Uniwersytet Jagielloński
Instytut Fizyki im. Mariana Smoluchowskiego

Efekt Casimira bez nieskończoności: analiza klasy modeli aproksymujących warunki brzegowe w kwantowej teorii pola

Mariusz Stopa

Praca doktorska napisana pod kierunkiem
dr. hab. Andrzeja Herdegena

Kraków 2011

Rodzicom

Podziękowania

Chciałbym bardzo podziękować mojemu promotorowi, dr. hab. Andrzejowi Herdegenowi, za wszystko czego się od Niego nauczyłem, a także za wszelką pomoc i wielką życzliwość.

Chciałbym także wyrazić ogromną wdzięczność mojej rodzinie, a przede wszystkim rodzicom i braciom. Im, pośrednio lub bezpośrednio, wszystko zawdzięczam.

Nie mogę zapomnieć o moich przyjaciołach i bliskich znajomych. Przede wszystkim, choć nie tylko im, bardzo dziękuję Piotrkowi i Przemkowi, z którymi spędziłem tyle godzin, choćby na wspólnych dyskusjach i obiadach.

Spis treści

Rozdział 1

Wstęp

Efekt Casimira w swojej pierwotnej postaci polega na przyciąganiu się (innym niż grawitacyjne) dwóch płaskich, równoległych, przewodzących, nienaładowanych płyt. Jest on związany z kwantowymi fluktuacjami próżni mającymi teoretyczną podstawę w kwantowej teorii pola (KTP). Bierze on swą nazwę od nazwiska holenderskiego fizyka Hendrika B. G. Casimira, który w swoim artykule [1] z 1948 roku przewidział go teoretycznie. Ten pionierski artykuł zapoczątkował szereg badań naukowych zarówno teoretycznych jak i eksperymentalnych. Szczególnie płodny okres rozpoczął się pod koniec XX w. wraz z przełomowymi doświadczalnymi potwierdzeniami tego zjawiska [2, 3] i trwa nadal.

Istnieje wiele poglądów na naturę tego efektu oraz wiele sposobów wyliczania energii i siły Casimira. Podejścia te znacznie różnią się pod względem konceptualnym oraz ze względu na matematyczny i fizyczny rygor (lub jego brak). Podstawową wadą wielu modeli starających się opisać efekt Casimira jest niepoprawna idealizacja warunków brzegowych. Ostre warunki brzegowe (Dirichleta bądź Neumanna — dla pola skalarnego, lub idealnego przewodnika — dla pola elektromagnetycznego) mając zaletę wyjątkowej prostoty są jednak, jak zobaczymy, zbyt skrajną idealizacją, która prowadzi do pojawienia się nieskończoności. Częsta obecność rozbieżności w rachunkach dotyczących efektu Casimira jest wyjątkowo niepokojąca, gdyż rozważany układ jest liniowy! Niefizyczność ostrych warunków brzegowych została zauważona przez innych autorów (zob. np. [4, 5]), jednak podejście stosowane w niniejszej rozprawie (za pracami A. Herdegena [6, 7, 8]) jest inne i posiada nowe istotne zalety, które omówimy dokładniej w dalszej części pracy.

Literatura dotycząca efektu Casimira jest bardzo bogata. Podstawowymi pracami przeglądowymi są [9 – 17]. Pracami przestawiającymi bezpośrednio eksperymentalne wyniki dotyczące tego fenomenu są wspomniane już [2, 3] oraz m.in. [18, 19, 20, 21].

Niektóre używane powszechnie metody

Niniejsza rozprawa nie ma na celu przeglądu podstawowych wyników dotyczących efektu Casimira. Omówimy teraz tylko bardzo pobieżnie dwa tradycyjne sposoby wyznaczania siły Casimira.

Metodą stosowaną przez samego Hendrika Casimira w [1] jest tzw. sumowanie modów zerowych. W podejściu tym kwantowe pole traktowane jest jako kolekcja nieskończenie wielu kwantowych oscylatorów harmonicznych (które będziemy numerować indeksem α), każdy charakteryzowany poprzez częstość własną ω_α. Stan próżni takiego pola to stan w którym wszystkie te oscylatory znajdują się w swoim najniższym stanie o energii $\frac{1}{2}\hbar\omega_\alpha$. Energia całego pola w stanie próżni wynosi zatem $\frac{1}{2}\hbar\sum_\alpha \omega_\alpha$ (tzw. „zero-point energy"). Jest to rozbieżna suma. W celu uzyskania skończonego wyniku dokonuje się odpowiedniej regularyzacji, a następnie renormalizacji. Stosuje się wiele różnych sposobów regularyzacji, jak np. za pomocą uzbieżniającej funkcji (np. eksponenty) czy korzystając z przedłużenia analitycznego funkcji zeta Riemanna. Ostateczny wynik nie powinien oczywiście zależeć od użytej metody regularyzacji. Renormalizacji dokonuje się odejmując od zregularyzowanej energii rozważanego układu (np. pola w obecności płyt) zregularyzowaną energię pola w innym stanie (przede wszystkim w próżni — bez obecności płyt), po czym usuwa się regularyzację. W przypadku regularyzacji za pomocą funkcji zeta Riemanna, poprzez przedłużenie analityczne uzyskuje się od razu zrenormalizowaną energię. Hendrik Casimir we wspomnianej pracy [1], korzystając z regularyzacji za pomocą pewnej gasnącej funkcji oraz odejmując wartość próżniową energii, otrzymuje następujący wynik na przyciągającą siłę na cm^2 dla płaskich, idealnie przewodzących płyt

$$F = \hbar c \frac{\pi^2}{240}\frac{1}{a^4} = 0,013\frac{1}{a_\mu^4}\,\mathrm{dyn/cm}^2\,,$$

gdzie a_μ jest odległością pomiędzy płytami mierzoną w mikrometrach (1 dyna to 10^{-5} N).

Drugi sposób wyliczania siły Casimira można w skrócie nazwać lokalnym. W 1969 roku L. Brown i G. Jordan Maclay w pracy [22] otrzymali wynik H. Casimira wyznaczając zrenormalizowaną próżniową wartość oczekiwaną operatora energii-pędu. W ogólności w podejściu tym wyznacza się najpierw funkcję Greena, a następnie na tej podstawie otrzymuje się tensor energii-pędu $T^{\mu\nu}$. Z tego tensora dostaje się siłę Casimira na dwa sposoby. Całkując zrenormalizowaną gęstość energii $\langle 0|T^{00}|0\rangle_{zren}$ wyznacza się energię Casimira, a następnie różniczkując otrzymuje się siłę, albo bezpośrednio całkuje się zrenormalizowaną gęstość ciśnienia, np. dla równoległych płyt należy scałkować $\langle 0|\, T^{zz}\, |0\rangle_{zren}$, gdzie z jest kierunkiem prostopadłym do płyt. W cytowanej pracy [22] pokazano, że oba te podejścia prowadzą do siły otrzymanej przez H. Casimira w [1].

Podstawową wadą większości podejść stosujących przedstawione powyżej metody jest stosowanie ostrych warunków brzegowych, które skomentowaliśmy już wcześniej. Dodajmy tylko, że dla takich warunków oba podejścia dają w ogólności nieskończone energie (skończona wartość energii dla równoległych płyt jest wyjątkowa i wynika z symetrii), potwierdzając niefizyczność takich warunków (zob. [4]). Ponadto również sama zrenormalizowana gęstość energii, dla ostrych warunków, jest w ogólności wielkością rozbieżną w pobliżu rozważanego brzegu (zob. [4, 23]). Zauważmy także, że podejście lokalne oraz sumowanie modów zerowych nie są równoważne i w ogólności dają różne wyniki (jest to związane z nieprzemiennością operacji całkowania oraz renormalizacji dla gęstości energii) (zob. [4, 44]).

Metoda sumowania energii modów zerowych ma dodatkowo sama w sobie szereg mankamentów (zob. [7, 23, 24, 25]). Zwróćmy uwagę jedynie na fakt, że poszczególne energie modów zerowych są energiami własnymi różnych hamiltonianów (opisujących układ bez i z płytami), porównujemy więc w tym podejściu nie stany o różnej energii względem pewnego hamiltonianu, lecz stany o różnych energiach względem różnych hamiltonianów.

Motywacje, stosowane podejście, cel i plan pracy

Widzimy więc, iż chcąc od samego początku poprawnie opisać efekt Casimira musimy w naszym modelu dokonać przede wszystkim poprawnej idealizacji warunków brzegowych. Dokładną kontrolę jej poprawności umożliwia tzw. algebraiczna kwantowa teoria pola (zob. np. [26, 27, 28], rzetelną monografią dotyczącą algebr operatorów jest [29, 30]). Jednym z sukcesów algebraicznego podejścia było dokładniejsze zrozumienie rozbieżności ultrafioletowych w KTP, jako związanych z nierównoważnymi reprezentacjami algebry pola ([27, 24]). Dokładnej analizy efektu Casimira (a nawet szerszej klasy problemów) w ramach tego podejścia dokonał A. Herdegen w swoich pracach [6, 7, 8]. Podano tam kryteria na dopuszczalne idealizacje warunków brzegowych oraz zaproponowano (i zanalizowano) klasę modeli je spełniających. Modele te, skonstruowane w przestrzeni pędów, nie dają jednak możliwości analizy lokalnych własności takich modeli.

Podstawowe rozumienie efektu Casimira we wspomnianych pracach A. Herdegena i stosowane w niniejszej rozprawie można skrótowo przedstawić w następujący sposób. Efekt ten bierze się z odpowiedzi układu kwantowego na adiabatycznie zmieniające się warunki zewnętrzne. Rozważmy układ fizyczny składający się z kwantowego pola, które poddane jest pewnym adiabatycznie zmiennym zewnętrznym warunkom (zadanym na przykład przez płyty o zmiennym położeniu). Dla różnych warunków zewnętrznych będziemy mieli różne stany pola (różne próżnie). Nieoczywistą, a ważną, kwestią jest definicja energii Casimira. W omawianym podejściu jest ona przypisana do wartości oczekiwanej hamiltonianu pola swobodnego (bez płyt) wyliczonej na stanach próżni układu w obecności płyt. Szersza dyskusja takiej definicji energii Casimira znajduje się w pracy [7] (zob. także [25, 23, 24], gdzie autorzy stosują analogiczne podejście i podają argumenty za nim). Zmianie energii (dla różnych warunków zewnętrznych) będzie towarzyszyła pewna siła reakcji działająca na płyty, która przejawia się w postaci siły Casimira. Wrócimy do opisu tego podejścia i uszczegółowimy je w rozdziale 2.

Celem niniejszej rozprawy jest analiza pewnej klasy modeli aproksymujących warunki brzegowe w KTP (w podejściu algebraicznym) w sposób pozwalający na opis efektu Casimira, w którym od samego początku nie pojawiają się żadne nieskończoności, a jednocześnie dzięki opisowi układu w przestrzeni położeń za pomocą potencjału o zwartym nośniku, umożliwiających badanie lokalnych własności rozważanych układów. Bazując na pracach [7, 8] konstruujemy więc nową klasę modeli kwantowego pola skalarnego w obecności dwóch równoległych płyt, zgodnych z podanymi tam dopuszczalnymi idealizacjami związanymi ze strukturą algebraiczną teorii kwantowej. W ramach tych modeli pokazujemy odtwarzanie w odpowiedniej granicy skalowania ostrych warunków brzegowych (Dirichleta i Neumanna) oraz wyznaczamy energię i siłę Casimira. Potwierdzamy tym samym podstawowe wyniki otrzymane w [7, 8]. Badamy także pewne lokalne własności zaproponowanej klasy modeli, przede wszystkim lokalną gęstość energii.

Plan niniejszej pracy przedstawia się następująco. W następnym rozdziale omawiamy dokładniej stosowane tutaj podejście oraz wprowadzamy podstawowe oznaczenia używane w dalszej części pracy. Przytaczamy tam również zasadnicze warunki jakie musi spełniać model aby z punktu widzenia algebraicznego podejścia do teorii kwantowej mógł poprawnie opisywać sytuację rozważaną w przypadku efektu Casimira. W rozdziale 3 definiujemy rozważaną w niniejszej rozprawie klasę modeli oraz pewne wielkości używane w dalszej części pracy (m.in. funkcje Greena). Następnie, w rozdziale 4, omawiamy kwestię zbieżności operatorów nieograniczonych i pokazujemy odtwarzanie przez rozważaną klasę modeli ostrych warunków brzegowych w zdefiniowanej wcześniej odpowiedniej granicy skalowania. Analizy spektralnej pewnej klasy operatorów (zdefiniowanych w pierwszym rozdziale) dokonujemy w rozdziale 5, po czym, w kolejnym rozdziale, dowodzimy iż zaproponowana klasa modeli spełnia warunki omówione w rozdziale 2, związane z poprawną idealizacją warunków brzegowych. W rozdziale 7 analizujemy, od nieco innej strony niż w rozdziale 4, rozważane skalowanie. Rozdział 8 zawiera wyznaczenie energii Casimira dla zaproponowanej klasy modeli (jest to fragment rozwinięcia tej energii w odpowiedni szereg, zgodnie z uwagą pod koniec rozdziału 7) oraz wyliczenie na tej podstawie siły Casimira. W kolejnym rozdziale rozważamy własności lokalne modeli. Analizujemy najpierw, w odpowiednio określonej granicy, odtwarzanie stanu próżni modelu z ostrymi warunkami brzegowymi przez stany próżni postulowanych modeli. Następnie rozważamy lokalną gęstość energii oraz jej granicę skalowania. Ostatni, 10 rozdział, stanowi dyskusję i podsumowanie uzyskanych wyników. Krótko omawiamy w nim także przypadek pola elektromagnetycznego, ograniczenia rozważanych modeli oraz problemy otwarte związane z niniejszą pracą. Rozprawa posiada trzy dodatki, stanowiące ważne choć bardziej techniczne rachunki, przeniesione z głównej części pracy dla jasności wywodu.

Znaczna część niniejszej rozprawy bazuje zasadniczo na pracy [31]. W całej dalszej części rozprawy stosujemy jednostki naturalne: $c = 1$, $\hbar = 1$. Domyślnie, rozważanym polem jest bezmasowe pole skalarne.

Rozdział 2

Efekt Casimira w ujęciu algebraicznym

W niniejszym rozdziale przedstawiamy podstawowe elementy ogólnej konstrukcji modelu. Materiał zawarty w podrozdziale 2.1 jest skrótowym zreferowaniem procedury kwantowania liniowych układów symplektycznych według ujęcia z rozdziału trzeciego pracy [7]. Zależy nam jednak bardziej na pokazaniu pewnych idei niż rygorystycznym przedstawieniu całej koncepcji, które to Czytelnik znajdzie we wspomnianej pracy. W następnym podrozdziale rozważamy najpierw swobodne pole skalarne, po czym wskazujemy na trudności pojawiające się, w rozważanym podejściu, przy próbie modelowania oddziaływania pola z płytami poprzez zadanie ostrych warunków brzegowych. Następnie, referując pobieżnie fragmenty prac [7, 8], zajmujemy się kwestią dopuszczalnych idealizacji — najpierw w sytuacji ogólnej a następnie w zastosowaniu do symetrii planarnej rozważanej w niniejszej rozprawie — podając warunki jakie musi spełniać model aby móc poprawnie opisywać efekt Casimira w ramach stosowanego tutaj podejścia.

