Zakład Astrofizyki Relatywistycznej
i Kosmologii
Obserwatorium Astronomiczne
Uniwersytet Jagielloński

Analityczne modele propagacji zaburzeń w ekspandującym Wszechświecie. Zastosowanie metod algebry komputerowej

Rozprawa na stopień doktora

Autor:
mgr Wojciech Czaja

Promotor:
dr hab. Andrzej Woszczyna

Kraków 2009

Pragnę serdecznie podziękować mojemu wieloletniemu opiekunowi naukowemu i promotorowi pracy doktorskiej dr. hab. Andrzejowi Woszczynie za okazaną mi pomoc w rozwiązaniu wielu problemów poruszanych w tej pracy i nie tylko. Dziękuję także dr. hab. Zdzisławowi Goldzie oraz dr. hab. Leszkowi Sokołowskiemu za wiele inspirujących dyskusji, cennych uwag i wskazówek.

Wojciech Czaja

Spis treści

Rozdział 1

Wstęp — cel pracy i motywacja

Zgodnie ze standardowym modelem, zalążki struktury kosmicznej powstały jako kwantowe fluktuacje we wczesnym etapie ewolucji Wszechświata. Bardzo małe w epoce rekombinacji zaburzenia gęstości (pomiary fluktuacji temperatury mikrofalowego promieniowania tła dają wartość $\Delta T/T \approx 10^{-5}$) narastały wskutek niestabilności grawitacyjnej w erze dominacji materii, tworząc galaktyki, gromady i supergromady galaktyk.

W 1946 r. Lifszyc [1] sformułował liniową teorię zaburzeń przestrzennie jednorodnych i izotropowych modeli Friedmanna–Lemaître'a–Robertsona–Walkera (FLRW). Rozwinięcie tej pracy i podsumowanie uzyskanych wyników znajdujemy w publikacji Lifszyca i Chałatnikowa [2] z 1963 r. Prace te były pierwszym ogólnorelatywistycznym podejściem do problemu formowania globalnej struktury Wszechświata. Autorzy konstruują małe zaburzenie pola grawitacyjnego w postaci symetrycznego tensora $h_{\mu\nu}$ — poprawki do metryki Robertsona–Walkera. Rozkład pola $h_{\mu\nu}$ na funkcje własne operatora Laplace'a (działającego na hiperpowierzchni stałego czasu) pozwala, w teorii liniowej, na niezależną analizę skalarnych, wektorowych i tensorowych perturbacji kosmicznego pola grawitacyjnego. Linearyzując równania Einsteina, wyprowadzają (w układzie synchronicznym) równania dynamiki zaburzeń modeli FLRW z materią w postaci barotropowego płynu doskonałego.

Prace Lifszyca wytyczyły drogę, dynamicznie rozwijającej się od połowy lat sześćdziesiątych, relatywistycznej teorii perturbacji kosmologicznych, i jednocześnie ukazały złożoność zagadnienia. Istnienie grupy wyróżnionych obserwatorów fundamentalnych w przestrzennie jednorodnych i izotropowych modelach FLRW prowadzi do naturalnego wyboru współrzędnej czasowej oraz jednoznacznego rozkładu czasoprzestrzeni na czas i przestrzeń. Natomiast wybór hiperpowierzchni stałego czasu w obecności zaburzenia czasoprzestrzeni nie jest już tak oczywisty. Infinitezymalna transformacja współrzędnych postaci $x^\mu \to x^\mu + \xi^\mu \delta\tau$ (ξ^μ jest dowolną funkcją współrzędnych x^μ, a $\delta\tau$ jest małym parametrem), która w oczywisty sposób zachowuje geometrię czasoprzestrzeni, prowadzi do matematycznie różnych rozwiązań równań perturbacyjnych. Ta dowolność wyboru układu współrzędnych, nazywana swobodą cechowania lub swobodą gauge, może prowadzić do błędów w interpretacji otrzymanych wyników. Niewłaściwy wybór układu współrzędnych może ukryć rzeczywiste zaburzenie pola grawitacyjnego bądź wygenerować zaburzenie niefizyczne (często nazywane w literaturze zaburzeniem fikcyjnym).

Wybór układu synchronicznego ogranicza swobodę gauge, ale nie eliminuje jej całkowicie. W konsekwencji równania perturbacyjne posiadają rozwiązania fikcyjne, które nie opisują rzeczywistego zaburzenia pola grawitacyjnego i mogą być kreowane lub eliminowane w wyniku deformacji hiperpowierzchni stałego czasu, przy zachowaniu synchroniczności układu odniesienia. Analiza perturbacji kosmologicznych, w standardowym podejściu Lifszyca i innych, które pozostawiają swobodę cechowania, była przedmiotem wielu znaczących publikacji (niektóre z nich to [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11]). Jednak trudności związane z identyfikacją zaburzeń fikcyjnych zachęciły kosmologów do poszukiwania alternatywnych metod.

Pierwsza z nich była kontynuacją i rozwinięciem klasycznego formalizmu Lifszyca. Jej głównym założeniem było uwolnienie się od niejednoznaczności rozwiązań równań perturbacyjnych poprzez całkowite wyeliminowanie swobody gauge. Niektóre z ważnych prac poświęconych badaniu perturbacji przy ściśle określonej (wyróżnionej fizycznie lub geometrycznie) hiperpowierzchni stałego czasu — ściśle wyspecyfikowanym gauge, to: *orthogonal zero-shear gauge* (nazywany również *conformal Newtonian gauge* lub *longitudinal gauge*) [12, 13, 14], *comoving gauge* (*velocity-orthogonal gauge*) [12, 13], *uniform-expansion gauge* (*uniform Hubble-constant gauge*) [12, 15, 16], *uniform-density gauge* (*pure metric-fluctuation gauge*) [17, 15, 16], *uniform-curvature gauge* (*off-diagonal gauge*) [13, 15, 16]. Punktem wyjścia dla rozwoju nowej idei była praca Bardeena [12], w której autor wykazał, że perturbacje takie jak zaburzenie gęstości, odniesione do odpowiednio wybranych hiperpowierzchni jednoczesności, dają się wyrazić przez kombinacje amplitud metryki, które są niezmiennicze względem dowolnych infinitezymalnych transformacji współrzędnych — są gauge-inwariantne. Bardeen zauważył, że istnieją dwie niezależne gauge-inwariantne zmienne dla zaburzeń skalarnych i jedna dla zaburzeń wektorowych. Nazwał je gauge-inwariantnymi potencjałami grawitacyjnymi. Wykazał także, iż równania perturbacyjne, wyrażone przez gauge-inwariantne potencjały, przyjmują szczególnie prostą postać. Wyliczył ścisłe rozwiązania tych równań oraz ich długofalowe asymptotyki w przypadku stałego współczynnika w równaniu stanu płynu doskonałego ($w = p/\epsilon = \text{const.}$) oraz zerowej krzywizny przestrzennej ($K = 0$); dla trzech wyróżnionych hiperpowierzchni stałego czasu: zerowego ścinania, ortogonalnej do przepływu materii i jednorodnej ekspansji. Obszerną kolekcję rozwiązań równań perturbacyjnych, zarówno w postaci ścisłej jak i asymptotycznej; dla szczególnych postaci równania stanu materii lub w przypadku ogólnym; dla większości stosowanych w kosmologii cechowań, można znaleźć w pracach [13, 16].

Stewart i Walker [18] dowiedli, że liniowa perturbacja δQ pewnej wielkości Q_0 w czasoprzestrzeni (M, g) jest gauge-inwariantna wtedy i tylko wtedy, gdy wielkość Q_0 jest tożsamościowo równa zeru, jest stałym skalarem lub kombinacją liniową delt Kroneckera ze stałymi współczynnikami. Widać zatem, że wielkości takie jak zaburzenie gęstości energii $\delta\epsilon$ czy zaburzenie prędkości materii δu^μ w czasoprzestrzeni FLRW są z natury rzeczy zależne od wyboru hiperpowierzchni stałego czasu. Gauge-inwariantne zaburzenia skalarne, które zgodnie z lematem Stewarta–Walkera są ściśle związane z całkami ruchu modeli FLRW, stały się narzędziem dla wyjaśnienia pochodzenia i ewolucji wielkoskalowej struktury Wszechświata. Jednym z przykładów takich zaburzeń są tzw. perturbacje krzywizny (*curvature perturbations*), wprowadzone przez Bardeena, Steinhardta i Turnera [19], które stały się podstawą inflacyjnych scenariuszy generacji pierwotnego widma fluktuacji gęstości.

Idea, którą wyraża przytoczony wcześniej lemat Stewarta–Walkera [18], stała się fundamentem drugiej z alternatywnych metod badania perturbacji kosmologicznych, zaproponowanej przez Olsona [20], a opartej na wcześniejszej pracy Hawkinga [21]. Punktem wyjścia rachunku perturbacyjnego Olsona są hydrodynamiczne równania ciągłości i Raychaudhuri, a nie metryka modeli FLRW, jak miało to miejsce w standardowym formalizmie Bardeena. Autorzy badają perturbację krzywizny przestrzennej S, która znika w przestrzennie płaskim modelu FLRW, a zatem jest gauge-inwariantna. Wyliczają ścisłe (nie jest wymagane założenie o małości perturbacji) równania propagacji dla perturbacji S w fizycznej czasoprzestrzeni wzdłuż linii świata obserwatora współporuszającego się z materią, a następnie dokonują jego linearyzacji. Dynamiczny rozwój tego formalizmu przypada na przełom lat 80. i 90. Woszczyna i Kułak [22] uogólnili rachunek Olsona na modele z dowolną krzywizną. Jako gauge-inwariantne miary zaburzeń wybrali laplasjany gęstości energii i ekspansji rzutowane na powierzchnię ortogonalną do przepływu materii. Ellis i Bruni [23] definiują inny zbiór gauge-inwariantnych perturbacji, utworzonych z gradientów gęstości energii, ciśnienia i ekspansji rzutowanych na powierzchnię ortogonalną do przepływu. Szczególną uwagę poświęcają tzw. współporuszającemu się gradientowi kontrastu gęstości energii $\mathcal{D}_a$, którego moduł $\mathcal{D}$ koresponduje z klasyczną gauge-zależną wielkością $\delta\epsilon/\epsilon$. Dla zmiennych $\mathcal{D}_a$ i $\mathcal{D}$ wyprowadzają równania propagacji w materii bezciśnieniowej. Wynik ten został uogólniony na przypadek płynu doskonałego o liniowym równaniu stanu ($p = w\epsilon$) przez Ellisa, Hwanga i Bruniego [24].

W kolejnych pracach tych samych autorów znajdujemy analizę perturbacji w modelu wypełnionym mieszaniną płynów doskonałych z uwzględnieniem oddziaływań pomiędzy składnikami [25], a także w modelu zdominowanym przez pole skalarne [26].

Standardowy formalizm Bardeena i formalizm hydrodynamiczny dają zgodny opis ewolucji małych zaburzeń modeli FLRW — prowadzą do tych samych równań dynamicznych [27]. Jednak w podejściu Bardeena definicja oraz fizyczna interpretacja gauge-inwariantnych perturbacji nie jest tak prosta jak w podejściu hydrodynamicznym. Z drugiej strony, analiza ewolucji wielkości hydrodynamicznych nie daje bezpośredniego wglądu w kształt zaburzonej metryki.

Przedmiotem niniejszej rozprawy będzie badanie szczególnej klasy gauge-inwariantnych zmiennych perturbacyjnych — takich, które spełniają równanie d'Alemberta w postaci kanonicznej. Na potrzeby tej pracy zmienne te będziemy nazywać gauge-inwariantnymi zmiennymi falowymi lub po prostu zmiennymi falowymi.

Już od 1967 r. pojawiają się opracowania zauważające falową naturę perturbacji kosmologicznych. Sachs i Wolfe [3] dowiedli, że istnieje skalarna zmienna perturbacyjna E, która spełnia równanie falowe w przestrzennie płaskim modelu FLRW wypełnionym promieniowaniem. W 1968 r. Field i Shepley [4] niezależnie znaleźli inną gauge-inwariantną zmienną falową, którą oznaczyli przez H. Znane są późniejsze prace [9, 11, 28], w których autorzy potwierdzają wynik otrzymany przez Sachsa, Wolfe'a, Fielda i Shepley'a.

Jak sugerują Golda i Woszczyna [29, 30], twierdzenie Sachsa–Wolfe'a powinno mieć uogólnienie na modele FLRW o dowolnej krzywiźnie przestrzennej, wypełnione płynem doskonałym o barotropowym równaniu stanu. Wynika to z postaci równań ewolucji dla poszczególnych modów w rozwinięciu fourierowskim. Badając zaburzenia skalarne w standardowym podejściu Lifszyca, skonstruowali gauge-inwariantną miarę zaburzenia gęstości, która spełnia czasowe równanie ewolucji identyczne z tym, jakie można by uzyskać z analizy Fouriera równania d'Alemberta. W publikacji [29] potwierdzili otrzymany wynik, wskazując podobne transformacje do zmiennych falowych w innych, często używanych w kosmologii, podejściach gauge-inwariantnych [20, 12, 31, 22, 32, 27].
Celem niniejszej pracy jest:

1) dowód twierdzenia Sachsa–Wolfe'a — uogólnionego na przypadek modeli FLRW o dowolnej krzywiźnie przestrzennej K, wypełnionych barotropowym ($p = p(\epsilon)$) płynem doskonałym — polegający na bezpośrednim przekształceniu równań perturbacyjnych w postaci równań różniczkowych cząstkowych;

2) zbadanie związków pomiędzy gauge-inwariantnymi zmiennymi falowymi zdefiniowanymi w dwóch formalizmach: standardowym podejściu Lifszyca, często nazywanym w literaturze cechowaniem synchronicznym (synchronous gauge) [1, 2], oraz cechowaniu podłużnym (longitudinal gauge) [14];

3) definicja gauge-inwariantnego fourierowskiego rozkładu skalarnych perturbacji kosmologicznych.

Praca składa się z:

1) programu w języku *Mathematica*, zawierającego dowód uogólnionego twierdzenia Sachsa–Wolfe'a oraz rachunki pomocnicze: wyprowadzenie perturbacyjnych równań Lifszyca w postaci równań różniczkowych cząstkowych; konstrukcję bazy w przestrzeni niezmienników transformacji gauge zachowujących synchroniczność układu odniesienia; transformację równań Lifszyca do postaci jawnie gauge-inwariantnej; konstrukcję gauge-inwariantnej zmiennej falowej $\hat{\delta}$ z zaburzenia gęstości energii w układzie synchronicznym; dowód gauge-niezmienniczości perturbacji $\hat{\delta}$ metodą rozkładu w bazie potencjałów Bardeena; znalezienie związku perturbacji $\hat{\delta}$ ze zmienną falową $\hat{\Phi}$ [29], zdefiniowaną w cechowaniu podłużnym w postaci transformacji Darboux potencjału metryki; konstrukcję innych zmiennych falowych;

2) tradycyjnej rozprawy, zawierającej zwarty opis prowadzonych badań (w kluczowych punktach rozprawy znajdują się odwołania (linki) do algebraicznych procedur obliczeniowych, zawartych w kodzie programu dołączonym do rozprawy).

