapominając o zmianie zmiennych różniczkowania $\frac{d}{dx} = \frac{dk}{dx} \frac{d}{dk} = -k^2 \frac{d}{dk}$. Otrzymujemy

$$M\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{l}\right) = \frac{1}{k} \frac{1}{l} \left[\frac{k^2 l^2 \frac{d}{dk} \left[\frac{1}{k} M\left(\frac{1}{k}\right) \right] \frac{d}{dl} \left[\frac{1}{l} M\left(\frac{1}{l}\right) \right]}{\left[\frac{1}{k} M\left(\frac{1}{k}\right) - \frac{1}{l} M\left(\frac{1}{l}\right) \right]^2} - \frac{k^2 l^2}{(k-l)^2} \right],$$

przy czym podzielimy jeszcze obie strony równości przez kl . Doprowadzenie wyrażenia do tej postaci pozwala skorzystać bezpośrednio z definicji dwupunktowej transformaty Cauchy'ego (A.8) po lewej stronie równości oraz z definicji 1-punktowej transformaty Cauchy'ego (A.5) po prawej stronie. Ostatecznie otrzymujemy równanie w postaci

$$G_C(k, l) = \frac{G'(k)G'(l)}{[G(k) - G(l)]^2} - \frac{1}{(k-l)^2}. \quad (\text{A.9})$$

Powróćmy w tym momencie do równania (A.6), w którym należy tylko wykonać dwukrotne różniczkowanie, w efekcie czego otrzymujemy

$$G(x, y) = \frac{1}{N^2} \left[\frac{G'(x)G'(y)}{[G(x) - G(y)]^2} - \frac{1}{(x-y)^2} \right],$$

co dowodzi równoważności definicji wyrażonych wzorami (A.6) oraz (A.7).

A.4. Wolne kumulanty w podejściu Voiculescu oraz Zee

Rozważmy dwa asymptotycznie swobodne zespoły macierzowe A oraz B . Interesuje nas obiekt, który będzie addytywną cechą tych zespołów. Własność taką posiadają tzw. swobodne kumulanty, które z tej racji są ważnym obiektem naszego zainteresowania. Podamy teraz pierwotną postać definicji swobodnych kumulant, a następnie jej postać w ujęciu Voiculescu oraz Zee.

Założmy, że dla pewnego zespołu macierzowego znane są jego momenty macierzowe pierwszego rzędu α_n . Tym samym możemy zapisać dla tego zespołu szereg potęgowy $M(x)$ w postaci

$$M(x) = 1 + \sum_{n \geq 1} \alpha_n x^n.$$

Swobodne kumulanty κ_n definiujemy są w sposób pośredni poprzez relację

$$C(x) = 1 + \sum_{n \geq 1} \kappa_n x^n, \text{ gdzie } C(xM(x)) = M(x). \quad (\text{A.10})$$

Swobodne kumulanty jak wspomniano są obiektem o bardzo pożytecznej własności, mianowicie jeśli zespoły macierzowe A oraz B są asymptotycznie swobodne, wówczas zachodzi

$$\kappa_n^{A+B} = \kappa_n^A + \kappa_n^B.$$

Definicja swobodnych kumulant w terminologii wprowadzonej przez Voiculescu [24], [25] przyjmuje nieco inną postać, gdyż zamiast funkcji $C(x)$ oraz szeregu $M(x)$ używa on nowych funkcji nazywanych transformatą $R(x)$ oraz transformatą Cauchy $G(x)$. Związane są one z oryginalnymi funkcjami poprzez relacje $R(x) = \frac{1}{x}(C(x) - 1)$ oraz

$G(x) = \frac{1}{x}M(\frac{1}{x})$. Prosty rachunek dowodzi, że w tej notacji oryginalne wyrażenie na wolne kumulanty (A.10) przyjmuje postać

$$R(x) = \sum_{n \geq 1} \kappa_n x^{n-1}, \text{ gdzie } \frac{1}{G(x)} + R(G(x)) = x. \quad (\text{A.11})$$

Pojawia się pytanie jaki jest cel we wprowadzaniu nowej notacji, skoro chodzi o definicję tych samych obiektów. Okazuje się, że wprowadzenie nowej funkcji $R(x)$ niesie ze sobą bardzo konkretne korzyści, mianowicie podobnie jak wolne kumulanty κ_n tak samo funkcja $R(x)$ jest obiektem addytywnym w przypadku asymptotycznie swobodnych zespolów macierzowych, co zapiszemy w postaci

$$R_{A+B}(x) = R_A(x) + R_B(x).$$

Cecha ta jest bardzo pożyteczna ze względu na możliwość wygodniejszego i bardziej przejrzystego prowadzenia rachunków. Należy zatem stwierdzić, że posługiwanie się funkcją $R(x)$ w ogólnym przypadku jest uzasadnione.

Kolejnym krokiem w stronę poprawienia przejrzystości rachunków jest zaproponowana przez Zee [27] funkcja $B(x)$ (patrz także np. [66]) powiązana z funkcją $R(x)$ poprzez relację $B(x) = R(x) + \frac{1}{x}$. W tej notacji wolne kumulanty zdefiniowane są w maksymalnie zwartej postaci

$$B(G) = \frac{1}{x} + \sum_{n \geq 1} \kappa_n x^{n-1}, \text{ gdzie } B(G(x)) = x. \quad (\text{A.12})$$

Zatem jak widzimy nowa funkcja $B(G(x))$ jest funkcjonalną odwrotnością funkcji Greena $G(x)$, stąd zresztą wzięła się jej nazwa: funkcja „Blue” jako odwrotność funkcji „Green”.

Funkcja B z jednej strony pozwala w łatwy sposób obliczyć momenty rozkładu będącego sumą rozkładów spełniających „freeness”. Ponadto w niektórych sytuacjach obliczeniowych stanowi również bardzo użyteczny obiekt z innego powodu, mianowicie jej postać jest często prostsza niż oryginalnej funkcji G. Z tego powodu na przykład niektóre całki, gdzie pojawia się funkcja G, można wykonać łatwiej posługując się funkcją B.

A.5. Pojemność informacyjna, wolna energia oraz funkcja Blue

Pojemność informacyjna C kanału MIMO określa maksymalną prędkość przesyłania danych za pośrednictwem rozpatrywanego kanału H . Zakładając, że macierz kanału H jest znana i nie zmienia się w czasie (to znaczy w praktyce zmienia się na tyle wolno, że na czas trwania transji można przyjąć ją jako niezmienną) wówczas mamy do czynienia z „Quasi-static flat fading channel”. W takim przypadku pojemność kanału MIMO definiowana jest jako

$$C(\sigma^2) = \frac{1}{N} \log_2 \det \left(\mathbf{1}_N + \frac{1}{\sigma^2} H H^T \right), \quad (\text{A.13})$$

gdzie σ^2 to tzw. „odstęp sygnał-szum” (w skrócie SNR, z ang. „signal-to-noise ratio”), natomiast macierz kowariancji HH^T jest macierzą hermitowską. Warto zwrócić uwagę, że użyto logarytmu przy podstawie 2, co ma odzwierciedlenie w dwójkowej naturze przesyłanych danych. Przy takiej konwencji jednostką informacji jest [bit/(s*Hz)]. Zapisując definicję pojemności informacyjnej z użyciem logarytmu naturalnego (standardowe podejście stosowane w fizyce) należy pamiętać o dodatkowym czynniku $\log(2)$. Jeżeli kanał zmienia się w czasie, wówczas mamy do czynienia z „Time-varying Rayleigh channel”, definicja pojemności uwzględniająca zmienność kanału przyjmuje postać

$$C(\sigma^2) = \int \frac{1}{N} \log_2 \det \left(\mathbf{1}_N + \frac{1}{\sigma^2} HH^T \right) dP_H. \quad (\text{A.14})$$

Skupmy uwagę na kanałach Quasi-static o hermitowskiej macierzy kowariancji. Standardowe podejście do problemu obliczenia pojemności kanału polega na zapisie wzoru (A.13) w bazie diagonalnej w postaci

$$C(\sigma^2) = \int_0^\infty \log_2 \left(1 + \frac{\lambda}{\sigma^2} \right) \rho_{HH^T}(\lambda) d\lambda, \quad (\text{A.15})$$

gdzie $\rho_{HH^T}(\lambda)$ to gęstość prawdopodobieństwa wartości własnych rozważanego modelu HH^T , a więc rozkładu Wisharta (4.11). Otrzymujemy w ten sposób pojemność kanału MIMO, którą zapiszemy jako

$$C(\sigma^2) = \int_0^\infty \log_2 \left(1 + \frac{\lambda}{\sigma^2} \right) \frac{\sqrt{((1 - \sqrt{r})^2 - \lambda)(\lambda - (1 + \sqrt{r})^2)}}{2\pi r \lambda} d\lambda,$$

gdzie $r = N/M$, przy czym $N, M \rightarrow \infty$. Wynik ten pojawił się już w roku 1999 w pionierskiej pracy [4]. Ostatnio [28] otrzymano także inne, interesujące wyrażenie na pojemność kanału MIMO w postaci

$$C(\sigma^2) = \log_2 \left(1 + \frac{1}{\sigma^2(1 + r\delta)} \right) + \frac{1}{r} \log_2(1 + r\delta) + \log_2(e)[\sigma^2\delta - 1],$$

gdzie δ to dodatnie rozwiązanie wyrażenia

$$\delta = \left(\frac{1}{1 + r\delta} + \sigma^2 \right)^{-1}$$

wynoszące

$$\delta = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sigma^2} \left(1 - \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} + \sqrt{\left[\frac{1}{\sigma^2} \left(1 - \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \right]^2 + 4 \frac{1}{r\sigma^2}} \right].$$

Związek pojemności kanału z funkcją Greena

Do problemu obliczenia pojemności kanału można też podejść w nieco odmienny sposób. Zauważmy, że postać wzoru (A.13) przypomina nieco strukturę funkcji Greena i rzeczywiście, pomiędzy funkcjami $G(z)$ oraz $C(\sigma^2)$ istnieje ścisła relacja. Rozważmy pochodną funkcji $C(\sigma^2)$ po zmiennej σ^2

$$\frac{d}{d\sigma^2} C(\sigma^2) = \frac{d}{d\sigma^2} \left[\frac{1}{N} \log \det \left(\mathbf{1}_N + \frac{1}{\sigma^2} HH^T \right) \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{d}{d\sigma^2} \left[\frac{1}{N} \text{Tr} \log (\sigma^2 \mathbf{1}_N + HH^T) - \log \sigma^2 \right] = \\
&= \frac{1}{N} \text{Tr} \frac{1}{\sigma^2 \mathbf{1}_N + HH^T} - \frac{1}{\sigma^2} = -G(-\sigma^2) - \frac{1}{\sigma^2}.
\end{aligned}$$

W następnym kroku należy wykonać całkowanie powyższego wyrażenia, pamiętając o prawidłowym ustaleniu granic. Łatwo sprawdzić, że rozwiązaniem jest

$$C(\sigma^2) = \int_{\sigma^2}^{\infty} \left(G(-x) + \frac{1}{x} \right) dx. \quad (\text{A.16})$$

Zauważmy, że wyrażenie pojemności C w postaci (A.16) jest w praktyce bardzo atrakcyjne. Mianowicie dla obliczenia pojemności kanału wystarczy funkcja Greena macierzy kanałowej H oraz wartość parametru σ^2 określającego stosunek mocy sygnału do mocy szumu. Nie ma natomiast potrzeby obliczania gęstości rozkładu wartości własnych w widmie, mamy więc do czynienia ze sporym ułatwieniem rachunkowym.

Związek wolnej energii z funkcją Greena

Rozważmy funkcję rozdziału

$$Z = \langle \det (z - H) \rangle = \langle \exp[\ln \det (z - H)] \rangle = \langle \exp[\text{Tr} \ln (z - H)] \rangle.$$

Wyrażenie postaci $\langle e^A \rangle$ można rozwinąć jako

$$\langle e^A \rangle = e^{\langle A \rangle + \frac{1}{2}(\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2) + \dots},$$

zatem rozważaną funkcję rozdziału Z zapiszemy jako

$$Z = \exp \left[\langle \text{Tr} \ln (z - H) \rangle + \frac{1}{2} [\langle \text{Tr}^2 \ln (z - H) \rangle - \langle \text{Tr} \ln (z - H) \rangle^2] + \dots \right],$$

przy czym kolejne składniki pojawiające się w wykładniku eksponenty oznaczmy nowymi symbolami i tym samym zapiszemy funkcję rozdziału w postaci

$$Z = e^{NF_0 + \frac{1}{N}F_1 + \dots}.$$

Całe wyrażenie znajdujące się w wykładniku eksponenty nazywamy wolną energią F i możemy zapisać ją w postaci $F = \ln Z$. Rozważmy pierwszy składnik wolnej energii NF_0 nazywany pojemnością modelu

$$NF_0 = \langle \text{Tr} \ln (z - H) \rangle.$$

Po zróżniczkowaniu po prawej stronie równości otrzymujemy

$$\frac{\partial F_0(z)}{\partial z} = \left\langle \frac{1}{N} \text{Tr} \frac{1}{z - H} \right\rangle = G_H(z),$$

jak więc widzimy składnik F_0 wolnej energii w prosty sposób jest powiązany z funkcją Green'a

$$F_0(z) = \int_{-\infty}^z G_H(z') dz'.$$

Warto zauważyć, że gdyby rozważyć wolną energię dla innej funkcji rozdziału, to jej postać w zmiennej będącej funkcją Greena nie ulegnie zmianie, zmieni się natomiast oczywiście sama funkcja Greena jako funkcja w zmiennej z . Możemy więc równie dobrze rozważać pierwszy składnik rozwinięcia wolnej energii dla zespołu Wightmana $F_0^{HH^T}(z)$, który dla wygody będziemy w dalszym ciągu oznaczać jako $F_0(z)$. Zmieńmy zmienne całkowania na $k = -z$, zapiszemy wówczas

$$F_0(-k) = \int_{-k}^{\infty} G_{HH^T}(-k') dk',$$

a następnie zapiszmy powyższe wyrażenie w punkcie $k = -\sigma^2$

$$F_0(\sigma^2) = \int_{\sigma^2}^{\infty} G_{HH^T}(-x) dx,$$

Zatem pojemność kanału możemy zapisać także w postaci

$$C(\sigma^2) = F_0(\sigma^2) + \int_{\sigma^2}^{\infty} \frac{1}{x} dx \tag{A.17}$$

Dodatek B

Przykłady rachunków FRV

Rachunki dotyczące funkcji Greena czy też funkcji tworzącej momenty przeprowadzane są często przy użyciu diagramów Feynmana, tak jako to zostało pokazane w Rozdziale 4. Atrakcyjną alternatywą dla takiego podejścia jest wykorzystanie koncepcji swobodnych zmiennych przypadkowych, a w szczególności możliwości jakie dają funkcje R oraz S (lub równoważnie B oraz N), zaprezentowane w Rozdziale 3.3.