2.1 Kwantowanie

Konstrukcję modelu zaczynamy od klasycznej, symplektycznej przestrzeni fazowej. Niech $\mathcal{R}$ będzie rzeczywistą przestrzenią Hilberta, której iloczyn skalarny będziemy oznaczać przez $(\cdot\,,\cdot)$. Niech dalej h będzie samosprzężonym, ściśle dodatnim operatorem na $\mathcal{R}$ z dziedziną $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}(h)$. Jak zaraz zobaczymy h jest ściśle związany z hamiltonianem rozważanego układu. Oznaczamy $\mathcal{L} = \mathcal{D}_{\mathcal{R}}(h) \oplus \mathcal{R}$, a elementy tego zbioru będziemy zapisywać jako $V = v \oplus u$ (v jest związane z kanonicznym położeniem, a u z pędem). Przestrzeń ta wzbogacona o formę symplektyczną

$$\sigma(V_1, V_2) = (v_2, u_1) - (v_1, u_2)\,,$$

staje się przestrzenią fazową klasycznego modelu. Hamiltonian układu dany jest przez $\mathscr{H}(v,u) = \frac{1}{2}[(u,u) + (hv,hv)]$. Zadaje on na $\mathcal{L}$ następującą ewolucję (wyprowadzenie tej ewolucji dla przypadku oscylatora harmonicznego znajduje się pod koniec tego podrozdziału)

$$T_t(v \oplus u) = \big(\cos(ht)v + \sin(ht)h^{-1}u\big) \oplus \big(-\sin(ht)hv + \cos(ht)u\big)\,, \tag{2.1}$$

która tworzy jednoparametrową grupę transformacji symplektycznych

$$T_tT_s = T_{t+s}\,, \qquad \sigma(T_tV_1, T_tV_2) = \sigma(V_1, V_2)\,. \tag{2.2}$$

Wprowadzamy teraz zespoloną przestrzeń Hilberta $\mathcal{K}$, jako kompleksyfikację przestrzeni $\mathcal{R}$, tj. $\mathcal{K} = \mathcal{R} \oplus i\mathcal{R}$ z iloczynem skalarnym (tak samo oznaczanym jak ten na przestrzeni $\mathcal{R}$)

$$(v_1 + iu_1, v_2 + iu_2) = (v_1, v_2) + (u_1, u_2) + i(v_1, u_2) - i(u_1, v_2)\,. \tag{2.3}$$

Operator h ma jednoznaczne rozszerzenie do $\mathbb{C}$-liniowego operatora na $\mathcal{K}$ (również tutaj pozostajemy przy dotychczasowym oznaczeniu), który także jest samosprzężony i dodatni. Ograniczamy się teraz do przestrzeni (tu także pozostawiamy stare oznaczenie) $\mathcal{L} = \mathcal{D}_{\mathcal{R}}(h) \oplus \mathcal{D}_{\mathcal{R}}(h^{-1/2})$ i definiujemy $\mathbb{R}$-liniowy operator

$$j : \mathcal{L} \mapsto \operatorname{Ran} j \subset \mathcal{K}\,, \qquad j(V) = h^{1/2}v - ih^{-1/2}u\,. \tag{2.4}$$

Odwzorowanie j jest poprawnie określone na powyższym $\mathcal{L}$, ponieważ mamy $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}(h) \subset \mathcal{D}_{\mathcal{R}}(h^{1/2})$. Jak łatwo sprawdzić rozważane aktualnie $\mathcal{L}$ jest także niezmiennicze ze względu na ewolucję (2.1). Obraz $\operatorname{Ran} j$ jest $\mathbb{R}$-liniową podprzestrzenią $\mathcal{K}$, gęstą w $\mathcal{K}$, a j jest bijekcją na $\operatorname{Ran} j$. Zachodzi

$$j(T_tV) = e^{iht}j(V)\,, \tag{2.5}$$

widzimy więc iż ewolucja (2.1) tłumaczy się poprzez odwzorowanie j na unitarną ewolucję na przestrzeni $\mathcal{K}$. Przestrzeń $\mathcal{K}$ rozważana jako rzeczywista przestrzeń wektorowa, ma naturalną strukturę symplektyczną zadaną przez formę symplektyczną $\mathfrak{Im}(\cdot,\cdot)$. Ponieważ zachodzi

$$\sigma(V_1, V_2) = \mathfrak{Im}\,\big(j(V_1), j(V_2)\big)\,,$$

zatem j jest bijektywną, symplektyczną transformacją z $\mathcal{L}$ na $\operatorname{Ran} j \subset \mathcal{K}$.

Ze względu na dalsze zastosowanie stawiamy teraz pytanie o możliwe największe rozszerzenie przestrzeni symplektycznej $\mathcal{L}$, które byłoby zgodne z odwzorowaniem symplektycznym (2.4). Dokładniej, pytamy o rozszerzenie $\mathcal{L}$ i j tak aby $\operatorname{Ran} j = \mathcal{K}$. W pracy [7] zostało wykazane, że rozszerzenie to ma postać przestrzeni $\widehat{\mathcal{L}}$ określonej w następujący sposób

$$\widehat{\mathcal{L}} = \mathcal{R}_+ \oplus \mathcal{R}_-\,,$$

gdzie $\mathcal{R}_\pm$ są przestrzeniami Hilberta powstającymi przez uzupełnienie przestrzeni $\mathcal{D}_\mathcal{R}(h^{\pm 1/2}) \subset \mathcal{R}$ względem iloczynów skalarnych

$$\begin{aligned} (v_1, v_2)_+ &= (h^{1/2}v_1, h^{1/2}v_2)\,, & v_1, v_2 &\in \mathcal{D}_\mathcal{R}(h^{1/2})\,, \\ (u_1, u_2)_- &= (h^{-1/2}u_1, h^{-1/2}u_2)\,, & u_1, u_2 &\in \mathcal{D}_\mathcal{R}(h^{-1/2})\,. \end{aligned}$$

Dla $v \in \mathcal{D}_\mathcal{R}(h^{1/2})$ oraz $u \in \mathcal{D}_\mathcal{R}(h^{-1/2})$ mamy

$$|(v,u)| = |(h^{1/2}v, h^{-1/2}u)| \leqslant \|v\|_+ \|u\|_-\,, \tag{2.6}$$

gdzie $\|\cdot\|_\pm$ jest normą zadaną przez iloczyn skalarny $(\cdot,\cdot)_\pm$. Dzięki temu iloczyn (v,u) rozszerza się przez ciągłość do formy biliniowej $\langle v, u\rangle$ określonej dla wszystkich $v \in \mathcal{R}_+$ i $u \in \mathcal{R}_-$. Struktura symplektyczna na $\widehat{\mathcal{L}}$ jest teraz zadana rozszerzeniem formy σ danym przez

$$\widehat{\sigma}(V_1, V_2) = \langle v_2, u_1\rangle - \langle v_1, u_2\rangle\,,$$

a odwzorowanie j rozszerza się do symplektycznej bijekcji

$$\widehat{j} : \widehat{\mathcal{L}} \xrightarrow{na} \mathcal{K}\,.$$

Rozszerzenie ewolucji czasowej uzyskujemy kładąc

$$\widehat{T}_t V = \widehat{j}^{-1}(e^{iht}\widehat{j}(V))\,. \tag{2.7}$$

Dla dalszego użytku zauważmy, że zachodzi

$$\widehat{\mathcal{L}} \cap (\mathcal{R} \oplus \mathcal{R}) = \mathcal{D}_\mathcal{R}(h^{1/2}) \oplus \mathcal{D}_\mathcal{R}(h^{-1/2})\,. \tag{2.8}$$

Algebrę obserwabli modelu z przestrzenią symplektyczną $\widehat{\mathcal{L}}$ konstruujemy przyporządkowując każdemu $V = v \oplus u$ należącemu do $\widehat{\mathcal{L}}$ samosprzężony element algebry $\phi(V) \equiv \phi(v,u)$ (zakładamy liniową zależność funkcyjną ϕ od V) oraz narzucając kanoniczne relacje komutacji

$$[\phi(V_1), \phi(V_2)] = i\widehat{\sigma}(V_1, V_2)\,\mathrm{id}\,. \tag{2.9}$$

Element $X(u) \equiv \phi(0,u)$ ma interpretację kwantowej zmiennej położeniowej, a $P(v) \equiv \phi(v,0)$ pędu kanonicznie do niej sprzężonego. Relacje (2.9) możemy równoważnie zapisać teraz jako

$$[X(u_1), X(u_2)] = 0\,,\ [P(v_1), P(v_2)] = 0\,,\ [X(u), P(v)] = i(v,u)\,\mathrm{id}\,. \tag{2.10}$$

Relacje kanoniczne w powyższej postaci są niewygodne do ścisłego badania, gdyż jak wiadomo nie posiadają reprezentacji za pomocą ograniczonych operatorów w przestrzeni Hilberta. Dlatego też przyjęło się używać ich eksponencjalnej formy, tzw. formy Weyla kanonicznych relacji komutacji. Algebra

Weyla na przestrzeni symplektycznej $\widehat{\mathcal{L}}$ to jedyna C^*-algebra generowana przez elementy $W(V)$, $V \in \widehat{\mathcal{L}}$ poprzez relacje

$$\begin{aligned} W(V_1)W(V_2) = e^{-\frac{i}{2}\widehat{\sigma}(V_1,V_2)}\, W(V_1+V_2)\,, \\ W(V)^* = W(-V)\,, \qquad W(0) = \mathbf{1}\,. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Algebra ta (jak wszystkie C^*-algebry, przez co odgrywają one szczególną rolę w fizyce teoretycznej) zawsze posiada reprezentację za pomocą ograniczonych operatorów na pewnej przestrzeni Hilberta. Mówimy, że reprezentacja π tej algebry jest regularna, gdy unitarne jednoparametrowe grupy $\mathbb{R} \ni s \to \pi\big(W(sV)\big)$ są silnie ciągłe, a więc mają generatory $\phi(V)$:

$$\pi\big(W(V)\big) = e^{i\phi(V)}\,.$$

Wykazuje się, że wtedy $\phi(V)$ spełniają (2.9) na dostatecznie „dużych" gęstych podprzestrzeniach przestrzeni Hilberta (por. lemat 5.2.12 w [30]) i zwykle rozpatruje się tylko realizacje (2.9) powstające w opisany sposób. Z twierdzenia Stone'a – von Neumanna o jednoznaczności wiemy że wszystkie regularne reprezentacje algebry (2.9) w przypadku skończenie wymiarowej $\widehat{\mathcal{L}}$ są unitarnie równoważne. Wiemy również że istnieje wiele nierównoważnych reprezentacji takiej algebry w przypadku nieskończenie wymiarowej $\widehat{\mathcal{L}}$, co jest głównym powodem rozpatrywania abstrakcyjnych algebr, a nie wychodzenia od konkretnej reprezentacji.

Ewolucja na poziomie algebry jest zadana poprzez automorfizm

$$\alpha_t\big(W(V)\big) = W(\widehat{T}_t V)\,. \tag{2.12}$$

Szukamy takiej reprezentacji π w której ewolucja może być zaimplementowana poprzez unitarną transformację

$$\pi\big(W(\widehat{T}_t V)\big) = U(t)\,\pi\big(W(V)\big)\,U(t)^*\,, \quad U(t) = e^{itH}\,, \tag{2.13}$$

z H samosprzężonym. Jeśli H jest nieujemny, ze stanem podstawowym o zerowej energii to reprezentację taką nazywamy reprezentacją stanu podstawowego. Taką reprezentację konstruujemy za pomocą przestrzeni Focka, rozważmy więc najpierw bardzo skrótowo samą przestrzeń Focka i pewne szczególne operatory na tej przestrzeni (dokładną analizę można znaleźć np. w [30], a zwięzłe zebranie podstawowych faktów dotyczących przestrzeni Focka i operatorów na tej przestrzeni znajduje się w dodatku w pracy [7]).

Symetryczną przestrzeń Focka $\mathcal{H}$ opartą na jednocząstkowej przestrzeni $\mathcal{K}$ konstruujemy jako

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n\,, \quad \mathcal{H}_0 = \mathbb{C}\,, \quad \mathcal{H}_n = \mathcal{S}(\underbrace{\mathcal{K}\otimes\ldots\otimes\mathcal{K}}_{n\ \text{razy}}) \quad (n \geqslant 1)\,,$$

gdzie $\mathcal{S}$ jest operatorem symetryzacji. Próżnię Focka będziemy oznaczać przez Ω, operator liczby cząstek przez N, a iloczyn skalarny na tej przestrzeni, jako że nie powinno to prowadzić do nieporozumień, będziemy oznaczać jak wcześniej przez $(\cdot\,,\cdot)$. Nieograniczone operatory kreacji i anihilacji są określone na dziedzinie $\mathcal{D}(N^{1/2})$, dla $f \in \mathcal{K}$ poprzez

$$a^*(f)\psi = \mathcal{S}(f \otimes \sqrt{N+1}\,\psi)\,, \qquad (\chi, a(f)\psi) = (a^*(f)\chi, \psi)\,.$$

Spełniają one zależność

$$[a(f), a^*(g)]\varphi = (f,g)\varphi\,, \qquad \varphi \in \mathcal{D}(N)\,.$$

Samosprzężone operatory pola definiujemy jako (pozioma kreska oznacza domknięcie operatora)

$$\Phi_0(f) = \overline{\frac{1}{\sqrt{2}}(a(f) + a^*(f))}\,,$$

a z ich pomocą określamy operatory Weyla poprzez

$$W_0(f) = e^{i\Phi_0(f)}\,.$$

Okazuje się, że jeśli położyć

$$\pi(W(V)) \equiv W_0(\widehat{\jmath}(V))\,,$$

to otrzymamy w ten sposób nieredukowalną reprezentację stanu podstawowego algebry Weyla (2.11). Korzystając z (2.5) możemy teraz zapisać ewolucję (2.13) w następujący sposób

$$W_0(e^{ith}f) = e^{itH}W_0(f)e^{-itH}\,, \quad f \in \mathcal{K}\,.$$

Zachodzi

$$H = d\Gamma(h)\,,$$

gdzie $d\Gamma(h)$ jest tzw. drugą kwantyzacją samosprzężonego operatora h. Hamiltonian ten ma nieujemne spektrum i pojedynczy stan podstawowy do zerowej wartości własnej, którym jest fockowska próżnia Ω. Jeśli $\{f_i\}$ jest dowolną, ortonormalną bazą $\mathcal{K}$ utworzoną z elementów zbioru $\mathcal{D}(h^{1/2})$, wtedy H może być przedstawiony jako

$$H = d\Gamma(h) = \sum_{i=1}^{\infty} a^*\left(h^{1/2}f_i\right) a\left(h^{1/2}f_i\right)\,. \tag{2.14}$$

Zanim zastosujemy powyższe rozważania do opisu efektu Casimira, podamy najpierw prosty przykład ilustrujący fragment powyższego schematu. Rozważmy jednowymiarowy oscylator harmoniczny o częstości ω oraz jednostkowej masie. Jako przestrzeń $\mathcal{R}$ wybieramy zbiór liczb rzeczywistych a iloczyn skalarny na tej przestrzeni to zwykłe mnożenie liczb

$$\mathcal{R} = \mathbb{R}\,, \quad (x,y) = x \cdot y\,.$$

Operator h to mnożenie przez dodatnią stałą, $hx = \omega x\,,\ x \in \mathbb{R}$. Zmienne z przestrzeni fazowej v, u będziemy oznaczać przez x, p odpowiednio. Hamiltonian $\mathscr{H}$ przyjmuje postać

$$\mathscr{H}(x,p) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2\,.$$

Rozwiązaniem równań Hamiltona jest

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos(\omega t)x(0) + \sin(\omega t)\omega^{-1}p(0)\,,\\ p(t) &= -\sin(\omega t)\omega x(0) + \cos(\omega t)p(0)\,, \end{aligned}$$

co dla $h = \omega$ pokrywa się z ewolucją (2.1).

2.2 Dopuszczalne idealizacje

W celu sprawdzenia jakie ogólne warunki musi spełniać model aby móc poprawnie opisywać efekt Casimira, rozważmy najpierw sytuację pola bez płyt, a więc swobodne kwantowe pole skalarne w $\mathbb{R}^3$. Do opisu tego układu stosujemy konstrukcję z poprzedniego podrozdziału, bez zmiany oznaczeń, z następującymi identyfikacjami:

$$\mathcal{R} = L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)\,,\quad \mathcal{K} = L^2(\mathbb{R}^3)\,,\quad h = \sqrt{-\Delta}\,,$$

gdzie, tutaj i w dalszej części pracy, dolny indeks $\mathbb{R}$ oznacza część rzeczywistą przestrzeni funkcyjnej (tzn. rozpatrujemy funkcje o wartościach rzeczywistych), a Δ oznacza trójwymiarowy operator Laplace'a. Jako przestrzeń symplektyczną wybieramy $\widehat{\mathcal{L}}$. Podsumujmy najważniejsze informacje. Algebrą obserwabli jest teraz algebra Weyla generowana przez

$$\{W(V), V \in \widehat{\mathcal{L}}\}\,. \tag{2.15}$$

Jej nieredukowalna reprezentacja stanu podstawowego jest dana przez

$$\pi(W(V)) = W_0(\widehat{j}(V))\,, \tag{2.16}$$

a przestrzeń Focka $\mathcal{H}$ jest zbudowana na jednocząstkowej przestrzeni Hilberta $\mathcal{K} = L^2(\mathbb{R}^3)$. Operatorem energii jest $H = d\Gamma(h)$.

Zanim przejdziemy do opisu pola w obecności płyt wskażemy najpierw na trudności powstające przy wprowadzaniu ostrych warunków brzegowych (Dirichleta lub Neumanna) na pewnych powierzchniach w przestrzeni fizycznej. Trudności te pojawiają się już na poziomie klasycznym (początek poprzedniego rozdziału, aż do wzoru (2.2) włącznie), który teraz rozważymy. Przypadek kwantowy omawiamy na dalszych stronach tego rozdziału. Dla prostoty zadajemy warunki brzegowe na płaszczyznach $z = \pm a/2 \equiv \pm b$, ale mechanizm pozostaje taki sam dla innych rozgraniczających powierzchni.