Rozprawa zawiera 8 rozdziałów. W rozdziale 2 przedstawiamy ogólnorelatywistyczny opis ewolucji wszechświata FLRW jednorodnie wypełnionego materią w postaci płynu doskonałego. Podajemy rozwiązania równań Einsteina dla modelu z ultrarelatywistyczną materią o równaniu stanu $p = \epsilon/3$, bezciśnieniową materią $p = 0$ oraz dla przestrzennie płaskiego modelu z materią o liniowym równaniu stanu $p = w\epsilon$, $w = \text{const.}$ Rozdział 3 jest poświęcony konstrukcji liniowego zaburzenia $h_{\mu\nu}$ pola grawitacyjnego oraz jego kowariantnemu rozkładowi na zaburzenia skalarne, wektorowe i tensorowe (*scalar-vector-tensor decomposition*), przeprowadzonemu na trójwymiarowej hiperpowierzchni $t = \text{const.}$ w czasoprzestrzeni Robertsona–Walkera — trójwymiarowej przestrzeni o stałej krzywiźnie. Rozdziały 4 i 5 zawierają wyprowadzenie równań propagacji skalarnych zaburzeń metryki Robertsona–Walkera w układzie synchronicznym (tzw. równań Lifszyca). W odróżnieniu od oryginalnego rachunku Lifszyca [1, 2] nie dokonujemy rozkładu zaburzenia metryki na funkcje własne operatora Laplace'a działającego na hiperpowierzchni stałego czasu. W konsekwencji, wyprowadzone przez nas równania dynamiki zaburzeń skalarnych są równaniami różniczkowymi cząstkowymi. Rozdział 6 jest poświęcony gauge-inwariantnym skalarnym zmiennym falowym w modelach FLRW wypełnionych barotropowym płynem doskonałym. Zaczynamy od analizy fikcyjnych zaburzeń w układzie synchronicznym, która pozwala skonstruować bazę w przestrzeni inwariantów skalarnych transformacji cechowania, a następnie przekształcić równania Lifszyca do postaci jawnie gauge-inwariantnej. W dalszej części przedstawiamy konstrukcję gauge-inwariantnej zmiennej falowej jako odpowiednią transformację zaburzenia gęstości energii w układzie synchronicznym. Wykorzystując równania Lifszyca, dowodzimy, że zmienna ta spełnia równanie d'Alemberta w pewnej konforemnej czasoprzestrzeni Robertsona–Walkera. Dowód ten opiera się na przekształceniach równań perturbacyjnych w ich oryginalnej formie (jako równań różniczkowych cząstkowych), a nie jak dotychczas [33, 29, 30], na badaniu szczególnych klas rozwiązań tych równań. Znajdujemy relacje wiążące zmienne falowe zdefiniowane w dwóch różnych cechowaniach i proponujemy prostą metodę konstrukcji innych zmiennych falowych. W podsumowaniu rozdziału 6 pokażemy, że zdefiniowane przez nas zmienne falowe korespondują z rozważanymi wcześniej w literaturze zmiennymi perturbacyjnymi, które spełniają równanie d'Alemberta w przestrzennie płaskich modelach FLRW dla szczególnych przypadków równania stanu materii. Sprowadzenie problemu propagacji małych zaburzeń w modelach Robertsona–Walkera wypełnionych barotropowym płynem doskonałym do badania rozwiązań równania d'Alemberta, pozwala nam — przy wykorzystaniu metod teorii pola w zakrzywionych czasoprzestrzeniach [34] — przedstawić w rozdziale 7 ogólną procedurę gauge-inwariantnego rozkładu pola zaburzeń na elementarne rozwiązania równania ruchu.

Rozdział 2

Jednorodne i izotropowe modele Wszechświata

Punktem wyjścia i zarazem zerowym przybliżeniem w rachunku zaburzeń kosmologicznych jest czasoprzestrzeń Friedmanna–Lemaître'a–Robertsona–Walkera (FLRW), spełniająca, zgodnie z Zasadą Kopernikańską, warunek przestrzennej jednorodności i izotropii. Element liniowy tej czasoprzestrzeni możemy zapisać w postaci

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = dt^2 - a^2 \mathsf{g}_{ik} dx^i dx^k, \tag{2.1}$$

gdzie x^i są współrzędnymi, które określają stałe położenie obserwatorów współporuszających się z materią i postrzegających wszechświat jako izotropowy — tzw. obserwatorów fundamentalnych; t jest czasem kosmicznym — czasem własnym obserwatorów fundamentalnych; a jest kosmicznym czynnikiem skali wszechświata, zależnym jedynie od uniwersalnego czasu t; g_{ik} jest tensorem metrycznym trójwymiarowej, maksymalnie symetrycznej przestrzeni o stałej krzywiźnie, który najczęściej zapisujemy we współrzędnych sferycznych (r, ϑ, φ), $(\chi, \vartheta, \varphi)$ lub kartezjańskich (x, y, z)

$$\mathsf{g}_{ik} = \mathrm{diag}\left[\frac{1}{1 - Kr^2}, r^2, r^2 \sin^2\vartheta\right] \tag{2.2a}$$

$$= \mathrm{diag}\left[1, \frac{\sin^2\left(\sqrt{K}\chi\right)}{K}, \frac{\sin^2\left(\sqrt{K}\chi\right)}{K} \sin^2\vartheta\right] \tag{2.2b}$$

$$= \delta_{ik}\left[1 + \frac{1}{4}K\left(x^2 + y^2 + z^2\right)\right]^{-2}. \tag{2.2c}$$

Do parametryzacji (2.2b) i (2.2c) prowadzą transformacje

$$r \to \frac{\sin\left(\sqrt{K}\chi\right)}{\sqrt{K}}, \quad r \to \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{1 + \frac{1}{4}K\left(x^2 + y^2 + z^2\right)}.$$

W zależności od wartości parametru krzywizny $K = -1, 0, 1$, przestrzeń ma odpowiednio geometrię hiperboliczną, euklidesową lub sferyczną. Składowe tensora krzywizny Riemanna, tensora Ricciego oraz skalar krzywizny dla tej przestrzeni mają postać

$$\mathsf{R}_{ijkl} = K(\mathsf{g}_{ik}\mathsf{g}_{jl} - \mathsf{g}_{il}\mathsf{g}_{jk}), \tag{2.3a}$$

$$\mathsf{R}_{ik} = 2K\mathsf{g}_{ik}, \tag{2.3b}$$

$$\mathsf{R} = 6K. \tag{2.3c}$$

W dalszej części pracy będziemy posługiwać się czasem konforemnym η związanym z uniwersalnym czasem kosmicznym t relacją

$$d\eta = dt/a. \tag{2.4}$$

Element liniowy (2.1) przyjmie wówczas formę

$$ds^2 = a^2\left(d\eta^2 - \mathsf{g}_{ik}dx^i dx^k\right). \tag{2.5}$$

Pochodną po czasie konforemnym η będziemy oznaczać znakiem $'$ przy różniczkowanej funkcji (zob. dodatek I — Notacja i konwencje).

Ewolucję czynnika skali a modeli FLRW opisują równania Einsteina

$$G_\mu{}^\nu = R_\mu{}^\nu - \frac{1}{2}\delta_\mu{}^\nu R = T_\mu{}^\nu, \tag{2.6}$$

gdzie $R_\mu{}^\nu$ jest tensorem Ricciego; $R \equiv R_\mu{}^\mu$ skalarem krzywizny; $T_\mu{}^\nu$ tensorem energii-pędu materii jednorodnie wypełniającej przestrzeń. Przyjmujemy układ jednostek, w którym $8\pi G = 1$ i $c = 1$ (G — stała grawitacji, c — prędkość światła). Zakładamy ponadto, że materia wypełniająca wszechświat jest płynem doskonałym o hydrodynamicznym tensorze energii-pędu postaci [6, 35]

$$T_\mu{}^\nu = (\epsilon + p)u_\mu u^\nu - p\delta_\mu{}^\nu, \tag{2.7}$$

gdzie ϵ jest gęstością energii, p ciśnieniem, a u^μ czteroprędkością materii. W układzie współrzędnych współporuszających się z materią

$$u^0 = 1/a, \quad u^i = 0 \tag{2.8}$$

otrzymujemy

$$T_0{}^0 = \epsilon, \quad T_i{}^0 = 0, \quad T_i{}^j = -p. \tag{2.9}$$

Dla metryki (2.5) wyliczamy składowe mieszane tensora Ricciego oraz skalar krzywizny

$$R_0{}^0 = -3\left(\frac{a''}{a^3} - \frac{a'^2}{a^4}\right), \tag{2.10a}$$

$$R_i{}^j = -\left(\frac{a''}{a^3} + \frac{a'^2}{a^4} + \frac{2K}{a^2}\right)\delta_i{}^j, \tag{2.10b}$$

$$R_i{}^0 = 0, \tag{2.10c}$$

$$R = R_\mu{}^\mu = -6\left(\frac{a''}{a^3} + \frac{K}{a^2}\right). \tag{2.10d}$$

Podstawiając (2.10) oraz (2.9) do równań Einsteina (2.6) otrzymujemy dwa niezależne równania odpowiednio dla składowych $\left({}_0{}^0\right)$ oraz $\left({}_i{}^j\right)$

$$\frac{a'^2}{a^4} + \frac{K}{a^2} = \frac{\epsilon}{3}, \tag{2.11a}$$

$$\frac{2a''}{a^3} - \frac{a'^2}{a^4} + \frac{K}{a^2} = -p. \tag{2.11b}$$

Układ dwóch równań różniczkowych (2.11) na trzy nieznane funkcje a, ϵ i p uzupełniamy równaniem stanu materii wypełniającej wszechświat — barotropowym równaniem stanu postaci $p = p(\epsilon)$.

Różniczkowanie pierwszego równania Friedmanna (2.11a) względem czasu konforemnego η oraz eliminacja a'' i K przy użyciu układu (2.11), prowadzi do równania ruchu materii kosmicznej

$$\epsilon' = -3\frac{a'}{a}(\epsilon + p). \tag{2.12}$$

Można wykazać, iż równanie (2.12) jest konsekwencją zerowej składowej kowariantnego prawa zachowania $T_\mu{}^\nu{}_{;\nu} = 0$. Rozwiązanie równania (2.12) dla przypadku materii o stałym współczynniku w w liniowym równaniu stanu $p = w\epsilon$ ma postać

$$\epsilon = \mathcal{M}a^{-3(1+w)}, \tag{2.13}$$

gdzie $\mathcal{M}$ jest gęstością energii dla $a = 1$.

Rozwiążmy równania dynamiki (2.11) dla kilku szczególnych przypadków równania stanu materii wypełniającej wszechświat FLRW. Rozwiązania te posłużą nam w dalszej części pracy jako zerowy rząd w rachunku zaburzeń przestrzennie jednorodnych i izotropowych modeli Wszechświata.

□ **Wszechświat wypełniony promieniowaniem** ($p = \epsilon/3$, $w = 1/3$)

Dodając stronami równania (2.11) i całkując tak otrzymane wyrażenie z warunkiem początkowym $a(\eta = 0) = 0$ (ustalającym początek czasu η w osobliwości), dostajemy

$$a = C_1 \sin\left(\sqrt{K}\eta\right), \tag{2.14}$$

gdzie C_1 jest dowolną stałą całkowania. Po wstawieniu tego rozwiązania do pierwszego równania Friedmanna (2.11a) zauważamy, iż wielkość

$$\mathcal{M} \equiv \epsilon a^4 = 3KC_1^2 = \text{const.} \tag{2.15}$$

jest stałą ruchu. Taki sam wynik dostajemy ze wzoru (2.13) dla $w = 1/3$.

Wykorzystując wzory (2.15) i (2.4), zapisujemy rozwiązanie dla czynnika skali $a(\eta)$ oraz związek pomiędzy uniwersalnym czasem kosmicznym i czasem konforemnym $t(\eta)$

$$a = \sqrt{\frac{\mathcal{M}}{3}} \frac{\sin\left(\sqrt{K}\eta\right)}{\sqrt{K}}, \quad t = \sqrt{\frac{\mathcal{M}}{3}} \left(\frac{1}{K} - \frac{\cos\left(\sqrt{K}\eta\right)}{K}\right). \tag{2.16}$$

Eliminując czas η z równań (2.16), otrzymujemy ewolucję czynnika skali w uniwersalnym czasie kosmicznym t

$$a = \sqrt{2\sqrt{\frac{\mathcal{M}}{3}}t - Kt^2}. \tag{2.17}$$

□ **Wszechświat wypełniony pyłem** ($p = 0$, $w = 0$)

Całkując równanie (2.11b), otrzymujemy rozwiązanie dla czynnika skali zależne od dwóch dowolnych stałych C_3 i C_4

$$a = C_3 \cos^2\left(\sqrt{K}\left(C_4 - \frac{\eta}{2}\right)\right). \tag{2.18}$$

Podobnie jak w przypadku promieniowania, wykorzystując warunek początkowy $a(\eta = 0) = 0$; fakt, że wielkość dana wyrażeniem

$$\mathcal{M} \equiv \epsilon a^3 = \text{const.} \tag{2.19}$$

jest stałą ruchu; oraz wzór (2.4), eliminujemy stałe C_3 i C_4, a rozwiązanie dla czynnika skali $a(t)$ przedstawiamy w postaci parametrycznej

$$a = \frac{\mathcal{M}}{3K} \sin^2\left(\frac{\sqrt{K}}{2}\eta\right), \quad t = \frac{\mathcal{M}}{6K}\left(\eta - \frac{\sin\left(\sqrt{K}\eta\right)}{\sqrt{K}}\right). \tag{2.20}$$

Eliminując czas konforemny η z równań (2.20), otrzymujemy rozwiązanie w postaci uwikłanej

$$t = \frac{\mathcal{M}}{6K^{3/2}}\left[2\arcsin\left(\sqrt{\frac{3K}{\mathcal{M}}a}\right) - \sin\left(2\arcsin\left(\sqrt{\frac{3K}{\mathcal{M}}a}\right)\right)\right]. \tag{2.21}$$

□ **Wszechświat ze stałą prędkością dźwięku** ($c_s^2 = dp/d\epsilon = w = \text{const.}$)

Z równań (2.11a) i (2.13) eliminujemy gęstość energii ϵ, a otrzymane wyrażenie całkujemy z warunkiem początkowym $a(\eta = 0) = 0$. Korzystając ponadto z zależności (2.4), znajdujemy ewolucję czynnika skali $a(t)$ w postaci parametrycznej

$$a = \left(\frac{1+3w}{2}\sqrt{\frac{\mathcal{M}}{3}}\eta\right)^{\frac{2}{1+3w}}, \quad t = \frac{3w+1}{3\,(w+1)}\left(\frac{3w+1}{2}\sqrt{\frac{\mathcal{M}}{3}}\eta^{\frac{3(w+1)}{2}}\right)^{\frac{2}{3w+1}}. \tag{2.22}$$

Eliminacja czasu konforemnego η z układu (2.22), prowadzi do związku

$$a = \left(\frac{1+w}{2}\sqrt{3\mathcal{M}}t\right)^{\frac{2}{3(w+1)}}. \tag{2.23}$$

Przedstawione powyżej rozwiązania równań Einsteina, dla szczególnych postaci równania stanu materii wypełniającej wszechświaty FLRW, opisują dynamikę czynnika skali, a więc dynamikę przestrzennie jednorodnej i izotropowej czasoprzestrzeni z metryką (2.5). W dalszej części pracy zajmiemy się badaniem ewolucji małych zaburzeń pola grawitacyjnego i materii w modelach FLRW.