B.1. Relacje dla momentów macierzy kowariancji

W pracy [52] z użyciem diagramatyki Feynmana została wyprowadzona relacja (6.1) wiążąca momenty macierzowe α_k^Σ z momentami α_k^S , gdzie Σ to macierz kowariancji, natomiast S to doświadczalna macierz kowariancji. Jej wyprowadzenie można także przeprowadzić w inny sposób [44], korzystając z narzędzia w postaci transformacji S (lub równoważnej transformacji N), co pokażemy poniżej jako przykład jego zastosowania.

Rachunek podzielony został na dwie części. Najpierw rozpatrzmy pomocniczą macierz \tilde{c} nie zawierającą korelacji i obliczymy dla niej transformację N . Następnie rozpatrzona zostanie docelowa macierz kowariancji c , dla której również obliczymy transformację N , przy czym zostanie wykorzystany wynik uzyskany w pierwszej części. Na koniec pokażemy w jaki sposób, korzystając z obliczonych transformacji N , uzyskać interesującą nas relację (6.1).

Gauss bez korelacji

Rozważmy macierz $\tilde{c} = \frac{1}{T} \tilde{R}^T \tilde{R}$ o wymiarze $T \times T$, gdzie \tilde{R} to prostokątna macierz Gaussowska o wymiarze $N \times T$ nie zawierająca żadnych korelacji, przy czym $N < T$. Zauważmy, że dopisując do macierzy \tilde{R} dodatkowe wiersze lub kolumny wypełnione zerami macierz \tilde{c} pozostaje bez zmian. Zatem z punktu widzenia macierzy \tilde{c} możemy posłużyć się wygodnym modelem macierzy \tilde{R} w postaci $\tilde{R} = PX$, gdzie X jest kwadratową macierzą Gaussowską nie zawierającą korelacji, natomiast P jest tzw. „projektorem”, czyli diagonalną macierzą posiadającą na diagonalu N jedynek a poza tym wypełnioną zerami. Zapiszemy

$$\tilde{c} = \frac{1}{T} \tilde{R}^T \tilde{R} = \frac{1}{T} (PX)^T (PX) = \frac{1}{T} X^T P X, \quad (\text{B.1})$$

gdź $P^i = P$ dla dowolnego i . Ze względu na własność cykliczności śladu macierzowego możemy zapisać

$$N_{\frac{1}{T} \tilde{R}^T \tilde{R}}(z) = N_{\frac{1}{T} X^T P X}(z) = N_{\frac{1}{T} P X X^T}(z),$$

a więc zgodnie z (3.6) zapiszemy

$$N_{\frac{1}{T}\tilde{R}^T\tilde{R}}(z) = \frac{z}{z+1}N_P(z)N_{\frac{1}{T}XX^T}(z). \quad (\text{B.2})$$

Potrzebujemy zatem obliczyć transformację N dla macierzy P a następnie dla macierzy $\frac{1}{T}XX^T$. Rozpatrzmy najpierw macierz projektora P , której funkcję Greena zapiszemy w postaci

$$G_P(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \frac{1}{T} \langle \text{Tr}P \rangle + \frac{1}{z^3} \frac{1}{T} \langle \text{Tr}P^2 \rangle + \dots,$$

przy czym ze względu na własność $\forall_i P^i = P$ możemy zapisać

$$G_P(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z} \frac{N}{T} \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots \right) = \frac{1}{z} + \frac{r}{z(z-1)}, \text{ gdzie } r = \frac{N}{T}.$$

Transformację N dla projektora P obliczymy wstawiając powyższy wynik bezpośrednio do równania (3.5)

$$N(z)G(N(z)) = z + 1,$$

co prowadzi do wyniku w postaci

$$N_P(z) = 1 + \frac{r}{z}. \quad (\text{B.3})$$

Obliczmy następnie transformację N dla macierzy $\frac{1}{T}XX^T$. Rozpocznijmy od zapisania funkcji Greena $G_{X^2}(z)$ oraz wykonania podstawienia $z = w^2$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} G_{X^2}(z) &= \frac{1}{T} \left\langle \text{Tr} \frac{1}{z - X^2} \right\rangle = \frac{1}{T} \left\langle \text{Tr} \left(\frac{1}{w - X} \frac{1}{w + X} \right) \right\rangle \\ &= \frac{1}{2w} \left[\frac{1}{T} \left\langle \text{Tr} \frac{1}{w - X} \right\rangle + \frac{1}{T} \left\langle \text{Tr} \frac{1}{w + X} \right\rangle \right], \end{aligned}$$

przy czym ze względu na fakt, że macierz X jest symetryczna powyższe równanie możemy zapisać jako

$$G_{X^2}(z) = \frac{1}{w} \frac{1}{T} \left\langle \text{Tr} \frac{1}{w - X} \right\rangle = \frac{1}{w} G_X(w) = \frac{1}{\sqrt{z}} G_X(\sqrt{z}),$$

gdzie G_X jest funkcją Greena dla zespołu Gaussa, a więc opisana jest równaniem półkola Wignera (4.4). Poszukiwana funkcja Greena G_{X^2} przyjmie zatem postać

$$G_{X^2}(z) = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{z-4}{z}} \right).$$

Następnie postępując analogicznie jak poprzednio, wstawiamy powyższe równanie do (3.5) i po krótkim rachunku otrzymujemy transformację N dla macierzy X^2 w postaci

$$N_{X^2}(z) = \frac{(z+1)^2}{z}. \quad (\text{B.4})$$

Pozostaje wstawić otrzymane wyrażenia (B.3) oraz (B.4) do równania (B.2), otrzymany wynik przyjmuje postać

$$N_{\frac{1}{T}\tilde{R}^T\tilde{R}}(z) = \frac{(r+z)(z+1)}{z}. \quad (\text{B.5})$$

Gauss z korelacjami

Rozważmy następnie macierz $c = \frac{1}{T}RR^T$, przy czym R to macierz Gaussowska prostokątna $N \times T$ zawierająca korelacje. Standardowo korelacje uwzględnimy zapisując $R = \sqrt{C}\tilde{R}$, gdzie C to macierz kowariancji, natomiast \tilde{R} to macierz Gaussowska nie zawierająca korelacji. Macierz c przyjmuje postać

$$c = \frac{1}{T}\sqrt{C}\tilde{R}\tilde{R}^T\sqrt{C}.$$

Obliczmy transformację N dla macierzy c . Korzystając z własności cykliczności śladu macierzowego oraz stosując prawo mnożenia dla transformacji N zapiszemy

$$\begin{aligned} N_c(z) &= N_{\frac{1}{T}\sqrt{C}\tilde{R}\tilde{R}^T\sqrt{C}}(z) = N_{\frac{1}{T}\tilde{R}\tilde{R}^TC}(z) \\ &= \frac{z}{z+1}N_{\frac{1}{T}\tilde{R}\tilde{R}^T}(z)N_C(z). \end{aligned}$$

Zauważmy, że w powyższym zapisie pojawia się macierz $\tilde{R}\tilde{R}^T$ o wymiarze $N \times N$. Chcąc skorzystać z wyniku (B.5) musimy jeszcze przestawić miejscami macierze \tilde{R} oraz \tilde{R}^T , co spowoduje zamianę argumentu z na rz . Zapiszemy zatem

$$N_c(z) = \frac{z}{z+1}N_{\frac{1}{T}\tilde{R}^T\tilde{R}}(rz)N_C(z),$$

a następnie skorzystamy z wyniku (B.5). Otrzymujemy wyrażenie na transformację N w postaci

$$N_c(z) = (rz+1)N_C(z). \quad (\text{B.6})$$

Przypomnijmy, że docelowo interesuje nas relacja pomiędzy funkcjami generującymi momenty dla macierzy c oraz C , które (3.8) są funkcjonalnymi odwrotnościami transformacji $N_c(z)$ oraz $N_C(z)$. Podstawmy zatem $N \rightarrow z$ oraz $z \rightarrow M$. w równaniu (B.6) otrzymując

$$z = (rM_c(z) + 1)N_C(M_c(z)).$$

Zauważmy, że w powyższym zapisie funkcja $M_c(z)$ pojawia się w sposób jawny jako odwrotność N_C , zapiszemy więc

$$M_C\left(\frac{z}{1+rM_c(z)}\right) = M_c(z). \quad (\text{B.7})$$

Z powyższego równania (B.7) w sposób bezpośredni wynika (6.1).

B.2. Rozkład Marčenko-Pastura

Kolejnym przykładem zastosowania rachunku swobodnych zmiennych przypadkowych jest wyprowadzenie funkcji Greena dla przypadku rozkładu Wisharta. Zapiszmy macierz Wisharta w postaci $C = \frac{1}{T}XX^\dagger$, przy czym element i, j macierzy C wynosić będzie

$$\begin{aligned} (C)_{i,j} &= \frac{1}{T}X_{i,1}X_{j,1}^\dagger + \frac{1}{T}X_{i,2}X_{j,2}^\dagger + \dots + \frac{1}{T}X_{i,T}X_{j,T}^\dagger = \\ &= (c_1)_{i,j} + (c_2)_{i,j} + \dots + (c_T)_{i,j}. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Istota rachunku polega na obserwacji, że macierze c_i są swobodne oraz że ich funkcje Greena są takie same. Obliczymy zatem funkcję Greena dla macierzy c_i a następnie korzystając z prawa dodawania macierzy w postaci transformacji B obliczymy funkcję Greena C . Dla uproszczenia w zapisie macierzy c_i będziemy pomijać indeks i .

Zauważmy, że rząd macierzy c wynosi 1, dlatego możemy zapisać funkcję Greena dla macierzy c w postaci

$$G_c(z) = \frac{1}{N} \left\langle \text{Tr} \frac{1}{\mathbf{1}z - c} \right\rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^T \frac{1}{z - \lambda_k} = \frac{N-1}{N} \frac{1}{z-0} + \frac{1}{N} \frac{1}{z-\lambda}.$$

Ponadto rząd macierzy c wynoszący 1 pozwala w łatwy sposób obliczyć wartość własną λ jako ślad macierzy c_i , przy czym możemy skorzystać z cykliczności śladu

$$\lambda = \frac{1}{T} \left\langle \text{Tr} X X^\dagger \right\rangle = \frac{1}{T} \left\langle \text{Tr} X^\dagger X \right\rangle = \frac{1}{T} N = r.$$

Zapiszemy więc funkcję Greena dla macierzy c jako

$$G_c(z) = \frac{N-1}{zN} + \frac{1}{(z-r)N} = \frac{1}{z} + \frac{1}{N} \frac{r}{z(z-r)}.$$

Zauważmy, że funkcja $G_c(z)$ jest postaci $G_c = g_0 + \frac{1}{N}g_1$, założymy więc, że funkcja B będzie analogicznej postaci $B_c = b_0 + \frac{1}{N}b_1$. Chcąc obliczyć funkcję B wykonujemy podstawienie $z \rightarrow B$ oraz $G \rightarrow z$, otrzymujemy

$$z = \frac{1}{b_0 + \frac{1}{N}b_1} + \frac{1}{N} \frac{r}{(b_0 + \frac{1}{N}b_1 - r)(b_0 + \frac{1}{N}b_1)}.$$

Składnik b_0 otrzymujemy natychmiast sprawdzając zachowanie równania dla $N \rightarrow \infty$, wynosi on $b_0 = \frac{1}{z}$. Zapiszemy

$$z = \frac{z}{1 + \frac{1}{N}zb_1} + \frac{1}{N} \frac{r}{(\frac{1}{z} + \frac{1}{N}b_1 - r)(\frac{1}{z} + \frac{1}{N}b_1)},$$

a następnie zauważmy, że pierwszy ułamek jest sumą szeregu geometrycznego o ilorazie $q = -\frac{1}{N}zb_1$. Równanie przybliżymy biorąc pod uwagę jego fragmenty do rzędu $\frac{1}{N}$. Zapiszmy rozwinięcie pojawiającego się szeregu geometrycznego do pierwszego wyrazu

$$z = z \left(1 - \frac{1}{N}zb_1 + \dots \right) + \frac{1}{N} \frac{r}{(\frac{1}{z} + \frac{1}{N}b_1 - r)(\frac{1}{z} + \frac{1}{N}b_1)}.$$