Rozważmy najpierw, niezmienniczą ze względu na swobodną ewolucję, przestrzeń symplektyczną złożoną z gładkich funkcji o zwartym nośniku, które zwykle przyjmuje się jako funkcje próbne w kwantowej teorii pola. Mamy więc

$$\mathcal{L} = \mathcal{C}^{\infty}_{0,\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3) \oplus \mathcal{C}^{\infty}_{0,\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)\,. \tag{2.17}$$

Jako operator h z poprzedniego podrozdziału należy przyjąć teraz (dodatni) pierwiastek z operatora $[h^B_a]^2$ (będziemy go oznaczać h^B_a), określonego jako minus operator Laplace'a na dziedzinie

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{\mathcal{R}}([h^B_a]^2) =& \{\psi \in H^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2 \times (-\infty, -b)) : \psi^{(\prime)}(x, y, -b) = 0\}\\ &\oplus\{\psi \in H^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2 \times (-b, b)) : \psi^{(\prime)}(x, y, \pm b) = 0\}\\ &\oplus\{\psi \in H^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2 \times (b, \infty)) : \psi^{(\prime)}(x, y, b) = 0\}\,,\end{aligned}$$

gdzie dla przypadku Dirichleta należy wziąć warunek zerowania się funkcji, a dla przypadku Neumanna zerowania się pochodnej (prim oznacza pochodną w kierunku z). $H^2(\Omega)$, a także $H^1(\Omega)$ poniżej, są standardowymi oznaczeniami odpowiednich przestrzeni Soboleva stosowanymi w całej pracy. Operator $[h^B_a]^2$ odpowiada więc ostrym warunkom brzegowym Dirichleta albo Neumanna. Można wykazać (por. [32] str. 83 tw. 2.3), że dla pierwiastka zachodzi

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{\mathcal{R}}(h^B_a) =& \{\psi \in H^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2 \times (-\infty, -b)) : \psi(x, y, -b) = 0\}\\ &\oplus\{\psi \in H^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2 \times (-b, b)) : \psi(x, y, \pm b) = 0\}\\ &\oplus\{\psi \in H^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2 \times (b, \infty)) : \psi(x, y, b) = 0\}\,,\end{aligned}$$

dla przypadku Dirichleta, a dla Neumanna podobnie tylko bez warunku zerowania się funkcji (tzn. suma prosta samych przestrzeni $H^1_{\mathbb{R}}(\Omega)$ dla odpowiednich Ω). Widzimy więc, że dla przestrzeni symplektycznej (2.17) ewolucja w obecności ostrych warunków brzegowych dla różnych elementów tej przestrzeni albo od początku nie daje się zastosować, albo w skończonym czasie wyprowadza poza tę przestrzeń.

Rozważmy teraz, dla $h = h^B_a$ oraz $\mathcal{R} = L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$, przestrzeń symplektyczną którą przyjęliśmy na początku poprzedniego podrozdziału, a więc

$$\mathcal{L} = \mathcal{D}_{\mathcal{R}}(h^B_a) \oplus L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)\,.$$

Dla takich przestrzeni, przy zmieniającym się a, także napotykamy na trudności, gdyż nie istnieje wspólna ich podprzestrzeń inwariantna ze względu na wszystkie ewolucje (kwestię potrzeby takiej wspólnej przestrzeni rozważamy poniżej).

Warunek uniwersalny

Powyższe trudności związane z modelowaniem oddziaływania pola z płytami wskazują na potrzebę analizy dopuszczalnych idealizacji przy opisywaniu tego typu układów. Rozważmy więc ogólną klasę modeli układu z płytami skonstruowanych według schematu opisanego w podrozdziale 2.1, z zastąpieniem operatora h przez operator h_a, dla ustalonej odległości pomiędzy płytami a (mamy więc całą rodzinę operatorów h_a dla różnych a). Przestrzenie symplektyczne $\widehat{\mathcal{L}}_a$, zbudowane na nich algebry Weyla (wraz z ewolucją zadaną przez h_a) oraz ich reprezentacje próżniowe są skonstruowane według schematu z podrozdziału 2.1. Analogicznie do (2.8), zachodzi teraz

$$\widehat{\mathcal{L}}_a \cap (\mathcal{R} \oplus \mathcal{R}) = \mathcal{D}_{\mathcal{R}}(h_a^{1/2}) \oplus \mathcal{D}_{\mathcal{R}}(h_a^{-1/2})\,.$$

W ogólności przestrzenie symplektyczne $\widehat{\mathcal{L}}, \widehat{\mathcal{L}}_a$ są różne, zatem różne są też zbudowane na nich algebry Weyla (zob. tw. 5.2.9 w [30]). Aby móc zbadać wpływ obecności płyt na zachowanie układu nakładamy na rozważane modele następujące warunki:

(i) wszystkie rozważane algebry mają dostatecznie dużą wspólną podalgebrę, która stanowić będzie algebrę służącą do opisu efektu Casimira;

(ii) reprezentacje próżniowe tej algebry, przy różnych położeniach płyt oraz w ich nieobecności są unitarnie równoważne.

Dostatecznie dużą, powyżej, należy rozumieć tak, że przestrzeń symplektyczna tej algebry jest gęsta w przestrzeniach $\widehat{\mathcal{L}}, \widehat{\mathcal{L}}_a$. W pracy [7] pokazano, iż następujące warunki na operatory h_a

$$\mathcal{D}_{\mathcal{R}}(h^{\pm 1/2}) = \mathcal{D}_{\mathcal{R}}(h_a^{\pm 1/2}) \quad \text{oraz} \quad B_a \equiv h_a^{1/2} h^{-1/2},\ B_a^{-1} \ \text{ograniczone}, \tag{2.18}$$

są konieczne dla koniunkcji (i) i (ii). Okazuje się, że wtedy $\widehat{\mathcal{L}} = \widehat{\mathcal{L}}_a$ dla wszystkich a i dodatkowo operator $L_a \equiv \widehat{j}\,\widehat{j}_a^{-1}$ jest ograniczonym operatorem na $\mathcal{K}$, wraz ze swoim odwrotnym. Widzimy zatem, iż w istocie przy tym żądaniu wszystkie algebry pokrywają się.

Przyjmujemy więc warunki (2.18). Podsumujmy najważniejsze informacje. Mamy wspólną algebrę, na której ewolucja (dla ustalonego a) dana jest przez

$$\alpha_{at}(W(V)) = W(\widehat{T}_{at} V)\,,$$

gdzie $\widehat{T}_{at}$ dane jest przez (2.7) z h zastąpionym przez h_a i $\widehat{j}$ zastąpionym przez $\widehat{j}_a$. Dla każdego a nieredukowalna reprezentacja stanu podstawowego algebry — skonstruowana analogicznie do sytuacji bez płyt, w tej samej przestrzeni Focka $\mathcal{H}$ — ma postać

$$\pi_a(W(V)) = W_0(\widehat{j}_a(V))\,.$$

Hamiltonianem jest $d\Gamma(h_a)$, a jego stanem podstawowym fockowska próżnia Ω (por. (2.14) z h_a zamiast h).

Jak wspomnieliśmy powyżej — warunek (ii), chcemy opisać tę samą sytuację fizyczną (pole w obecności płyt) przy pomocy reprezentacji π (2.16). Dla każdego a szukamy więc unitarnego operatora U_a, który poprzez transformację podobieństwa przekształca jedną reprezentację w drugą, a więc

$$U_a\,\pi_a(W(V))U_a^* = \pi(W(V))\,. \tag{2.19}$$

Podstawiając definicje poszczególnych reprezentacji oraz kładąc $\widehat{\jmath}_a(V) \equiv f$, zapisujemy ten warunek jako

$$U_a W_0(f) U_a^* = W_0(L_a f)\,, \quad f \in \mathcal{K}\,, \tag{2.20}$$

gdzie

$$L_a \equiv \widehat{\jmath}\,\widehat{\jmath}_a^{\,-1}\,, \quad L_a : \mathcal{K} \xrightarrow{na} \mathcal{K}\,.$$

Oba odwzorowania $\widehat{\jmath}$ i $\widehat{\jmath}_a$ są bijektywnymi transformacjami symplektycznymi, zatem odwzorowanie L_a jest bijektywną, symplektyczną transformacją na przestrzeni symplektycznej $(\mathcal{K}, \mathfrak{Im}(\cdot,\cdot))$.

Dowolna bijektywna transformacja symplektyczna przestrzeni $(\mathcal{K}, \mathfrak{Im}(\cdot,\cdot))$ (dla odróżnienia oznaczmy ją przez L) zadaje, jak łatwo sprawdzić korzystając z (2.11), *-automorfizm algebry Weyla

$$W_0(f) \to W_{0L}(f) \equiv W_0(Lf)\,,$$

znany jako transformacja Bogoliubova. Mówimy że transformacja taka jest implementowalna w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ jeśli istnieje operator unitarny U_L taki że

$$W_{0L}(f) = U_L W_0(f) U_L^*\,.$$

Każda transformacja symplektyczna L ma jednoznaczny rozkład $L = T + S$, gdzie T jest $\mathbb{C}$-liniowy, a S jest $\mathbb{C}$-antyliniowy. Koniecznym i wystarczającym warunkiem na implementowalność transformacji Bogoliubova L jest aby S był operatorem Hilberta-Schmidta (zob. [33, 34, 35] a także dodatek A w pracy [7]), tzn.

$$\mathrm{Tr}[S^* S] < \infty\,.$$

Wzór (2.20) stanowi więc implementację transformacji Bogoliubova L_a, co jest możliwe wtedy, i tylko wtedy, gdy

$$\mathrm{Tr}[S_a^* S_a] < \infty\,, \tag{2.21}$$

gdzie $L_a = T_a + S_a$ jest wspomnianym wcześniej rozkładem. Można wykazać (por. [7] wzory (4.6) i (4.7)), że

$$S_a = \frac{1}{2}\Big(h^{1/2} h_a^{-1/2} - h^{-1/2} h_a^{1/2}\Big) K\,,$$

gdzie K jest operatorem sprzężenia zespolonego. Żądanie (2.21) jest zatem warunkiem koniecznym i wystarczającym na unitarną równoważność reprezentacji π i π_a. Zakładamy tymczasowo że zachodzi (2.21).

Dzięki (2.19) możemy wyrazić hamiltoniany ewolucji w obecności płyt $d\Gamma(h_a)$ w reprezentacji π jako

$$H_a \equiv U_a d\Gamma(h_a) U_a^* \,.$$

Ich stany podstawowe w tej reprezentacji to

$$\Omega_a \equiv U_a \Omega \,.$$

Jeśli założyć, że stan pola w obecności płyt przechodzi w stany Ω_a (przybliżenie adiabatyczne), to energia potencjalna związana ze zwrotną siłą reakcji (backreaction force) dana jest przez (omówiliśmy już pobieżnie tę kwestię w rozdziale 1, jej szersza dyskusja znajduje się w pracy [7])

$$\mathcal{E}_a \equiv (\Omega_a, H\Omega_a) \,, \tag{2.22}$$

gdzie $H = d\Gamma(h)$. Można pokazać (korzystając m.in. z (2.14)), że zachodzi

$$\mathcal{E}_a = \mathrm{Tr}\big[h^{1/2} S_a {S_a}^* h^{1/2}\big] = \frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}\big[(h_a - h) h_a^{-1} (h_a - h)\big] \,. \tag{2.23}$$

Widzimy zatem że warunkiem koniecznym i wystarczającym na skończoną wartość energii $\mathcal{E}_a$ jest by $S_a^* h^{1/2}$ rozszerzał się do operatora Hilberta-Schmidta. Warunek (2.21) także posiada fizyczne znaczenie, gdyż można pokazać że

$$\mathrm{Tr}\big[S_a^* S_a\big] = (\Omega_a, N\Omega_a) \equiv \mathcal{N}_a \,,$$

gdzie N to tradycyjny fockowski operator liczby cząstek.

Symetria planarna

Zastosujemy teraz powyższe ogólne rozważania do konkretnej sytuacji zakładanej w niniejszej rozprawie (symetria planarna). Przestrzeń $\mathcal{R}$ wybieramy jako $\mathcal{R} = \mathcal{R}_\perp \otimes \mathcal{R}_z$. Analogicznie, dla wersji zespolonej tej przestrzeni, mamy $\mathcal{K} = \mathcal{K}_\perp \otimes \mathcal{K}_z$. Niech teraz dodatni, samosprzężony operator $h_\perp$ na $\mathcal{K}_\perp$, z dziedziną $\mathcal{D}(h_\perp)$, opisuje dynamikę w kierunkach prostopadłych, natomiast dodatni, samosprzężony operator h_z na $\mathcal{K}_z$, z dziedziną $\mathcal{D}(h_z)$, opisuje dynamikę w wyróżnionym kierunku z. Wtedy operator h na $\mathcal{K}$ zdefiniowany w standardowy sposób jako

$$h = \sqrt{(h_\perp \otimes \mathrm{id})^2 + (\mathrm{id} \otimes h_z)^2}\,, \quad \mathcal{D}(h) = \mathcal{D}(h_\perp \otimes \mathrm{id}) \cap \mathcal{D}(\mathrm{id} \otimes h_z) \,, \tag{2.24}$$

jest dodatnim, samosprzężonym operatorem.

Model swobodnego pola skalarnego w $\mathbb{R}^3$ otrzymujemy dla

$$\mathcal{K}_\perp = L^2(\mathbb{R}^2, dx\,dy), \quad \mathcal{K}_z = L^2(\mathbb{R}, dz), \quad h_\perp^2 = -\Delta_\perp, \quad h_z^2 = -\partial_z^2,$$

gdzie $\Delta_\perp$ jest dwuwymiarowym laplasjanem. Wprowadzamy teraz model z zewnętrznymi warunkami i zakładamy że modyfikacji ulega jedynie dynamika w kierunku z. Nie możemy wtedy spełnić warunku równoważności reprezentacji zadanych przez obie dynamiki (swobodną i zmodyfikowaną) — warunek (2.21), wynika to jednak nie z niewłaściwie zadanej konkretnej dynamiki, a z symetrii translacyjnej w kierunkach x-y. Możemy obejść ten problem rozważając tzw. granicę termodynamiczną. Ograniczamy się zatem do zwartego obszaru (tzw. pudła) w kierunkach x-y, zadajemy odpowiednie warunki na brzegach tego obszaru i przechodzimy do granicy nieskończonego obszaru, rozważając odpowiednie wielkości liczone na jednostkę powierzchni (zob. [8]).

Wprowadzamy więc warunki zewnętrzne zastępując jedynie operator h_z nowym dodatnim, samosprzężonym operatorem h_{za}. W analogii do wzoru (2.24) mamy więc

$$h_a = \sqrt{(h_\perp \otimes \mathrm{id})^2 + (\mathrm{id} \otimes h_{za})^2}\,, \quad \mathcal{D}(h_a) = \mathcal{D}(h_\perp \otimes \mathrm{id}) \cap \mathcal{D}(\mathrm{id} \otimes h_{za})\,. \quad (2.25)$$

Konkretną postać operatora h_{za} (dokładnie całą klasę operatorów) zaproponujemy w następnym rozdziale. Pomijając znowu dokładną analizę z pracy [8], przytoczymy tylko jeden z najważniejszych wyników tam zawartych. Okazuje się, że jeśli operatory $h_{za} - h_z$ i $(h_{za} - h_z)h_z^{1/2}$ rozszerzają się do operatorów Hilberta-Schmidta, tzn.

$$\mathrm{Tr}\left[(h_{za} - h_z)^2\right] < \infty\,, \quad (2.26)$$

$$\mathrm{Tr}\left[(h_{za} - h_z)h_z(h_{za} - h_z)\right] < \infty\,, \quad (2.27)$$

to swobodna i zmodyfikowana dynamika są opisywane w ramach tej samej algebry (dla dowolnego rozmiaru pudła) poprzez unitarnie równoważne reprezentacje (dla dowolnego rozmiaru pudła) oraz w granicy nieskończonego pudła dostajemy skończoną wartość energii $\mathcal{E}_a$ na jednostkę powierzchni, którą będziemy oznaczać przez ε_a, i skończoną wartość liczby cząstek $\mathcal{N}_a$ na jednostkę powierzchni. Jeśli warunki (2.26) i (2.27) są spełnione wtedy energia na jednostkę powierzchni wyraża się wzorem

$$\varepsilon_a = \frac{1}{24\pi}\mathrm{Tr}\left[(h_{za} - h_z)(2h_z + h_{za})(h_{za} - h_z)\right]. \quad (2.28)$$

Siła Casimira na jednostkę powierzchni wynosi wtedy

$$f_a = -\frac{d\varepsilon_a}{da}\,. \quad (2.29)$$

Zwracamy uwagę, że (2.26) oznacza w szczególności, że operator $h_{za} - h_z$ jest ograniczony, a zatem operatory h_{za}, h_z muszą mieć tę samą dziedzinę. Oznacza to, iż operator h_{za} nie może być zadany przez ostre warunki brzegowe.

Rozdział 3

Model

W tym rozdziale przedstawiamy proponowaną klasę modeli oraz związane z nimi potrzebne dalej wielkości. W następnym rozdziale pokażemy iż w granicy odpowiednio zdefiniowanego skalowania modele te odtwarzają (w sensie sprecyzowanym w następnym rozdziale) układ z płytami z warunkami brzegowymi Dirichleta lub Neumanna.