Rozdział 3

Konstrukcja liniowego zaburzenia czasoprzestrzeni FLRW

Małe zaburzenie pola grawitacyjnego, w liniowej teorii perturbacji kosmologicznych, definiujemy jako poprawkę do metryki (2.5) w postaci symetrycznego pola tensorowego $h_{\mu\nu}$. Tensor metryczny zaburzonej czasoprzestrzeni przedstawiamy w postaci

$$ {}^{(f)}g_{\mu\nu}(\eta, \mathbf{x}) = g_{\mu\nu}(\eta) + h_{\mu\nu}(\eta, \mathbf{x}). \tag{3.1} $$

Składowe kontrawariantne i mieszane $h_{\mu\nu}$ otrzymujemy przez podnoszenie lub opuszczanie wskaźników przy pomocy niezaburzonych tensorów $g_{\mu\nu}$ i $g^{\mu\nu}$. Składowe kontrawariantne poprawki mają znak przeciwny

$$ \delta g^{\mu\nu} = -h^{\mu\nu}. \tag{3.2} $$

Wynika to z tożsamości

$$ (g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu})(g^{\nu\rho} + \delta g^{\nu\rho}) = \delta_{\mu}{}^{\rho} \tag{3.3} $$

po zaniedbaniu wyrazu kwadratowego w poprawce. Bez utraty ogólności, poprawkę $h_{\mu\nu}$ możemy zapisać w formie

$$ h_{\mu\nu} = -a^2 \begin{pmatrix} -\mathcal{A} & \mathcal{B}_k \\ \mathcal{B}_i & \mathcal{E}_{ik} + \frac{1}{3}\mathrm{g}_{ik}\mathcal{C} \end{pmatrix}, \tag{3.4} $$

gdzie $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}_i$, $\mathcal{C}$ i $\mathcal{E}_{ik}$ są małymi funkcjami czasu konforemnego η i współrzędnych przestrzennych $\mathbf{x}$. Ponadto o funkcjach tych zakładamy, że są gładkie i ograniczone.

Dokonamy teraz kowariantnego rozkładu symetrycznego pola tensorowego $h_{\mu\nu}$ na hiperpowierzchni $\eta = \text{const.}$ (w przestrzeni o stałej krzywiźnie) na zaburzenia skalarne, wektorowe i tensorowe. Rozkład ten, występujący w literaturze pod nazwą *scalar-vector-tensor decomposition*, został po raz pierwszy zastosowany do perturbacji kosmologicznych przez Lifszyca [1]. W późniejszej pracy Stewarta [36] możemy znaleźć jego dokładną analizę pod kątem jednoznaczności.

Gładkie, ograniczone (asymptotycznie zanikające w przypadku niezwartej przestrzeni) pole wektorowe $\mathcal{B}_i$ możemy rozłożyć w trójwymiarowej przestrzeni o stałej krzywiźnie na składowe: podłużną i poprzeczną

$$\mathcal{B}_i = \mathcal{B}_{|i} + \bar{\mathcal{B}}_i, \tag{3.5}$$

gdzie

$$\bar{\mathcal{B}}^i{}_{|i} = 0. \tag{3.6}$$

$\boldsymbol{\mathcal{T}}_{|i}$ oznacza pochodną kowariantną tensora $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ względem współrzędnej x^i w trójwymiarowej przestrzeni z metryką g_{ik}.

Symetryczne, bezśladowe, gładkie i ograniczone (asymptotycznie zanikające w przypadku niezwartej przestrzeni) pole tensorowe $\mathcal{E}_{ik}$ rozkładamy przy pomocy bezśladowego pola tensorowego $\bar{\bar{\mathcal{E}}}_{ik}$ o znikającej dywergencji, poprzecznego pola wektorowego $\bar{\mathcal{E}}_i$ oraz pola skalarnego $\mathcal{E}$

$$\mathcal{E}_{ik} = \mathcal{E}_{|ik} - \frac{1}{3}\mathsf{g}_{ik}\mathcal{E}_{|l}{}^{|l} + \frac{1}{2}\left(\bar{\mathcal{E}}_{i|k} + \bar{\mathcal{E}}_{k|i}\right) + \bar{\bar{\mathcal{E}}}_{ik}, \tag{3.7}$$

gdzie

$$\bar{\bar{\mathcal{E}}}_i{}^i = 0, \quad \bar{\bar{\mathcal{E}}}^{ik}{}_{|i} = 0, \quad \bar{\mathcal{E}}^i{}_{|i} = 0. \tag{3.8}$$

Uwzględniając rozkłady (3.5) oraz (3.7), zapisujemy poprawkę do metryki FLRW w postaci sumy zaburzeń: skalarnego, wektorowego i tensorowego

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu} &= -a^2\begin{pmatrix} -\mathcal{A} & \mathcal{B}_{|k} \\ \mathcal{B}_{|i} & \mathcal{E}_{|ik} + \frac{1}{3}\mathsf{g}_{ik}\left(\mathcal{C} - \mathcal{E}_{|l}{}^{|l}\right)\end{pmatrix} + \\ &\quad -a^2\begin{pmatrix} 0 & \bar{\mathcal{B}}_k \\ \bar{\mathcal{B}}_i & \frac{1}{2}\left(\bar{\mathcal{E}}_{i|k} + \bar{\mathcal{E}}_{k|i}\right)\end{pmatrix} - a^2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{\bar{\mathcal{E}}}_{ik}\end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Zaburzeniem skalarnym (wektorowym) nazywamy wielkość utworzoną z pól skalarnych $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ i $\mathcal{E}$ (pól wektorowych $\bar{\mathcal{B}}_i$, $\bar{\mathcal{E}}_i$) w wyniku różniczkowania kowariantnego lub mnożenia przez metrykę g_{ik}. Zaburzenia skalarne pola grawitacyjnego są związane z perturbacjami gęstości i prędkości materii; natomiast zaburzenia wektorowe, nazywane również rotacyjnymi, są związane z perturbacjami prędkości materii, ale nie gęstości. Pole $\bar{\bar{\mathcal{E}}}_{ik}$, którego nie można złożyć z gradientów lub produktów pól skalarnych lub wektorowych nazywamy zaburzeniem tensorowym. Odpowiada ono takim perturbacjom pola grawitacyjnego, przy których materia pozostaje nieruchoma i rozłożona jednorodnie w przestrzeni — są to fale grawitacyjne.

Dla symetrycznego, bezśladowego pola tensorowego $\bar{\bar{\mathcal{E}}}_{ik}$ o znikającej dywergencji mamy $6-1-3=2$ stopnie swobody (2 niezależne funkcje współrzędnych przestrzennych i czasu) odpowiadające dwóm polaryzacjom fali grawitacyjnej. Dla zaburzenia wektorowego, utworzonego z dwóch pól $\bar{\mathcal{B}}_i$ i $\bar{\mathcal{E}}_i$ o znikającej dywergencji, mamy $6-2=4$ stopnie swobody; a dla zaburzenia skalarnego, utworzonego z gradientów i produktów pól $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ i $\mathcal{E}$, kolejne 4 stopnie swobody. Symetryczne zaburzenie $h_{\mu\nu}$ metryki czasoprzestrzeni ma zatem 10 stopni swobody. Cztery z nich — po dwa dla zaburzenia skalarnego i wektorowego — są niefizyczne (nazywamy je stopniami swobody cechowania lub stopniami swobody gauge) i mogą zostać usunięte w wyniku odpowiednich infinitezymalnych transformacji współrzędnych — tzw. transformacji cechowania. Zaburzenia tensorowe są gauge-inwariantne [6, 37]. Zagadnienie swobody cechowania i związanych z nią fikcyjnych zaburzeń pola grawitacyjnego w układzie synchronicznym będzie szerzej dyskutowane w rozdziale 6.

Ważną konsekwencją jednoznaczności rozkładu (3.9) jest fakt, iż kowariantne i liniowe w poprawkach równania perturbacyjne separują się na trzy grupy równań skalarnych, wektorowych i tensorowych. Innymi słowy, w reżimie liniowym każde z zaburzeń (skalarne, wektorowe i tensorowe) ewoluuje niezależnie od pozostałych i możemy badać je oddzielnie. Dowód powyższego twierdzenia można znaleźć w publikacji [13]. W dalszej części pracy główną uwagę poświęcimy zaburzeniom gęstości w modelach FLRW wypełnionych barotropowym płynem doskonałym. Ograniczymy się jednocześnie do badania ewolucji zaburzeń skalarnych pola grawitacyjnego, które w pełni determinują ewolucję zaburzeń gęstości.

Rozdział 4

Równania perturbacyjne w układzie synchronicznym

Prześledźmy rachunek Lifszyca [1, 2], który prowadzi do równań perturbacyjnych dla małego zaburzenia $h_{\mu\nu}$ metryki jednorodnego i izotropowego wszechświata FLRW. Na metrykę zaburzonej czasoprzestrzeni nakładamy dodatkowe więzy

$$h_{00} = 0, \quad h_{i0} = 0, \tag{4.1}$$

co jest równoważne z wyborem układu synchronicznego [38]. Więzy (4.1) nie eliminują w pełni swobody gauge (zob. rozdz. 6) — w ramach układu synchronicznego wciąż istnieje dowolność wyboru hiperpowierzchni stałego czasu. Konsekwencją pozostawienia tej swobody będą fikcyjne rozwiązania równań perturbacyjnych, które nie opisują fizycznego zaburzenia czasoprzestrzeni.

Poddając wariacji tożsamość $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = 1$ i wykorzystując równania (2.8) oraz (4.1), zauważamy, że $\delta u^0 = 0$, natomiast δu^i są na ogół różne od zera. Wynika stąd, że układ odniesienia nie jest układem unoszonym z materią. Równania perturbacyjne, opisujące ewolucję małego zaburzenia $h_{\mu\nu}$ metryki FLRW, mają postać

$$\delta R_\mu{}^\nu - \frac{1}{2}\delta_\mu{}^\nu \delta R = \delta T_\mu{}^\nu. \tag{4.2}$$

Poddajmy wariacji tensor energii-pędu (2.7)

$$\delta T_\mu{}^\nu = (\epsilon + p)(u_\mu \delta u^\nu + u^\nu \delta u_\mu) + (\delta\epsilon + \delta p)u_\mu u^\nu - p\delta_\mu{}^\nu. \tag{4.3}$$

Korzystając ze wzorów na składowe u^μ (2.8) oraz δu^μ, wyliczamy

$$\delta T_0{}^0 = \delta\epsilon, \quad \delta T_0{}^i = a(\epsilon + p)\delta u^i, \quad \delta T_i{}^k = -\delta_i{}^k \delta p. \tag{4.4}$$

Dla małych wielkości δp i $\delta\epsilon$ możemy napisać, że $\delta p = \frac{dp}{d\epsilon}\delta\epsilon$, co, po uwzględnieniu wzorów (4.4), prowadzi do związku

$$\delta T_i^{\ k} = -\delta_i^{\ k}\frac{dp}{d\epsilon}\delta T_0^{\ 0}. \tag{4.5}$$

Perturbacje koneksji afinicznej i tensora Ricciego dają się wyrazić przez pochodne kowariantne zaburzenia $h_{\mu\nu}$ metryki czasoprzestrzennej

$$\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\left(h_{\mu}{}^{\lambda}{}_{;\nu} + h_{\nu}{}^{\lambda}{}_{;\mu} + h_{\mu\nu}{}^{;\lambda}\right), \tag{4.6a}$$

$$\delta R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(h_{\mu}{}^{\rho}{}_{;\nu\rho} + h_{\nu}{}^{\rho}{}_{;\mu\rho} - h_{\mu\nu}{}^{;\rho}{}_{;\rho} - h_{;\mu\nu}\right), \tag{4.6b}$$

gdzie $\boldsymbol{\mathcal{T}}_{;\mu}$ oznacza pochodną kowariantną tensora $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ względem współrzędnej x^{μ} w niezaburzonej czasoprzestrzeni FLRW z metryką (2.5). Z relacji

$$R_{\mu}^{\ \nu} + \delta R_{\mu}^{\ \nu} = \left(R_{\mu\rho} + \delta R_{\mu\rho}\right)\left(g^{\rho\nu} + \delta g^{\rho\nu}\right) \tag{4.7}$$

wynika postać perturbacji mieszanego tensora Ricciego

$$\delta R_{\mu}^{\ \nu} = g^{\nu\rho}\delta R_{\mu\rho} - h^{\nu\rho}R_{\mu\rho}. \tag{4.8}$$

Proste przekształcenia formuły (4.8), z wykorzystaniem wzorów (4.6b) i (2.10), prowadzą do następujących wyrażeń na poprawki do mieszanych składowych tensora Ricciego i skalara krzywizny

$$\delta R_0^{\ 0} = -\frac{1}{2a^2}\left(\mathsf{h}'' + \frac{a'}{a}\mathsf{h}'\right), \tag{4.9a}$$

$$\delta R_i^{\ 0} = -\frac{1}{2a^2}\left(\mathsf{h}_{|i} - \mathsf{h}_i{}^{l}{}_{|l}\right)', \tag{4.9b}$$

$$\begin{aligned}\delta R_i^{\ k} = &-\frac{1}{2a^2}\left[\mathsf{h}_i^{\ k\prime\prime} + \frac{a'}{a}\left(2\mathsf{h}_i^{\ k} + \mathsf{h}\delta_i^{\ k}\right)'\right]\\ &-\frac{1}{2a^2}\left(\mathsf{h}_i{}^{l|k}{}_{|l} + \mathsf{h}^{k}{}_{l|i}{}^{|l} - \mathsf{h}_i{}^{k|l}{}_{|l} - \mathsf{h}_{|i}{}^{|k} - 4K\mathsf{h}_i^{\ k}\right),\end{aligned} \tag{4.9c}$$

$$\delta R = -\frac{1}{a^2}\left(\mathsf{h}'' + 3\frac{a'}{a}\mathsf{h}' + \mathsf{h}_l{}^{k|l}{}_{|k} - \mathsf{h}_{|l}{}^{|l} - 2K\mathsf{h}\right). \tag{4.9d}$$

Tensor h_{ik} jest poprawką do przestrzennej części metryki Robertsona–Walkera ($\mathsf{h}_{ik} = -a^{-2}h_{ik}$, $\mathsf{h} = \mathsf{g}^{ik}\mathsf{h}_{ik}$), a $\boldsymbol{\mathcal{T}}_{|i}$ oznacza pochodną kowariantną tensora $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ względem współrzędnej x^i, w trójwymiarowej przestrzeni z metryką (2.2).