W następnej kolejności wyłączymy czynnik $\frac{1}{N}$ z pozostałej części równania, przy czym w drugim ułamku zaniebamy człony w mianowniku zawiaraające $\frac{1}{N}$. Wyrażenie można będzie zapisać w postaci

$$0 = -z^2 b_1 + \frac{r}{\left(\frac{1}{z} - r\right)\frac{1}{z}},$$

czego rozwiązaniem jest $b_1 = \frac{r}{1-rz}$. Funkcja B dla macierzy c przyjmie postać $B_c = \frac{1}{z} + \frac{1}{N} \frac{r}{1-rz}$, tym samym transformacja R_c wyniesie

$$R_c(z) = B_c(z) - \frac{1}{z} = \frac{1}{N} \frac{r}{1-rz}.$$

Przypomnijmy, że macierz Wisharta C przedstawiśmy (B.8) w postaci sumy T macierzy c_i , przy czym funkcje Greena G_{c_i} są dla wszystkich i takie same. Zatem transformacja R_C będzie sumą transformacji R_{c_i} , co zapiszemy jako

$$R_C(z) = \sum_{i=1}^T R_{c_i} = T \frac{1}{N} \frac{r}{1-rz} = \frac{1}{1-rz},$$

tym samym funkcja B dla całej macierzy Wisharta C wyniesie

$$B_C(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-rz}. \quad (\text{B.9})$$

Chcąc otrzymać funkcję Greena musimy powyższe Równanie (B.9) odwrócić funkcjonalnie, a więc otrzymujemy

$$z = \frac{1}{G(z)} + \frac{1}{1-rG(z)},$$

co po krótkim przekształceniu prowadzi do równania w postaci

$$G(z) = \frac{z+r-1 \pm \sqrt{(z+r-1)^2 - 4zr}}{2zr},$$

przy czym jak łatwo sprawdzić, prawidłowe zachowanie $\frac{1}{z}$ funkcji Greena dla $z \rightarrow \infty$ otrzymujemy przy wyborze znaku „-”. Funkcję Greena dla przypadku rozkładu Wisharta zapiszemy zatem w postaci równania

$$G(z) = \frac{1}{2zr} [z+r-1 - \sqrt{(z+r-1)^2 - 4zr}], \quad (\text{B.10})$$

które jest odpowiednikiem Równania (4.9) zapisanym z użyciem parametru $r = \frac{N}{T}$, podczas gdy Równanie (4.9) zapisane zostało z użyciem parametru $m = \frac{T}{N}$.

Postępując analogicznie jak w Rozdziale 4.3 możemy obliczyć rozkład wartości własnych w widmie. Po kilku prostych przekształceniach Równanie (B.10) można zapisać w postaci

$$G(z) = \frac{z+r-1 - \sqrt{(z-z_+)(z-z_-)}}{2zr}, \text{ gdzie } z_{\pm} = (1 \pm \sqrt{r})^2.$$

Następnie korzystając z relacji

$$\rho(\lambda) = -\frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Im G(z)|_{z=\lambda+i\epsilon}$$

otrzymujemy rozkład wartości własnych w postaci

$$\rho_{MP}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{(\lambda - \lambda_+)(\lambda_- - \lambda)}}{\lambda r}, \text{ gdzie } \lambda_{\pm} = (1 \pm \sqrt{r})^2, \quad (\text{B.11})$$

a więc zgodny z wynikiem w postaci Równania 4.11.

Dodatek C

Tabele momentów macierzowych 1-go oraz 2-go rzędu

Sposób obliczania relacji wiążących momenty macierzowe pierwszego rzędu macierzy obserwacji z momentami macierzy kowariancji, jak również sposób uzyskania analogicznych relacji pomiędzy momentami pochodzącymi od odwrotności tych macierzy przedstawiony został w rozdziale 6.1. Ponadto w rozdziale 6.2 pokazany został sposób wyprowadzenia wzorów wyrażających momenty macierzowe drugiego rzędu za pomocą momentów macierzowych pierwszego rzędu. Ze względu na dużą objętość poszczególnych kompletów wzorów w przypadku wyższych rzędów zostały one zamieszczone w poniższym dodatku.

Stosowana terminologia jest następująca:

M_i - momenty 1-rzędu macierzy kowariancji, Σ

m_k - momenty 1-rzędu macierzy obserwacji, S

\tilde{M}_i - momenty 1-rzędu odwrotności macierzy kowariancji Σ^{-1} ,

\tilde{m}_k - momenty 1-rzędu odwrotności macierzy obserwacji S^{-1} ,

$\alpha_{i,j}$ - momenty macierzowe 2-rzędu macierzy S ,

α_k - momenty macierzowe 1-rzędu macierzy S ,

$\tilde{\alpha}_{i,j}$ - momenty macierzowe 2-rzędu macierzy Σ ,

$\tilde{\alpha}_k$ - momenty macierzowe 1-rzędu macierzy Σ .

Tablica C.1. Momenty macierzowe 1-rzędu: obserwowane w funkcji granicznych

$$\begin{aligned}
m_1 &= M_1 \\
m_2 &= rM_1^2 + M_2 \\
m_3 &= r^2M_1^3 + 3rM_1M_2 + M_3 \\
m_4 &= r^3M_1^4 + 6r^2M_1^2M_2 + 2r(M_2^2 + 2M_1M_3) + M_4 \\
m_5 &= r^4M_1^5 + 10r^3M_1^3M_2 + 10r^2M_1(M_2^2 + M_1M_3) + 5r(M_2M_3 + M_1M_4) + M_5 \\
m_6 &= r^5M_1^6 + 15r^4M_1^4M_2 + 10r^3M_1^2(3M_2^2 + 2M_1M_3) + 5r^2(M_2^3 + 6M_1M_2M_3 + \\
&\quad 3M_1^2M_4) + 3r(M_3^2 + 2M_2M_4 + 2M_1M_5) + M_6 \\
m_7 &= r^6M_1^7 + 21r^5M_1^5M_2 + 35r^4M_1^3(2M_2^2 + M_1M_3) + 35r^3M_1(M_2^3 + 3M_1M_2M_3 + \\
&\quad M_1^2M_4) + 21r^2(M_2^2M_3 + 2M_1M_2M_4 + M_1(M_3^2 + M_1M_5)) + 7r(M_3M_4 + \\
&\quad M_2M_5 + M_1M_6) + M_7 \\
m_8 &= r^7M_1^8 + 28r^6M_1^6M_2 + 28r^5M_1^4(5M_2^2 + 2M_1M_3) + 70r^4M_1^2(2M_2^3 + \\
&\quad 4M_1M_2M_3 + M_1^2M_4) + 14r^3(M_2^4 + 12M_1M_2^2M_3 + 6M_1^2M_3^2 + 12M_1^2M_2M_4 + \\
&\quad 4M_1^3M_5) + 28r^2(M_2^2M_4 + M_2(M_3^2 + 2M_1M_5) + M_1(2M_3M_4 + M_1M_6)) + \\
&\quad 4r(M_4^2 + 2(M_3M_5 + M_2M_6 + M_1M_7)) + M_8 \\
m_9 &= r^8M_1^9 + 36r^7M_1^7M_2 + 84r^6M_1^5(3M_2^2 + M_1M_3) + 42r^5M_1^3(10M_2^3 + \\
&\quad 15M_1M_2M_3 + 3M_1^2M_4) + 126r^4M_1(M_2^4 + 6M_1M_2^2M_3 + 4M_1^2M_2M_4 + \\
&\quad M_1^2(2M_3^2 + M_1M_5)) + 84r^3(M_2^3M_3 + 3M_1M_2^2M_4 + 3M_1M_2(M_3^2 + M_1M_5) + \\
&\quad M_1^2(3M_3M_4 + M_1M_6)) + 12r^2(M_3^3 + 6M_3(M_2M_4 + M_1M_5) + 3(M_2^2M_5 + \\
&\quad M_1(M_4^2 + 2M_2M_6) + M_1^2M_7)) + 9r(M_4M_5 + M_3M_6 + M_2M_7 + M_1M_8) + M_9 \\
m_{10} &= r^9M_1^{10} + 45r^8M_1^8M_2 + 60r^7M_1^6(7M_2^2 + 2M_1M_3) + 210r^6M_1^4(5M_2^3 + \\
&\quad 6M_1M_2M_3 + M_1^2M_4) + 126r^5M_1^2(5M_2^4 + 20M_1M_2^2M_3 + 10M_1^2M_2M_4 + \\
&\quad M_1^2(5M_3^2 + 2M_1M_5)) + 42r^4(M_2^5 + 20M_1M_2^3M_3 + 30M_1^2M_2^2M_4 + \\
&\quad 10M_1^2M_2(3M_3^2 + 2M_1M_5) + 5M_1^3(4M_3M_4 + M_1M_6)) + 60r^3(2M_2^3M_4 + \\
&\quad 3M_2^2(M_3^2 + 2M_1M_5) + 6M_1M_2(2M_3M_4 + M_1M_6) + M_1(2M_3^3 + 6M_1M_3M_5 + \\
&\quad M_1(3M_4^2 + 2M_1M_7))) + 45r^2(M_3^2M_4 + M_2^2M_6 + 2M_3(M_2M_5 + M_1M_6) + \\
&\quad M_2(M_4^2 + 2M_1M_7) + M_1(2M_4M_5 + M_1M_8)) + 5r(M_5^2 + 2(M_4M_6 + M_3M_7 + \\
&\quad M_2M_8 + M_1M_9)) + M_{10}
\end{aligned}$$

Tablica C.2. Momenty macierzowe 1-rzędu: graniczne w funkcji obserwowanych

$$\begin{aligned}
M_1 &= m_1 \\
M_2 &= -(rm_1^2) + m_2 \\
M_3 &= 2r^2m_1^3 - 3rm_1m_2 + m_3 \\
M_4 &= -5r^3m_1^4 + 10r^2m_1^2m_2 - 2r(m_2^2 + 2m_1m_3) + m_4 \\
M_5 &= 14r^4m_1^5 - 35r^3m_1^3m_2 + 15r^2m_1(m_2^2 + m_1m_3) - 5r(m_2m_3 + m_1m_4) + m_5 \\
M_6 &= -42r^5m_1^6 + 126r^4m_1^4m_2 - 28r^3m_1^2(3m_2^2 + 2m_1m_3) + 7r^2(m_2^3 + 6m_1m_2m_3 + \\
&\quad 3m_1^2m_4) - 3r(m_2^3 + 2m_2m_4 + 2m_1m_5) + m_6 \\
M_7 &= 132r^6m_1^7 - 462r^5m_1^5m_2 + 210r^4m_1^3(2m_2^2 + m_1m_3) - 84r^3m_1(m_2^3 + \\
&\quad 3m_1m_2m_3 + m_1^2m_4) + 28r^2(m_2^2m_3 + 2m_1m_2m_4 + m_1(m_2^3 + m_1m_5)) - \\
&\quad 7r(m_3m_4 + m_2m_5 + m_1m_6) + m_7 \\
M_8 &= -429r^7m_1^8 + 1716r^6m_1^6m_2 - 396r^5m_1^4(5m_2^2 + 2m_1m_3) + 330r^4m_1^2(2m_2^3 + \\
&\quad 4m_1m_2m_3 + m_1^2m_4) - 30r^3(m_2^4 + 12m_1m_2^2m_3 + 6m_1^2m_3^2 + 12m_1^2m_2m_4 + \\
&\quad 4m_1^3m_5) + 36r^2(m_2^2m_4 + m_2(m_2^3 + 2m_1m_5) + m_1(2m_3m_4 + m_1m_6)) - \\
&\quad 4r(m_4^2 + 2(m_3m_5 + m_2m_6 + m_1m_7)) + m_8 \\
M_9 &= 1430r^8m_1^9 - 6435r^7m_1^7m_2 + 3003r^6m_1^5(3m_2^2 + m_1m_3) - 429r^5m_1^3(10m_2^3 + \\
&\quad 15m_1m_2m_3 + 3m_1^2m_4) + 495r^4m_1(m_2^4 + 6m_1m_2^2m_3 + 4m_1^2m_2m_4 + m_1^2(2m_2^3 + \\
&\quad m_1m_5)) - 165r^3(m_2^3m_3 + 3m_1m_2^2m_4 + 3m_1m_2(m_2^3 + m_1m_5) + m_1^2(3m_3m_4 + \\
&\quad m_1m_6)) + 15r^2(m_2^3 + 6m_3(m_2m_4 + m_1m_5) + 3(m_2^2m_5 + m_1(m_2^4 + 2m_2m_6) + \\
&\quad m_1^2m_7)) - 9r(m_4m_5 + m_3m_6 + m_2m_7 + m_1m_8) + m_9 \\
M_{10} &= -4862r^9m_1^{10} + 24310r^8m_1^8m_2 - 5720r^7m_1^6(7m_2^2 + 2m_1m_3) + \\
&\quad 5005r^6m_1^4(5m_2^3 + 6m_1m_2m_3 + m_1^2m_4) - 1001r^5m_1^2(5m_2^4 + 20m_1m_2^2m_3 + \\
&\quad 10m_1^2m_2m_4 + m_1^2(5m_2^3 + 2m_1m_5)) + 143r^4(m_2^5 + 20m_1m_2^3m_3 + 30m_1^2m_2^2m_4 + \\
&\quad 10m_1^2m_2(3m_2^3 + 2m_1m_5) + 5m_1^3(4m_3m_4 + m_1m_6)) - 110r^3(2m_2^3m_4 + \\
&\quad 3m_2^2(m_2^3 + 2m_1m_5) + 6m_1m_2(2m_3m_4 + m_1m_6) + m_1(2m_3^3 + 6m_1m_3m_5 + \\
&\quad m_1(3m_4^2 + 2m_1m_7))) + 55r^2(m_2^3m_4 + m_2^2m_6 + 2m_3(m_2m_5 + m_1m_6) + \\
&\quad m_2(m_2^4 + 2m_1m_7) + m_1(2m_4m_5 + m_1m_8)) - 5r(m_2^5 + 2(m_4m_6 + m_3m_7 + \\
&\quad m_2m_8 + m_1m_9)) + m_{10}
\end{aligned}$$