Postulujemy następującą klasę nielokalnych potencjałów mających modelować rozważane płyty

$$V = \sigma\Big(|U_b g\rangle \langle U_b g| + |U_{-b} g\rangle \langle U_{-b} g|\Big)\,, \quad 0 < b = \frac{a}{2}\,, \quad \sigma = \pm 1\,, \tag{3.1}$$

gdzie $U_{\pm b}$ jest operatorem translacji o $\pm b$, a $\sigma = 1, -1$ oznacza odpowiednio przypadek mający odtwarzać warunek Dirichleta (D) albo Neumanna (N) (będziemy o nich pisać w skrócie jako o przypadkach Dirichleta i Neumanna). W całej pracy, o ile nie jest wspomniane inaczej, traktujemy oba przypadki równolegle. Mając na uwadze czytelność wzorów pomijamy bardzo często jawny zapis parametrów od których dane wielkości zależą (w powyższym wzorze na przykład nie zaznaczamy zależności V od σ czy b). W reprezentacji położeniowej rozważany potencjał jest operatorem całkowym

$$(V\psi)(z) = \int V(z,z')\psi(z')\,dz'\,,$$

z jądrem

$$V(z,z') = \sigma\Big[g(z-b)\overline{g(z'-b)} + g(z+b)\overline{g(z'+b)}\Big]\,.$$

Jako funkcję g bierzemy

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & \text{dla } \sigma = 1, \qquad \text{(D)} \\ -i\frac{d}{dz}f(z) & \text{dla } \sigma = -1, \qquad \text{(N)} \end{cases} \tag{3.2}$$

gdzie o f zakładamy

$$f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})\,,\ \ f(-z) = f(z)\,,\ \ \mathrm{supp} f \subseteq \langle -R, R\rangle\,,\ \ R < b\,,\ \ \widehat{f}(0) \neq 0\,,\ \ \text{(D,N)} \tag{3.3}$$

$$\|f\| = 1\,. \qquad\qquad \text{(N)} \tag{3.4}$$

Powyżej i w całej pracy stosujemy następującą definicję transformaty Fouriera (dla funkcji jednej zmiennej)

$$\widehat{f}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-ipx} f(x) dx$$

oraz przyjmujemy konwencję, że całki bez określonych granic należy rozumieć jako całki po $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{R}^2$ — zależnie od miary. Ograniczoność nośnika w (3.3) umożliwia nam kontrolę nad przestrzennym zasięgiem potencjału, parzystość odpowiada symetryczności każdej z płyt (dla przypadku Neumanna funkcja g jest oczywiście nieparzysta, jednak w obu przypadkach potencjał dla pojedynczej płyty komutuje z operatorem parzystości), trzeci warunek oznacza iż cały potencjał składa się z dwóch nieprzekrywających się członów, odpowiadających każdej płycie z osobna, a ostatni warunek w (3.3) oraz warunek (3.4) są techniczne.

Proponowany model ma strukturę omówioną w rozdziale 2, w szczególności pod koniec tego rozdziału gdzie rozważaliśmy symetrię planarną. Przyjmujemy następującą postać operatorów (dla różnych a) h_{za}

$$h_{za}^2 = h_z^2 + V\,, \tag{3.5}$$

z dziedziną $\mathcal{D}(h_z^2) = \mathcal{D}(h_{za}^2) = H^2(\mathbb{R})$, gdzie przypominamy, że $h_z^2 = -\frac{d^2}{dz^2}$. Oba te nieograniczone operatory są samosprzężone — dla h_z^2 jest to ogólnie znany fakt, a dla h_{za}^2 wynika to z tw. Kato-Rellicha (zob. [37] tw. X.12), jako że V jest ograniczony i symetryczny. Oba te operatory są także dodatnie — znowu dla pierwszego jest to oczywiste, dla drugiego w przypadku Dirichleta również. W przypadku Neumanna dla $\psi \in \mathcal{D}(h_z^2)$, całkując przez części, dostajemy

$$(\psi, h_{za}^2\psi) = \|\psi'\|^2 - |(U_b f, \psi')|^2 - |(U_{-b} f, \psi')|^2\,, \qquad \text{(N)}$$

gdzie $\psi'(z) = \frac{d\psi(z)}{dz}$. Funkcje $U_{\pm b} f$ tworzą ortonormalny zbiór, gdyż ich nośniki nie przekrywają się oraz korzystając m.in. z (3.4) mamy $\|U_{\pm b} f\| = \|f\| = 1$, zatem (z nierówności Bessela) dostajemy że $(\psi, h_{za}^2\psi) \geqslant 0$ dla każdego ψ. Zauważmy tylko, że ten sam wynik można dostać przyjmując słabsze założenie, mianowicie $\|f\| \leqslant 1$, jednak — jak zobaczymy w następnym rozdziale — do odtwarzania ostrego warunku Neumanna potrzebujemy dokładnie (3.4). Korzystając z dodatniości oznaczmy przez h_z, h_{za} samosprzężone dodatnie pierwiastki z operatorów h_z^2, h_{za}^2 odpowiednio.

Wprowadzimy teraz kilka oznaczeń i związków użytecznych w dalszej części pracy. Spektrum dodatnich operatorów samosprzężonych zawiera się w $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$. Dla $w^2 \in \mathbb{C}$, takich że $\mathfrak{Im}\, w^2 \neq 0$ istnieją zatem rezolwenty, które oznaczamy

$$G_0(w^2) = (w^2 - h_z^2)^{-1}, \quad G(w^2) = (w^2 - h_{za}^2)^{-1}.$$

Bez straty ogólności zakładamy dalej że $\mathfrak{Im}\, w > 0$. Poniżej korzystamy ze standardowych definicji i wzorów w ramach stacjonarnej teorii rozpraszania, zainteresowany Czytelnik może znaleźć szersze omówienie np. w [38] (poniższe dwa wzory pochodzą z rozdziału ósmego tej książki). Wprowadzamy operator T

$$T(w^2) = V + VG(w^2)V, \tag{3.6}$$

który spełnia następujące równanie

$$T(w^2) = V + VG_0(w^2)T(w^2).$$

Dla naszego potencjału wzór (3.6) sugeruje następujący Ansatz

$$T(w^2) = \Big(|U_{+b}g\rangle \;\; |U_{-b}g\rangle \Big)\, \mathcal{T}(w^2) \begin{pmatrix} \langle U_{+b}g| \\ \langle U_{-b}g| \end{pmatrix}, \tag{3.7}$$

gdzie $\mathcal{T}(w^2)$ jest liczbową macierzą. Korzystając z faktów, iż $U_{\pm b}^* = U_{\mp b}$ oraz $U_{\pm b}$ komutuje z $G_0(w^2)$, dostajemy

$$\mathcal{T}(w^2) = \begin{pmatrix} \sigma - (g, G_0(w^2)g) & -(U_a g, G_0(w^2)g) \\ -(U_{-a}g, G_0(w^2)g) & \sigma - (g, G_0(w^2)g) \end{pmatrix}^{-1}. \tag{3.8}$$

Wyliczając iloczyny skalarne w przestrzeni pędów oraz uwzględniając (3.2) otrzymujemy

$$\sigma - \Big(g, G_0(w^2)g\Big) = \sigma - \int \frac{p^{1-\sigma} M_p}{w^2 - p^2} dp, \tag{3.9}$$

$$-\Big(U_a g, G_0(w^2)g\Big) = -\Big(U_{-a} g, G_0(w^2)g\Big) = -\int \frac{e^{iap} p^{1-\sigma} M_p}{w^2 - p^2} dp, \tag{3.10}$$

gdzie $M_p = |\widehat{f}(p)|^2$. Przy wyprowadzeniu powyższych wzorów skorzystaliśmy z faktu, że reprezentacja pędowa jest spektralną reprezentacją operatora $G_0(w^2)$. Ostatnią całkę można jawnie wyliczyć. Dla przypadku Dirichleta, korzystając z analityczności i odpowiedniego oszacowania funkcji M_p (wzór (A.4)) oraz z zachowania eksponenty dla zespolonych wartości zmiennej p (mamy $a > 2R$, co przy domykaniu konturu od góry daje odpowiednie znikanie funkcji podcałkowej), wynik dostajemy wprost z całkowania metodą residuów. Dla przypadku Neumanna mamy

$$-\int \frac{e^{iap} p^2 M_p}{w^2 - p^2} dp = \int e^{iap} M_p dp - w^2 \int \frac{e^{iap} M_p}{w^2 - p^2} dp.$$

Pierwsza całka wynosi zero (zob. (A.3)), a druga całka jest tą z przypadku Dirichleta. W ten sposób otrzymujemy

$$-\Big(U_a g, G_0(w^2)g\Big) = -\int \frac{e^{iap}p^{1-\sigma}M_p}{w^2-p^2}dp = i\pi w^{-\sigma}e^{iaw}M_w\,. \tag{3.11}$$

Definicja rozszerzenia funkcji M_p poza oś rzeczywistą oraz wiele faktów związanych z tą funkcją zostały zebrane w dodatku A.1. Dla rezolwenty zachodzi (poniższe równanie wynika ze wzorów (8.4) i (8.10) z rozdziału ósmego w [38])

$$G(w^2) = G_0(w^2) + G_0(w^2)\,T(w^2)G_0(w^2)\,. \tag{3.12}$$

Wprowadzając oznaczenie

$$\mathcal{F}_p = p^{\frac{1-\sigma}{2}}\widehat{f}(p)\begin{pmatrix} e^{-ibp} & e^{ibp}\end{pmatrix}\,, \tag{3.13}$$

możemy, korzystając z (3.7) oraz (3.12), zapisać

$$\langle p|\,T(w^2)\,|q\rangle = \mathcal{F}_p\mathcal{T}(w^2)\mathcal{F}_q^\dagger\,, \tag{3.14}$$

$$\langle p|\,G(w^2)-G_0(w^2)\,|q\rangle = \frac{\mathcal{F}_p}{w^2-p^2}\mathcal{T}(w^2)\frac{\mathcal{F}_q^\dagger}{w^2-q^2}\,. \tag{3.15}$$

Rozdział 4

Odtwarzanie ostrych warunków brzegowych

W rozdziale tym pokażemy jak odpowiednio przeskalowane modele z poprzedniego rozdziału odtwarzają w pewnej granicy skalowania ostre warunki brzegowe Dirichleta lub Neumanna. Odtwarzanie to rozumiemy na poziomie hamiltonianów pierwszej kwantyzacji zadających ewolucję w danych warunkach. Ponieważ operatory te są nieograniczone, wprowadza się pojęcia zbieżności rezolwentowej (silnej lub według normy), które pociągają za sobą odpowiednie zbieżności szerszych klas funkcji ograniczonych od tych operatorów (szerszą analizę zbieżności operatorów nieograniczonych można znaleźć w [36], rozdz. VIII.7).

Rozważmy rodzinę przeskalowanych potencjałów V_λ, $\lambda \in (0, 1\rangle$, skonstruowanych jak w (3.1), gdzie zamiast funkcji g bierzemy przeskalowaną funkcję g_λ. Postulujemy następującą postać skalowania

$$g_\lambda(z) = \lambda^{-\frac{3}{2}} g\left(\frac{z}{\lambda}\right) , \quad f_\lambda(z) = \lambda^{-1-\frac{\sigma}{2}} f\left(\frac{z}{\lambda}\right) , \quad \widehat{f}_\lambda(p) \equiv \widehat{f_\lambda}(p) = \lambda^{-\frac{\sigma}{2}} \widehat{f}(\lambda p) . \tag{4.1}$$

Wzór (3.2) zachodzi więc także dla przeskalowanych funkcji. Mamy również

$$M_{p,\lambda} = \lambda^{-\sigma} M_{\lambda p} . \tag{4.2}$$

Jako granicę skalowania przyjmujemy $\lambda \to 0^+$. Analogicznie jak dla nieprzeskalowanego przypadku, ewolucja w przeskalowanym potencjale niech będzie opisywana przez operator $h_{za,\lambda}$, a więc dla kwadratu tego operatora mamy

$$h^2_{za,\lambda} = h^2_z + V_\lambda .$$

Wprowadzenie skalowania należy rozumieć jako zastąpienie funkcji f (lub g) jej przeskalowaną wersją f_λ (g_λ). Wszystkie wielkości zależne od tych funkcji po wprowadzeniu skalowania zyskują indeks λ. Aby zobaczyć jak skaluje się sam potencjał, oznaczmy na moment jawnie zależność potencjału od odległości pomiędzy płytami dopisując dolny indeks do potencjału, tj. pisząc V_a. Zachodzi

$$V_{a,\lambda}(z,z') = \lambda^{-3} V_{\frac{a}{\lambda}}\Big(\frac{z}{\lambda},\frac{z'}{\lambda}\Big)\,. \tag{4.3}$$

Intuicja stojąca za takim prawem skalowania jest następująca: przeskalowanie argumentów jak powyżej sprawia że nośnik przeskalowanego potencjału w granicy skalowania kurczy się, a czynnik przed potencjałem sprawia iż wartość potencjału w tej granicy wybucha. Dla lokalnego potencjału (mnożenia w punkcie) odtwarzanie ostrych warunków jest osiągane przy współczynniku przed potencjałem λ^{-2} (zob. [39]). Nielokalność potencjału wymaga o jedną potengę silniejszej zależności. Definicja skalowania (4.1) została tak wybrana aby zachodził wzór (4.3).

Niech teraz h^B_{za} będzie samosprzężonym, dodatnim pierwiastkiem z operatora

$$[h^B_{za}]^2 = -\frac{d^2}{dz^2} \tag{4.4a}$$

z dziedziną

$$\begin{aligned}\mathcal{D}([h^B_{za}]^2) =&\{\psi\in H^2\big((-\infty,-b)\big) : \psi^{(\prime)}(-b)=0\}\\ &\oplus\{\psi\in H^2\big((-b,b)\big) : \psi^{(\prime)}(\pm b)=0\}\\ &\oplus\{\psi\in H^2\big((b,\infty)\big) : \psi^{(\prime)}(b)=0\}\,,\end{aligned} \tag{4.4b}$$

gdzie dla przypadku Dirichleta należy wziąć warunek zerowania się funkcji, a dla przypadku Neumanna zerowania się pochodnej. Operator ten odpowiada więc ostrym warunkom brzegowym Dirichleta albo Neumanna. Rezolwentę operatora $[h^B_{za}]^2$ będziemy oznaczać przez $G^B(w^2)$.

Celem tego rozdziału jest pokazanie następującej zależności

$$\lim_{\lambda\to 0^+} \|G_\lambda(w^2) - G^B(w^2)\|_{\mathrm{HS}} = 0\,. \tag{4.5}$$

Z (4.5) wynika już zarówno zbieżność rezolwentowa według normy — gdyż norma Hilberta-Schmidta spełnia $\|A\|^2_{\mathrm{HS}} \equiv \mathrm{Tr}(A^*A) \geqslant \|A\|^2$ — jak i silna — gdyż jak wiadomo topologia zadana przez normę operatorową jest mocniejsza od topologii silnej — operatorów $h^2_{za,\lambda}$ do $[h^B_{za}]^2$. Te ostatnie zbieżności pociągają za sobą (zob. tw. VIII.20 w [36]) zbieżność względem normy

$$\lim_{\lambda\to 0^+} \|F(h_{za,\lambda}) - F(h^B_{za})\| = 0\,,$$

dla dowolnej ciągłej i znikającej w nieskończoności zespolonej funkcji F na $\mathbb{R}$ oraz silną zbieżność

$$\lim_{\lambda\to 0^+} \|[F(h_{za,\lambda}) - F(h^B_{za})]\psi\| = 0\,, \tag{4.6}$$

dla dowolnej ciągłej i ograniczonej zespolonej funkcji F na $\mathbb{R}$ oraz wszystkich $\psi \in L^2(\mathbb{R})$. Te zbieżności są ścisłym sformułowaniem odtwarzania ostrych warunków brzegowych i tak to odtwarzanie rozumiemy w całej pracy.