Ze wzoru (4.5) otrzymujemy dwa niezależne równania: odpowiednio dla składowych $i \neq k$ oraz $i = k$, podstawiając perturbacje składowych tensora energii-pędu $\delta T_{\mu}{}^{\nu}$ wyliczone ze zlinearyzowanych równań Einsteina (4.2), wyrażonych uprzednio przez perturbacje (4.9)

$$\mathsf{h}_i{}^{k\prime\prime} + 2\frac{a'}{a}\mathsf{h}_i{}^{k\prime} + \mathsf{h}_i{}^{l|k}{}_{|l} + \mathsf{h}^k{}_{l|i}{}^{|l} - \mathsf{h}_i{}^{k|l}{}_{|l} - \mathsf{h}_{|i}{}^{|k} - 4K\mathsf{h}_i{}^k = 0, \tag{4.10a}$$

$$\mathsf{h}'' + \left(2 + 3\frac{dp}{d\epsilon}\right)\frac{a'}{a}\mathsf{h}' + \frac{1}{2}\left(1 + 3\frac{dp}{d\epsilon}\right)\left(\mathsf{h}_l{}^{k|l}{}_{|k} - \mathsf{h}_{|l}{}^{|l} - 2K\mathsf{h}\right) = 0. \tag{4.10b}$$

Perturbacje gęstości energii i prędkości materii wyliczamy ze wzorów (4.4)

$$\delta\epsilon = \delta T_0{}^0 = \delta R_0{}^0 - \frac{1}{2}\delta R, \tag{4.11a}$$

$$\delta v^i = a\delta u^i = \frac{1}{\epsilon + p}\delta T_0{}^i = \frac{1}{\epsilon + p}\delta R_0{}^i. \tag{4.11b}$$

Podstawiając do równań (4.11) wariacje składowych tensora Ricciego (4.9a), (4.9b) i skalara krzywizny (4.9d), dostajemy

$$\delta\epsilon = \frac{1}{2a^2}\left(2\frac{a'}{a}\mathsf{h}' + \mathsf{h}_l{}^{k|l}{}_{|k} - \mathsf{h}_{|l}{}^{|l} - 2K\mathsf{h}\right), \tag{4.12a}$$

$$\delta v^i = \frac{1}{2a^2(\epsilon + p)}\left(\mathsf{h}^{|i} - \mathsf{h}_l{}^{i|l}\right)'. \tag{4.12b}$$

Układ równań (4.10), uzupełniony równaniem stanu materii wypełniającej wszechświat, opisuje dynamikę skalarnych, wektorowych i tensorowych (zob. rozdz. 3) zaburzeń modeli FLRW. W następnym rozdziale wyprowadzimy równania propagacji zaburzeń skalarnych (tzw. równania Lifszyca) w postaci równań różniczkowych cząstkowych — bez rozkładu perturbacji metryki na funkcje własne operatora Laplace'a, jak miało to miejsce w oryginalnych pracach [1, 2].

Rozdział 5

Zaburzenia skalarne — Równania Lifszyca w postaci równań różniczkowych cząstkowych

W liniowej teorii perturbacji kosmologicznych równania dynamiczne dla zaburzeń skalarnych, wektorowych i tensorowych pola grawitacyjnego i materii separują się. Możemy zatem badać dynamikę każdego z tych zaburzeń oddzielnie. W rozdziale tym wyprowadzimy równania dynamiki dla zaburzeń skalarnych pola grawitacyjnego (tzw. równania Lifszyca), nie dokonując uprzednio rozkładu harmonicznego perturbacji metryki, jak to uczyniono w oryginalnych pracach [1, 2].

Do równań perturbacyjnych (4.10) podstawiamy skalarne zaburzenie ${}^{(s)}\mathsf{h}_i{}^k$ metryki Robertsona–Walkera w układzie synchronicznym, które zgodnie ze wzorem (3.9) ma postać

$$ {}^{(s)}\mathsf{h}_i{}^k = \mathcal{E}_{|i}{}^{|k} + \frac{1}{3}\delta_i{}^k\left(\mathcal{C} - \mathcal{E}_{|l}{}^{|l}\right), \quad {}^{(s)}\mathsf{h} = {}^{(s)}\mathsf{h}_{ik}\mathsf{g}^{ik} = \mathcal{C} \tag{5.1} $$

i otrzymujemy równania propagacji dla pól $\mathcal{C}$ i $\mathcal{E}$

$$ \left(\mathcal{E}'' + 2aH\mathcal{E}' - 4K\mathcal{E} - \frac{1}{3}\mathcal{C}\right)_{|m}{}^{|n} + \\ + \mathcal{E}_{|ipml}\mathsf{g}^{in}\mathsf{g}^{pl} - \frac{2}{3}\mathcal{E}_{|iplm}\mathsf{g}^{ip}\mathsf{g}^{ln} + \mathcal{E}_{|impl}\left(\mathsf{g}^{il}\mathsf{g}^{np} - \mathsf{g}^{in}\mathsf{g}^{pl}\right) = 0, \tag{5.2a} $$

$$\begin{aligned}&\mathcal{C}'' + \left(2+3c_s^2\right) aH\mathcal{C}' + \\&\quad + \frac{1}{6}\left(1+3c_s^2\right)\left[\mathcal{E}_{|lhsm}\left(3\mathsf{g}^{lm}\mathsf{g}^{hs} - \mathsf{g}^{lh}\mathsf{g}^{sm}\right) - 2\left(\mathcal{C}_{|l}{}^{|l} + 3K\mathcal{C}\right)\right] = 0,\end{aligned} \tag{5.2b}$$

gdzie $m \neq n$, $H = a'/a^2$ jest funkcją Hubble'a, $c_s^2 = p'/\epsilon'$ to kwadrat prędkości dźwięku w płynie kosmicznym.
Korzystając z tożsamości

$$\mathcal{E}_{|ipml}\mathsf{R}^{lipn} + \mathcal{E}_{|impl}\mathsf{R}^{lnip} = 4K^2\mathcal{E}_{|m}{}^{|n}, \tag{5.3a}$$

$$\mathcal{E}_{|lhsm}\mathsf{R}^{lsnh} = 2K^2\mathcal{E}_{|m}{}^{|n}, \tag{5.3b}$$

dla dowolnego pola skalarnego $\mathcal{E}$ w trójwymiarowej przestrzeni o stałej krzywiźnie, oraz z postaci tensora krzywizny Riemanna tej przestrzeni, danej wzorem (2.3a), sprowadzamy równania Lifszyca (5.2) do prostszej postaci

$$m \neq n, \quad \left(\mathcal{E}'' + 2aH\mathcal{E}' + \frac{1}{3}\left(\Delta\mathcal{E} - \mathcal{C}\right)\right)_{|m}^{\;|n} = 0, \tag{5.4a}$$

$$\mathcal{C}'' + \left(2+3c_s^2\right) aH\mathcal{C}' + \frac{1}{3}\left(1+3c_s^2\right)\left[\left(\Delta + 3K\right)\left(\Delta\mathcal{E} - \mathcal{C}\right)\right] = 0, \tag{5.4b}$$

gdzie $\Delta f = \mathsf{g}^{ik} f_{|ik}$ jest laplasjanem pola skalarnego f w trójwymiarowej przestrzeni o stałej krzywiźnie.

Zauważamy, że, aby równanie (5.4a) postaci $f(\mathbf{x})_{|m}{}^{|n} = 0$ było spełnione w dowolnym układzie współrzędnych, funkcja $f(\mathbf{x})$ musi być sumą funkcji liniowych od poszczególnych współrzędnych $f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{3} l_i(x^i)$. Z drugiej strony, perturbacja $f(\mathbf{x})$ powinna być ograniczona, a jej średnia przestrzenna równa zeru. Jedyną funkcją spełniającą te warunki jest $f(\mathbf{x}) = 0$. Zgodnie z powyższym rozumowaniem, pierwsze równanie Lifszyca (5.4a) możemy przepisać w postaci

$$\mathcal{E}'' + 2aH\mathcal{E}' + \frac{1}{3}\left(\Delta\mathcal{E} - \mathcal{C}\right) = 0. \tag{5.5}$$

Układ równań różniczkowych cząstkowych (5.4b, 5.5) jest odpowiednikiem układu równań różniczkowych zwyczajnych (8.4) na funkcje $\lambda(\eta)$ i $\mu(\eta)$, wyprowadzonych w pracy [2]. Łatwo można sprawdzić, że układy te wiąże transformacja

$$\Delta\mathcal{E} \to -\lambda(\eta)Q(\mathbf{k},\mathbf{x}), \quad \mathcal{C} \to \mu(\eta)Q(\mathbf{k},\mathbf{x}), \tag{5.6}$$

gdzie $\lambda(\eta)$ i $\mu(\eta)$ są dowolnymi funkcjami czasu konforemnego η, a funkcja $Q(\mathbf{k},\mathbf{x})$ jest rozwiązaniem równania Helmholtza

$$\Delta Q(\mathbf{k},\mathbf{x}) = -\left(|\mathbf{k}|^2 - K\right) Q(\mathbf{k},\mathbf{x}). \tag{5.7}$$

Podstawiając zależności (5.1) do wzorów (4.12), znajdujemy wyrażenia na skalarne zaburzenia gęstości energii $\delta\epsilon$ i prędkości materii δv^i

$$\delta\epsilon = \frac{1}{3a^2}\Big[\,(\Delta + 3K)\,(\Delta\mathcal{E} - \mathcal{C}) + 3aH\mathcal{C}'\Big], \tag{5.8a}$$

$$\delta v^i = \frac{1}{3a^2(\epsilon + p)}\Big[\mathcal{C}' - (\Delta + 3K)\mathcal{E}'\Big]^{|i}. \tag{5.8b}$$

System (5.4b, 5.5) jest układem dwóch sprzężonych równań różniczkowych cząstkowych drugiego rzędu, na funkcje $\mathcal{C}$ i $\Delta\mathcal{E}$. Układ ten jest równoważny równaniu różniczkowemu cząstkowemu czwartego rzędu, które, w związku z pozostawioną w układzie synchronicznym swobodą cechowania, posiada rozwiązania fikcyjne. Rozwiązania te nie opisują fizycznych stopni swobody pola zaburzeń i mogą być kreowane lub eliminowane w wyniku transformacji współrzędnych, zachowujących synchroniczność układu odniesienia. Z tego samego powodu zaburzenie gęstości energii $\delta\epsilon$ dane wzorem (5.8a) zależy od wyboru hiperpowierzchni jednoczesności w układzie synchronicznym, a zatem zawiera składową fikcyjną. Pomimo iż postać fikcyjnych zaburzeń metryki w układzie synchronicznym została wyliczona w pracy Lifszyca [1], interpretacja rozwiązań równań perturbacyjnych przez dłuższy czas nastręczała trudności. Rozwiązanie tego problemu zostało podane przez Goldę i Woszczynę [33], którzy wyeliminowali znane fikcyjne zaburzenia metryki, stosując klasyczną metodę redukcji rzędu równania różniczkowego.

W następnym rozdziale szerzej omówimy problem swobody gauge w liniowej teorii perturbacji kosmologicznych zarówno w przypadku ogólnym, jak i w układzie synchronicznym. Dokonamy eliminacji fikcyjnych stopni swobody skalarnego zaburzenia metryki poprzez transformację do nowych zmiennych pola zaburzeń $\{\mathcal{C}, \mathcal{E}\} \to \{\Phi, \Psi\}$ — inwariantów transformacji cechowania. Równania Lifszyca (5.4b, 5.5) zapiszemy w postaci jawnie gauge-inwariantnej. Skonstruujemy gauge-inwariantną skalarną zmienną perturbacyjną, która spełnia równanie d'Alemberta w pewnej konforemnej przestrzeni Robertsona–Walkera.

Rozdział 6

Gauge-inwariantne zaburzenia skalarne

Liniowa teoria perturbacji kosmologicznych dopuszcza dowolne infinitezymalne transformacje współrzędnych postaci

$$x^\mu \to \tilde{x}^\mu = x^\mu + \xi^\mu \delta\tau, \tag{6.1}$$

które prowadzą do matematycznie różnych rozwiązań równań Einsteina, opisujących tą samą czasoprzestrzeń. Niejednoznaczność rozwiązań równań Einsteina jest analogiczna do występującej w teorii elektromagnetyzmu dla potencjału wektorowego A_μ. Transformacja $A_\mu \to \tilde{A}_\mu = A_\mu + \partial V/\partial x^\mu$, gdzie V jest dowolną funkcją współrzędnych, nie zmienia pola elektromagnetycznego. Transformacje (6.1), podobnie jak te ostatnie, nazywamy transformacjami cechowania lub transformacjami gauge. Jak wiemy z prac Lifszyca [1, 2], wybór układu synchronicznego nie eliminuje w pełni swobody cechowania, w wyniku czego równania propagacji (5.4b, 5.5) skalarnego zaburzenia pola grawitacyjnego posiadają fikcyjne rozwiązania. Rozwiązania te mogą być kreowane lub eliminowane w wyniku transformacji współrzędnych, (6.1) zachowujących synchroniczność układu odniesienia. Dla poprawnej interpretacji wyników konieczna jest identyfikacja i eliminacja rozwiązań fikcyjnych.

Wyznaczmy postać fikcyjnego skalarnego zaburzenie pola grawitacyjnego ${}^{(g)}h_{\mu\nu} = {}^{(g)}\delta g_{\mu\nu}$, indukowanego infinitezymalną transformacją współrzędnych (6.1), gdzie ξ^μ są czterema niezależnymi funkcjami czasu konforemnego η i współrzędnych przestrzennych $\mathbf{x}$, a $\delta\tau$ jest małym parametrem (małym w takim sensie, w jakim małe są składowe zaburzenia $h_{\mu\nu}$ metryki). W wyniku transformacji (6.1) składowe dowolnego tensora $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ przekształcają się zgodnie z formułą [6]

$$\mathcal{T}^{\mu_1\ldots\mu_m}{}_{\nu_1\ldots\nu_n} \to \tilde{\mathcal{T}}^{\mu_1\ldots\mu_m}{}_{\nu_1\ldots\nu_n} = \mathcal{T}^{\mu_1\ldots\mu_m}{}_{\nu_1\ldots\nu_n} - \mathcal{L}_{\boldsymbol{\xi}} T^{\mu_1\ldots\mu_m}{}_{\nu_1\ldots\nu_n}\delta\tau, \tag{6.2a}$$

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{\xi}}\mathcal{T}^{\mu_1\ldots\mu_m}{}_{\nu_1\ldots\nu_n} = \mathcal{T}^{\mu_1\ldots\mu_m}{}_{\nu_1\ldots\nu_n;\sigma}\xi^\sigma - \sum_{i=1}^{m}\mathcal{T}^{\mu_1\ldots\overset{i}{\sigma}\ldots\mu_m}{}_{\nu_1\ldots\nu_n}\xi^{\mu_i}{}_{;\sigma} + \\ + \sum_{k=1}^{n}\mathcal{T}^{\mu_1\ldots\mu_m}{}_{\nu_1\ldots\underset{k}{\sigma}\ldots\nu_n}\xi^\sigma{}_{;\nu_k}, \quad (6.2b)$$

gdzie $\mathcal{L}_{\boldsymbol{\xi}}\mathcal{T}^{\mu_1\ldots\mu_m}{}_{\nu_1\ldots\nu_n}$ jest pochodną Liego tensora $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ w kierunku pola $\boldsymbol{\xi}$, równą zmianie składowych tensora $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ w wyniku infinitezymalnego przesunięcia (o $\delta\tau$) wzdłuż krzywej całkowej pola wektorowego $\boldsymbol{\xi}$. Pochodną kowariantną tensora $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ względem współrzędnej x^σ, w niezaburzonej czasoprzestrzeni Robertsona–Walkera, oznaczmy przez $\boldsymbol{\mathcal{T}}_{;\sigma}$. Fikcyjne zaburzenie metryki $g_{\mu\nu}$ wyliczamy zgodnie ze wzorami (6.2)

$$^{(g)}h_{\mu\nu} = -\mathcal{L}_{\boldsymbol{\xi}}g_{\mu\nu}\delta\tau = -(\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu})\delta\tau. \quad (6.3)$$