Tablica C.3. Momenty macierzowe 1-rzędu macierzy odwrotnych: graniczne w funkcji obserwowanych

$$\begin{aligned}
\tilde{M}_1 &= \tilde{m}_1 - r\tilde{m}_1 \\
\tilde{M}_2 &= -(r\tilde{m}_1^2) + r^2\tilde{m}_1^2 + \tilde{m}_2 - 2r\tilde{m}_2 + r^2\tilde{m}_2 \\
\tilde{M}_3 &= \tilde{m}_3 - r\tilde{m}_3 + r^2(\tilde{m}_1^3 + 3\tilde{m}_1\tilde{m}_2 + \tilde{m}_3) - r^3(\tilde{m}_1^3 + 3\tilde{m}_1\tilde{m}_2 + \tilde{m}_3) - r(3\tilde{m}_1\tilde{m}_2 + 2\tilde{m}_3) + r^2(3\tilde{m}_1\tilde{m}_2 + 2\tilde{m}_3) \\
\tilde{M}_4 &= \tilde{m}_4 - r\tilde{m}_4 - r^3(\tilde{m}_1^4 + 6\tilde{m}_1^2\tilde{m}_2 + 2\tilde{m}_2^2 + 4\tilde{m}_1\tilde{m}_3 + \tilde{m}_4) + r^4(\tilde{m}_1^4 + 6\tilde{m}_1^2\tilde{m}_2 + 2\tilde{m}_2^2 + 4\tilde{m}_1\tilde{m}_3 + \tilde{m}_4) - r(2\tilde{m}_2^2 + 4\tilde{m}_1\tilde{m}_3 + 3\tilde{m}_4) + r^2(2\tilde{m}_2^2 + 4\tilde{m}_1\tilde{m}_3 + 3\tilde{m}_4) + r^2(6\tilde{m}_1^2\tilde{m}_2 + 4\tilde{m}_2^2 + 8\tilde{m}_1\tilde{m}_3 + 3\tilde{m}_4) - r^3(6\tilde{m}_1^2\tilde{m}_2 + 4\tilde{m}_2^2 + 8\tilde{m}_1\tilde{m}_3 + 3\tilde{m}_4) \\
\tilde{M}_5 &= \tilde{m}_5 - r\tilde{m}_5 + r^4(\tilde{m}_1^5 + 10\tilde{m}_1^3\tilde{m}_2 + 10\tilde{m}_1^2\tilde{m}_3 + 5\tilde{m}_2\tilde{m}_3 + 5\tilde{m}_1(2\tilde{m}_2^2 + \tilde{m}_4) + \tilde{m}_5) - r^5(\tilde{m}_1^5 + 10\tilde{m}_1^3\tilde{m}_2 + 10\tilde{m}_1^2\tilde{m}_3 + 5\tilde{m}_2\tilde{m}_3 + 5\tilde{m}_1(2\tilde{m}_2^2 + \tilde{m}_4) + \tilde{m}_5) - r(5\tilde{m}_2\tilde{m}_3 + 5\tilde{m}_1\tilde{m}_4 + 4\tilde{m}_5) + r^2(5\tilde{m}_2\tilde{m}_3 + 5\tilde{m}_1\tilde{m}_4 + 4\tilde{m}_5) - r^3(10\tilde{m}_1^3\tilde{m}_2 + 20\tilde{m}_1^2\tilde{m}_3 + 15\tilde{m}_2\tilde{m}_3 + 5\tilde{m}_1(4\tilde{m}_2^2 + 3\tilde{m}_4) + 4\tilde{m}_5) + r^4(10\tilde{m}_1^3\tilde{m}_2 + 20\tilde{m}_1^2\tilde{m}_3 + 15\tilde{m}_2\tilde{m}_3 + 5\tilde{m}_1(4\tilde{m}_2^2 + 3\tilde{m}_4) + 4\tilde{m}_5) + r^2(10\tilde{m}_1^2\tilde{m}_3 + 15\tilde{m}_2\tilde{m}_3 + 5\tilde{m}_1(2\tilde{m}_2^2 + 3\tilde{m}_4) + 6\tilde{m}_5) - r^3(10\tilde{m}_1^2\tilde{m}_3 + 15\tilde{m}_2\tilde{m}_3 + 5\tilde{m}_1(2\tilde{m}_2^2 + 3\tilde{m}_4) + 6\tilde{m}_5) \\
\tilde{M}_6 &= \tilde{m}_6 - r\tilde{m}_6 - r^5(\tilde{m}_1^6 + 15\tilde{m}_1^4\tilde{m}_2 + 5\tilde{m}_2^3 + 20\tilde{m}_1^3\tilde{m}_3 + 3\tilde{m}_3^2 + 6\tilde{m}_2\tilde{m}_4 + 15\tilde{m}_1^2(2\tilde{m}_2^2 + \tilde{m}_4) + 6\tilde{m}_1(5\tilde{m}_2\tilde{m}_3 + \tilde{m}_5) + \tilde{m}_6) + r^6(\tilde{m}_1^6 + 15\tilde{m}_1^4\tilde{m}_2 + 5\tilde{m}_2^3 + 20\tilde{m}_1^3\tilde{m}_3 + 3\tilde{m}_3^2 + 6\tilde{m}_2\tilde{m}_4 + 15\tilde{m}_1^2(2\tilde{m}_2^2 + \tilde{m}_4) + 6\tilde{m}_1(5\tilde{m}_2\tilde{m}_3 + \tilde{m}_5) + \tilde{m}_6) - r(3\tilde{m}_3^2 + 6\tilde{m}_2\tilde{m}_4 + 6\tilde{m}_1\tilde{m}_5 + 5\tilde{m}_6) + r^2(3\tilde{m}_3^2 + 6\tilde{m}_2\tilde{m}_4 + 6\tilde{m}_1\tilde{m}_5 + 5\tilde{m}_6) + r^4(15\tilde{m}_1^4\tilde{m}_2 + 15\tilde{m}_2^3 + 40\tilde{m}_1^3\tilde{m}_3 + 12\tilde{m}_3^2 + 24\tilde{m}_2\tilde{m}_4 + 15\tilde{m}_1^2(4\tilde{m}_2^2 + 3\tilde{m}_4) + 6\tilde{m}_1(15\tilde{m}_2\tilde{m}_3 + 4\tilde{m}_5) + 5\tilde{m}_6) - r^5(15\tilde{m}_1^4\tilde{m}_2 + 15\tilde{m}_2^3 + 40\tilde{m}_1^3\tilde{m}_3 + 12\tilde{m}_3^2 + 24\tilde{m}_2\tilde{m}_4 + 15\tilde{m}_1^2(4\tilde{m}_2^2 + 3\tilde{m}_4) + 6\tilde{m}_1(15\tilde{m}_2\tilde{m}_3 + 4\tilde{m}_5) + 5\tilde{m}_6) + r^2(5\tilde{m}_2^3 + 12\tilde{m}_3^2 + 15\tilde{m}_1^2\tilde{m}_4 + 6\tilde{m}_2(5\tilde{m}_1\tilde{m}_3 + 4\tilde{m}_4) + 24\tilde{m}_1\tilde{m}_5 + 10\tilde{m}_6) - r^3(5\tilde{m}_2^3 + 12\tilde{m}_3^2 + 15\tilde{m}_1^2\tilde{m}_4 + 6\tilde{m}_2(5\tilde{m}_1\tilde{m}_3 + 4\tilde{m}_4) + 24\tilde{m}_1\tilde{m}_5 + 10\tilde{m}_6) - r^3(15\tilde{m}_2^3 + 20\tilde{m}_1^3\tilde{m}_3 + 18\tilde{m}_3^2 + 36\tilde{m}_2\tilde{m}_4 + 15\tilde{m}_1^2(2\tilde{m}_2^2 + 3\tilde{m}_4) + 18\tilde{m}_1(5\tilde{m}_2\tilde{m}_3 + 2\tilde{m}_5) + 10\tilde{m}_6) + r^4(15\tilde{m}_2^3 + 20\tilde{m}_1^3\tilde{m}_3 + 18\tilde{m}_3^2 + 36\tilde{m}_2\tilde{m}_4 + 15\tilde{m}_1^2(2\tilde{m}_2^2 + 3\tilde{m}_4) + 18\tilde{m}_1(5\tilde{m}_2\tilde{m}_3 + 2\tilde{m}_5) + 10\tilde{m}_6)
\end{aligned}$$

Tablica C.4. Momenty macierzowe 1-rzędu macierzy odwrotnych: graniczne w funkcji obserwowanych (ciąg dalszy)

$$\begin{aligned}
\tilde{M}_7 = & \tilde{m}_7 - r\tilde{m}_7 + r^6(\tilde{m}_1^7 + 21\tilde{m}_1^5\tilde{m}_2 + 35\tilde{m}_1^4\tilde{m}_3 + 21\tilde{m}_2^2\tilde{m}_3 + 7\tilde{m}_3\tilde{m}_4 + 35\tilde{m}_1^3(2\tilde{m}_2^2 + \\
& \tilde{m}_4) + 7\tilde{m}_2\tilde{m}_5 + 21\tilde{m}_1^2(5\tilde{m}_2\tilde{m}_3 + \tilde{m}_5) + 7\tilde{m}_1(5\tilde{m}_2^3 + 3\tilde{m}_3^2 + 6\tilde{m}_2\tilde{m}_4 + \tilde{m}_6) + \\
& \tilde{m}_7) - r^7(\tilde{m}_1^7 + 21\tilde{m}_1^5\tilde{m}_2 + 35\tilde{m}_1^4\tilde{m}_3 + 21\tilde{m}_2^2\tilde{m}_3 + 7\tilde{m}_3\tilde{m}_4 + 35\tilde{m}_1^3(2\tilde{m}_2^2 + \\
& \tilde{m}_4) + 7\tilde{m}_2\tilde{m}_5 + 21\tilde{m}_1^2(5\tilde{m}_2\tilde{m}_3 + \tilde{m}_5) + 7\tilde{m}_1(5\tilde{m}_2^3 + 3\tilde{m}_3^2 + 6\tilde{m}_2\tilde{m}_4 + \\
& \tilde{m}_6) + \tilde{m}_7) - r(7\tilde{m}_3\tilde{m}_4 + 7\tilde{m}_2\tilde{m}_5 + 7\tilde{m}_1\tilde{m}_6 + 6\tilde{m}_7) + r^2(7\tilde{m}_3\tilde{m}_4 + \\
& 7\tilde{m}_2\tilde{m}_5 + 7\tilde{m}_1\tilde{m}_6 + 6\tilde{m}_7) - r^5(21\tilde{m}_1^5\tilde{m}_2 + 70\tilde{m}_1^4\tilde{m}_3 + 84\tilde{m}_2^2\tilde{m}_3 + 35\tilde{m}_3\tilde{m}_4 + \\
& 35\tilde{m}_1^3(4\tilde{m}_2^2 + 3\tilde{m}_4) + 35\tilde{m}_2\tilde{m}_5 + 21\tilde{m}_1^2(15\tilde{m}_2\tilde{m}_3 + 4\tilde{m}_5) + 7\tilde{m}_1(15\tilde{m}_2^3 + 12\tilde{m}_3^2 + \\
& 24\tilde{m}_2\tilde{m}_4 + 5\tilde{m}_6) + 6\tilde{m}_7) + r^6(21\tilde{m}_1^5\tilde{m}_2 + 70\tilde{m}_1^4\tilde{m}_3 + 84\tilde{m}_2^2\tilde{m}_3 + 35\tilde{m}_3\tilde{m}_4 + \\
& 35\tilde{m}_1^3(4\tilde{m}_2^2 + 3\tilde{m}_4) + 35\tilde{m}_2\tilde{m}_5 + 21\tilde{m}_1^2(15\tilde{m}_2\tilde{m}_3 + 4\tilde{m}_5) + 7\tilde{m}_1(15\tilde{m}_2^3 + \\
& 12\tilde{m}_3^2 + 24\tilde{m}_2\tilde{m}_4 + 5\tilde{m}_6) + 6\tilde{m}_7) + r^2(21\tilde{m}_2^2\tilde{m}_3 + 21\tilde{m}_1\tilde{m}_3^2 + 35\tilde{m}_3\tilde{m}_4 + \\
& 21\tilde{m}_1^2\tilde{m}_5 + 7\tilde{m}_2(6\tilde{m}_1\tilde{m}_4 + 5\tilde{m}_5) + 35\tilde{m}_1\tilde{m}_6 + 15\tilde{m}_7) - r^3(21\tilde{m}_2^2\tilde{m}_3 + \\
& 21\tilde{m}_1\tilde{m}_3^2 + 35\tilde{m}_3\tilde{m}_4 + 21\tilde{m}_1^2\tilde{m}_5 + 7\tilde{m}_2(6\tilde{m}_1\tilde{m}_4 + 5\tilde{m}_5) + 35\tilde{m}_1\tilde{m}_6 + 15\tilde{m}_7) + \\
& r^4(35\tilde{m}_1^4\tilde{m}_3 + 126\tilde{m}_2^2\tilde{m}_3 + 70\tilde{m}_3\tilde{m}_4 + 35\tilde{m}_1^3(2\tilde{m}_2^2 + 3\tilde{m}_4) + 70\tilde{m}_2\tilde{m}_5 + \\
& 63\tilde{m}_1^2(5\tilde{m}_2\tilde{m}_3 + 2\tilde{m}_5) + 7\tilde{m}_1(15\tilde{m}_2^3 + 18\tilde{m}_3^2 + 36\tilde{m}_2\tilde{m}_4 + 10\tilde{m}_6) + 15\tilde{m}_7) - \\
& r^5(35\tilde{m}_1^4\tilde{m}_3 + 126\tilde{m}_2^2\tilde{m}_3 + 70\tilde{m}_3\tilde{m}_4 + 35\tilde{m}_1^3(2\tilde{m}_2^2 + 3\tilde{m}_4) + 70\tilde{m}_2\tilde{m}_5 + \\
& 63\tilde{m}_1^2(5\tilde{m}_2\tilde{m}_3 + 2\tilde{m}_5) + 7\tilde{m}_1(15\tilde{m}_2^3 + 18\tilde{m}_3^2 + 36\tilde{m}_2\tilde{m}_4 + 10\tilde{m}_6) + 15\tilde{m}_7) - \\
& r^3(84\tilde{m}_2^2\tilde{m}_3 + 35\tilde{m}_1^3\tilde{m}_4 + 70\tilde{m}_3\tilde{m}_4 + 70\tilde{m}_2\tilde{m}_5 + 21\tilde{m}_1^2(5\tilde{m}_2\tilde{m}_3 + 4\tilde{m}_5) + \\
& 7\tilde{m}_1(5\tilde{m}_2^3 + 12\tilde{m}_3^2 + 24\tilde{m}_2\tilde{m}_4 + 10\tilde{m}_6) + 20\tilde{m}_7) + r^4(84\tilde{m}_2^2\tilde{m}_3 + 35\tilde{m}_1^3\tilde{m}_4 + \\
& 70\tilde{m}_3\tilde{m}_4 + 70\tilde{m}_2\tilde{m}_5 + 21\tilde{m}_1^2(5\tilde{m}_2\tilde{m}_3 + 4\tilde{m}_5) + 7\tilde{m}_1(5\tilde{m}_2^3 + 12\tilde{m}_3^2 + 24\tilde{m}_2\tilde{m}_4 + \\
& 10\tilde{m}_6) + 20\tilde{m}_7)
\end{aligned}$$