Udowodnimy teraz wzór (4.5). W tym celu zobaczmy najpierw jaka jest różnica między granicą z $G_\lambda(w^2)$ a rezolwentą swobodnego operatora, tj. $G_0(w^2)$. Zauważmy najpierw, że z postaci (3.15) widać, że $G(w^2) - G_0(w^2)$, a zatem również $G_\lambda(w^2) - G_0(w^2)$, są operatorami skończonego rzędu, a więc także operatorami Hilberta-Schmidta (HS). Każdy operator HS jest operatorem całkowym z jądrem całkowalnym z kwadratem, ponadto jeśli A jest operatorem HS, a K odpowiadającym mu jądrem, tzn.

$$(A\psi)(z) = \int K(z,z')\psi(z')dz' ,$$

to zachodzi

$$\|A\|^2_{\mathrm{HS}} = \int |K(z,z')|^2 dz dz' \equiv \|K\|^2_{L^2} .$$

Wystarcza zatem rozważać granice względem normy $L^2(\mathbb{R}^2, dp\, dq)$ z odpowiednich jąder całkowych. Policzmy więc granicę $\lambda \to 0^+$ w sensie normy przestrzeni $L^2(\mathbb{R}^2, dp\, dq)$ (będziemy ją oznaczać jako $\mathrm{s}-\lim_{\lambda\to 0^+}$) z jądra całkowego $\langle p|\, G_\lambda(w^2) - G_0(w^2)\, |q\rangle$ (por. (3.15)). Rozważmy najpierw macierz liczbową $\mathcal{T}_\lambda$. Patrzymy od razu również na wyższe rzędy w λ, gdyż będziemy potrzebować tej informacji w dalszej części. Przez moment nie będziemy zakładać (3.4) dla przypadku Neumanna, aby zobaczyć jak ten warunek się tutaj pojawia i dlaczego jest potrzebny (przypominamy że korzystaliśmy z niego już przy dowodzeniu dodatniości operatora h^2_{za}, choć tam wystarczyło założyć, że $\|f\| \leqslant 1$). Korzystając teraz głównie z (3.9) i (3.11) otrzymujemy (wyprowadzamy te wzory w dodatku A.2)

$$\begin{aligned}\sigma - \Big(g_\lambda, G_0(w^2)g_\lambda\Big) = \tfrac{1-\sigma}{2}(||f|| - 1) + i\pi(\lambda w)^{-\sigma}M_0 \\ + (\lambda w)^{1-\sigma}\big(\tfrac{1+\sigma}{2} - I_0\big) + O(\lambda^{2-\sigma})\,, \quad (4.7)\end{aligned}$$

$$-\Big(U_a g_\lambda, G_0(w^2)g_\lambda\Big) = i\pi(\lambda w)^{-\sigma}e^{iaw}M_0 + O(\lambda^{2-\sigma})\,, \qquad (4.8)$$

gdzie

$$I_0 = \int \frac{M_0 - M_p}{p^2}\, dp\,. \qquad (4.9)$$

Z przeskalowanej postaci wzorów (3.13),(3.15) oraz ze skalowania (4.1), analizując zależność od λ, widzimy że aby dostać skończoną i niezerową granicę skalowania powinniśmy mieć $\mathcal{T}_\lambda \underset{\lambda\to 0^+}{\simeq} \lambda^\sigma$. Dla przypadku Dirichleta takie zachowanie dostajemy automatycznie, jednak dla przypadku Neumanna musimy w tym celu założyć właśnie (3.4). Bez tego założenia $\mathcal{T}_\lambda \underset{\lambda\to 0}{\simeq} \lambda^0$ (N). Od teraz zakładamy więc ponownie (3.4). Korzystając z (4.7) i (4.8) dostajemy

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_\lambda(w^2) = \frac{-i(\lambda w)^\sigma}{\pi M_0(1-e^{2iaw})}\begin{pmatrix} 1 & -e^{iaw} \\ -e^{iaw} & 1\end{pmatrix} \\ + (\lambda w)^{1+\sigma}\big(\tfrac{1+\sigma}{2} - I_0\big) \times \{\text{macierz niezal. od } \lambda\} + O(\lambda^{2+\sigma})\,.\end{aligned} \tag{4.10}$$

W dodatku A.3 dowodzimy, że (normy rozumiane jako normy L^2 funkcji od zmiennej p)

$$\left\| \frac{\lambda^{\frac{\sigma}{2}}\widehat{f}_\lambda(p)p^{\frac{1-\sigma}{2}}}{w^2-p^2} - \frac{\widehat{f}(0)p^{\frac{1-\sigma}{2}}}{w^2-p^2}\right\| \leqslant \begin{cases}\text{const}\lambda^{\frac{3}{2}}\,, & \text{(D)}\\ \text{const}\lambda^{\frac{1}{2}}\,, & \text{(N)}\end{cases} \tag{4.11}$$

dodatkowo dla przypadku Neumanna mamy

$$\left\| \frac{\lambda^{-\frac{1}{2}}\widehat{f}_\lambda(p)}{w^2-p^2} - \frac{\widehat{f}(0)}{w^2-p^2}\right\| \leqslant \text{const}\lambda^{\frac{3}{2}}\,. \quad \text{(N)} \tag{4.12}$$

Wykorzystamy teraz tylko następujący wniosek wynikający (zob. dodatek A.4) z (4.11)

$$\text{s} - \lim_{\lambda\to 0^+} \frac{\lambda^\sigma \widehat{f}_\lambda(p)\overline{\widehat{f}_\lambda(q)}(pq)^{\frac{1-\sigma}{2}}}{(w^2-p^2)(w^2-q^2)} = \frac{M_0(pq)^{\frac{1-\sigma}{2}}}{(w^2-p^2)(w^2-q^2)}\,, \tag{4.13}$$

informacja o szybkości odtwarzania tej granicy będzie nam jednak potrzebna pod koniec niniejszego rozdziału. Korzystając z (3.13), (3.15), (4.10) i (4.11) otrzymujemy

$$\begin{aligned}\text{s} - \lim_{\lambda\to 0^+} \langle p|\, G_\lambda(w^2) - G_0(w^2)\,|q\rangle = -\,\frac{iw^\sigma}{\pi(1-e^{2iaw})}\frac{(pq)^{\frac{1-\sigma}{2}}}{(w^2-p^2)(w^2-q^2)} \\ \times \left[e^{-ibq}e^{ibp} - e^{iaw}e^{ibq}e^{ibp} + e^{ibq}e^{-ibp} - e^{iaw}e^{-ibq}e^{-ibp}\right],\end{aligned}$$

gdzie wyrażenie w nawiasie kwadratowym powyżej pochodzi z wymnożenia

$$\begin{pmatrix} e^{-ibp} & e^{ibp}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -e^{iaw} \\ -e^{iaw} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{ibq} \\ e^{-ibq}\end{pmatrix}.$$

Posługując się następującym wzorem dla rzeczywistego parametru ξ (w przypadku Neumanna poniższy wzór należy rozumieć dystrybucyjnie; jest to transformata Fouriera funkcji całkowalnej z kwadratem, choć nie należącej do $L^1(\mathbb{R})$)

$$\int \frac{e^{i\xi p}p^{\frac{1-\sigma}{2}}}{p^2-w^2}\,dp = i\pi w^{-\frac{1+\sigma}{2}}\left[\theta(\xi)e^{i\xi w} + \sigma\theta(-\xi)e^{-i\xi w}\right], \tag{4.14}$$

którego dowód bazuje na prostym całkowaniu przez residua, wyliczamy transformatę Fouriera

$$\langle z|\, G_\lambda(w^2) - G_0(w^2)\,|z'\rangle = \frac{1}{2\pi}\int e^{izp}e^{-iz'q}\,\langle p|\, G_\lambda(w^2) - G_0(w^2)\,|q\rangle\, dp\, dq$$

i dostajemy w przestrzeni położeń

$$\begin{aligned}
&\mathrm{s}-\lim_{\lambda\to 0^+}\langle z|\, G_\lambda(w^2) - G_0(w^2)\,|z'\rangle \\
&\quad = -\frac{\sigma}{2iw\,(1-e^{2iaw})}\Big\{\Big[\theta(b+z)e^{i(b+z)w} + \sigma\theta(-b-z)e^{-i(b+z)w}\Big] \\
&\quad \times\Big[\sigma\theta(-b-z')e^{-i(b+z')w} + \theta(b+z')e^{i(b+z')w} \\
&\quad -\sigma\,\theta(b-z')e^{iaw}e^{i(b-z')w} - \theta(-b+z')e^{iaw}e^{-i(b-z')w}\Big] \\
&\quad +\Big[\theta(-b+z)e^{-i(b-z)w} + \sigma\theta(b-z)e^{i(b-z)w}\Big] \\
&\quad \times\Big[\sigma\theta(b-z')e^{i(b-z')w} + \theta(-b+z')e^{-i(b-z')w} \\
&\quad -\sigma\,\theta(-b-z')e^{iaw}e^{-i(b+z')w} - \theta(b+z')e^{iaw}e^{i(b+z')w}\Big]\Big\}.
\end{aligned}$$

Korzystając z reprezentacji położeniowej swobodnej rezolwenty

$$\langle z|\, G_0(w^2)\,|z'\rangle = -\frac{i}{2w}\Big[\theta(z-z')e^{i(z-z')w} + \theta(z'-z)e^{i(z'-z)w}\Big], \tag{4.15}$$

po prostych, choć nieco żmudnych, przekształceniach otrzymujemy (pierwsza równość poniżej służy w tym momencie jedynie jako „oznaczenie", wkrótce wykażemy jej prawdziwość)

$$\begin{aligned}
&\mathrm{s}-\lim_{\lambda\to 0^+}\langle z|\, G_\lambda(w^2)\,|z'\rangle = \langle z|\, G^B(w^2)\,|z'\rangle \\
&\quad = \Big[\langle z|\, G_0(w^2)\,|z'\rangle + \sigma\frac{i}{2w}e^{-i(z+z'+a)w}\Big]\chi_{(-\infty,-b)}(z)\chi_{(-\infty,-b)}(z') \\
&\quad + \Big[\langle z|\, G_0(w^2)\,|z'\rangle + \sigma\frac{i}{2w}e^{i(z+z'-a)w}\Big]\chi_{(b,+\infty)}(z)\chi_{(b,+\infty)}(z') \\
&+\Big[\langle z|G_0(w^2)|z'\rangle + \frac{i}{w}\Big(\frac{\cos(zw)\cos(z'w)}{1+\sigma e^{-iaw}} + \frac{\sin(zw)\sin(z'w)}{1-\sigma e^{-iaw}}\Big)\Big]\chi_{(-b,b)}(z)\chi_{(-b,b)}(z'),
\end{aligned}$$

gdzie $\chi_\Omega(\cdot)$ jest funkcją charakterystyczną zbioru Ω. W każdym z trzech obszarów powyższa rezolwenta różni się od swobodnej rezolwenty jedynie o rozwiązania równania jednorodnego $(w^2 - h_z^2)\psi = 0$, a jednocześnie spełnia następujące warunki brzegowe

$$\langle \pm b|\, G^B(w^2)\,|z'\rangle = \langle z|\, G^B(w^2)\,|\pm b\rangle = 0\,, \tag{D}$$

$$\frac{d}{dz}\langle z|\, G^B(w^2)\,|z'\rangle\Big|_{z=\pm b} = \frac{d}{dz'}\langle z|\, G^B(w^2)\,|z'\rangle\Big|_{z'=\pm b} = 0\,. \tag{N}$$

Jest to więc rzeczywiście rezolwenta operatora $[h^B_{za}]^2$, a tym samym udowodniliśmy (4.5).

Zobaczmy teraz jak „szybko" osiągana jest granica ostrych warunków brzegowych. Korzystając przede wszystkim z (4.10) i (4.11) dostajemy dla dowolnych $\varphi, \eta \in L^2(\mathbb{R})$

$$\Big(\varphi, G_\lambda(w^2)\eta\Big) = \Big(\varphi, G^B(w^2)\eta\Big) + \begin{cases} (1 - I_0)\, O(\lambda) + O(\lambda^{3/2})\,, & \text{(D)} \\ O(\lambda^{1/2})\,. & \text{(N)} \end{cases} \tag{4.16}$$

Przypadek Neumanna jest zatem jakościowo nieco inny. Okazuje się jednak, że dla $\varphi, \eta \in \mathcal{D}(h_z)$ korzystając z (4.12) mamy

$$\Big(\varphi, G_\lambda(w^2)\eta\Big) = \Big(\varphi, G^B(w^2)\eta\Big) + I_0 O(\lambda) + O(\lambda^{3/2})\,. \qquad \text{(N)} \tag{4.17}$$

Kluczowa obserwacja prowadząca do powyższego wyniku polega na fakcie, że teraz $p\widehat{\varphi}(p)$, $q\widehat{\eta}(q)$ należą do $L^2(\mathbb{R})$, więc p i q występujące w $\mathcal{F}_p$ i $\mathcal{F}_q$ możemy dołączyć właśnie do $\widehat{\varphi}$ i $\widehat{\eta}$, dzięki czemu mamy możliwość skorzystania ze wzoru (4.12) zamiast z (4.11) (dla przypadku Neumanna). Widzimy także, że nałożenie na model dodatkowego warunku $I_0 = 0$ ma (oprócz innej własności, jak się okaże w rozdziale 8) związek z „szybkością" odtwarzania ostrych warunków.

Rozdział 5

Analiza spektralna

W niniejszym rozdziale analizujemy kwestię spektrum operatorów h^2_{za}, ich stany związane oraz niewłaściwe funkcje własne (stany rozproszeniowe). Wyniki tego rozdziału są ważnym elementem analizy rozpatrywanych modeli, będziemy z nich korzystać w następnych rozdziałach.

Dla $k \in \mathbb{R}$ definiujemy

$$I_k = \int \frac{M_k - M_p}{p^2 - k^2} dp \,, \tag{5.1}$$

która jest gładką funkcją na całej dziedzinie (poprawne zachowanie w zerze wynika z parzystości funkcji M) a jej wartość w zerze jest w zgodzie z definicją (4.9). Niektóre własności tej funkcji można znaleźć w dodatku A.5. Nakładamy od teraz dodatkowe założenia na funkcje f, żądając by

$$0 < I_k \,, \quad \text{dla } k \neq 0 \,, \quad \text{(D,N)} \tag{5.2}$$

$$I_k < 1 \,. \quad \text{(D)} \tag{5.3}$$

W dodatku C dowodzimy niesprzeczności warunków nałożonych na f ((3.3) i (5.2) oraz dodatkowo (5.3) dla przypadku Dirichleta i (3.4) dla Neumanna) podając pewną klasę funkcji które je spełniają. Zwracamy uwagę, że z ciągłości wynika iż $I_0 \geqslant 0$. Na dalszy użytek, dla $k \in \mathbb{R}$, definiujemy również

$$N_k \equiv \frac{k^\sigma}{\pi} \left\{ \sigma + \int \frac{q^{1-\sigma} M_q - k^{1-\sigma} M_k}{q^2 - k^2} dq \right\} = \frac{k}{\pi} \left(\frac{1+\sigma}{2} - I_k \right) . \tag{5.4}$$

Dla przypadku Dirichleta ostatnia równość jest oczywista, natomiast dla przypadku Neumanna wynika z następujących przekształceń (w ostatnim przejściu poniżej korzystamy z (3.4))

$$\int \frac{q^2 M_q - k^2 M_k}{q^2 - k^2} dq = \mathcal{P}\!\int \frac{q^2 M_q}{q^2 - k^2} dq = \int M_q dq + k^2 \mathcal{P}\!\int \frac{M_q - M_k}{q^2 - k^2} dq = 1 - k^2 I_k \,.$$

W rozdziale 3 pokazaliśmy, że operatory h_{za}^2 są dodatnie. W reprezentacji położeniowej, poza ograniczonym podzbiorem $\mathbb{R}$ działają one jak $-\frac{d^2}{dz^2}$. Dostajemy stąd, że ciągłe spektrum każdego z operatorów h_{za}^2 pokrywa całą dodatnią oś, a więc spektrum jest zbiorem $\langle 0, +\infty)$.

Chcemy teraz rozważyć kwestię widma dyskretnego operatora h_{za}^2. Szukamy zatem rozwiązań równania własnego

$$h_{za}^2 \psi_k = k^2 \psi_k \,, \tag{5.5}$$

które spełniają warunek $\psi_k \in L^2(\mathbb{R})$. Przyjmujemy, że $k \geqslant 0$. Rozwiązujemy to równanie w przestrzeni pędów. Znajdujemy, iż rozwiązanie ma postać

$$\widehat{\psi}_k(p) = \frac{c_b e^{-ibp} + c_{-b} e^{ibp}}{p^2 - k^2} p^{\frac{1-\sigma}{2}} \widehat{f}(p) \,, \tag{5.6}$$

gdzie stałe $c_{\pm b}$ muszą spełniać odpowiednie warunki. Załóżmy na razie, że $k > 0$. Wstawiając tę postać rozwiązania z powrotem do równania (5.5) otrzymujemy, że stałe $c_{\pm b}$ muszą spełniać następujący układ równań

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_b \\ c_{-b} \end{pmatrix} = 0 \,, \tag{5.7}$$

gdzie

$$A = \sigma + \mathcal{P} \int \frac{p^{1-\sigma} M_p}{p^2 - k^2} dp \,, \quad B = \mathcal{P} \int \frac{\cos(ap) p^{1-\sigma} M_p}{p^2 - k^2} dp \,. \tag{5.8}$$

Korzystając z (A.3), (A.6), (3.4) oraz z

$$\mathcal{P} \int \frac{\cos(ap)}{p^2 - k^2} dp = -\frac{\pi}{k} \sin(ak) \,,$$

otrzymujemy

$$A = \pi k^{-\sigma} N_k \,, \quad B = -\pi k^{-\sigma} M_k \sin(ak) \,. \tag{5.9}$$

Niezerowe rozwiązania układu (5.7) istnieją o ile $A = \pm B$, wtedy $c_b = \mp c_{-b}$, a (5.6) przyjmuje, odpowiednio, postać

$$\widehat{\psi}_k(p) = c_{-b} \frac{e^{ibp} \mp e^{-ibp}}{p^2 - k^2} p^{\frac{1-\sigma}{2}} \widehat{f}(p) \,. \tag{5.10}$$

Warunek $\widehat{\psi}_k(\cdot) \in L^2(\mathbb{R})$ wymaga aby $\widehat{f}(k) = 0$ (wtedy z parzystości (zob. dodatek A.1) także $\widehat{f}(-k) = 0$) lub $e^{ibk} \mp e^{-ibk} = 0$ (znaki w drugim warunku odpowiednio do znaków w (5.10)). Każdy z tych przypadków pociąga $B = 0$. Natomiast warunki (5.2) i (5.3) implikują $A \neq 0$. Widzimy zatem iż dla $k > 0$ nie ma stanów związanych. Dla przypadku Dirichleta z $k = 0$, rozwiązanie (5.6) nie może należeć do $L^2(\mathbb{R})$ jako że $\widehat{f}(0) \neq 0$ (zob. (3.3)). Dla przypadku Neumanna z $k = 0$ dostajemy, że $A = 0 = B$, zatem $c_{\pm b}$ są dowolne. Współczynniki te dobieramy tak aby spełnić warunek całkowalności z kwadratem rozwiązania, co sprowadza się do wyboru $c_{-b} = -c_b$. W ten sposób otrzymujemy

$$\widehat{\psi}_0(p) = \mathcal{N}\,\frac{\sin(bp)}{p}\,\widehat{f}(p)\,, \qquad \text{(N)} \tag{5.11}$$

gdzie $\mathcal{N}$ jest dowolną stałą (równanie (5.5) będąc liniowym i jednorodnym może wyznaczyć rozwiązanie jedynie z dokładnością do stałej multiplikatywnej). Wartość $\mathcal{N}$ wyznaczamy z warunku normalizacyjnego funkcji $\widehat{\psi}_0$. Mamy (normy poniżej w sensie przestrzeni $L^2(\mathbb{R})$)

$$\begin{aligned} ||\widehat{\psi}_0||^2 &= |\mathcal{N}|^2 \int \frac{\sin^2(bp)M_p}{p^2}dp \\ &= |\mathcal{N}|^2 \left\{ \int\limits_0^\infty \frac{(1-\cos(ap))(M_p - M_0)}{p^2}dp + 2M_0 \int\limits_0^\infty \frac{\sin^2(bp)}{p^2}dp \right\} . \end{aligned} \tag{5.12}$$

Druga całka powyżej jest standardowa i wynosi $\frac{\pi b}{2}$. Korzystając dodatkowo z (A.6) oraz z definicji I_0 otrzymujemy

$$||\widehat{\psi}_0||^2 = \frac{1}{2}|\mathcal{N}|^2\,(\pi M_0 a - I_0)\ . \tag{5.13}$$

Z żądania $||\widehat{\psi}_0|| = 1$ dostajemy

$$|\mathcal{N}|^2 = \frac{2}{\pi M_0 a - I_0}\,. \tag{5.14}$$

Podsumowując, dla przypadku Dirichleta nie ma stanów związanych, natomiast dla przypadku Neumanna jest jeden stan związany, odpowiadający zerowej wartości własnej, opisany przez (5.11) i (5.14).