Swoboda gauge (6.1) manifestuje się w postaci czterech dowolnych, niezależnych funkcji ξ^μ (czterech fikcyjnych stopni swobody) w metryce. Z rozkładu pola wektorowego ξ^i na część podłużną i poprzeczną

$$\xi^\mu = \left(\xi^0, \xi^i\right) = \left(\xi^0, \xi^{|i}\right) + \left(0, \bar{\xi}^i\right), \quad (6.4)$$

gdzie $\bar{\xi}^i{}_{|i} = 0$, a ξ jest rozwiązaniem równania $\xi^i{}_{|i} = \xi^{|i}{}_{|i}$, widać, iż tylko dwa z czterech fikcyjnych stopni swobody (dwie niezależne funkcje ξ^0 i ξ) są skalarne (w ramach klasyfikacji przedstawionej w rozdziale 3), pozostałe dwa (dwie niezależne składowe pola wektorowego $\bar{\xi}^i$ o znikającej dywergencji) są wektorowe. Dla rozważanych przez nas skalarnych zaburzeń fikcyjnych metryki dostajemy ze wzoru (6.3)

$$^{(g)}h_{00} = -a^2\left(2\frac{a'}{a}\xi^0 + 2\xi^{0\prime}\right)\delta\tau, \quad (6.5a)$$

$$^{(g)}h_{0i} = -a^2\left(\xi^0 - \xi'\right)_{|i}\delta\tau, \quad (6.5b)$$

$$^{(g)}h_{ik} = -a^2\left(-2\frac{a'}{a}\mathrm{g}_{ik}\xi^0 - 2\xi_{|ik}\right)\delta\tau. \quad (6.5c)$$

Zgodnie z kowariantnym rozkładem (3.9) identyfikujemy fikcyjne składowe perturbacji metryki

$$ {}^{(g)}\mathcal{A} = -2\left(\frac{a'}{a}\xi^0 + \xi^{0\prime}\right)\delta\tau, \tag{6.6a} $$

$$ {}^{(g)}\mathcal{B} = \left(\xi^0 - \xi'\right)\delta\tau, \tag{6.6b} $$

$$ {}^{(g)}\mathcal{C} = -2\left(3\frac{a'}{a}\xi^0 + \xi_{|l}{}^{|l}\right)\delta\tau, \tag{6.6c} $$

$$ {}^{(g)}\mathcal{E} = -2\xi\delta\tau. \tag{6.6d} $$

Korzystając ze wzorów (6.6), znajdujemy postać transformacji cechowania, która prowadzi od dowolnego układu współrzędnych do układu synchronicznego ($\mathcal{A} = \mathcal{B} = 0$)

$$ \eta \to \eta + \frac{1}{2a}\int \mathcal{A} a d\eta + \frac{1}{a}\mathcal{G}_1(\mathbf{x}), \tag{6.7a} $$

$$ x^i \to x^i + \mathsf{g}^{ik}\left[\int\left(\mathcal{B} + \frac{1}{2a}\int \mathcal{A} a d\eta\right)d\eta + \mathcal{G}_1(\mathbf{x})\int\frac{d\eta}{a} + \mathcal{G}_2(\mathbf{x})\right]_{|k}, \tag{6.7b} $$

gdzie $\mathcal{G}_1(\mathbf{x})$ i $\mathcal{G}_2(\mathbf{x})$ są dowolnymi niezależnymi funkcjami współrzędnych przestrzennych. Zawężona do układu synchronicznego klasa skalarnych transformacji cechowania spełnia warunki

$$ \xi^0\delta\tau = \frac{1}{a}\mathcal{G}_1(\mathbf{x}), \tag{6.8a} $$

$$ \xi\delta\tau = \mathcal{G}_1(\mathbf{x})\int\frac{d\eta}{a} + \mathcal{G}_2(\mathbf{x}). \tag{6.8b} $$

Zauważamy, że transformacja (6.7) nie eliminuje w pełni swobody gauge, gdyż wprowadza dwie nowe, dowolne funkcje $\mathcal{G}_i(\mathbf{x})$ i $\mathcal{G}_2(\mathbf{x})$, które określają geometrię hiperpowierzchni stałego czasu w układzie synchronicznym.

W dalszej części pracy, o ile nie zostanie wyraźnie wskazane o jakie transformacje współrzędnych chodzi, terminem transformacje gauge będziemy nazywać klasę transformacji skalarnych (6.1) spełniających warunki (6.8), czyli takich, które zachowują synchroniczność układu odniesienia; wielkościami gauge-inwariantnymi będziemy nazywać wielkości niezmiennicze względem tych transformacji, a składowymi fikcyjnymi wielkości, które dzięki tym transformacjom można wyeliminować.

Dwóm fizycznym stopniom swobody skalarnego zaburzenia metryki czasoprzestrzennej (zob. rozdz. 3) odpowiadają dwie niezależne gauge-inwariantne wielkości [12, 14, 39], które konstruujemy w postaci kombinacji perturbacji $\mathcal{C}$ i $\mathcal{E}$ metryki i ich pochodnych. Definiujemy dwie zmienne pomocnicze $\mathcal{W}$ i $\mathcal{V}$

$$ \mathcal{W} = \Delta\mathcal{E} - \mathcal{C}, \quad \mathcal{V} = -3aH\mathcal{E}', \tag{6.9} $$

których składowe fikcyjne, zgodnie ze wzorami (6.6) i (6.8), mają postać

$$
{}^{(g)}\mathcal{W} = {}^{(g)}\mathcal{V} = 6H\mathcal{G}_1(\mathbf{x}). \tag{6.10}
$$

Zauważamy, że funkcje

$$
\begin{aligned}
{}^{(i)}\phi &= \mathcal{V} - \frac{H}{H^{(i)}}\mathcal{V}^{(i)}, && (6.11a)\\
{}^{(i)}\upsilon &= \mathcal{W} - \frac{H}{H^{(i)}}\mathcal{W}^{(i)}, && (6.11b)\\
\psi &= \mathcal{W} - \mathcal{V}, && (6.11c)
\end{aligned}
$$

gdzie $f^{(i)}$ jest i-tą pochodną funkcji f względem czasu konforemnego η, są wielkościami gauge-inwariantnymi (składowe fikcyjne tych funkcji są równe zeru, więc same funkcje są niezmiennicze względem transformacji gauge).

Wybieramy bazę w dwuwymiarowej przestrzeni inwariantów transformacji cechowania w postaci pary $\{\phi, \psi\} = \left\{ {}^{(1)}\phi, \psi \right\}$. Każdą zmienną gauge-inwariantną możemy zapisać w postaci kombinacji liniowej zmiennych $\{\phi, \psi\}$ i ich pochodnych, na przykład

$$
\begin{aligned}
{}^{(1)}\upsilon &= \phi + \psi - \frac{H}{H'}\psi', && (6.12a)\\
{}^{(2)}\upsilon &= \phi + \psi + \frac{1}{H''}\left(H'\phi' - H\psi''\right). && (6.12b)
\end{aligned}
$$

Łatwo można sprawdzić następujące związki

$$
\begin{aligned}
\Phi &= -\frac{1}{3aH}\frac{H'}{H}\phi = -\frac{1}{a}\left(a\mathcal{E}'\right)', && (6.13a)\\
\Psi &= \frac{1}{3}\psi = \frac{1}{3}(\Delta\mathcal{E} - \mathcal{C}) + aH\mathcal{E}', && (6.13b)
\end{aligned}
$$

gdzie $\{\Phi, \Psi\}$ jest bazą gauge-inwariantnych potencjałów Bardeena [12]. W dowolnym układzie współrzędnych (przy pełnej swobodzie cechowania) potencjały (6.13) przyjmują formę

$$
\begin{aligned}
\Phi &= \mathcal{A} + \frac{1}{a}\left(a\left(2\mathcal{B} - \mathcal{E}'\right)\right)', && (6.14a)\\
\Psi &= \frac{1}{3}(\Delta\mathcal{E} - \mathcal{C}) - aH\left(2\mathcal{B} - \mathcal{E}'\right). && (6.14b)
\end{aligned}
$$

Funkcje $\{\Phi, \Psi\}$ odgrywają ważną rolę w teorii perturbacji kosmologicznych, gdyż, z jednej strony, stanowią proste gauge-inwariantne kombinacje perturbacji metryki, a z drugiej posiadają prostą interpretację fizyczną — są równe perturbacjom metryki w cechowaniu podłużnym ($\mathcal{B} = \mathcal{E} = 0$) [14]. W przypadku płynów doskonałych (diagonalnego tensora napięć) funkcje Φ i Ψ są sobie równe, a metryka przyjmuje postać konforemnie newtonowską. Dlatego funkcje Φ i Ψ często nazywa się relatywistycznymi potencjałami grawitacyjnymi, a cechowanie podłużne cechowaniem konforemnie newtonowskim.

Równania Lifszyca (5.4), opisujące ewolucję zaburzeń skalarnych w układzie synchronicznym, przekształcamy do postaci jawnie gauge-inwariantnej, wyrażając je przez niezmiennicze potencjały Bardeena (6.13)

$$\Phi = \Psi, \tag{6.15a}$$

$$\begin{aligned} \Phi'' + 3aH\left(1 + 3c_s^2\right)\Phi' - c_s^2\Delta\Phi + \\ + \left[2\,(aH)' + \left(1 + 3c_s^2\right)\left(a^2H^2 - K\right)\right]\Phi = 0. \end{aligned} \tag{6.15b}$$

Wzór (6.15a) wyraża warunek izotropii ciśnienia kosmicznego płynu, natomiast równanie (6.15b) determinuje ewolucję adiabatycznych zaburzeń skalarnych w ekspandującym wszechświecie, które w tym modelu opisywane są tylko jednym polem skalarnym Φ [12, 31, 14].

Liniowa teoria zaburzeń kosmologicznych poświęca szczególną uwagę badaniu wielkości, które są niezmiennicze względem transformacji cechowania (6.1), gdyż jedynie takie wielkości są odpowiednimi kandydatami na obserwable [18, 40]. W dalszej części pracy zajmiemy się pewną klasą gauge-inwariantnych zmiennych perturbacyjnych — takich, które spełniają równanie d'Alemberta. Sachs i Wolfe [3] w 1967 roku jako pierwsi dowiedli, że istnieje skalarna zmienna perturbacyjna E, która spełnia równanie falowe w przestrzennie płaskim modelu FLRW wypełnionym promieniowaniem. Wynik ten został potwierdzony w późniejszych pracach [4, 9, 11, 28]. Golda i Woszczyna [33, 29] zauważyli, że twierdzenie Sachsa–Wolfe'a powinno mieć uogólnienie na modele FLRW o dowolnej krzywiźnie przestrzennej, wypełnione płynem doskonałym o barotropowym równaniu stanu.

Przeprowadzimy teraz dowód uogólnionego twierdzenia Sachsa–Wolfe'a. W tym celu przedstawimy prostą konstrukcję gauge-inwariantnej zmiennej falowej z zaburzenia gęstości energii $\delta\epsilon$ w układzie synchronicznym. Skorzystamy tutaj z przeprowadzonej wcześniej analizy zaburzeń fikcyjnych.

Perturbacja gęstości energii $\delta\epsilon$ dana wzorem (5.8a) zależy od wyboru hiperpowierzchni stałego czasu w układzie synchronicznym. Składową fikcyjną tej wielkości otrzymujemy, korzystając ze wzorów (6.2b, 6.8a), w postaci

$$^{(g)}\delta\epsilon = -\mathcal{L}_{\boldsymbol{\xi}}\epsilon\delta\tau = -\epsilon'\xi^0\delta\tau = -a^{-1}\epsilon'\mathcal{G}_1(\mathbf{x}), \tag{6.16}$$

gdzie $\mathcal{G}_1(\mathbf{x})$ jest dowolną funkcją współrzędnych przestrzennych $\mathbf{x}$. Zauważamy, iż wielkość

$$\frac{\delta\epsilon}{\epsilon' a^{-1}} \to \frac{\delta\epsilon}{\epsilon' a^{-1}} + \mathcal{G}_1(\mathbf{x}) \tag{6.17}$$

posiada składową fikcyjną, która zależy tylko od współrzędnych przestrzennych, więc różniczkowanie względem czasu konforemnego η usunie ją. Twierdzimy, iż nowa zmienna postaci

$$^{(gi)}\delta = \mathcal{F}(\eta)\partial_\eta \frac{\delta\epsilon}{\epsilon' a^{-1}}, \tag{6.18}$$

z dowolną funkcją tła $\mathcal{F}(\eta)$, jest wielkością gauge-inwariantną. Wybór czynnika $\mathcal{F}(\eta) = aH^2$ sprawia, że wielkość (6.18) jest gauge-inwariantną zmienną falową

$$\hat{\delta} = aH^2\partial_\eta \frac{\delta\epsilon}{\epsilon' a^{-1}}. \tag{6.19}$$

Wykażmy, że istnieje jednoznaczny rozkład zmiennej perturbacyjnej $\hat{\delta}$ w bazie niezmienniczych potencjałów Bardeena $\{\Phi, \Psi\}$ (6.13). Rozkład ten stanowi niezależny dowód niezmienniczości $\hat{\delta}$ względem dowolnych transformacji postaci (6.1). Korzystając ze wzorów (6.13) i równań Lifszyca (6.15), przedstawiamy zmienną $\hat{\delta}$ w formie kombinacji liniowej relatywistycznego potencjału grawitacyjnego Φ i jego pochodnych względem czasu konforemnego η, ze współczynnikami ϕ_i zależnymi jedynie od funkcji tła

$$\hat{\delta} = \sum_{i=0}^{3} \phi_i \partial_\eta^i \Phi, \tag{6.20a}$$

$$\begin{aligned}\phi_0 = \frac{1}{54 c_s^3(\epsilon+p)} \Big\{ & 12 c_s' a H \left[6H^2 - (2\epsilon+3p)\right] + \\ & - c_s a^2 \Big[36\left(2+3c_s^2\right)H^4 - 9\Big(\left(2+3c_s^2\right)(\epsilon+3p) + \\ & -4c_s^2(2\epsilon+3p)\Big)H^2 - (\epsilon+3p)(2\epsilon+3p)\Big]\Big\},\end{aligned} \tag{6.20b}$$

$$\phi_1 = \frac{18 c_s' H^2 - c_s a H\left[3\left(8+9c_s^2\right)H^2 - (2\epsilon+3p)\right]}{9c_s^3(\epsilon+p)}, \tag{6.20c}$$

$$\phi_2 = \frac{12 c_s' H - c_s a\left[6\left(5+3c_s^2\right)H^2 + (\epsilon+3p)\right]}{18 c_s^3 a(\epsilon+p)}, \tag{6.20d}$$

$$\phi_3 = -\frac{H}{3c_s^2 a(\epsilon+p)}. \tag{6.20e}$$

W przypadku stałej prędkości dźwięku ($c_s = \text{const.}$) współczynniki rozkładu (6.20a) przyjmują prostszą postać

$$\phi_0 = -\frac{\left(2+3c_s^2\right) a^2 \left(3H^2-\epsilon\right)\left[12H^2+\left(1+3c_s^2\right)\epsilon\right]}{54c_s^2\left(1+c_s^2\right)\epsilon}, \tag{6.21a}$$

$$\phi_1 = -\frac{aH\left[3\left(8+9c_s^2\right)H^2-\left(2+3c_s^2\right)\epsilon\right]}{9c_s^2\left(1+c_s^2\right)\epsilon}, \tag{6.21b}$$

$$\phi_2 = -\frac{6\left(5+3c_s^2\right)H^2+\left(1+3c_s^2\right)\epsilon}{18c_s^2\left(1+c_s^2\right)\epsilon}, \tag{6.21c}$$

$$\phi_3 = -\frac{H}{3c_s^2\left(1+c_s^2\right)a\epsilon}. \tag{6.21d}$$

Golda i Woszczyna [29] sformułowali tezę, że zmienna perturbacyjna $\hat{\delta}$, związana z zaburzeniem gęstości w układzie synchronicznym transformacją (6.19), spełnia równanie propagacji

$$\hat{\delta}'' + \left(2\frac{\mathsf{a}'}{\mathsf{a}} - \frac{c_s'}{c_s}\right)\hat{\delta}' - c_s^2\Delta\hat{\delta} = 0, \tag{6.22}$$

gdzie

$$\mathsf{a} = a\sqrt{\frac{\epsilon+p}{3c_sH^2}}. \tag{6.23}$$

Słuszność tej tezy argumentują na podstawie badań ewolucji modów w rozwinięciu fourierowskim perturbacji $\hat{\delta}$ [29], a więc szczególnych klas rozwiązań separowalnych (stanowiących iloczyn funkcji czasu i funkcji zmiennych przestrzennych). Jeżeli postawiona teza jest prawdziwa dla dowolnych zaburzeń skalarnych, to równania perturbacyjne Lifszyca (6.15), traktowane jako równania cząstkowe, powinny dać się sprowadzić do równania (6.22). Ścisły dowód, który przedstawiamy w tej pracy, nie nastręcza istotnych trudności pojęciowych, jednak ze względu na mnogość obliczeń wymaga zastosowania systemów algebry komputerowej. Do niniejszej pracy dołączamy program w języku *Mathematica*, zawierający implementację tego dowodu.