Tablica C.5. Momenty macierzowe 1-rzędu macierzy odwrotnych: obserwowane w funkcji granicznych

$$\begin{aligned}
\tilde{m}_1 &= -(\tilde{M}_1/(-1+r)) \\
\tilde{m}_2 &= -((r(\tilde{M}_1^2 - \tilde{M}_2))/(-1+r)^3) - \tilde{M}_2/(-1+r)^3 \\
\tilde{m}_3 &= -((r(3\tilde{M}_1\tilde{M}_2 - 2\tilde{M}_3))/(-1+r)^5) - \tilde{M}_3/(-1+r)^5 - (r^2(2\tilde{M}_1^3 - 3\tilde{M}_1\tilde{M}_2 + \tilde{M}_3))/(-1+r)^5 \\
\tilde{m}_4 &= (r^2(-10\tilde{M}_1^2\tilde{M}_2 + 4\tilde{M}_2^2 + 8\tilde{M}_1\tilde{M}_3 - 3\tilde{M}_4))/(-1+r)^7 - \tilde{M}_4/(-1+r)^7 + \\
& (r^3(-5\tilde{M}_1^4 + 10\tilde{M}_1^2\tilde{M}_2 - 2\tilde{M}_2^2 - 4\tilde{M}_1\tilde{M}_3 + \tilde{M}_4))/(-1+r)^7 + (r(-2\tilde{M}_2^2 - 4\tilde{M}_1\tilde{M}_3 + 3\tilde{M}_4))/(-1+r)^7 \\
\tilde{m}_5 &= -(\tilde{M}_5/(-1+r)^9) - (r^4(14\tilde{M}_1^5 - 35\tilde{M}_1^3\tilde{M}_2 + 15\tilde{M}_1^2\tilde{M}_3 - 5\tilde{M}_2\tilde{M}_3 + 5\tilde{M}_1(3\tilde{M}_2^2 - \tilde{M}_4) + \tilde{M}_5))/(-1+r)^9 - \\
& (3r^2(5\tilde{M}_1^2\tilde{M}_3 - 5\tilde{M}_2\tilde{M}_3 + 5\tilde{M}_1(\tilde{M}_2^2 - \tilde{M}_4) + 2\tilde{M}_5))/(-1+r)^9 + (r^3(-35\tilde{M}_1^3\tilde{M}_2 + 30\tilde{M}_1^2\tilde{M}_3 - 15\tilde{M}_2\tilde{M}_3 + 15\tilde{M}_1(2\tilde{M}_2^2 - \tilde{M}_4) + 4\tilde{M}_5))/(-1+r)^9 + \\
& (r(-5\tilde{M}_2\tilde{M}_3 - 5\tilde{M}_1\tilde{M}_4 + 4\tilde{M}_5))/(-1+r)^9 \\
\tilde{m}_6 &= (r^2(-7\tilde{M}_2^3 + 12\tilde{M}_2^2 - 6\tilde{M}_2(7\tilde{M}_1\tilde{M}_3 - 4\tilde{M}_4) - 21\tilde{M}_1^2\tilde{M}_4 + 24\tilde{M}_1\tilde{M}_5 - 10\tilde{M}_6))/(-1+r)^{11} + \\
& (r^4(-126\tilde{M}_1^4\tilde{M}_2 - 21\tilde{M}_2^3 + 112\tilde{M}_1^3\tilde{M}_3 + 12\tilde{M}_3^2 + 21\tilde{M}_1^2(8\tilde{M}_2^2 - 3\tilde{M}_4) + 24\tilde{M}_2\tilde{M}_4 - 6\tilde{M}_1(21\tilde{M}_2\tilde{M}_3 - 4\tilde{M}_5) - 5\tilde{M}_6))/(-1+r)^{11} - \\
& (r(3\tilde{M}_2^3 + 6\tilde{M}_2\tilde{M}_4 + 6\tilde{M}_1\tilde{M}_5 - 5\tilde{M}_6))/(-1+r)^{11} - \tilde{M}_6/(-1+r)^{11} + (r^5(-42\tilde{M}_1^6 + 126\tilde{M}_1^4\tilde{M}_2 + 7\tilde{M}_2^3 - 56\tilde{M}_1^3\tilde{M}_3 - 3\tilde{M}_3^2 - 6\tilde{M}_2\tilde{M}_4 + 21\tilde{M}_1^2(-4\tilde{M}_2^2 + \tilde{M}_4) + 6\tilde{M}_1(7\tilde{M}_2\tilde{M}_3 - \tilde{M}_5) + \tilde{M}_6))/(-1+r)^{11} + \\
& (r^3(21\tilde{M}_2^3 - 56\tilde{M}_1^3\tilde{M}_3 - 18\tilde{M}_3^2 - 36\tilde{M}_2\tilde{M}_4 + \tilde{M}_1^2(-84\tilde{M}_2^2 + 63\tilde{M}_4) + 18\tilde{M}_1(7\tilde{M}_2\tilde{M}_3 - 2\tilde{M}_5) + 10\tilde{M}_6))/(-1+r)^{11} \\
\tilde{m}_7 &= (-2r^3(-56\tilde{M}_2^2\tilde{M}_3 + 42\tilde{M}_1^3\tilde{M}_4 + 35\tilde{M}_3\tilde{M}_4 + 14\tilde{M}_1^2(9\tilde{M}_2\tilde{M}_3 - 4\tilde{M}_5) + 35\tilde{M}_2\tilde{M}_5 + 7\tilde{M}_1(6\tilde{M}_2^3 - 8\tilde{M}_3^2 - 16\tilde{M}_2\tilde{M}_4 + 5\tilde{M}_6) - 10\tilde{M}_7))/(-1+r)^{13} - \\
& (r(7\tilde{M}_3\tilde{M}_4 + 7\tilde{M}_2\tilde{M}_5 + 7\tilde{M}_1\tilde{M}_6 - 6\tilde{M}_7))/(-1+r)^{13} - (r^5(462\tilde{M}_1^5\tilde{M}_2 - 420\tilde{M}_1^4\tilde{M}_3 - 112\tilde{M}_2^2\tilde{M}_3 - 84\tilde{M}_1^3(10\tilde{M}_2^2 - 3\tilde{M}_4) + 35\tilde{M}_3\tilde{M}_4 + 28\tilde{M}_1^2(27\tilde{M}_2\tilde{M}_3 - 4\tilde{M}_5) + 35\tilde{M}_2\tilde{M}_5 + 7\tilde{M}_1(36\tilde{M}_2^3 - 16\tilde{M}_3^2 - 32\tilde{M}_2\tilde{M}_4 + 5\tilde{M}_6) - 6\tilde{M}_7))/(-1+r)^{13} - \\
& \tilde{M}_7/(-1+r)^{13} - (r^6(132\tilde{M}_1^7 - 462\tilde{M}_1^5\tilde{M}_2 + 210\tilde{M}_1^4\tilde{M}_3 + 28\tilde{M}_2^2\tilde{M}_3 + 84\tilde{M}_1^3(5\tilde{M}_2^2 - \tilde{M}_4) - 7\tilde{M}_3\tilde{M}_4 - 28\tilde{M}_1^2(9\tilde{M}_2\tilde{M}_3 - \tilde{M}_5) - 7\tilde{M}_2\tilde{M}_5 - 7\tilde{M}_1(12\tilde{M}_2^3 - 4\tilde{M}_3^2 - 8\tilde{M}_2\tilde{M}_4 + \tilde{M}_6) + \tilde{M}_7))/(-1+r)^{13} - \\
& (r^2(28\tilde{M}_2^2\tilde{M}_3 - 35\tilde{M}_3\tilde{M}_4 + 7\tilde{M}_2(8\tilde{M}_1\tilde{M}_4 - 5\tilde{M}_5) + 28\tilde{M}_1^2\tilde{M}_5 + 7\tilde{M}_1(4\tilde{M}_3^2 - 5\tilde{M}_6) + 15\tilde{M}_7))/(-1+r)^{13} - (r^4(210\tilde{M}_1^4\tilde{M}_3 + 168\tilde{M}_2^2\tilde{M}_3 + 84\tilde{M}_1^3(5\tilde{M}_2^2 - 3\tilde{M}_4) - 70\tilde{M}_3\tilde{M}_4 - 84\tilde{M}_1^2(9\tilde{M}_2\tilde{M}_3 - 2\tilde{M}_5) - 70\tilde{M}_2\tilde{M}_5 - 14\tilde{M}_1(18\tilde{M}_2^3 - 12\tilde{M}_3^2 - 24\tilde{M}_2\tilde{M}_4 + 5\tilde{M}_6) + 15\tilde{M}_7))/(-1+r)^{13}
\end{aligned}$$