Dla widma ciągłego będziemy używać formalizmu stacjonarnej teorii rozpraszania (zob. np. [38]). Niewłaściwe funkcje własne stanów rozproszeniowych w reprezentacji pędowej mają, w standardowej notacji, postać (jako że nie powinno to prowadzić do niejasności, stosujemy tutaj to samo oznaczenie ψ_k co dla stanu związanego, który istnieje tylko dla $k = 0$ a więc dla niego będziemy pisać ψ_0)

$$\widehat{\psi}_k(p) = \langle p \mid k+\rangle = \delta(p-k) + \frac{\langle p|\,T(k^2+i0)\,|k\rangle}{k^2 - p^2 + i0}\,, \tag{5.15}$$

gdzie $T(w^2)$ jest operatorem rozważanym w rozdziale 3. Przyjmujemy iż zmienna k może być dowolną niezerową liczbą rzeczywistą, gdyż każdy punkt spektrum, tj. k^2, posiada podwójną degenerację odpowiadającą fali nadbiegającej z lewej i z prawej strony, którym będą odpowiadać odpowiednio dodatnie i ujemne k.

Rozdział 6

Dopuszczalność modelu

W rozdziale tym pokażemy, iż zaproponowana w rozdziale 3 klasa modeli, oprócz pokazanej w rozdziale 4 własności odtwarzania w odpowiedniej granicy skalowania ostrych warunków brzegowych, spełnia również warunki dopuszczalności omówione w rozdziale 2.

Niech TR_τ oznacza lewe strony tych warunków, tj. wzorów (2.26) i (2.27), dla $\tau = 0$ i $\tau = 1$ odpowiednio. Rozpisując ślad po spektrum operatora h_{za} dostajemy

$$\mathrm{TR}_\tau = \int\limits_{\mathbb{R}} \langle k+|\,(h_{za} - h_z)h_z^\tau(h_{za} - h_z)\,|k+\rangle\, dk \\ + \tfrac{1-\sigma}{2}\,\langle \text{st.zw.}|\,(h_{za} - h_z)h_z^\tau(h_{za} - h_z)\,|\text{st.zw.}\rangle\ ,$$

gdzie $|\text{st.zw.}\rangle$ oznacza stan związany obecny dla przypadku Neumanna. Korzystając z rozkładu spektralnego operatora h_z^τ (dla $\tau = 0$ bierzemy rozkład jedynki) oraz z faktów, że

$$\langle p|\, h_{za} - h_z\,|k+\rangle = \big(|k| - |p|\big)\widehat{\psi}_k(p) \quad \text{oraz} \quad \langle p|\, h_{za} - h_z\,|\text{st.zw.}\rangle = -|p|\widehat{\psi}_0(p)\,,$$

otrzymujemy

$$\mathrm{TR}_\tau = \int\limits_{\mathbb{R}^2} |p|^\tau \big(|k| - |p|\big)^2 \big|\widehat{\psi}_k(p)\big|^2 dk\, dp + \tfrac{1-\sigma}{2} \int\limits_{\mathbb{R}} |p|^{2+\tau} \big|\widehat{\psi}_0(p)\big|^2 dp\,. \tag{6.1}$$

Drugi człon jest ewidentnie skończony (korzystamy z postaci (5.11) funkcji ψ_0).

Zajmiemy się teraz pierwszym członem, który oznaczamy $\mathrm{TR}_\tau^{\mathrm{cg}}$. Na podstawie (5.15) mamy

$$\big(|k| - |p|\big)\widehat{\psi}_k(p) = \frac{\langle p|\, T(k^2 + i0)\,|k\rangle}{|p| + |k|}\,.$$

Zmieniając zmienne dla ujemnych argumentów dostajemy

$$\begin{aligned}\mathrm{TR}^{\mathrm{cg}}_\tau = \int\limits_{\mathbb{R}^2_+} \frac{p^\tau}{(p+k)^2} \Big[\left| \langle p| \, T(k^2+i0) \, |k\rangle \right|^2 + \left| \langle p| \, T(k^2+i0) \, |-k\rangle \right|^2 \\ + \left| \langle -p| \, T(k^2+i0) \, |k\rangle \right|^2 + \left| \langle -p| \, T(k^2+i0) \, |-k\rangle \right|^2 \Big] \, dk \, dp \, . \qquad (6.2)\end{aligned}$$

Zakładamy od teraz, że $k, p \geqslant 0$. Chcąc przekształcić odpowiednio powyższą funkcję podcałkową wprowadzimy teraz wygodną notację macierzową. Zauważmy wpierw, że oznaczając (wyjątkowo dla $k \in \mathbb{R}$)

$$\mathcal{M}(k) \equiv \mathcal{F}_k^\dagger \mathcal{F}_k = k^{1-\sigma} M_k \begin{pmatrix} 1 & e^{iap} \\ e^{-iap} & 1 \end{pmatrix}$$

oraz korzystając z (3.14), możemy zapisać

$$\left| \langle p| \, T(k^2+i0) \, |k\rangle \right|^2 = \mathrm{Tr} \left[\mathcal{M}(p) \mathcal{T}(k^2+i0) \mathcal{M}(k) \mathcal{T}(k^2+i0)^\dagger \right] . \qquad (6.3)$$

Dostajemy na tej podstawie, iż funkcja podcałkowa w wyrażeniu (6.2) wynosi

$$\frac{p^\tau}{(p+k)^2} \mathrm{Tr} \left[\mathcal{L}(p) \mathcal{T}(k^2+i0) \mathcal{L}(k) \mathcal{T}(k^2+i0)^\dagger \right] , \qquad (6.4)$$

gdzie

$$\mathcal{L}(k) \equiv \mathcal{M}(k) + \mathcal{M}(-k) = 2k^{1-\sigma} M_k \begin{pmatrix} 1 & \cos(ak) \\ \cos(ak) & 1 \end{pmatrix} .$$

Korzystając dla $w^2 = k^2 + i0$ z (3.8), (3.9) i (3.10) oraz rozpisując całki podług znanej tożsamości dystrybucyjnej $\frac{1}{x+i0} = \mathcal{P}\frac{1}{x} - i\pi\delta(x)$, możemy zapisać

$$\mathcal{T}(k^2+i0) = \frac{2k}{\pi} \left(\mathcal{N}(k) + i\mathcal{L}(k) \right)^{-1} , \qquad (6.5)$$

gdzie

$$\mathcal{N}(k) \equiv \frac{2k}{\pi} \left[\sigma \mathbb{1} + \mathcal{P} \int \frac{\mathcal{M}(p)}{p^2 - k^2} dp \right] . \qquad (6.6)$$

Zauważmy, że

$$\mathcal{N}(k) = \frac{2k}{\pi} \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} ,$$

z A, B zdefiniowanymi w (5.8). Z (6.5) wynika

$$\mathcal{L}(k) = \frac{ik}{\pi} \Big(\mathcal{T}(k^2+i0)^{\dagger -1} - \mathcal{T}(k^2+i0)^{-1} \Big) .$$

Podstawiając powyższą zależność do (6.4), a otrzymany wynik do (6.2), dostajemy

$$\mathrm{TR}_\tau^{\mathrm{cg}} = \frac{2}{\pi} \int\limits_{\mathbb{R}_+^2} \frac{kp^\tau}{(p+k)^2} \,\mathfrak{Re}\left[i\mathrm{Tr}\left[\mathcal{L}(p)\mathcal{T}(k^2+i0)\right]\right] dk\,dp\,. \tag{6.7}$$

Korzystając z (5.9) dostajemy

$$\mathcal{T}(k^2+i0) = \frac{k^\sigma}{i\pi}\begin{pmatrix} M_k - iN_k & M_k\,e^{iak} \\ M_k\,e^{iak} & M_k - iN_k \end{pmatrix}^{-1}.$$

Stąd po prostych przekształceniach znajdujemy, że

$$\mathrm{TR}_\tau^{\mathrm{cg}} = \frac{8}{\pi^2} \int\limits_{\mathbb{R}_+^2} \frac{k^{1+\sigma}p^{1-\sigma+\tau}}{(p+k)^2} M_p\,\mathfrak{Re}\left[\frac{M_k - iN_k - \cos(ap)M_k e^{iak}}{(M_k-iN_k)^2 - M_k^2 e^{2iak}}\right] dk\,dp\,. \tag{6.8}$$

Oznaczając, dla prostoty zapisu, argument $\mathfrak{Re}$ w powyższym wzorze przez $\dfrac{C}{D}$, mamy

$$C = M_k\big[1-\cos(ap)\cos(ak)\big] - i\big[N_k + M_k\cos(ap)\sin(ak)\big]\,, \tag{6.9}$$

$$D = M_k^2(1-\cos(2ak)) - N_k^2 - i\big[2M_kN_k + M_k^2\sin(2ak)\big]\,. \tag{6.10}$$

Możemy zapisać

$$\mathfrak{Re}\left[\frac{C}{D}\right] = \frac{\mathfrak{Re}\,C\,\mathfrak{Re}\,D + \mathfrak{Im}\,C\,\mathfrak{Im}\,D}{|D|^2}\,. \tag{6.11}$$

Wprowadzając oznaczenia (pewne własności tych funkcji przedstawione są w dodatku A.6)

$$s_k = \frac{1}{M_k - iN_k}\,, \quad q_k = M_k s_k\,, \tag{6.12}$$

możemy zapisać

$$\frac{1}{D} = \frac{s_k^2}{1-q_k^2\,e^{2iak}}\,, \tag{6.13}$$

a dzięki (A.17) oraz (A.19) dostajemy następujące oszacowanie

$$\frac{1}{|D|^2} \leqslant \mathrm{const}(a)\frac{(1+k)^{2-4\sigma}}{k^2}\,.$$

Korzystając z podstawowych własności funkcji trygonometrycznych oraz z faktu, że $|N_k| \leqslant \mathrm{const}\,k$, otrzymujemy

$$|\,\mathfrak{Re}\,C| \leqslant \mathrm{const}M_k\,, \quad |\,\mathfrak{Re}\,D| \leqslant \mathrm{const}(a)k^2\,,$$

$$|\,\mathfrak{Im}\,C| \leqslant \mathrm{const}(a)k\,, \quad |\,\mathfrak{Im}\,D| \leqslant \mathrm{const}(a)kM_k\,.$$

Podsumowując te wyniki dostajemy

$$|\mathrm{TR}_\tau^{\mathrm{cg}}| \leqslant \mathrm{const}(a) \int\limits_{\mathbb{R}_+^2} \frac{k^{1+\sigma} p^{1-\sigma+\tau}}{(p+k)^2} (1+k)^{2-4\sigma} M_p M_k \, dk dp < \infty \, .$$

Widzimy zatem, iż proponowana klasa modeli rzeczywiście spełnia warunki (2.26) i (2.27).

Rozdział 7

Skalowanie

Skalowanie zostało zdefiniowane i skomentowane już w rozdziale 4. W niniejszym rozdziale zobaczymy jak pod jego wpływem zmieniają się istotne dla nas wielkości.

Chcemy najpierw zobaczyć jak stany własne (niewłaściwe rozproszeniowe i stan związany) układu z przeskalowanym potencjałem wyrażają się poprzez stany własne układu z pierwotnym potencjałem. Analizę przeprowadzimy w reprezentacji pędowej, zobaczmy więc najpierw jak w tej reprezentacji skaluje się sam potencjał. Związek jąder w reprezentacjach położeniowej i pędowej ma postać

$$\widehat{V}(p,p') = \frac{1}{2\pi}\int e^{-ipz}V(z,z')e^{ip'z'}dzdz' .$$

Z tego związku oraz z postaci skalowania w przestrzeni położeń (4.3) po prostych przekształceniach otrzymujemy (wyjątkowo zaznaczymy jawnie zależność od odległości pomiędzy płytami)

$$\widehat{V}_{a,\lambda}(p,p') = \lambda^{-1}\widehat{V}_{\frac{a}{\lambda}}(\lambda p, \lambda p') . \tag{7.1}$$

Oznaczmy teraz przez $\widehat{\psi}_{k,a,\lambda}(p)$ reprezentację pędową stanu własnego (niewłaściwego lub związanego) układu z przeskalowanym potencjałem, do wartości własnej k^2. Zachodzi zatem

$$p^2\widehat{\psi}_{k,a,\lambda}(p) + \int \widehat{V}_{a,\lambda}(p,p')\widehat{\psi}_{k,a,\lambda}(p')dp' = k^2\widehat{\psi}_{k,a,\lambda}(p) .$$

Jak wcześniej (dopisujemy tylko jawnie zależność od a) $\widehat{\psi}_{k,a}$ będzie oznaczało rozwiązanie analogicznego równania z nieprzeskalowanym potencjałem. Po prostych przekształceniach, podstawiając m.in. $q = \lambda p$, dostajemy

$$q^2\widehat{\psi}_{k,a,\lambda}\Big(\frac{q}{\lambda}\Big) + \int \widehat{V}_{\frac{a}{\lambda}}(q,q')\widehat{\psi}_{k,a,\lambda}\Big(\frac{q'}{\lambda}\Big)dq' = \lambda^2k^2\widehat{\psi}_{k,a,\lambda}\Big(\frac{q}{\lambda}\Big) .$$

Widzimy zatem, że funkcja $\widehat{\psi}_{k,a,\lambda}(\frac{q}{\lambda})$ spełnia to samo równanie co funkcja $\widehat{\psi}_{\lambda k,\frac{a}{\lambda}}(q)$. Analizując dodatkowo asymptotykę w przestrzeni położeń, dostajemy więc

$$\widehat{\psi}_{k,a,\lambda}(p) = \mathrm{const}\, \widehat{\psi}_{\lambda k,\frac{a}{\lambda}}(\lambda p)\,.$$

Ponieważ używane równania na $\widehat{\psi}$ są jednorodne i liniowe, otrzymany wynik jest poprawny tylko z dokładnością do stałej multiplikatywnej. Ostateczną postać skalowania stanów własnych dostajemy z warunków normalizacji. Stany rozproszeniowe normalizujemy do delty Diraca a stan związany do jedynki. Po prostych rachunkach dostajemy ostatecznie

$$\widehat{\psi}_{k,a,\lambda}(p) = \lambda \widehat{\psi}_{\lambda k,\frac{a}{\lambda}}(\lambda p)\,, \quad \widehat{\psi}_{0,a,\lambda}(p) = \lambda^{\frac{1}{2}} \widehat{\psi}_{0,\frac{a}{\lambda}}(\lambda p)\,.$$

Korzystając ze wzoru (6.1) oraz z powyżej wyprowadzonego skalowania funkcji własnych, oznaczając przeskalowaną wersję wzoru (6.1) (dopisujemy jawnie zależność od a) poprzez $\mathrm{TR}_{\tau,a,\lambda}$, po prostych przekształceniach otrzymujemy

$$\mathrm{TR}_{\tau,a,\lambda} = \lambda^{-2-\tau}\, \mathrm{TR}_{\tau,\frac{a}{\lambda}}\,.$$

Widzimy stąd, że warunki dopuszczalności (2.26) i (2.27) są spełnione również przez modele z przeskalowanym potencjałem, ale w granicy skalowania już nie (po raz kolejny przejawia się tutaj niefizyczność ostrych warunków brzegowych). Analogicznie dostajemy skalowanie energii

$$\varepsilon_{a,\lambda} = \lambda^{-3}\, \varepsilon_{\frac{a}{\lambda}}\,. \tag{7.2}$$

Wynika stąd wniosek, iż w celu zbadania zachowania się energii w granicy skalowania, wystarczy rozwinąć energię w szereg $\frac{1}{a}$ aż do rzędu a^{-3} włącznie (dalsze wyrazy znikają w granicy skalowania). Wyraz proporcjonalny do a^{-3} nie zmienia się w wyniku skalowania.