Wprowadzając nową zmienną ζ (tzw. *konforemny czas akustyczny*) związaną z czasem konforemnym η wzorem $d\zeta = c_s d\eta$, sprowadzamy równanie (6.22) do postaci

$$\hat{\delta}^{\backprime\backprime} + 2\frac{\mathsf{a}^{\backprime}}{\mathsf{a}}\hat{\delta}^{\backprime} - \Delta\hat{\delta} = 0, \tag{6.24}$$

gdzie symbolem $^{\backprime}$ przy funkcji oznaczamy jej pochodną względem czasu ζ. Formuła (6.24) jest równaniem d'Alemberta $\Box\hat{\delta} \equiv \hat{\delta}_{;\mu}{}^{;\mu} = 0$ w czasoprzestrzeni Robertsona–Walkera z formą metryczną postaci

$$ds^2 = \mathsf{a}^2\left(d\zeta^2 - \mathsf{g}_{ik}dx^i dx^k\right). \tag{6.25}$$

Udowodniliśmy zatem:

Twierdzenie. *Dla dowolnego modelu Robertsona–Walkera wypełnionego barotropowym płynem doskonałym istnieje gauge-inwariantna skalarna zmienna perturbacyjna, która spełnia kanoniczne równanie d'Alemberta w konforemnej przestrzeni Robertsona–Walkera (6.25), z czynnikiem skali* a *danym wzorem (6.23).*

Wniosek. *Perturbacja $\hat{\delta}$ propaguje się w czasoprzestrzeni (6.25) jak minimalnie sprzężone bezmasowe pole skalarne.*

Podobną konstrukcję *geometrii akustycznej* (6.25), w postaci odpowiedniej transformacji Darboux zmiennej perturbacyjnej i reparametryzacji czasu $\eta \to \zeta$, Golda i Woszczyna [29] proponują w innych gauge-inwariantnych formalizmach teorii perturbacji kosmologicznych [20, 12, 31, 22, 32, 27]. Jako przykład przytoczymy tutaj transformację Darboux potencjału Bardeena Φ

$$\hat{\Phi} = \frac{1}{\epsilon + p}\left(\frac{H}{a}\right)^2 \partial_\eta \left(\frac{a}{H}\Phi\right), \tag{6.26}$$

która spełnia równanie d'Alemberta $\Box\hat{\Phi} \equiv \hat{\Phi}_{;\mu}{}^{;\mu} = 0$ w czasoprzestrzeni (6.25). Perturbacje $\hat{\delta}$ i $\hat{\Phi}$, które są transformacjami wielkości zdefiniowanych przy dwóch różnych cechowaniach, pozostają niezmiennikami dowolnych transformacji (6.1). Wnioskujemy stąd, iż powinna istnieć jednoznaczna wiążąca je relacja. Relację tę znajdujemy dokonując, rozkładu pola $\hat{\delta}$ w pochodne zmiennej $\hat{\Phi}$ względem czasu konforemnego η

$$\hat{\delta} = \sum_{i=0}^{2} \hat{\phi}_i \partial_\eta^i \hat{\Phi}, \tag{6.27a}$$

$$\hat{\phi}_0 = \frac{1}{3}a^2\left(3H^2 - \epsilon\right), \tag{6.27b}$$

$$\hat{\phi}_1 = \frac{6c_s' H - c_s a\left[3\left(1+3c_s^2\right)H^2 + (\epsilon + 3p)\right]}{9c_s^3 H}, \tag{6.27c}$$

$$\hat{\phi}_2 = -\frac{1}{3c_s^2}. \tag{6.27d}$$

Korzystając z równania ruchu dla pola $\hat{\Phi}$ oraz równania Friedmanna (2.11a), sprowadzamy relację (6.27a) do postaci

$$\hat{\delta} = -\frac{1}{3}\left(\Delta + 3K\right)\hat{\Phi}, \tag{6.28}$$

gdzie Δ jest operatorem Laplace'a na dowolnie wybranej hiperpowierzchni stałego czasu (poprawki do laplasjanu perturbacji od infinitezymalnej transformacji (6.1) są rzędu wyższego niż pierwszy).

Jeżeli pole $\hat{Q}$ jest rozwiązaniem równania d'Alemberta (6.24) w czasoprzestrzeni (6.25), to jest nim również wielkość $\Delta\hat{Q}$ z dokładnością do stałej addytywnej i/lub multiplikatywnej. Korzystając z tego, znajdujemy nową zmienną falową $\hat{\varsigma}$, taką, że

$$\Phi = \frac{a\,(\epsilon + p)}{c_s^2 H}\partial_\eta \hat{\varsigma}, \tag{6.29}$$

która spełnia równanie d'Alemberta $\Box\hat{\varsigma} \equiv \hat{\varsigma}_{;\mu}{}^{;\mu} = 0$ w czasoprzestrzeni (6.25), a jej rząd różniczkowy jest o dwa niższy od rzędu różniczkowego zmiennej $\hat{\Phi}$

$$\hat{\Phi} = \Delta\hat{\varsigma}. \tag{6.30}$$

Można wykazać, iż gauge-inwariantne zmienne akustyczne $\hat{\delta}$, $\hat{\Phi}$, $\hat{\varsigma}$ korespondują z rozważanymi wcześniej w literaturze zmiennymi perturbacyjnymi, które spełniają równanie d'Alemberta w przestrzennie płaskich modelach FLRW dla szczególnych przypadków równania stanu materii kosmicznej:

- zmienna perturbacyjna H Fielda–Shepley'a [4]

$$\hat{\delta} \sim \frac{1}{z}H, \quad z \sim \frac{a}{H}\frac{\sqrt{\epsilon + p}}{c_s}, \tag{6.31}$$

$$H'' - \frac{z''}{z}H' - c_s^2\Delta H = 0. \tag{6.32}$$

  W przypadku znikającej krzywizny przestrzennej ($K = 0$) i równania stanu materii w postaci $p = \epsilon/3$ wzór (6.32) można sprowadzić do równania d'Alemberta w przestrzeni statycznej $H'' - \Delta H = 0$.

- zmienna perturbacyjna q Lukasha [9]

$$\hat{\Phi} \sim q, \quad \text{dla} \quad K = 0,$$

$$\ddot{q} + \left(3H + 2\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\right)\dot{q} - \left(\frac{c_s}{a}\right)^2 \Delta q = 0, \quad \alpha = \frac{\mathsf{a}}{a\sqrt{c_s}}. \tag{6.33}$$

  Dla stałej prędkości dźwięku $c_s = \text{const.}$ wzór (6.33) można sprowadzić do równania d'Alemberta $\Box q \equiv q_{;\mu}{}^{;\mu} = 0$ w przestrzeni Robertsona–Walkera z metryką $ds^2 = a^2\left(d\zeta^2 - \mathsf{g}_{ik}dx^i dx^k\right)$.

- zmienna perturbacyjna $\mathcal{D}$ Mukhanova–Feldmana–Brandenbergera [14]

$$\hat{\varsigma} \sim \frac{1}{a}\mathcal{D}, \quad \text{dla} \quad K = 0, \quad p = \epsilon/3, \tag{6.34}$$

$$\mathcal{D}'' - \frac{1}{3}\Delta\mathcal{D} = 0. \tag{6.35}$$

  Transformacja czasu postaci $d\zeta = c_s d\eta$ przeprowadza formułę (6.35) w równanie d'Alemberta w przestrzeni statycznej $\mathcal{D}''' - \Delta\mathcal{D} = 0$.

- perturbacje krzywizny ζ [14] (uwaga! zachowujemy tradycyjne oznaczenie ζ pomimo kolizji z *czasem akustycznym*)

$$\hat{\Phi} \sim \zeta, \quad \text{dla} \quad K = 0, \tag{6.36}$$

$$\zeta = \Phi + \frac{2}{3}\frac{\Phi' + aH\Phi}{aH\left(1 + c_s^2\right)}. \tag{6.37}$$

Perturbacje krzywizny (*curvature perturbations*), po raz pierwszy wprowadzone przez Bardeena, Steinhardta i Turnera [19], mają fundamentalne znaczenie dla inflacyjnych scenariuszy generacji pierwotnego widma fluktuacji gęstości.

Rozdział 7

Fourierowski rozkład pola akustycznego

W rozdziale 6 wykazaliśmy, że gauge-inwariantne skalarne zaburzenie dowolnego modelu FLRW propaguje się jak minimalnie sprzężone bezmasowe pole skalarne w czasoprzestrzeni (6.25). Za autorami pracy [29] nazywamy je *polem akustycznym*. Stosując metody teorii pola w zakrzywionych czasoprzestrzeniach [41, 34], przedstawimy, jako przykład zastosowania uogólnionego twierdzenia Sachsa–Wolfe'a, procedurę gauge-inwariantnego fourierowskiego rozkładu skalarnego zaburzenia pola grawitacyjnego w przestrzennie płaskim modelu FLRW. Wyliczymy jawną postać baz fourierowskich dla modelu wypełnionego ultrarelatywistyczną materią z równaniem stanu $p = \epsilon/3$ oraz materią o liniowym równania stanu $p = w\epsilon$, $w = c_s^2 = \text{const}$. W dalszej części pracy symbolem $\hat{\Phi}$ będziemy oznaczać dowolną gauge-inwariantną zmienną spełniającą równanie d'Alemberta (6.24) w czasoprzestrzeni (6.25) (czyli dowolną zmienną falową).

□ **Wszechświat wypełniony promieniowaniem** ($p = \epsilon/3$, $w = 1/3$)

Dokonując transformacji zmiennej perturbacyjnej $\hat{\Phi} \to \check{\Phi} = a\hat{\Phi}$ i korzystając ze wzorów (2.11a, 2.16, 6.23), sprowadzamy równanie propagacji (6.24) do równania d'Alemberta w czasoprzestrzeni statycznej

$$\check{\Phi}(x)'' - \Delta\check{\Phi}(x) = 0. \tag{7.1}$$

Czterowymiarowa transformata Fouriera pola $\check{\Phi}(x)$ ma postać

$$\check{\Phi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \check{\Phi}(k) e^{-ikx} dk, \tag{7.2}$$

gdzie $kx = \eta_{\mu\nu}k^\mu x^\mu = k_0x^0 - \mathbf{kx} = k_0x^0 + \eta_{ij}k^ix^j$, $dk = dk^0d\mathbf{k} = dk^0dk^1dk^2dk^3$. Podstawiając wyrażenie (7.2) do równania d'Alemberta (7.1), otrzymujemy

$$kk\check{\Phi}(k) = 0, \tag{7.3}$$

gdzie $kk = (k^0)^2 - \mathbf{kk}$, $\mathbf{kk} = |\mathbf{k}|^2 = -\eta_{ij}k^ik^j$. Z relacji (7.3) wynika, że współczynnik Fouriera $\check{\Phi}(k)$ powinien być równy zeru wszędzie tam, gdzie $kk \neq 0$. W związku z tym dokonamy redefinicji

$$\check{\Phi}(k) \to \delta(kk)\check{\Phi}(k), \tag{7.4}$$

gdzie $\delta(kk)$ jest funkcją Delta Diraca. Fourierowska całka w przestrzeni pędów (7.2), która przyjmie teraz postać

$$\begin{aligned}\check{\Phi}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \delta\left(\left(k^0\right)^2 - |\mathbf{k}|^2\right)\check{\Phi}(k)e^{-ikx}dk \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \left(\delta\left(k^0 - |\mathbf{k}|\right) + \delta\left(k^0 + |\mathbf{k}|\right)\right)\check{\Phi}(k)e^{-ikx}\frac{dk}{2|\mathbf{k}|},\end{aligned} \tag{7.5}$$

przebiega po akustycznych stożkach odpowiadających dodatnim i ujemnym częstościom $k^0 = \pm|\mathbf{k}|$. Całkowanie wyrażenia (7.5) względem k^0, przy jednoczesnej zmianie zmiennej $k \to -k$ w drugim składniku wyrażenia podcałkowego, prowadzi do wzoru

$$\check{\Phi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{k^0=|\mathbf{k}|}\left(\check{\Phi}(k)e^{-ikx} + \check{\Phi}(-k)e^{ikx}\right)\frac{d\mathbf{k}}{2|\mathbf{k}|}. \tag{7.6}$$

Jeśli pole skalarne $\check{\Phi}(x)$ jest rzeczywiste ($\check{\Phi}^*(x) = \check{\Phi}(x)$), to jego transformata Fouriera spełnia związek $\check{\Phi}(-k) = \check{\Phi}^*(k)$, a zatem rozkład (7.6) możemy przepisać w postaci

$$\check{\Phi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\left(\check{\Phi}(\mathbf{k})e^{-ikx} + \check{\Phi}^*(\mathbf{k})e^{ikx}\right)\frac{d\mathbf{k}}{2|\mathbf{k}|}. \tag{7.7}$$

Z warunków początkowych Cauchy'ego

$$\check{\Phi}(x^0,\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\left(\check{\Phi}(\mathbf{k})e^{-i(k_0x^0-\mathbf{kx})} + \check{\Phi}^*(\mathbf{k})e^{i(k_0x^0-\mathbf{kx})}\right)\frac{d\mathbf{k}}{2|\mathbf{k}|}, \tag{7.8a}$$

$$\check{\Phi}`(x^0,\mathbf{x}) = -\frac{i}{(2\pi)^{3/2}}\int\left(\check{\Phi}(\mathbf{k})e^{-i(k_0x^0-\mathbf{kx})} - \check{\Phi}^*(\mathbf{k})e^{i(k_0x^0-\mathbf{kx})}\right)\frac{d\mathbf{k}}{2} \tag{7.8b}$$

wyliczamy współczynniki rozkładu Fouriera

$$\begin{aligned}\check{\Phi}(\mathbf{k}) &= \frac{i}{(2\pi)^{3/2}}\int_{x^0}\left(\check{\Phi}`(x) - ik^0\check{\Phi}(x)\right)e^{ikx}d\mathbf{x} \\ &= i\int_{x^0}W_0\left(u^*_{\mathbf{k}},\check{\Phi}(x)\right)d\mathbf{x} = i\int_{x^0}u^*_{\mathbf{k}}\overleftrightarrow{\partial_{x^0}}\check{\Phi}(x)d\mathbf{x} = \left(u_{\mathbf{k}},\check{\Phi}(x)\right)_{KG}.\end{aligned} \tag{7.9}$$

Wielkość x^0 we wzorach (7.8, 7.9) oznacza pewną ustaloną chwilę *czasu akustycznego* ζ (zob. rozdz. 6), a iloczyn Kleina–Gordona $(\ ,\ )_{KG}$ jest zdefiniowany zgodnie z konwencją stosowaną w relatywistycznej kwantowej teorii pola [42].