Tablica C.6. Momenty macierzowe 2-rzędu w funkcji momentów 1-rzędu

$$\begin{aligned}
\alpha_{1,1} &= -\alpha_1^2 + \alpha_2 \\
\alpha_{1,2} &= 2(\alpha_1^3 - 2\alpha_1\alpha_2 + \alpha_3) \\
\alpha_{1,3} &= -3(\alpha_1^4 - 3\alpha_1^2\alpha_2 + \alpha_2^2 + 2\alpha_1\alpha_3 - \alpha_4) \\
\alpha_{1,4} &= 4(\alpha_1^5 - 4\alpha_1^3\alpha_2 + 3\alpha_1^2\alpha_3 - 2\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1(3\alpha_2^2 - 2\alpha_4) + \alpha_5) \\
\alpha_{1,5} &= -5(\alpha_1^6 - 5\alpha_1^4\alpha_2 - \alpha_2^3 + 4\alpha_1^3\alpha_3 + \alpha_2^2 + \alpha_1^2(6\alpha_2^2 - 3\alpha_4) + 2\alpha_2\alpha_4 + \alpha_1(-6\alpha_2\alpha_3 + 2\alpha_5) - \alpha_6) \\
\alpha_{2,2} &= -6\alpha_1^4 + 16\alpha_1^2\alpha_2 - 6\alpha_2^2 - 8\alpha_1\alpha_3 + 4\alpha_4 \\
\alpha_{2,3} &= 6(2\alpha_1^5 - 7\alpha_1^3\alpha_2 + 4\alpha_1^2\alpha_3 - 3\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1(5\alpha_2^2 - 2\alpha_4) + \alpha_5) \\
\alpha_{2,4} &= -4(5\alpha_1^6 - 22\alpha_1^4\alpha_2 - 4\alpha_2^3 + 14\alpha_1^3\alpha_3 + 3\alpha_2^2 + 8\alpha_1^2(3\alpha_2^2 - \alpha_4) + 6\alpha_2\alpha_4 + 4\alpha_1(-5\alpha_2\alpha_3 + \alpha_5) - 2\alpha_6) \\
\alpha_{2,5} &= 10(3\alpha_1^7 - 16\alpha_1^5\alpha_2 + 11\alpha_1^4\alpha_3 + 6\alpha_2^2\alpha_3 + \alpha_1^3(24\alpha_2^2 - 7\alpha_4) - 3\alpha_3\alpha_4 - 3\alpha_2\alpha_5 + 4\alpha_1^2(-6\alpha_2\alpha_3 + \alpha_5) + \alpha_1(-9\alpha_2^3 + 5\alpha_2^2 + 10\alpha_2\alpha_4 - 2\alpha_6) + \alpha_7) \\
\alpha_{3,3} &= -3(10\alpha_1^6 - 42\alpha_1^4\alpha_2 - 7\alpha_2^3 + 24\alpha_1^3\alpha_3 + 6\alpha_2^2 + 3\alpha_1^2(15\alpha_2^2 - 4\alpha_4) + 9\alpha_2\alpha_4 + 6\alpha_1(-6\alpha_2\alpha_3 + \alpha_5) - 3\alpha_6) \\
\alpha_{3,4} &= 12(5\alpha_1^7 - 25\alpha_1^5\alpha_2 + 15\alpha_1^4\alpha_3 + 8\alpha_2^2\alpha_3 + 4\alpha_1^3(9\alpha_2^2 - 2\alpha_4) - 4\alpha_3\alpha_4 - 3\alpha_2\alpha_5 + \alpha_1^2(-33\alpha_2\alpha_3 + 4\alpha_5) + \alpha_1(-13\alpha_2^3 + 7\alpha_2^2 + 12\alpha_2\alpha_4 - 2\alpha_6) + \alpha_7) \\
\alpha_{3,5} &= -15(7\alpha_1^8 - 41\alpha_1^6\alpha_2 + 4\alpha_2^4 + 26\alpha_1^5\alpha_3 + 15\alpha_1^4(5\alpha_2^2 - \alpha_4) - 8\alpha_2^2\alpha_4 + 2\alpha_4^2 + 4\alpha_3\alpha_5 + \alpha_1^3(-76\alpha_2\alpha_3 + 8\alpha_5) + \alpha_1^2(-44\alpha_2^3 + 18\alpha_2^2 + 33\alpha_2\alpha_4 - 4\alpha_6) + \alpha_2(-9\alpha_2^2 + 3\alpha_6) + 2\alpha_1(21\alpha_2^2\alpha_3 - 7\alpha_3\alpha_4 - 6\alpha_2\alpha_5 + \alpha_7) - \alpha_8) \\
\alpha_{4,4} &= -4(35\alpha_1^8 - 200\alpha_1^6\alpha_2 + 19\alpha_2^4 + 120\alpha_1^5\alpha_3 - 40\alpha_2\alpha_3^2 + 8\alpha_1^4(45\alpha_2^2 - 8\alpha_4) - 36\alpha_2^2\alpha_4 + 10\alpha_4^2 + 16\alpha_3\alpha_5 + 32\alpha_1^3(-11\alpha_2\alpha_3 + \alpha_5) + 12\alpha_2\alpha_6 - 4\alpha_1^2(52\alpha_2^3 - 21\alpha_2^2 - 36\alpha_2\alpha_4 + 4\alpha_6) + 8\alpha_1(24\alpha_2^2\alpha_3 - 8\alpha_3\alpha_4 - 6\alpha_2\alpha_5 + \alpha_7) - 4\alpha_8) \\
\alpha_{4,5} &= 20(14\alpha_1^9 - 91\alpha_1^7\alpha_2 + 56\alpha_1^6\alpha_3 - 22\alpha_2^3\alpha_3 + 4\alpha_3^3 + \alpha_1^5(198\alpha_2^2 - 31\alpha_4) + 9\alpha_2^2\alpha_5 - 5\alpha_4\alpha_5 + \alpha_1^4(-205\alpha_2\alpha_3 + 16\alpha_5) + \alpha_1^3(-160\alpha_2^3 + 52\alpha_2^2 + 92\alpha_2\alpha_4 - 8\alpha_6) - 4\alpha_3\alpha_6 + \alpha_2(22\alpha_3\alpha_4 - 3\alpha_7) + \alpha_1^2(180\alpha_2^2\alpha_3 - 45\alpha_3\alpha_4 - 36\alpha_2\alpha_5 + 4\alpha_7) + \alpha_1(35\alpha_2^4 - 51\alpha_2^2\alpha_4 + 9\alpha_4^2 + 16\alpha_3\alpha_5 + \alpha_2(-57\alpha_2^3 + 12\alpha_6) - 2\alpha_8) + \alpha_9) \\
\alpha_{5,5} &= -5(126\alpha_1^{10} - 910\alpha_1^8\alpha_2 - 51\alpha_2^5 + 560\alpha_1^7\alpha_3 + 10\alpha_1^6(231\alpha_2^2 - 31\alpha_4) + 125\alpha_2^3\alpha_4 - 20\alpha_1^5(123\alpha_2\alpha_3 - 8\alpha_5) + 15\alpha_2^2(14\alpha_3^2 - 3\alpha_6) - 10\alpha_1^4(240\alpha_2^3 - 65\alpha_2^2 - 115\alpha_2\alpha_4 + 8\alpha_6) + 40\alpha_1^3(75\alpha_2^2\alpha_3 - 15\alpha_3\alpha_4 - 12\alpha_2\alpha_5 + \alpha_7) + 5\alpha_1^2(175\alpha_2^4 - 204\alpha_2^2\alpha_4 + 27\alpha_4^2 + 48\alpha_3\alpha_5 + \alpha_2(-228\alpha_2^3 + 36\alpha_6) - 4\alpha_8) - 5\alpha_2(13\alpha_4^2 + 24\alpha_3\alpha_5 - 3\alpha_8) - 10\alpha_1(88\alpha_2^3\alpha_3 - 12\alpha_3^3 - 27\alpha_2^2\alpha_5 + 10\alpha_4\alpha_5 + 8\alpha_3\alpha_6 + \alpha_2(-66\alpha_3\alpha_4 + 6\alpha_7) - \alpha_9) - 5(14\alpha_3^2\alpha_4 - 3\alpha_2^2 - 5\alpha_4\alpha_6 - 4\alpha_3\alpha_7 + \alpha_{10}))
\end{aligned}$$

Tablica C.7. Momenty macierzowe 2-rzędu macierzy odwrotnych w funkcji momentów 1-rzędu

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}_{1,1} &= (-\tilde{\alpha}_3^2 + \tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_4)/\tilde{\alpha}_2^2 \\
\tilde{\alpha}_{1,2} &= (2(\tilde{\alpha}_3^3 - 2\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_3\tilde{\alpha}_4 + \tilde{\alpha}_2^2\tilde{\alpha}_5))/\tilde{\alpha}_2^3 \\
\tilde{\alpha}_{1,3} &= (-3(\tilde{\alpha}_3^4 - 3\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_3^2\tilde{\alpha}_4 + 2\tilde{\alpha}_2^2\tilde{\alpha}_3\tilde{\alpha}_5 + \tilde{\alpha}_2^2(\tilde{\alpha}_4^2 - \tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_6)))/\tilde{\alpha}_2^4 \\
\tilde{\alpha}_{1,4} &= (4(\tilde{\alpha}_3^5 - 4\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_3^3\tilde{\alpha}_4 + 3\tilde{\alpha}_2^2\tilde{\alpha}_3^2\tilde{\alpha}_5 + \tilde{\alpha}_2^2\tilde{\alpha}_3(3\tilde{\alpha}_4^2 - 2\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_6) + \tilde{\alpha}_2^3(-2\tilde{\alpha}_4\tilde{\alpha}_5 + \tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_7)))/\tilde{\alpha}_2^5 \\
\tilde{\alpha}_{1,5} &= (5(-\tilde{\alpha}_3^6 + 5\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_3^4\tilde{\alpha}_4 - 4\tilde{\alpha}_2^2\tilde{\alpha}_3^3\tilde{\alpha}_5 + 3\tilde{\alpha}_2^2\tilde{\alpha}_3^2(-2\tilde{\alpha}_4^2 + \tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_6) - 2\tilde{\alpha}_2^3\tilde{\alpha}_3(-3\tilde{\alpha}_4\tilde{\alpha}_5 + \tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_7) + \tilde{\alpha}_2^3(\tilde{\alpha}_4^3 - 2\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_4\tilde{\alpha}_6 + \tilde{\alpha}_2(-\tilde{\alpha}_5^2 + \tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_8)))))/\tilde{\alpha}_2^6 \\
\tilde{\alpha}_{2,2} &= (2(-3\tilde{\alpha}_3^4 + 8\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_3^2\tilde{\alpha}_4 - 4\tilde{\alpha}_2^2\tilde{\alpha}_3\tilde{\alpha}_5 + \tilde{\alpha}_2^2(-3\tilde{\alpha}_4^2 + 2\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_6)))/\tilde{\alpha}_2^4 \\
\tilde{\alpha}_{2,3} &= (6(2\tilde{\alpha}_3^5 - 7\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_3^3\tilde{\alpha}_4 + 4\tilde{\alpha}_2^2\tilde{\alpha}_3^2\tilde{\alpha}_5 + \tilde{\alpha}_2^2\tilde{\alpha}_3(5\tilde{\alpha}_4^2 - 2\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_6) + \tilde{\alpha}_2^3(-3\tilde{\alpha}_4\tilde{\alpha}_5 + \tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_7)))/\tilde{\alpha}_2^5 \\
\tilde{\alpha}_{2,4} &= (4(-5\tilde{\alpha}_3^6 + 22\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_3^4\tilde{\alpha}_4 - 14\tilde{\alpha}_2^2\tilde{\alpha}_3^3\tilde{\alpha}_5 + 8\tilde{\alpha}_2^2\tilde{\alpha}_3^2(-3\tilde{\alpha}_4^2 + \tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_6) - 4\tilde{\alpha}_2^3\tilde{\alpha}_3(-5\tilde{\alpha}_4\tilde{\alpha}_5 + \tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_7) + \tilde{\alpha}_2^3(4\tilde{\alpha}_4^3 - 6\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_4\tilde{\alpha}_6 + \tilde{\alpha}_2(-3\tilde{\alpha}_5^2 + 2\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_8)))))/\tilde{\alpha}_2^6 \\
\tilde{\alpha}_{2,5} &= (10(3\tilde{\alpha}_3^7 - 16\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_3^5\tilde{\alpha}_4 + 11\tilde{\alpha}_2^2\tilde{\alpha}_3^4\tilde{\alpha}_5 + \tilde{\alpha}_2^2\tilde{\alpha}_3^3(24\tilde{\alpha}_4^2 - 7\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_6) + 4\tilde{\alpha}_2^3\tilde{\alpha}_3^2(-6\tilde{\alpha}_4\tilde{\alpha}_5 + \tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_7) + \tilde{\alpha}_2^3\tilde{\alpha}_3(-9\tilde{\alpha}_4^3 + 10\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_4\tilde{\alpha}_6 + \tilde{\alpha}_2(5\tilde{\alpha}_5^2 - 2\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_8)) + \tilde{\alpha}_2^4(6\tilde{\alpha}_4^4\tilde{\alpha}_5 - 3\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_4\tilde{\alpha}_7 + \tilde{\alpha}_2(-3\tilde{\alpha}_5\tilde{\alpha}_6 + \tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_9)))))/\tilde{\alpha}_2^7 \\
\tilde{\alpha}_{3,3} &= (3(-10\tilde{\alpha}_3^6 + 42\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_3^4\tilde{\alpha}_4 - 24\tilde{\alpha}_2^2\tilde{\alpha}_3^3\tilde{\alpha}_5 + 3\tilde{\alpha}_2^2\tilde{\alpha}_3^2(-15\tilde{\alpha}_4^2 + 4\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_6) - 6\tilde{\alpha}_2^3\tilde{\alpha}_3(-6\tilde{\alpha}_4\tilde{\alpha}_5 + \tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_7) + \tilde{\alpha}_2^3(7\tilde{\alpha}_4^3 - 9\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_4\tilde{\alpha}_6 + 3\tilde{\alpha}_2(-2\tilde{\alpha}_5^2 + \tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_8)))))/\tilde{\alpha}_2^6 \\
\tilde{\alpha}_{3,4} &= (12(5\tilde{\alpha}_3^7 - 25\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_3^5\tilde{\alpha}_4 + 15\tilde{\alpha}_2^2\tilde{\alpha}_3^4\tilde{\alpha}_5 + 4\tilde{\alpha}_2^2\tilde{\alpha}_3^3(9\tilde{\alpha}_4^2 - 2\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_6) + \tilde{\alpha}_2^3\tilde{\alpha}_3^2(-33\tilde{\alpha}_4\tilde{\alpha}_5 + 4\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_7) + \tilde{\alpha}_2^3\tilde{\alpha}_3(-13\tilde{\alpha}_4^3 + 12\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_4\tilde{\alpha}_6 + \tilde{\alpha}_2(7\tilde{\alpha}_5^2 - 2\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_8)) + \tilde{\alpha}_2^4(8\tilde{\alpha}_4^4\tilde{\alpha}_5 - 3\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_4\tilde{\alpha}_7 + \tilde{\alpha}_2(-4\tilde{\alpha}_5\tilde{\alpha}_6 + \tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_9)))))/\tilde{\alpha}_2^7 \\
\tilde{\alpha}_{3,5} &= (15(-7\tilde{\alpha}_3^8 + 41\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_3^6\tilde{\alpha}_4 - 26\tilde{\alpha}_2^2\tilde{\alpha}_3^5\tilde{\alpha}_5 + 15\tilde{\alpha}_2^2\tilde{\alpha}_3^4(-5\tilde{\alpha}_4^2 + \tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_6) + \tilde{\alpha}_2^3(76\tilde{\alpha}_2^3\tilde{\alpha}_4\tilde{\alpha}_5 - 8\tilde{\alpha}_2^4\tilde{\alpha}_7) + \tilde{\alpha}_2^3\tilde{\alpha}_3^2(44\tilde{\alpha}_4^3 - 33\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_4\tilde{\alpha}_6 + 2\tilde{\alpha}_2(-9\tilde{\alpha}_5^2 + 2\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_8)) - 2\tilde{\alpha}_2^4\tilde{\alpha}_3(21\tilde{\alpha}_4^4\tilde{\alpha}_5 - 6\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_4\tilde{\alpha}_7 + \tilde{\alpha}_2(-7\tilde{\alpha}_5\tilde{\alpha}_6 + \tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_9)) + \tilde{\alpha}_2^4(-4\tilde{\alpha}_4^4 + 8\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_4^2\tilde{\alpha}_6 - 3\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_4(-3\tilde{\alpha}_5^2 + \tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_8) + \tilde{\alpha}_2^2(-2\tilde{\alpha}_6^2 - 4\tilde{\alpha}_5\tilde{\alpha}_7 + \tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_{10})))))/\tilde{\alpha}_2^8 \\
\tilde{\alpha}_{4,4} &= (4(-35\tilde{\alpha}_3^8 + 200\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_3^6\tilde{\alpha}_4 - 120\tilde{\alpha}_2^2\tilde{\alpha}_3^5\tilde{\alpha}_5 + 8\tilde{\alpha}_2^2\tilde{\alpha}_3^4(-45\tilde{\alpha}_4^2 + 8\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_6) - 32\tilde{\alpha}_2^3\tilde{\alpha}_3^3(-11\tilde{\alpha}_4\tilde{\alpha}_5 + \tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_7) + 4\tilde{\alpha}_2^3\tilde{\alpha}_3^2(52\tilde{\alpha}_4^3 - 36\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_4\tilde{\alpha}_6 + \tilde{\alpha}_2(-21\tilde{\alpha}_5^2 + 4\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_8)) - 8\tilde{\alpha}_2^4\tilde{\alpha}_3(24\tilde{\alpha}_4^4\tilde{\alpha}_5 - 6\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_4\tilde{\alpha}_7 + \tilde{\alpha}_2(-8\tilde{\alpha}_5\tilde{\alpha}_6 + \tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_9)) + \tilde{\alpha}_2^4(-19\tilde{\alpha}_4^4 + 36\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_4^2\tilde{\alpha}_6 + 4\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_4(10\tilde{\alpha}_5^2 - 3\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_8) + 2\tilde{\alpha}_2^2(-5\tilde{\alpha}_6^2 - 8\tilde{\alpha}_5\tilde{\alpha}_7 + 2\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_{10})))))/\tilde{\alpha}_2^8
\end{aligned}$$