Rozdział 8

Energia

W rozdziale tym rozwijamy energię Casimira na jednostkę powierzchni ε_a, wzór (2.28), w szereg a^{-1} (a więc dla dużych a) do rzędu a^{-3} włącznie (zgodnie z rozumowaniem z końca poprzedniego rozdziału). Początkowo rachunki prowadzimy równolegle dla obu przypadków, a następnie analizę rozdzielamy osobno na przypadek Dirichleta i Neumanna — podrozdziały 8.1 i 8.2 odpowiednio. W ostatnim podrozdziale z wyznaczonej energii wyliczamy siłę Casimira.

Pokażemy najpierw, że warunki (2.26) i (2.27) rzeczywiście zapewniają już skończoność energii ε_a (wspomnieliśmy o tym pod koniec rozdziału 2). W tym celu zauważmy, że warunki te oznaczają, iż $\Delta \equiv h_{za} - h_z$ i $h_z^{1/2}\Delta$ są operatorami Hilberta-Schmidta. Stąd oczywiście Δ jest operatorem ograniczonym. Dostajemy zatem, że $\Delta h_z \Delta$ oraz Δ^3 są operatorami ze śladem (dla drugiego przypadku korzystamy z faktu, iż przestrzeń operatorów ze śladem jest obustronnym ideałem w przestrzeni operatorów ograniczonych). Tym samym dostajemy skończoność energii na jednostkę powierzchni, ponieważ za (2.28) można ją zapisać jako $\varepsilon_a = \frac{1}{8\pi}\mathrm{Tr}[\Delta h_z \Delta] + \frac{1}{24\pi}\mathrm{Tr}[\Delta^3]$.

Wróćmy teraz do postaci (2.28) wzoru na energię. Rozbijamy ślad na dwie części $(2\Delta h_z \Delta + \Delta h_{za} \Delta)$ i rozpisujemy ślad z pierwszego składnika w bazie operatora h_{za}, a z drugiego w bazie h_z. Następnie wstawiamy rozkład spektralny operatorów h_z i h_{za} odpowiednio. W ten sposób otrzymujemy (por. również rozważania przed wzorem (6.1))

$$\mathrm{Tr}\left[2\Delta h_z \Delta\right] = 2\int\limits_{\mathbb{R}^2} |p|\big(|k| - |p|\big)^2 \big|\widehat{\psi}_k(p)\big|^2 dk\, dp + (1-\sigma)\int\limits_{\mathbb{R}} |p|^3 \big|\widehat{\psi}_0(p)\big|^2 dp\,, \tag{8.1}$$

$$\mathrm{Tr}\left[\Delta h_{za} \Delta\right] = \int\limits_{\mathbb{R}^2} |k|\big(|k| - |p|\big)^2 \big|\widehat{\psi}_k(p)\big|^2 dk\, dp\,. \tag{8.2}$$

Dostajemy zatem

$$\varepsilon_a = \frac{1}{24\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2}(2|p|+|k|)\big(|k|-|p|\big)^2\big|\widehat{\psi}_k(p)\big|^2 dk\,dp + \frac{1-\sigma}{24\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}|p|^3\big|\widehat{\psi}_0(p)\big|^2 dp\,. \quad (8.3)$$

Przyczynek od stanu związanego (drugi człon powyżej) rozważymy pod koniec podrozdziału 8.2 dotyczącego przypadku Neumanna, teraz zajmiemy się pierwszym członem który oznaczmy $\varepsilon_a^{\mathrm{cg}}$.

Wykonując analogiczne przekształcenia do tych pomiędzy wzorem (6.1) a (6.8) z rozdziału 6 (należy jedynie zastąpić $|p|^\tau$ przez $2|p|+|k|$ oraz uwzględnić stały czynnik przed całką) otrzymujemy

$$\varepsilon_a^{\mathrm{cg}} = \frac{1}{3\pi^3}\int\limits_{\mathbb{R}_+^2}\frac{k^{1+\sigma}p^{1-\sigma}(2p+k)}{(p+k)^2}M_p\,\mathfrak{Re}\left[\frac{M_k - iN_k - \cos(ap)M_k e^{iak}}{(M_k-iN_k)^2 - M_k^2e^{2iak}}\right]dk\,dp\,.$$

Korzystając z (6.12) i (6.13) możemy wyrażenie w nawiasie kwadratowym powyżej zapisać jako

$$[\ldots] = \frac{s_k}{1-q_k^2e^{2iak}}\big(1-\cos(ap)q_ke^{iak}\big)\,.$$

Chcemy teraz rozwinąć wyrażenie $(1-q_k^2e^{2iak})^{-1}$ w szereg geometryczny. Zauważmy, że co prawda $q_0 = 1$, ale dla $k > 0$ mamy $|q_k| < 1$ (zob. (A.18)). Zapiszmy całkę po k jako granicę $\epsilon \to 0^+$ z całki po $\langle\epsilon, +\infty)$. Rozwijając w szereg geometryczny

$$\frac{1}{1-(q_ke^{iak})^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(q_ke^{iak})^{2n}$$

i oznaczając

$$\chi(k,p) = \frac{k^{1+\sigma}p^{1-\sigma}(2p+k)}{(p+k)^2}\,,$$

możemy zapisać

$$\varepsilon_a^{\mathrm{cg}} = \frac{1}{3\pi^3}\lim_{\epsilon\to 0^+}\int\limits_0^\infty M_p\int\limits_\epsilon^\infty\chi(k,p)\,\mathfrak{Re}\left[s_k\sum_{n\in 2\mathbb{N}_0}q_k^ne^{inak} - s_k\cos(ap)\sum_{n\in 2\mathbb{N}-1}q_k^ne^{inak}\right]dk\,dp\,.$$

Powyżej, jak też w całej pracy, $\mathbb{N}$ oznacza zbiór liczb całkowitych dodatnich, natomiast $\mathbb{N}_0 \equiv \mathbb{N}\cup\{0\}$. Wprowadzamy oznaczenie

$$\varepsilon_\infty = \frac{1}{3\pi^3}\int\limits_{\mathbb{R}_+^2}\chi(k,p)M_pM_k|s_k|^2dk\,dp\,. \quad (8.4)$$

Do tego wyrażenia przyczynek daje pierwszy wyraz z pierwszej z sum powyżej, który osobno wydzielamy. Ponadto zachodzi następujące oszacowanie (skończoną sumę szacujemy przez nieskończony szereg i korzystamy głównie z (A.17) i (A.20))

$$\sum_{n=1}^{N} |q_k e^{iak}|^{2n} \leqslant \frac{|s_k|^2 M_k^2}{1-|q_k|^2} \leqslant \mathrm{const}\, M_k^2\, \frac{1+k^{m-2\sigma}}{k^m} \qquad \begin{cases} m=2\,, & \text{(D)} \\ m\geqslant 2\,, & \text{(N)} \end{cases} \tag{8.5}$$

dzięki któremu, na podstawie twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej, możemy wyciągnąć sumy przed znaki całek. W ten sposób otrzymujemy

$$\begin{aligned} \varepsilon_a^{\mathrm{cg}} = \varepsilon_\infty + \frac{1}{3\pi^3} \lim_{\epsilon\to 0^+} \sum_{n\in 2\mathbb{N}} \int_0^\infty M_p\, \mathfrak{Re} \int_\epsilon^\infty \chi(k,p) s_k q_k^n e^{inak} dk\, dp \\ -\frac{1}{3\pi^3} \lim_{\epsilon\to 0^+} \sum_{n\in 2\mathbb{N}-1} \int_0^\infty M_p \cos(ap)\, \mathfrak{Re} \int_\epsilon^\infty \chi(k,p) s_k q_k^n e^{inak} dk\, dp\,. \end{aligned} \tag{8.6}$$

Jak wspomnieliśmy już we wstępie do niniejszego rozdziału, dalszą analizę przeprowadzimy osobno dla przypadku Dirichleta i Neumanna.

8.1 Przypadek Dirichleta

W tym przypadku $\chi(k,p)$ jest proporcjonalne do k^2, zatem kwadratowa osobliwość w zerze w (8.5) znosi się i wprowadzanie $\epsilon > 0$ okazuje się niepotrzebne. We wzorze (8.6) kładziemy zatem $\epsilon = 0$. Ponadto dla przypadku Dirichleta nie ma stanu związanego, więc $\varepsilon_a^{\mathrm{cg}} = \varepsilon_a$.

Wprowadzamy następujące nowe oznaczenia

$$\alpha = \frac{I_0 - 1}{\pi M_0}, \quad \tilde{a} = a - \alpha, \quad \tilde{q}_k = q_k e^{i\alpha k}\,.$$

Zauważmy, że $q_k e^{iak} = \tilde{q}_k e^{i\tilde{a}k}$ oraz $\partial_k \tilde{q}_k\big|_{k=0} \equiv \tilde{q}_0' = 0$. Własności te (szczególnie ta druga) są motywacją wprowadzenia tych nowych oznaczeń. W przypadku Dirichleta skorzystamy z nich dopiero stosunkowo późno, niemniej jednak okażą się one bardzo przydatne, a dla przypadku Neumanna, jak zobaczymy, własności te (takie same mimo nieco innych oznaczeń) są jeszcze bardziej użyteczne. Zwracamy uwagę, że jest to tylko techniczna zmiana, nadal pojawiać się będzie także symbol a, w której to zmiennej ostatecznie chcemy rozwinąć energię.

Korzystając z faktu, że $(n\tilde{a})^3 e^{in\tilde{a}k} = (-i\partial_k)^3 e^{in\tilde{a}k}$ i całkując trzy razy przez części całkę po zmiennej k otrzymujemy

$$(n\tilde{a})^3 \int_0^\infty \chi(k,p) s_k\, \tilde{q}_k^n e^{in\tilde{a}k} dk = -i\,\frac{4M_p}{M_0 p} - i \int_0^\infty \partial_k^3\Big(\chi(k,p) s_k\, \tilde{q}_k^n\Big) e^{in\tilde{a}k} dk\,.$$

Wyraz brzegowy, jako że jest czysto urojony, zniknie po wzięciu części rzeczywistej. Po tych przekształceniach dostajemy

$$\begin{aligned}\varepsilon_a = \varepsilon_\infty &- \frac{1}{3\pi^3\tilde{a}^3}\,\mathfrak{Re}\sum_{n\in 2\mathbb{N}}\frac{i}{n^3}\int\limits_{\mathbb{R}^2_+} M_p\partial_k^3\Big(\chi(k,p)s_k\,\tilde{q}_k^n\Big)e^{in\tilde{a}k}dk\,dp\\ &+\frac{1}{3\pi^3\tilde{a}^3}\,\mathfrak{Re}\sum_{n\in 2\mathbb{N}-1}\frac{i}{n^3}\int\limits_{\mathbb{R}^2_+} M_p\cos(ap)\partial_k^3\Big(\chi(k,p)s_k\,\tilde{q}_k^n\Big)e^{in\tilde{a}k}dk\,dp\,. \end{aligned}\tag{8.7}$$

Niech teraz $\Omega = \{k,p>0, k+p\leqslant 1\}$. Wyniki dodatku B.1 dowodzą, że następujące trzy kolejno wykonane zmiany w powyższym wyrażeniu na energię, prowadzą jedynie do zaniedbania członów rzędu $o(a^{-3})$:

(i) zastępujemy $\partial_k^3(\chi(k,p)s_k\tilde{q}_k^n)$ poprzez $s_k\tilde{q}_k^n\partial_k^3\chi(k,p)$;

(ii) zawężamy obszar całkowania do Ω;

(iii) zastępujemy (na zawężonym obszarze) $M_p s_k q_k^n$ poprzez $M_0 s_0 q_0^n = 1$.

Po operacji (i), korzystając z faktu że $\tilde{q}_k e^{i\tilde{a}k} = q_k e^{iak}$, wracamy w rozważanych całkach do „zmiennych” bez tyld, dlatego w operacji (iii) nie ma już tyld. Po tych zmianach, uwzględniając fakt, że $\partial_k^3\chi(k,p) = \frac{6p^2(k-3p)}{(k+p)^5}$ oraz wyliczając część rzeczywistą otrzymujemy

$$\begin{aligned}\varepsilon_a = \varepsilon_\infty &+ \frac{2}{\pi^3\tilde{a}^3}\sum_{n\in 2\mathbb{N}}\frac{1}{n^3}\int\limits_{\Omega}\frac{p^2(k-3p)}{(k+p)^5}\sin(nak)dk\,dp\\ &-\frac{2}{\pi^3\tilde{a}^3}\sum_{n\in 2\mathbb{N}-1}\frac{1}{n^3}\int\limits_{\Omega}\frac{p^2(k-3p)}{(k+p)^5}\cos(ap)\sin(nak)dk\,dp + o\big(a^{-3}\big)\,. \end{aligned}\tag{8.8}$$

Dla ustalonego a powyższe całki są ograniczone, gdyż możemy oszacować $|\sin(nak)|\leqslant nak$. Jak zobaczymy za chwilę również w granicy nieskończonego a powyższe całki mają skończoną wartość, zatem są one ograniczone jednostajnie względem a. Aby wyznaczyć człon $\propto \tilde{a}^{-3}$ wystarczy więc obliczyć wartość tych całek w tej granicy. Zdefiniujmy

$$C(n,\ell,a) = \int\limits_{k+p\leqslant 1}\left(\frac{p^2}{(k+p)^4}-\frac{4p^3}{(k+p)^5}\right)\sin(nak+\ell ap)dp\,dk\,, \qquad \ell = 0,\pm 1$$

i zauważmy, że całka w pierwszej linijce (8.8) jest powyższą całką dla $\ell = 0$, natomiast ta z drugiej linijki (8.8) wynosi $\frac{1}{2}\big(C(n,-1,a)+C(n,1,a)\big)$. Wykonując następującą zmianę zmiennych $r = a(k+p), t = \frac{p}{k+p}$ dostajemy

$$C(n,\ell,a) = \int\limits_0^1\Big(t^2-4t^3\Big)\int\limits_0^a\frac{1}{r}\sin\big[r\big(n+t(\ell-n)\big)\big]dr\,dt\,.$$

Dla $\ell \geqslant 0$ mamy wszędzie $n + t(\ell - n) \geqslant 0$, natomiast dla $\ell = -1$ mamy

$$\operatorname{sgn}\left(n + t(\ell - n)\right) = \begin{cases} 1\,, & \text{dla } t < \frac{n}{n+1}\,, \\ -1\,, & \text{dla } t > \frac{n}{n+1}\,. \end{cases}$$

Korzystając dodatkowo ze znanego faktu

$$\lim_{a\to\infty} \int\limits_0^a \frac{\sin(\beta r)}{r} dr = \operatorname{sgn}\beta\,\frac{\pi}{2}\,, \tag{8.9}$$

otrzymujemy

$$\lim_{a\to\infty} C(n,\ell,a) = \begin{cases} -\frac{\pi}{3}\,, & \text{dla } \ell = 0,1, \\ \frac{\pi}{3}\left(1 + \frac{n^3}{(n+1)^3} - \frac{3n^4}{(n+1)^4}\right)\,, & \text{dla } \ell = -1. \end{cases}$$

Uwzględniając te wyniki dostajemy

$$\begin{aligned} \varepsilon_a &= \varepsilon_\infty - \frac{1}{3\pi^2\tilde{a}^3}\left[\sum_{n\in 2\mathbb{N}} \frac{2}{n^3} + \sum_{n\in 2\mathbb{N}-1}\left(\frac{1}{(n+1)^3} - \frac{3n}{(n+1)^4}\right)\right] + o\big(a^{-3}\big) \\ &= \varepsilon_\infty - \frac{\zeta(4)}{16\pi^2\tilde{a}^3} + o\big(a^{-3}\big)\,. \end{aligned}$$

Ponieważ

$$\frac{1}{\tilde{a}^3} = \frac{1}{a^3} + o\big(a^{-3}\big)\,,$$

ostatecznie mamy więc

$$\varepsilon_a = \varepsilon_\infty - \frac{\pi^2}{1440a^3} + o\big(a^{-3}\big)\,, \tag{8.10}$$

gdzie ε_∞ zostało zdefiniowane w (8.4).

8.2 Przypadek Neumanna

Zasadniczo sposób postępowania w tym przypadku jest taki sam jak dla przypadku Dirichleta, jednak rachunki okazują się być teraz bardziej złożone. Rozpiszemy zatem tutaj dokładniej całkowania przez części które należy wykonać. Ponieważ definicja funkcji N_k, a przez to funkcja s_k i ostatecznie funkcja q_k są inne dla przypadku Neumanna, chcąc osiągnąć pożądaną własność $\tilde{q}_0' = 0$ wprowadzamy nieco inne definicje oznaczeń z tyldami niż to miało miejsce dla przypadku Dirichleta, zachowując jednak ten sam zapis:

$$\alpha = \frac{I_0}{\pi M_0}, \quad \tilde{a} = a - \alpha, \quad \tilde{q}_k = q_k e^{i\alpha k}\,.$$

Zauważmy, że jak wcześniej $q_k e^{iak} = \tilde{q}_k e^{i\tilde{a}k}$ oraz, jak już wspomnieliśmy, $\tilde{q}_0' = 0$. Do końca tego podrozdziału prim będzie oznaczał pochodną po k.