Normalizacja funkcji bazowych $u_{\mathbf{k}}$ względem iloczynu Kleina–Gordona

$$u_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{2k^0(2\pi)^3}} e^{-ikx}, \tag{7.10}$$

$$(u_{\mathbf{k}}, u_{\mathbf{k}'})_{KG} = \delta\left(\mathbf{k} - \mathbf{k}'\right), \quad (u^*_{\mathbf{k}}, u_{\mathbf{k}'})_{KG} = 0 \tag{7.11}$$

i jednoczesne przeskalowanie współczynników Fouriera $\check{\Phi}(\mathbf{k}) \to \sqrt{2k^0}\check{\Phi}(\mathbf{k})$, pozwala zapisać fourierowską całkę dla pola skalarnego $\check{\Phi}$ w postaci

$$\check{\Phi}(x) = \int \left(\check{\Phi}(\mathbf{k})u_{\mathbf{k}} + \check{\Phi}^*(\mathbf{k})u^*_{\mathbf{k}}\right) d\mathbf{k}, \tag{7.12}$$

$$\check{\Phi}(\mathbf{k}) = \left(u_{\mathbf{k}}, \check{\Phi}(x)\right)_{KG}, \quad \check{\Phi}^*(\mathbf{k}) = \left(\check{\Phi}(x), u_{\mathbf{k}}\right)_{KG}. \tag{7.13}$$

Iloczyn Kleina–Gordona, zadany formułą (7.9), można uogólnić na dowolną przestrzenno-podobną hiperpowierzchnię Cauchy'ego Σ [42, 41, 34]

$$\begin{aligned}\left(\check{\Phi}_1(x), \check{\Phi}_2(x)\right)_{KG} &= i\int_\Sigma W_\mu\left(\check{\Phi}^*_1(x), \check{\Phi}_2(x)\right) d\Sigma^\mu \\ &= i\int_\Sigma \check{\Phi}^*_1(x)\overleftrightarrow{\nabla}_\mu \check{\Phi}_2(x) d\Sigma^\mu. \end{aligned}\tag{7.14}$$

Zauważmy ponadto, że wrońskian pary rozwiązań $\check{\Phi}_1(x)$ i $\check{\Phi}_2(x)$ równania (7.1) jest bezźródłowym polem wektorowym

$$\nabla^\mu W_\mu\left(\check{\Phi}^*_1(x), \check{\Phi}_2(x)\right) = \begin{vmatrix} \check{\Phi}^*_1(x) & \check{\Phi}_2(x) \\ \Box\,\check{\Phi}^*_1(x) & \Box\,\check{\Phi}_2(x)\end{vmatrix} = 0. \tag{7.15}$$

Niech Σ' będzie przestrzenno-podobną powierzchnią Cauchy'ego otrzymaną w wyniku infinitezymalnej deformacji powierzchni Σ na zbiorze zwartym. Wówczas, na mocy twierdzenia Gaussa, strumień pola W_μ przez zamkniętą powierzchnię $\Sigma\Sigma' = \partial\Omega$, ograniczającą pewną objętość czasoprzestrzeni Ω, jest równy zeru

$$\int_{\partial\Omega} W_\mu\left(\check{\Phi}^*_1(x), \check{\Phi}_2(x)\right) d\Sigma^\mu = \int_\Omega \nabla^\mu W_\mu\left(\check{\Phi}^*_1(x), \check{\Phi}_2(x)\right) d\Omega = 0. \tag{7.16}$$

Z powyższego wynika, że wartość całki (7.14), a zatem iloczyn Kleina–Gordona, nie zależy od wyboru powierzchni Cauchy'ego Σ. Funkcje $u_{\mathbf{k}}$ tworzą ortonormalną bazę względem iloczynu (7.14). Fourierowski rozkład perturbacji $\check{\Phi}(x)$ zadany wzorem (7.12) jest gauge-inwariantny, a współczynniki Fouriera (7.14) nie zależą od czasu.

$\square$ **Wszechświat ze stałą prędkością dźwięku** ($c_s^2 = dp/d\epsilon = w = \text{const.}$)

W przestrzennie płaskim modelu wszechświata FLRW, wypełnionym płynem doskonałym o liniowym równaniu stanu $p = w\epsilon$, $w = \text{const.}$, równanie propagacji pola $\hat{\Phi}$ (6.24) przyjmuje postać

$$\square\,\hat{\Phi} = \hat{\Phi}'' + 2\frac{a'}{a}\hat{\Phi}' - \Delta\hat{\Phi} = 0. \tag{7.17}$$

Gauge-inwariantny rozkład fourierowski rzeczywistego pola $\hat{\Phi}$ w bazie rozwiązań równania (7.17) możemy zapisać w formie

$$\hat{\Phi}(x) = \int \left(\hat{\Phi}(\mathbf{k})u_{\mathbf{k}} + \hat{\Phi}^*(\mathbf{k})u_{\mathbf{k}}^*\right) d\mathbf{k}, \tag{7.18}$$

gdzie funkcje $u_{\mathbf{k}}$ postaci

$$u_{\mathbf{k}} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{\chi_k}{a}e^{i\mathbf{kx}} \tag{7.19}$$

stanowią ortonormalną bazę względem iloczynu Kleina–Gordona (7.14)

$$(u_{\mathbf{k}}, u_{\mathbf{k}'})_{KG} = \delta\left(\mathbf{k} - \mathbf{k}'\right), \quad (u_{\mathbf{k}}^*, u_{\mathbf{k}'})_{KG} = 0. \tag{7.20}$$

Podstawiając funkcje bazowe $u_{\mathbf{k}}$, dane wyrażeniem (7.19), do równania d'Alemberta (7.17) i korzystając ze wzoru (2.22), otrzymujemy równanie na funkcje χ_k, które zależą tylko od *konforemnego czasu akustycznego* ζ

$$\chi_k'' + \left(|\mathbf{k}|^2 - \frac{\varkappa}{\zeta^2}\right)\chi_k = 0, \quad \varkappa = 2\frac{(1-3w)}{(1+3w)^2}. \tag{7.21}$$

Warunki ortonormalności (7.20) bazy $u_{\mathbf{k}}$ indukują warunek normalizacji amplitud χ_k

$$(u_{\mathbf{k}}, u_{\mathbf{k}'})_{KG} = i\int_\Sigma W_\mu\left(u_{\mathbf{k}}^*, u_{\mathbf{k}'}\right) d\Sigma^\mu = i\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')a^2 W_0\left(\frac{{\chi_k}^*}{a}, \frac{\chi_{k'}}{a}\right) \tag{7.22}$$

$$\Rightarrow W_0\left({\chi_k}^*, \chi_k\right) = -i. \tag{7.23}$$

Rozwiązanie szczególne równania (7.21), spełniające warunek normalizacji (7.23), ma postać

$$\chi_k = \frac{\sqrt{\pi\zeta}}{2}H_\nu^{(1)}\left(|\mathbf{k}|\,\zeta\right), \quad \nu = \frac{\sqrt{1+4\varkappa}}{2}, \tag{7.24}$$

gdzie $H_\nu^{(1)}$ jest funkcją Hankela pierwszego rodzaju. Wzór (7.18) przedstawia fourierowski rozkład skalarnego zaburzenia $\hat{\Phi}$ pola grawitacyjnego w czasoprzestrzeni FLRW z materią o liniowym równaniu stanu $p = w\epsilon$, $w = \mathrm{const.}$ Współczynniki Fouriera $\hat{\Phi}(\mathbf{k})$ można wyliczyć ze wzorów

$$\hat{\Phi}(\mathbf{k}) = (u_{\mathbf{k}}, \hat{\Phi}(x))_{KG}, \quad \hat{\Phi}^*(\mathbf{k}) = (\hat{\Phi}(x), u_{\mathbf{k}})_{KG}. \tag{7.25}$$

Z niezależności iloczynu Kleina–Gordona (7.14) od wyboru hiperpowierzchni Cauchy'ego wynika, że współczynniki Fouriera (7.25) nie zależą od czasu.

□ Schemat konstrukcji bazy ortonormalnej w przypadku barotropowego równania stanu $p = p(\epsilon)$

Przedstawioną wcześniej procedurę gauge-inwariantnego fourierowskiego rozkładu pola akustycznego można uogólnić na przypadek dowolnego barotropowego równania stanu materii kosmicznej. Równanie propagacji pola akustycznego w czasoprzestrzeni (6.25) ma postać

$$\hat{\Phi}'' + 2\frac{\mathsf{a}'}{\mathsf{a}}\hat{\Phi}' - \Delta\hat{\Phi} = 0. \tag{7.26}$$

Fourierowski rozkład rzeczywistego pola $\hat{\Phi}$ w przestrzeni rozwiązań równania (7.26) możemy zapisać w formie

$$\hat{\Phi}(x) = \int \left(\hat{\Phi}(\mathbf{k})u_{\mathbf{k}} + \hat{\Phi}^*(\mathbf{k})u^*_{\mathbf{k}}\right) d\mathbf{k}, \tag{7.27}$$

gdzie funkcje

$$u_{\mathbf{k}} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{\chi_k}{\mathsf{a}}e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \tag{7.28}$$

stanowią ortonormalną bazę względem iloczynu skalarnego Kleina–Gordona (7.14). Funkcje χ_k są rozwiązaniami równania

$$\chi_k'' + \left(|\mathbf{k}|^2 - \frac{\mathsf{a}''}{\mathsf{a}}\right)\chi_k = 0 \tag{7.29}$$

i spełniają warunek normalizacji

$$W_0\left(\chi_k{}^*, \chi_k\right) = \chi_k{}^*\chi_k{}' - \chi_k{}^{*\prime}\chi_k = -i. \tag{7.30}$$

Niezależne od czasu współczynniki Fouriera $\hat{\Phi}(\mathbf{k})$ rozkładu (7.27) wyznaczamy ze wzoru

$$\hat{\Phi}(\mathbf{k}) = (u_{\mathbf{k}}, \hat{\Phi}(x))_{KG}, \quad \hat{\Phi}^*(\mathbf{k}) = (\hat{\Phi}(x), u_{\mathbf{k}})_{KG}, \tag{7.31}$$

gdzie $(\ ,\ )_{KG}$ jest iloczynem Kleina–Gordona (7.14) na dowolnie wybranej hiperpowierzchni stałego czasu $\zeta = \mathrm{const.}$ w czasoprzestrzeni (6.25). Możliwość efektywnej konstrukcji bazy (7.28) zależy od możliwości scałkowania równania (7.29). W wielu fizycznie interesujących przypadkach rozwiązania te mogą być złożone [43, 44].

Rozdział 8

Podsumowanie

Wyniki

Problemem postawionym i rozwiązanym w pracy jest uogólnienie twierdzenia Sachsa–Wolfe'a na modele Friedmanna–Lemaître'a–Robertsona–Walkera z materią o barotropowym równaniu stanu ($p = p(\epsilon)$) i dowolną krzywizną przestrzenną ($K = 0, \pm 1$). Wspomagany komputerowo dowód jest oparty na przekształceniach równań perturbacyjnych w postaci równań różniczkowych cząstkowych — nie wymaga on rozkładu harmonicznego zaburzenia w rozumieniu pracy [1]. W rozdziale 5 wyprowadziliśmy równania propagacji skalarnych zaburzeń pola grawitacyjnego w układzie synchronicznym w postaci równań różniczkowych cząstkowych (5.4b, 5.5). Równania te stanowią odpowiednik układu równań Lifszyca [1], a ich wyprowadzenie jest pierwszym krokiem dowodu uogólnionego twierdzenia Sachsa–Wolfe'a. Analiza fikcyjnych zaburzeń w układzie synchronicznym oraz konstrukcja bazy (6.13) w przestrzeni niezmienników transformacji cechowania, przeprowadzona w rozdziale 6, pozwoliła nam zapisać uogólnione równania Lifszyca (5.4b, 5.5) w postaci jawnie gauge-inwariantnej (6.15). Konstrukcja ta jest odpowiednikiem procedury eliminacji fikcyjnych stopni swobody (znanych w klasycznym formalizmie Lifszyca) poprzez redukcję rzędu równania ewolucji dla poszczególnych modów w rozwinięciu fourierowskim zaburzenia [33].

Głównym punktem dowodu jest konstrukcja gauge-inwariantnej zmiennej falowej $\hat{\delta}$ z zaburzenia gęstości $\delta\epsilon$ w układzie synchronicznym. Pokazaliśmy, iż transformacja (6.19) eliminuje składową fikcyjną zaburzenia gęstości i jednocześnie prowadzi do zmiennej perturbacyjnej $\hat{\delta}$, w której równanie propagacji pola zaburzeń przyjmuje postać równania d'Alemberta (6.24) w przestrzeni Robertsona–Walkera (6.25) z czynnikiem skali (6.23). W przestrzeni tej zaburzenie skalarne propaguje się jak bezmasowe minimalnie sprzężone pole skalarne. Opis pola zaburzeń przy pomocy nowej zmiennej $\hat{\delta}$, spełniającej równanie (6.24), uwidacznia bezpośrednie analogie pomiędzy teorią kosmologicznych zaburzeń skalarnych pola grawitacyjnego i teorią semiklasyczną [34]. Identyczność równań propagacji w obu tych teoriach (dla zaburzenia skalarnego (6.24) i dla minimalnie sprzężonego bezmasowego pola skalarnego ([34] równ. (3.26)) powoduje, że klasyczna (nie kwantowa) warstwa formalizmu teorii pola w przestrzeniach zakrzywionych może być stosowana do opisu kosmologicznych zaburzeń gęstości. W szczególności możliwa jest konstrukcja ortonormalnych baz Fouriera w przestrzeni rozwiązań normowalnych z iloczynem skalarnym Kleina–Gordona. Własności iloczynu Kleina–Gordona zapewniają niezależność rozkładu Fouriera od wyboru powierzchni Cauchy'ego. W konsekwencji otrzymujemy (rozdz. 7) gauge-inwariantny rozkład pola zaburzeń o współczynnikach Fouriera niezależnych od czasu.