Tablica C.8. Momenty macierzowe 2-rzędu macierzy odwrotnych w funkcji momentów 1-rzędu (ciąg dalszy)

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}_{4,5} &= (-20(-14\tilde{\alpha}_3^9 + 91\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_3^7\tilde{\alpha}_4 - 56\tilde{\alpha}_2^2\tilde{\alpha}_3^6\tilde{\alpha}_5 + \tilde{\alpha}_2^2\tilde{\alpha}_3^5(-198\tilde{\alpha}_4^2 + 31\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_6) + \\
&\tilde{\alpha}_2^3\tilde{\alpha}_3^4(205\tilde{\alpha}_4\tilde{\alpha}_5 - 16\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_7) + 4\tilde{\alpha}_2^3\tilde{\alpha}_3^3(40\tilde{\alpha}_4^3 - 23\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_4\tilde{\alpha}_6 + \tilde{\alpha}_2(-13\tilde{\alpha}_5^2 + \\
&2\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_8)) + \tilde{\alpha}_2^4\tilde{\alpha}_3^2(-180\tilde{\alpha}_4^2\tilde{\alpha}_5 + 36\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_4\tilde{\alpha}_7 + \tilde{\alpha}_2(45\tilde{\alpha}_5\tilde{\alpha}_6 - 4\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_9)) + \\
&\tilde{\alpha}_2^5(22\tilde{\alpha}_4^3\tilde{\alpha}_5 - 9\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_4^2\tilde{\alpha}_7 + \tilde{\alpha}_2(-4\tilde{\alpha}_5^3 + 5\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_6\tilde{\alpha}_7 + 4\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_5\tilde{\alpha}_8) + \tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_4(-22\tilde{\alpha}_5\tilde{\alpha}_6 + \\
&3\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_9)) + \tilde{\alpha}_2^4\tilde{\alpha}_3(-35\tilde{\alpha}_4^4 + 51\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_4^2\tilde{\alpha}_6 + 3\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_4(19\tilde{\alpha}_5^2 - 4\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_8) + \tilde{\alpha}_2^2(-9\tilde{\alpha}_6^2 - \\
&16\tilde{\alpha}_5\tilde{\alpha}_7 + 2\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_{10}))))/\tilde{\alpha}_2^9 \\
\tilde{\alpha}_{5,5} &= (-5(126\tilde{\alpha}_3^{10} - 910\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_3^8\tilde{\alpha}_4 + 560\tilde{\alpha}_2^2\tilde{\alpha}_3^7\tilde{\alpha}_5 + 10\tilde{\alpha}_2^2\tilde{\alpha}_3^6(231\tilde{\alpha}_4^2 - 31\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_6) + \\
&20\tilde{\alpha}_2^3\tilde{\alpha}_3^5(-123\tilde{\alpha}_4\tilde{\alpha}_5 + 8\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_7) - 10\tilde{\alpha}_2^3\tilde{\alpha}_3^4(240\tilde{\alpha}_4^3 - 115\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_4\tilde{\alpha}_6 + \tilde{\alpha}_2(-65\tilde{\alpha}_5^2 + \\
&8\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_8)) + 40\tilde{\alpha}_2^4\tilde{\alpha}_3^3(75\tilde{\alpha}_4^2\tilde{\alpha}_5 - 12\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_4\tilde{\alpha}_7 + \tilde{\alpha}_2(-15\tilde{\alpha}_5\tilde{\alpha}_6 + \tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_9)) - \\
&10\tilde{\alpha}_2^5\tilde{\alpha}_3(88\tilde{\alpha}_4^3\tilde{\alpha}_5 - 27\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_4^2\tilde{\alpha}_7 + 2\tilde{\alpha}_2(-6\tilde{\alpha}_5^3 + 5\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_6\tilde{\alpha}_7 + 4\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_5\tilde{\alpha}_8) + \\
&6\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_4(-11\tilde{\alpha}_5\tilde{\alpha}_6 + \tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_9)) + \tilde{\alpha}_2^5(-51\tilde{\alpha}_4^5 + 125\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_4^3\tilde{\alpha}_6 + 15\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_4^2(14\tilde{\alpha}_5^2 - \\
&3\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_8) + 5\tilde{\alpha}_2^2(-14\tilde{\alpha}_5^2\tilde{\alpha}_6 + 3\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_7^2 + 5\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_6\tilde{\alpha}_8 + 4\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_5\tilde{\alpha}_9) + 5\tilde{\alpha}_2^2\tilde{\alpha}_4(-13\tilde{\alpha}_6^2 - \\
&24\tilde{\alpha}_5\tilde{\alpha}_7 + 3\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_{10})) - 5\tilde{\alpha}_2^4\tilde{\alpha}_3^2(-175\tilde{\alpha}_4^4 + 204\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_4^2\tilde{\alpha}_6 + 12\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_4(19\tilde{\alpha}_5^2 - \\
&3\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_8) + \tilde{\alpha}_2^2(-27\tilde{\alpha}_6^2 - 48\tilde{\alpha}_5\tilde{\alpha}_7 + 4\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_{10}))))/\tilde{\alpha}_2^{10}
\end{aligned}$$

Dodatek D

Interpretacja topologiczna diagramów Feynmana

Rozważmy funkcję Greena $G(z)$ dla pewnego zespołu macierzewego H , przy czym $\dim H = N \times N$. Funkcja ta składać się może w ogólności z różnych fragmentów, które mogą w różny sposób zależeć od N . Załóżmy, że są to zależności typu $\frac{1}{N^k}$, gdzie $k = 0, 1, 2, \dots$. Zgrupujmy wszystkie składowe G o takim samym zachowaniu $\frac{1}{N^k}$ i oznaczmy je wspólnym symbolem G_k . Możemy wówczas zapisać

$$G(z) = G_0(z) + \frac{1}{N}G_1(z) + \frac{1}{N^2}G_2(z) + \frac{1}{N^3}G_3(z) + \dots,$$

gdzie kolejne G_k nazywać będziemy k -tym wyrazami rozwinięcia funkcji G . Zauważmy przy tym, że niekoniecznie wszystkie składniki G_k muszą w powyższym zapisie występować. Na przykład dla zespołów Wisharta, które pojawiają się w niniejszej pracy najczęściej, wszystkie składniki dla k nieparzystych wynoszą zero.

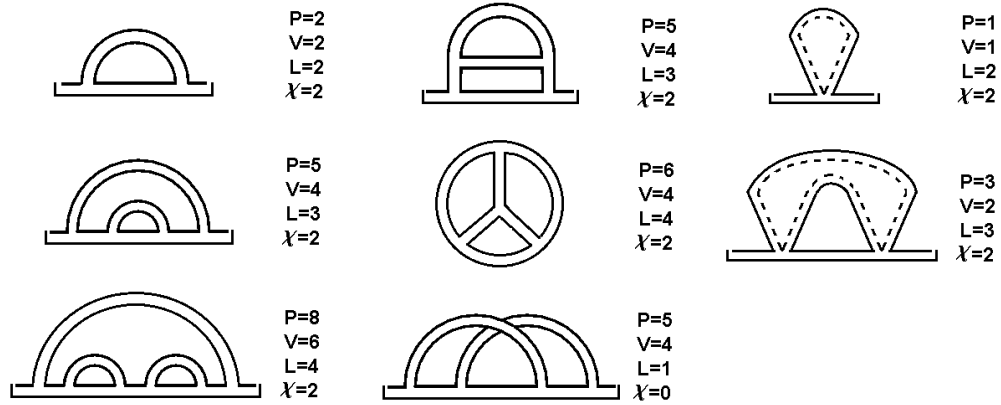
Jeśli interesuje nas postać funkcji Greena w przypadku $N \rightarrow \infty$, wówczas w oczywisty sposób jedynym istotnym składnikiem jest G_0 . Jeśli natomiast chcieli byśmy poznać zachowanie funkcji Greena również dla skończonych wartości N , wówczas konieczne jest już rozpatrzenie wszystkich jej składników.

Interesująca jest interpretacja topologiczna dotycząca zapisu funkcji Greena w postaci diagramów Feynmana (patrz np. [23] str. 47-52). Rysowane grafy składają się z takich fragmentów jak propagator, werteks oraz pętla, których liczbę w danym grafie oznaczymy kolejno jako P, V, L . Załóżmy, że wszystkie rozważane grafy będziemy rysować jako "zamknięte", co należy rozumieć w ten sposób, że każda z linii będzie połączona z obydwu stron z jakąś częścią grafu. W praktyce aby warunek ten był spełniony rozważane grafy trzeba będzie domknąć dorysowując dodatkową linię łączącą początek i koniec grafu. Linia ta zostanie później usunięta i otrzymamy ponownie graf wyjściowy. Dowolnemu grafowi spełniającemu powyższe założenia można będzie przypisać jego charakterystykę Eulera [67] wynoszącą

$$\chi = -P + V + L,$$

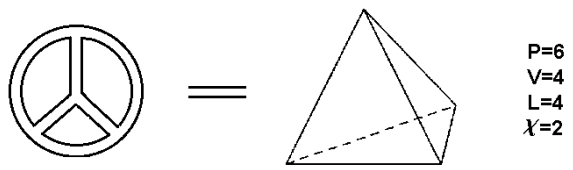
określającą topologiczne własności rozważanego grafu. Mianowicie okazuje się, że wartość χ określa w jakiego rodzaju przestrzeni można dany graf narysować bez przecięć. Na przykład grafy posiadające charakterystykę Eulera $\chi = 2$ można narysować na sferze, grafy posiadające $\chi = 0$ możemy narysować na torusie, natomiast dla $\chi = -2$ graf możemy narysować na podwójnym torusie. Rysunek D.1 pokazuje kilka przykładowych diagramów dla których obliczono charakterystykę Eulera.

Dodatkowa interpretacja topologiczna polega na zaobserwowaniu, że każdy graf może



Rysunek D.1. Charakterystyka Eulera dla kilku przykładowych diagramów.

być przedstawiony w postaci wielościanu. Wówczas każdemu propagatorowi odpowiadać będzie krawędź wielościanu, werteksy zamienią się w wierzchołki, natomiast pętle odpowiadać będą ścianom. Przykład transformacji grafu w wielościan został pokazany na Rysunku D.1.



Rysunek D.2. Możliwość przedstawienia grafu w postaci wielościanu. Każdemu propagatorowi odpowia jedna krawędź, werteksom odpowiadają wierzchołki, natomiast pętlom odpowiadają ściany wielościanu.