Relacje do literatury

Skalarne zaburzenie przestrzennie płaskiego wszechświata Robertsona–Walkera można (za Lukashem [9, 28]) przedstawić jako pole skalarne o zmiennej masie, propagujące się w przestrzeni statycznej (patrz równanie (6.33)), lub równoważnie jako bezmasowe pole skalarne w ekspandującej czasoprzestrzeni Robertsona-Walkera (wynik tej pracy, patrz równanie (6.24)). Różnica pomiędzy hamiltonowskim formalizmem Lukasha i przedstawionym w tej pracy opisem zaburzeń skalarnych (dla $K = 0$) ma charakter przede wszystkim interpretacyjny. Nie można natomiast porównać obu formalizmów w przypadku ogólniejszym — zaburzenia czasoprzestrzeni Robertsona–Walkera z nieznikającą krzywizną przestrzenną ($K = \pm 1$) nie są badane w teorii Lukasha.

Zgodność prowadzonych w tej pracy rachunków z innymi teoriami gauge-inwariantnymi (nie posługującymi się jawnie falowym równaniem ewolucji zaburzeń) sprawdziliśmy na etapie wyników pośrednich (6.15, 6.20, 6.27, 6.28, 6.34, 6.36).

Problemy otwarte

Problem spektralny w kosmologii nie jest identyczny z problemem spektralnym w teorii pola. Różnica tkwi w definicji przestrzeni rozwiązań. W kosmologii, zaburzenie $h_{\mu\nu}$ jest ograniczone (wraz z pochodnymi cząstkowymi) na powierzchni Cauchy'ego, ale nie jest na niej całkowalne (poza przypadkami topologii o zwartych cięciach przestrzennych). Osłabienie warunku całkowalności może prowadzić do trudności matematycznych. Na przykład w modelach o ujemnej krzywiźnie przestrzennej istnieją regularne ograniczone rozwiązania równania Helmholtza z urojoną liczbą falową (mody serii dodatkowej [45]). Rozwiązań tych nie można zortogonalizować w sensie iloczynu (7.14), nie ma także powodu, dla którego należałoby je odrzucić. Z drugiej strony, dla funkcji niecałkowalnych z kwadratem nie można zbudować bazy Fouriera złożonej wyłącznie z rozwiązań o rzeczywistej liczbie falowej (modów serii głównej). Uzupełnienie rozważań rozdziału 7 analizą zaburzeń wszechświata o ujemnej krzywiźnie wydaje się być kluczowe dla kompletnej definicji widma kosmologicznych zaburzeń gęstości.

Dodatek I

Notacja i konwencje

przyjmujemy układ jednostek, w którym $8\pi G = 1$, $c = 1$,
metryka czasoprzestrzeni ma sygnaturę $(+, -, -, -)$,
indeksy łacińskie a, b, $c\ldots$ przebiegają wartości od 1 do 3,
indeksy greckie α, β, $\gamma\ldots$ przebiegają wartości od 0 do 3,

t	uniwersalny czas kosmiczny
η	czas konforemny, $d\eta = dt/a$
ζ	konforemny czas *akustyczny*, $d\zeta = c_s d\eta$
a	czynnik skali czasoprzestrzeni Robertsona–Walkera
a	czynnik skali konforemnej przestrzeni Robertsona–Walkera (6.25)
H	funkcja Hubble'a $H = a'/a^2$
K	parametr krzywizny przestrzeni z metryką g_{ik}
ϵ	gęstość energii płynu doskonałego
p	ciśnienie
c_s	prędkość dźwięku w materii kosmicznej, $c_s^2 = w = p'/\epsilon'$
$\mathcal{M}$	całka ruchu modeli FLRW, $\mathcal{M} = \epsilon a^{3(1+w)}$
x^i, $\mathbf{x}$	współrzędne przestrzenne
x^μ, x	współrzędne czasoprzestrzenne
u^μ	czterowektor prędkości materii
g_{ik}	metryka trójwymiarowej przestrzeni maksymalnie symetrycznej
h_{ik}	zaburzenie przestrzennej metryki g_{ik}, $\mathsf{h}_{ik} = -a^{-2}h_{ik}$
h	ślad tensora h_{ik}, $\mathsf{h} = \mathsf{g}^{ik}\mathsf{h}_{ik}$
${}^{(s)}\mathsf{h}_{ik}$	skalarne zaburzenie metryki g_{ik} (5.1)
$g_{\mu\nu}$	metryka czasoprzestrzeni Robertsona–Walkera

$h_{\mu\nu}$	zaburzenie metryki $g_{\mu\nu}$ (3.9)
${}^{(f)}g_{\mu\nu}$	metryka zaburzonej czasoprzestrzeni
$\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{E}$	perturbacje metryki (3.9)
${\Gamma^{\lambda}}_{\mu\nu}$	koneksja afiniczna w czasoprzestrzeni Robertsona–Walkera
R_{ik}, R	tensor Ricciego i skalar krzywizny w przestrzeni z metryką g_{ik}
$R_{\mu\nu}$, R	tensor Ricciego i skalar krzywizny w czasoprzestrzeni Robertsona–Walkera
$G_{\mu\nu}$	tensor Einsteina w czasoprzestrzeni Robertsona–Walkera
$T_{\mu\nu}$	tensor energii-pędu materii (płynu doskonałego)
$\lambda(\eta)$, $\mu(\eta)$	amplitudy w rozwinięciu fourierowskim zaburzenia metryki (5.6)
$Q(\mathbf{k},\mathbf{x})$	funkcje własne operatora Laplace'a w trójwymiarowej przestrzeni z metryką g_{ik} (5.7)
${}^{(g)}q$	składowa fikcyjna zmiennej perturbacyjnej q
${}^{(gi)}q$	gauge-inwariantna zmienna q
$\hat{\delta}$, $\hat{\Phi}$, $\hat{\varsigma}$	skalarne zmienne falowe (spełniają równanie d'Alemberta (6.24))
$\mathcal{G}_1(\mathbf{x})$, $\mathcal{G}_2(\mathbf{x})$	swoboda gauge w układzie synchronicznym (6.8)
${}^{(i)}\phi$, ${}^{(i)}\upsilon$, ψ	niezmienniki transformacji cechowania zachowujących synchroniczność układu odniesienia (6.11), ($i \in \mathbb{N}$)
Φ, Ψ	niezmiennicze potencjały Bardeena (6.14)
f	dowolny skalar
$\boldsymbol{\mathcal{T}}$	tensor dowolnego rzędu
$\boldsymbol{\mathcal{T}}'$, $\partial_\eta \boldsymbol{\mathcal{T}}$	pochodna tensora $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ względem czasu konforemnego η
$f^{(i)}$, ∂_η^i	i-ta pochodna funkcji f względem czasu konforemnego η
$\boldsymbol{\mathcal{T}}^{\grave{}}$, $\partial_\zeta \boldsymbol{\mathcal{T}}$	pochodna tensora $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ względem czasu akustycznego ζ
$\boldsymbol{\mathcal{T}}_{\mid i}$	pochodna kowariantna tensora $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ względem współrzędnej x^i w trójwymiarowej przestrzeni z metryką $\mathsf{g}_{\mu\nu}$
Δf	laplasjan funkcji skalarnej f w trójwymiarowej przestrzeni z metryką g_{ik}, $\Delta f = \mathsf{g}^{ik} f_{\mid ik}$
$\boldsymbol{\mathcal{T}}_{;\mu}$, $\nabla_\mu \boldsymbol{\mathcal{T}}$	pochodna kowariantna tensora $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ względem współrzędnej x^μ w czasoprzestrzeni Robertsona–Walkera z metryką $g_{\mu\nu}$
$\Box f$	dalambercjan funkcji skalarnej f w czasoprzestrzeni Robertsona–Walkera z metryką (6.25)
$\mathcal{L}_{\boldsymbol{\xi}} \boldsymbol{\mathcal{T}}$	pochodna Liego tensora $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ wzdłuż pola wektorowego $\boldsymbol{\xi}$ (6.2b)
$u_{\mathbf{k}}$	ortonormalny układ funkcji bazowych w przestrzeni rozwiązań równania Kleina–Gordona (7.26)
χ_k	amplitudy funkcji $u_{\mathbf{k}}$, rozwiązania równania czasowego (7.29)
$(\ ,\ )_{KG}$	iloczyn Kleina–Gordona (7.14)
$W^\mu(\ ,\ )$	wyznacznik Wrońskiego (7.15)

Dodatek II

Oprogramowanie

Do pracy dołączamy kod programu napisanego w języku *Mathematica* zawierający implementację dowodu uogólnionego twierdzenia Sachsa–Wolfe'a oraz rachunków pomocniczych. Dla prawidłowego działania programu wymagane są:

- *Mathematica* v.6.0 lub v.7.0
  http://www.wolfram.com
- *Tensorial* v.4.0 — pakiet procedur napisanych w języku *Mathematica* wspomagający rachunek tensorowy.
  http://home.comcast.net/ djmpark/TensorialPage.html

Pakiet *Tensorial* v.4.0 zawiera błąd w definicji pochodnej cząstkowej rzędu wyższego niż drugi i nie posiada procedury całkowania wyrażeń w notacji tensorowej. Aby zapewnić prawidłowe działanie dołączonego do pracy programu wystarczy na pakiet *Tensorial* (plik `Tensorial.m`) nałożyć łatę w postaci

```
---wytnij--(diff.txt)--------------------------------------------------------------------------------
2346,2352c2346
< (*
< Poniższa linia powoduje błąd w pochodnej cząstkowej rzędu wyższego niż pierwszy
< PartialD[labs_List][a_ b_,c_]/;FreeQ[a,Tensor[__]|c]\[And]FreeQ[c,Tensor[__]]:=a PartialD[labs][b,c]
< *)
< (* Pochodna cząstkowa z całki *)
< PartialD[labs_][Integrate[uint_,tens_],tens_]:=uint
< PartialD[labs_][Integrate[uint_,tens_],par_]:=Integrate[PartialD[labs][uint,par],tens]
---
> PartialD[labs_List][a_ b_,c_]/;FreeQ[a,Tensor[__]|c]\[And]FreeQ[c,Tensor[__]]:=a PartialD[labs][b,c]
---wytnij--------------------------------------------------------------------------------------------
```

W tym celu należy z oryginalnego pliku `Tensorial.m` usunąć linie rozpoczynające się znakiem > oraz dopisać do tego pliku linie rozpoczynające się znakiem <. Zadanie to ułatwi program `patch` użyty w następujący sposób
`$ patch Tensorial.m diff.txt`.

Bibliografia

[1] E. Lifshitz, *J. Phys. (USSR)* **10**, 116 (1946).

[2] E. M. Lifshitz, I. M. Khalatnikov, *Adv. Phys.* **12**, 185 (1963).

[3] R. K. Sachs, A. M. Wolfe, *ApJ* **147**, 73 (1967).

[4] G. B. Field, L. C. Shepley, *Astrophys. Space. Sci.* **1**, 309 (1968).

[5] K. Sakai, *Prog. Theor. Phys.* **41**, 1461 (1969).

[6] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology.* John Wiley & Sons, Inc. New York (1972).

[7] Y. B. Zeldovich, I. Novikov, *The Structure and Evolution of the Universe.* Chicago University Press, Chicago (1972).

[8] P. J. E. Peebles, *The Large-Scale Structure of the Universe.* Princeton University Press, New Jersey (1980).

[9] V. N. Lukash, *Sov. Phys. JETP* **79**, 1601 (1980).

[10] W. H. Press, E. T. Vishniac, *Astrophys. J.* **239**, 1 (1980).

[11] G. V. Chibisov, V. F. Mukhanov, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **200**, 535 (1982).

[12] J. M. Bardeen, *Phys. Rev.* **D 22**, 1882 (1980).

[13] H. Kodama, M. Sasaki, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **78**, 1 (1984).

[14] V. F. Mukhanov, H. A. Feldman, R. H. Brandenberger, *Phys. Rep.* **215**, 203 (1992).

[15] J.-C. Hwang, *Astrophys. J.* **375**, 443 (1991).

[16] J.-C. Hwang, *Astrophys. J.* **415**, 486 (1993).

[17] M. Schon, *Phys. Rev.* **D46**, 3352 (1974).

[18] J. M. Stewart, M. Walker, *Proc. R. Soc. Lond.* **A341**, 49 (1974).

[19] J. M. Bardeen, P. J. Steinhardt, M. S. Turner, *Phys. Rev.* **D 28**, 679 (1983).

[20] D. W. Olson, *Phys. Rev.* **D14**, 327 (1976).

[21] S. W. Hawking, *Astrophys. J.* **145**, 544 (1966).

[22] A. Woszczyna, A. Kułak, *Class. Quantum Grav.* **6**, 1665 (1989).

[23] G. F. R. Ellis, M. Bruni, *Phys. Rev.* **D40**, 1804 (1989).

[24] G. F. R. Ellis, J. Hwang, M. Bruni, *Phys. Rev.* **D40**, 1819 (1989).

[25] K. S. Dunsby, M. Bruni, G. F. R. Ellis, *Astrophys. J.* **395**, 54 (1992).

[26] M. Bruni, G. F. R. Ellis, P. K. S. Dunsby, *Class. Quant. Grav.* **9**, 921 (1992).

[27] M. Bruni, P. K. Dunsby, G. F. R. Ellis, *Astrophys. J.* **395**, 34 (1992).

[28] V. N. Lukash, *eprint arXiv:astro-ph/9910009* (1999).

[29] Z. A. Golda, A. Woszczyna, *Phys. Lett.* **A310**, 357 (2003).

[30] Z. A. Golda, A. Woszczyna, K. Zawada, *Acta Phys. Pol.* **B36**, 2133 (2005).

[31] R. Brandenberger, R. Kahn, W. Press, *Phys. Rev.* **D 28**, 1809 (1983).

[32] D. H. Lyth, E. D. Stewart, *Astrophys. J.* **361**, 343 (1990).

[33] Z. A. Golda, A. Woszczyna, *J. Math. Phys.* **42**, 856 (2001).

[34] N. D. Birrell, P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space*. Cambridge University Press, Cambridge (1982).

[35] M. Demiański, *Astrofizyka Relatywistyczna*. PWN, Warszawa (1978).

[36] J. M. Stewart, *Class. Quantum Grav.* **7**, 1169 (1990).

[37] A. Blanchard, M. Signore, *Frontiers of cosmology.*
Proceedings of the NATO Advanced Study Institute on The Frontiers of Cosmology, Carghese, France, 8-20 September 2003
NATO science series II: Mathematics, Physics and Chemistry, Vol. 187.
Edited by A. Blanchard and M. Signore — Springer (2005).

[38] L. D. Landau, E. M. Lifszyc, *Teoria Pola.* PWN, Warszawa (1979).

[39] V. Mukhanov, *Physical Foundations of Cosmology.* Cambridge University Press, New York (2005).

[40] M. Bruni, S. Sonego, *Class. Quant. Grav.* **16**, L29 (1999).

[41] B. S. DeWitt, *Phys. Rep.* **19**, 295 (1975).

[42] S. S. Schweber, *An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory.* Harper and Row, New York (1961).

[43] Z. A. Golda, A. Woszczyna, *Class. Quantum Grav* **20**, 277 (2003).

[44] M. Demiański, Z. A. Golda, A. Woszczyna, *Gen. Rel. Grav.* **37**, 2063 (2005).

[45] I. M. Gelfand, M. I. Graev, N. Y. Vilenkin, *Generalized Functions: Volume 5; Integral Geometry and Representation Theory.* Academic Press Inc., New York (1966).