Związek charakterystyki Eulera danego grafu z interesującą nas funkcją Greena wynika z następujących dwóch faktów. Po pierwsze po usunięciu dodatkowej linii zamykającej tymczasowo graf charakterystyka χ zmniejsza się zawsze o 2. Ponadto z fizycznego punktu widzenia poszczególnym fragmentom grafów odpowiadają czynniki wynoszące $\frac{1}{N}$ dla propagatora oraz N w przypadku werteksu oraz pętli. Powyższe obserwacje w praktyce oznaczają, że istnieje ścisły związek

$$k = 2 - \chi$$

pomiędzy charakterystyką Eulera danego grafu a rzędem k w rozwinięciu funkcji Greena, do którego rozważany graf przynależy. Na przykład wszystkie grafy posiadające charakterystykę $\chi = 2$ będą składnikami G_0 . Są to grafy, które można narysować bez przecięć na powierzchni kuli, stąd też pochodzi ich nazwa - grafy planarne. Następnie grafy posiadające $\chi = 0$ (możliwe do narysowania na torusie) będą składnikami G_2 , grafy posiadające $\chi = -2$ będą składnikami G_4 itd. Tak jak wspomniano, w przypadku zespołu Wisharta grafy o nieparzystej charakterystyce Eulera nie występują.

Bibliografia

- [1] O. Limann, H. Pelka. *Radiotechnika*. ISBN 83-206-1045-1. Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa, 1993.
- [2] S. Haykin. *Systemy telekomunikacyjne (2 tomy)*. ISBN 83-206-1272-1. Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa, 2004.
- [3] G.J. Foschini, M.J. Gans. On limits of wireless communications in a fading environment when using multiple antennas. *Wireless Personal Communications*, vol. 6:311–335, 1998.
- [4] I.E. Telatar. Capacity of Multi-antenna Gaussian Channels. *European Transactions on Telecommunications and Related Technologies*, vol. 10(issue 6):585–596, 1999.
- [5] S. Verdú, S. Shamai. Spectral Efficiency of CDMA with Random Spreading. *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 45(issue 2):622, 1999.
- [6] A.M. Tulino, S. Verdú. *Fundation nad Trends in Communications Theory*, volume Vol 1, Issue 1: Random Matrix Theory and Wireless Communications. of ISSN 1567-2328. Now Publishers Inc., 2004.
- [7] A.L. Moustakas, H.U. Baranger, L. Balents, A.M. Sengupta, S.H. Simon. Communication through a Diffusive Medium: Coherence and Capacity. 2000. [arXiv:cond-mat/0009097 v1].
- [8] A.L. Moustakas, S.H. Simon, A.M. Sengupta. MIMO Capacity Through Correlated Channels in the Presence of Correlated Interferers and Noise: A (Not So) Large N Analysis. *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 49(issue 10):1667, 2003.
- [9] A.L. Moustakas, S.H. Simon. Eigenvalue density of correlated complex random Wishart matrices. *Phys. Rev E* 69, (065101), 2004.
- [10] R. Müller. A Random Matrix Model of Communication Through Antenna Arrays. *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 48(issue 9):2495–2506, 2002.
- [11] R. Müller. Random Matrix Methods for Design of Multiuser Communication Systems. *Acta Physica Polonica B*, vol. 36(issue 9):1001, 2005.
- [12] M. Debbah, R. Müller. MIMO Channel Modelling and the Principle of Maximum Entropy. *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 51(issue 5):1667, 2005.
- [13] G.D. Golden, G.J. Foschini, R.A. Valenzuela, P.W. Wolniansky. Detection algorithm and initial laboratory results using V-BLAST space-time communications architecture. *IEEE Electron. Tell.*, 35:14–16, 1999.
- [14] E. Viterbo, J. Boutros. A universal lattice code decoder for fading channels. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 45:1639–1642, 1999.
- [15] P. Tan, L. Rasmussen. The application of semidefinite programming for detection in CDMA. *IEEE J. Select. Areas Commun*, 19:1442–1449, 2001.
- [16] B. Steingrimsson, Z.Q. Luo, K. Wong. Soft quasi-maximum-likelihood detection for multiple-antenna wireless channels. *IEEE Trans. Signal Processing*, 51(11):2710–2719, 2003.
- [17] E. Agrell, T. Eriksson, A. Vardy, K. Zeger. Closest point search in lattices. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 48:2201–2214, 2002.
- [18] B.M. Hochwald, S. Brink. Achieving near-capacity on multiple-antenna channel. *IEEE Trans. Commun.*, 51(3):389–399, 2003.

- [19] E.G. Larsson, J. Jalden. Soft MIMO detection at fixed complexity via partial marginalization. *IEEE Trans. Signal Processing*, 56:3397–3407, 2008.
- [20] S. Verdú. *Multuser detection*. Cambridge University Press, New York, 1998.
- [21] R. Balian. Random Matrices and Information Theory. *Il Nuovo Cimento*, B(LVII):183, 1968.
- [22] M.L. Mehta. *Random Matrices*. Academic Press, New Yourk, 1967.
- [23] B. Eynard. *An introduction to Random Matrices*. CRM-2708. Saclay Lecture Notes: t01/014, 2001.
- [24] H. Araki, D.V. Voiculescu, S.V. Stratila, C.C. Moore. *Operator Algebras and their Connections with Topology and Ergodic Theory: Symmetries of some reduced free product C^* -algebras*. ISBN-13/EAN 9783540156437, pages 556-588. Springer-Verlag GmbH, Berlin, 1985. Lecture Notes in Math. **1132**, Math. Review 0799593.
- [25] D.V. Voiculescu, K.J. Dykema, A. Nica. *Free random variables. A noncommutative probability approach to free products with applications to random matrices, operator algebras and harmonic analysis on free groups*. ISBN 0-8218-6999-X. American Mathematical Society, Providence, RI, 1992.
- [26] R. Speicher. Multiplicative functions on the lattice of non-crossing partitions and free convolution. *Math. Ann.*, (298):611–628, 1994.
- [27] A. Zee. Law of Addition in Random Matrix Theory. *Nucl. Phys.*, B(474):726, 1996. [arXiv:cond-mat/9602146v1].
- [28] R. Couillet, M. Debbah. *Random Matrix Methods for Wireless Communications*. ISBN 978-1-107-01163-2. Cambridge University Press, New York, 2011.
- [29] H. M. Markowitz. *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*. John Wiley & Sons, Inc. - New York, 1959.
- [30] R.N. Mantegna, H.E. Stanley. *Ekonomofizyka - wprowadzenie*. ISBN: 83-01-13524-7. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2001.
- [31] J.-P. Bouchaud, M. Potters. *Theory of Financial Risk - From Statistical Physics to Risk Management*. ISBN: 0 521 78232 5. Cambridge University Press, 2001.
- [32] M. Potters, J.-P. Bouchaud, L. Laloux. Financial Applications of Random Matrix Theory: Old Laces and New Pieces. *Acta Physica Polonica B*, 36:2767, 2005. [arXiv:physics/0507111].
- [33] Z. Burda, J. Jurkiewicz, M.A. Nowak, G. Papp, I. Zahed. Lévy Matrices and Financial Covariances. 2001. [arXiv:cond-mat/0103108v1].
- [34] Z. Burda, A. Görlich, B. Waclaw. Spectral properties of empirical covariance matrices for data with power-law tails. *Physical Review E*, (74):041129, 2006. [arXiv:physics/0603186].
- [35] R. Rak, S. Drożdż, J. Kwapieni. Nonextensive statistical features of the polish stock market fluctuations. *Physica A*, 374:315–324, 2007. [arXiv:physics/0603071v3].
- [36] J.J Vidal. Toward direct brain-computer communication. *Annual review of biophysics and bioengineering*, 2(157-180), 1973. [DOI: 10.1146/annurev.bb.02.060173.001105].
- [37] J.J Vidal. Real-Time Detection of Brain Events in EEG. *IEEE Proceedings*, 65(5):633–641, 1977. [doi:10.1109/PROC.1977.10542].
- [38] P. Šeba. Random Matrix Analysis of Human EEG Data. *Phys. Rev. Lett.*, (91):198104, 2003. [http://prl.aps.org/abstract/PRL/v91/i19/e198104].
- [39] R.R. Nadakuditi. Applied Stochastic Eigen-Inference. *PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology*, 2007.
- [40] N.R. Rao, J. Mingo, R. Speicher, A. Edelman. Statistical eigen-inference from large Wishart matrices. *The Annals of Statistics*, 36(6):2850–2885, 2008. [arXiv:math.ST/0701314v1].
- [41] R.R. Far, T. Oraby, W. Bryc, R. Speicher. Spectra of Large Block Matrices. 2006. [arXiv:cs.IT/0610045v1].

- [42] X. Mestre. Estimation Using Random Matrices in Multi-antenna Settings. *Prezentacja podczas 'Newcom Summer School - Random Matrix Theory for Wireless Communications', CTTC, Castelldefels Barcelona*, 2006.
- [43] X. Mestre. Improved Estimation of Eigenvalues and Eigenvectors of Covariance Matrices Using Their Sample Estimates. *IEEE Transactions on Information Theory*, (vol. 54, no. 11):5113, 2008.
- [44] Z. Burda, A. Jarosz, J. Jurkiewicz, M.A. Nowak, G.Papp, I. Zahed. Applying Free Random Variables to Random Matrix Analysis of Financial Data, Part I: A Gaussian Case. 2010.
- [45] R.A. Janik, M.A. Nowak, G. Papp, J. Wambach, I. Zahed. Nonhermitean Random Matrix Models: a Free Random Variable Approach. *Physical Review*, (E55):4100–4106, 1997. [arXiv:hep-ph/9609491v1].
- [46] Z. Burda, R.A. Janik, M.A. Nowak. Multiplication law and S transform for non-hermitian random matrices. *Physical Review E*, 84(6):25, 2011. [arXiv:math-ph/1104.2452v1].
- [47] V.A. Marčenko, L.A. Pastur. Distribution of eigenvalues for some sets of random matrices. *Mathematics of the U.S.S.R - Sbornik (N.S.)*, vol. 1(no. 4):457, 1967.
- [48] E. Brézin. *Nucl. Phys.*, (B453):531, 1995.
- [49] J. Jurkiewicz, G. Łukaszewski, M.A. Nowak. Diagramatic Approach to Fluctuations in The Wishart Ensemble. *Acta Physica Polonica B*, (39):799, 2008.
- [50] J.J.M. Verbaarschot, H.A. Weidenmueller, M.R. Zirnbauer. Evaluation of ensemble averages for simple hamiltonians perturbed by a GOE interaction. *Annals of Physics*, 153:367, 1984.
- [51] J. Ambjørn, J. Jurkiewicz, Yu.M. Makeenko. Multiloop correlators for two-dimensional quantum gravity. *Physics Letters B*, 251:517–524, 1990.
- [52] Z. Burda, A. Görlich, A. Jarosz, J. Jurkiewicz. Signal and Noise in Correlation Matrix. *Physica A*, Vol. 343, No. 3:17, 2004. [arXiv:cond-mat/0305627v2].
- [53] Z. Burda, J. Jurkiewicz, B. Waclaw. Spectral Moments of Correlated Wishart Matrices. *Physical Review*, E71:026111, 2005. [arXiv:cond-mat/0405263v1].
- [54] Z. Burda, A. Görlich, J. Jurkiewicz, B. Waclaw. Correlated Wishart Matrices and Critical Horizons. *European Physical Journal*, (B49):319, 2006. [arXiv:cond-mat/0508341v1].
- [55] R.A. Janik, M.A. Nowak, G. Papp, I. Zahed. Nonhermitean Random Matrix Models. *Nuclear Physics*, (B501):603–642, 1997. [arXiv:cond-mat/9612240v2].
- [56] J. Wishart. The generalized product moment distribution in samples from a normal multivariate population. *Biometrika A*, 20:32–52, 1928.
- [57] G. Anderson. An asymptotic expansion for the distribution of the latent roots of the estimated covariance matrix. *Ann. Math. Statist.*, 36:1153–1173, 1965.
- [58] L.Haff. Empirical Bayes estimation of the multivariate normal covariance matrix. *Annals of Statistics*, 8:586–597, 1980.
- [59] D. Dey, C.Srinivasan. Estimation of a covariance matrix under Stein's loss. *Ann. Statist.*, 13:1581–1591, 1985.
- [60] D. Dey. Simultaneous estimation of eigenvalues. *Ann. Inst. Statist. Math.*, 40(1):137–147, 1988.
- [61] C. Jin. A note on simultaneous estimation of eigenvalues of a multivariate normal covariance matrix. *Statist. Probab. Lett.*, 16:197–203, 1993.
- [62] S. Ahmed. Large-sample estimation strategies for eigenvalues of a Wishart matrix. *Metrika*, 47:35–45, 1998.
- [63] D. Hydorn, R. Muirhead. Polynomial estimation of eigenvalues. *Commun. Statist.: Theory and Methods*, 28(2-3):581–596, 1999.
- [64] J. Jurkiewicz. Estymacja widma macierzy kowariancji na podstawie obserwacji o skończonej długości, w oparciu o rozwinięcie funkcji Greena oraz zastosowanie aproksymacji

Padé. *Materiał nie opublikowany, udostępniony podczas dyskusji na temat estymacji widma macierzy, Kraków, UJ, 2006.*

- [65] G.A. Baker Jr., P.R. Graves-Morris. *Padé Approximants*. ISBN 0-521-45007-1. Cambridge University Press, 1996.
- [66] R. Janik, M.A. Nowak, G. Papp, I. Zahed. Various Shades of Blue's Function. *Acta Physica Polonica*, B(28):2949, 1997. [[arXiv:hep-th/9710103](#)].
- [67] K. Jänich. *Topologia*. ISBN: 83-01-10141-5. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1998.