Rozważmy najpierw następujący fragment wyrażenia (8.6) (z sumą i granicą po ϵ możemy oczywiście z powrotem wejść pod całkę po p)

$$\mathcal{I}(\tilde{a},p) \equiv \lim_{\epsilon\to 0^+} \mathfrak{Re} \sum_{n\in 2\mathbb{N}} \int_\epsilon^\infty \chi(k,p) s_k \tilde{q}_k^n e^{in\tilde{a}k} dk \,. \tag{8.11}$$

Zapisując $e^{in\tilde{a}k} = (in\tilde{a})^{-1}\partial_k e^{in\tilde{a}k}$ i całkując raz przez części otrzymujemy dla wyrazu brzegowego

$$\begin{aligned} \text{wyr.brzeg.} &= \frac{1}{\tilde{a}} \lim_{\epsilon\to 0^+} \chi(\epsilon,p)\, \mathfrak{Re} \left[is_\epsilon \sum_{n\in 2\mathbb{N}} \frac{1}{n} \left(\tilde{q}_\epsilon e^{i\tilde{a}\epsilon}\right)^n \right] \\ &= \frac{\chi(0,p)}{2\tilde{a}} \lim_{\epsilon\to 0^+} \mathfrak{Im} \left[s_\epsilon \ln\left(1 - \tilde{q}_\epsilon^2 e^{2i\tilde{a}\epsilon}\right)\right] , \end{aligned} \tag{8.12}$$

gdzie skorzystaliśmy z tożsamości $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} Q^n = -\ln(1-Q)$, $|Q| < 1$ (w dodatku A.8 dyskutujemy kwestię gałęzi logarytmu oraz definicji argumentu głównego). Rozpisując dalej dostajemy

$$\text{wyr.brzeg.} = \frac{p}{\tilde{a}} \lim_{\epsilon\to 0^+} \left[\mathfrak{Re}\, s_\epsilon \cdot \operatorname{Arg}\left(1 - \tilde{q}_\epsilon^2 e^{2i\tilde{a}\epsilon}\right) + \mathfrak{Im}\, s_\epsilon \cdot \ln\left|1 - \tilde{q}_\epsilon^2 e^{2i\tilde{a}\epsilon}\right| \right] . \tag{8.13}$$

Funkcję s_k (zdefiniowaną w (6.12)) możemy zapisać w postaci $s_k = \dfrac{M_k - i\frac{k}{\pi} I_k}{M_k^2 + \frac{k^2}{\pi^2} I_k^2}$, skąd mamy

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \mathfrak{Re}\, s_\epsilon = M_0^{-1} \,, \quad \mathfrak{Im}\, s_\epsilon \underset{\epsilon\to 0^+}{\simeq} \epsilon I_\epsilon \,, \tag{8.14}$$

a więc część urojona zeruje się co najmniej liniowo. Dla odpowiednio małych ϵ mamy

$$1 > \left|1 - \tilde{q}_\epsilon^2 e^{2i\tilde{a}\epsilon}\right| \geqslant \text{const}(a)\, \epsilon \,,$$

gdzie pierwsza nierówność wynika z faktu, że $\lim_{\epsilon\to 0^+} \tilde{q}_\epsilon e^{i\tilde{a}\epsilon} = 1$, a druga wynika z (A.19). Dostajemy więc (dla odpowiednio małych ϵ)

$$\left|\ln\left|1 - \tilde{q}_\epsilon^2 e^{2i\tilde{a}\epsilon}\right|\right| \leqslant \left|\ln\left(\text{const}(a)\,\epsilon\right)\right| \leqslant \ln \frac{\text{const}(a)}{\epsilon} \,.$$

Wynika stąd, że drugi człon nawiasu kwadratowego w (8.13) znika w granicy. W dodatku A.8 dowodzimy, że $\lim_{\epsilon\to 0^+} \operatorname{Arg}\left(1 - \tilde{q}_\epsilon^2 e^{2i\tilde{a}\epsilon}\right) = -\frac{\pi}{2}$, otrzymujemy więc

$$\text{wyr.brzeg.} = -\frac{\pi p}{2\tilde{a}M_0} \,.$$

Rozważane wyrażenie (8.11) przyjmuje zatem postać

$$\mathcal{I}(\tilde{a},p) = -\frac{\pi p}{2\tilde{a}M_0} - \frac{1}{\tilde{a}} \lim_{\epsilon\to 0^+} \mathfrak{Re} \sum_{n\in 2\mathbb{N}} \frac{1}{in} \int_\epsilon^\infty \left(\chi(k,p) s_k \tilde{q}_k^n\right)' e^{in\tilde{a}k} dk \,.$$

Zapisując, jak wcześniej, eksponentę za pomocą pochodnej, całkujemy względem niej kolejny raz przez części. Dla nowego wyrazu brzegowego dostajemy

$$\begin{aligned}\text{wyr.brzeg.}_{(2)} = &-\frac{1}{\tilde{a}^2}\lim_{\epsilon\to 0^+}\mathfrak{Re}\left(\chi'(\epsilon,p)s_\epsilon + \chi(\epsilon,p)s'_\epsilon\right)\sum_{n\in 2\mathbb{N}}\frac{1}{n^2}\,\tilde{q}_\epsilon^n e^{in\tilde{a}\epsilon}\\ &-\frac{1}{\tilde{a}^2}\lim_{\epsilon\to 0^+}\mathfrak{Re}\,\chi(\epsilon,p)s_\epsilon\tilde{q}'_\epsilon\sum_{n\in 2\mathbb{N}}\frac{1}{n}\,\tilde{q}_\epsilon^{n-1}e^{in\tilde{a}\epsilon}\,.\end{aligned}$$

Wyrażenie z drugiej linijki powyżej wynosi zero, gdyż $\tilde{q}'_\epsilon \to 0$ (co najmniej liniowo, z gładkości), a sumę możemy zebrać i oszacować podobnie jak przy poprzednim wyrazie brzegowym. Ponieważ niezależnie od ϵ mamy

$$\left|\frac{1}{n^2}\,\tilde{q}_\epsilon^n e^{in\tilde{a}\epsilon}\right| \leqslant \frac{1}{n^2} \in \ell^1(2\mathbb{N})\,,$$

możemy więc w wyrażeniu z pierwszej linijki wejść z granicą pod szereg. Zauważmy dodatkowo, że

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\mathfrak{Re}\,s'_\epsilon = 0\,, \quad \text{oraz} \quad \lim_{\epsilon\to 0^+}\chi'(k,p) = -3\,. \tag{8.15}$$

Zbierając powyższe uwagi, korzystając także z (8.14), otrzymujemy

$$\text{wyr.brzeg.}_{(2)} = \frac{3}{\tilde{a}^2 M_0}\sum_{n\in 2\mathbb{N}}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8\tilde{a}^2 M_0}\,.$$

Dla $\mathcal{I}(\tilde{a},p)$ mamy więc teraz

$$\mathcal{I}(\tilde{a},p) = -\frac{\pi p}{2\tilde{a}M_0} + \frac{\pi^2}{8\tilde{a}^2 M_0} - \frac{1}{\tilde{a}^2}\lim_{\epsilon\to 0^+}\mathfrak{Re}\sum_{n\in 2\mathbb{N}}\frac{1}{n^2}\int_\epsilon^\infty\left(\chi(k,p)s_k\tilde{q}_k^n\right)'' e^{in\tilde{a}k}dk\,.$$

Analogicznie jak wcześniej całkujemy raz jeszcze przez części i dostajemy następujący wyraz brzegowy

$$\begin{aligned}\text{wyr.brzeg.}_{(3)} = \frac{1}{\tilde{a}^3}\lim_{\epsilon\to 0^+}\mathfrak{Im}\sum_{n\in 2\mathbb{N}} e^{in\tilde{a}\epsilon}\Bigg[&\frac{1}{n^3}\left(\chi(\epsilon,p)s_\epsilon\right)''\tilde{q}_\epsilon^n + \frac{1}{n^2}\chi(\epsilon,p)s_\epsilon\tilde{q}''_\epsilon\tilde{q}_\epsilon^{n-1}\\ &+\frac{2}{n^2}\left(\chi(\epsilon,p)s_\epsilon\right)'\tilde{q}'_\epsilon\tilde{q}_\epsilon^{n-1} + \frac{n-1}{n^2}\chi(\epsilon,p)s_\epsilon\tilde{q}'^2_\epsilon\tilde{q}_\epsilon^{n-2}\Bigg]\,.\end{aligned}$$

Wyrazy z drugiej linijki powyżej dają w granicy zerowy wkład, gdyż szeregi dają się wyliczyć podobnie jak wcześniej a wyrazy te są proporcjonalne do $\tilde{q}'_\epsilon$, które znika w zerze. Dla wyrazów z pierwszej linijki, analogicznie jak poprzednio, możemy z granicą wejść pod sumę. W ten sposób otrzymujemy

$$\text{wyr.brzeg.}_{(3)} = \frac{\zeta(3)}{8\tilde{a}^3}\lim_{\epsilon\to 0^+}\mathfrak{Im}\left(\chi(\epsilon,p)s_\epsilon\right)'' + \frac{\zeta(2)}{4\tilde{a}^3}\lim_{\epsilon\to 0^+}\chi(\epsilon,p)\,\mathfrak{Im}\,s_\epsilon\tilde{q}''_\epsilon\,.$$

Drugi wyraz po prawej stronie powyższego wzoru znika ponieważ $s_\epsilon \tilde{q}''_\epsilon$ w granicy dąży do liczby rzeczywistej. Dla pierwszego wyrazu korzystając z (8.14) i (8.15) oraz wyliczając, że

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \mathfrak{Im}\, s'_\epsilon = -\frac{I_0}{\pi M_0^2}\,, \quad \lim_{\epsilon\to 0^+} \mathfrak{Im}\, s''_\epsilon = 0\,,$$

dostajemy ostatecznie

$$\text{wyr.brzeg.}_{(3)} = \frac{3I_0\zeta(3)}{4\pi\tilde{a}^3 M_0^2}\,.$$

(8.11) możemy zatem zapisać w postaci

$$\mathcal{I}(\tilde{a},p) = -\frac{\pi p}{2\tilde{a}M_0} + \frac{\pi^2}{8\tilde{a}^2 M_0} + \frac{3I_0\zeta(3)}{4\pi\tilde{a}^3 M_0^2} + \frac{1}{\tilde{a}^3}\lim_{\epsilon\to 0^+}\mathfrak{Re}\sum_{n\in 2\mathbb{N}}\frac{1}{in^3}\int_\epsilon^\infty \Big(\chi(k,p)s_k\tilde{q}_k^n\Big)''' e^{in\tilde{a}k}dk\,. \tag{8.16}$$

Rozważmy teraz analogiczne wyrażenie do (8.11) ale z sumą po nieparzystych liczbach naturalnych. Okazuje się, że zmiana ta prowadzi tylko do innych współczynników liczbowych przy poszczególnych wyrazach. Ponieważ jednak ostatecznie przy analizie energii pomijamy wyrazy szybciej gasnące niż a^{-3} (a więc również szybciej gasnące niż $\tilde{a}^{-3}$), a przy całkowaniu po p zachodzi

$$\int_0^\infty M_p\cos(ap)\,dp = 0\,, \quad \int_0^\infty pM_p\cos(ap)\,dp = -\frac{M_0}{\tilde{a}^2} + O(\tilde{a}^{-3})\,, \tag{8.17}$$

(oba wyrażenia są udowodnione w dodatku A.1 — wzory (A.3) i (A.7)) potrzebujemy więc dla rozważanego wyrażenia tylko wyrazu brzegowego proporcjonalnego do $\tilde{a}^{-1}$ (pozostałe wyrazy brzegowe po scałkowaniu z funkcją $M_p\cos(ap)$ będą gasły szybciej niż a^{-3}). Dostajemy

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\mathfrak{Re}\sum_{n\in 2\mathbb{N}-1}\int_\epsilon^\infty \chi(k,p)s_k\tilde{q}_k^n e^{in\tilde{a}k}dk = -\frac{\pi p}{2\tilde{a}M_0} + \{\text{pozostałe wyrazy brzeg.} \in O(\tilde{a}^{-2})\} + \frac{1}{\tilde{a}^3}\lim_{\epsilon\to 0^+}\mathfrak{Re}\sum_{n\in 2\mathbb{N}-1}\frac{1}{in^3}\int_\epsilon^\infty \Big(\chi(k,p)s_k\tilde{q}_k^n\Big)''' e^{in\tilde{a}k}dk\,.$$

Pierwszy wyraz brzegowy jest więc taki sam jak w (8.16).

Wracamy teraz do (8.6) i rozpisujemy ten wzór korzystając z powyższych rezultatów. Wprowadzamy oznaczenie

$$C_M = \int_0^\infty p M_p \, dp \tag{8.18}$$

i przy całkowaniu po p wyrazów brzegowych korzystamy z (8.17) oraz z faktu, że $\int_0^\infty M_p \, dp = \frac{1}{2}$, który wynika z normalizacji funkcji f (zob. (3.4)). Po wykonaniu odpowiednich rachunków wzór (8.6) przyjmuje postać

$$\begin{aligned}\varepsilon_a^{\mathrm{cg}} = \varepsilon_\infty &- \frac{C_M}{6\pi^2 \tilde{a} M_0} + \frac{1}{48\pi \tilde{a}^2 M_0} + \frac{I_0 \zeta(3)}{8\pi^4 \tilde{a}^3 M_0^2} - \frac{1}{6\pi^2 \tilde{a}^3} + o(a^{-3}) \\ &- \frac{1}{3\pi^3 \tilde{a}^3} \lim_{\epsilon \to 0^+} \mathfrak{Re} \sum_{n \in 2\mathbb{N}} \frac{i}{n^3} \int_0^\infty \int_\epsilon^\infty M_p \, \partial_k^3 \Big(\chi(k,p) s_k \tilde{q}_k^n \Big) e^{in\tilde{a}k} dk \, dp \\ &+ \frac{1}{3\pi^3 \tilde{a}^3} \lim_{\epsilon \to 0^+} \mathfrak{Re} \sum_{n \in 2\mathbb{N}-1} \frac{i}{n^3} \int_0^\infty \int_\epsilon^\infty M_p \cos(ap) \, \partial_k^3 \Big(\chi(k,p) s_k \tilde{q}_k^n \Big) e^{in\tilde{a}k} dk \, dp \, .\end{aligned} \tag{8.19}$$

Powyższy wzór odpowiada wzorowi (8.7) z przypadku Dirichleta. Dalsze postępowanie jest podobne do przypadku Dirichleta. Rozważamy teraz dwie ostatnie linijki powyższego wzoru. Wyniki dodatku B.1 dowodzą, że

(i) zastąpienie w nich $\partial_k^3(\chi(k,p) s_k \tilde{q}_k^n)$ poprzez $s_k \tilde{q}_k^n \partial_k^3 \chi(k,p)$

prowadzi jedynie do zaniedbania członów rzędu $o(a^{-3})$. Po tym zastąpieniu, korzystając z faktu że $\tilde{q}_k e^{i\tilde{a}k} = q_k e^{iak}$, wracamy w rozważanych całkach do „zmiennych” bez tyld. Przede wszystkim dzięki czynnikowi n^{-3} zachodzi oszacowanie

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^3} |q_k^{2n} e^{2inak}| &\leqslant \mathrm{const} |q_k|^2 \sum_{n \in \mathbb{N}} n^{-3} |q_k|^{2n-2} \leqslant \mathrm{const} M_k^2 |s_k|^2 \zeta(3) \\ &\leqslant \mathrm{const} (1+k)^2 M_k^2 \in L^1(\mathbb{R}_+) \, ,\end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z faktu, że $|q_k| \leqslant 1$ oraz z (A.17) dla $n = 0$. Możemy zatem wykonać granicę $\lim_{\epsilon \to 0^+}$ dostając całkę po całym $\mathbb{R}_+$. Mamy więc

$$\begin{aligned}\varepsilon_a^{\mathrm{cg}} = \varepsilon_\infty &- \frac{C_M}{6\pi^2 \tilde{a} M_0} + \frac{1}{48\pi \tilde{a}^2 M_0} + \frac{I_0 \zeta(3)}{8\pi^4 \tilde{a}^3 M_0^2} - \frac{1}{6\pi^2 \tilde{a}^3} + o(a^{-3}) \\ &- \frac{1}{3\pi^3 \tilde{a}^3} \mathfrak{Re} \sum_{n \in 2\mathbb{N}} \frac{i}{n^3} \int_{\mathbb{R}_+^2} M_p \chi'''(k,p) s_k q_k^n e^{inak} dk \, dp \\ &+ \frac{1}{3\pi^3 \tilde{a}^3} \mathfrak{Re} \sum_{n \in 2\mathbb{N}-1} \frac{i}{n^3} \int_{\mathbb{R}_+^2} M_p \cos(ap) \chi'''(k,p) s_k q_k^n e^{inak} dk \, dp \, .\end{aligned}$$

Niech teraz, jak dla przypadku Dirichleta, $\Omega = \{k, p > 0, k + p \leqslant 1\}$. Wyniki tego samego dodatku B.1 dowodzą, że następne dwie kolejno wykonane zmiany w powyższym wyrażeniu na energię, prowadzą jedynie do zaniedbania członów rzędu $o(a^{-3})$:

(ii) zawężamy obszar całkowania do Ω;

(iii) zastępujemy (na zawężonym obszarze) $M_p s_k q_k^n$ poprzez $M_0 s_0 q_0^n = 1$.

Po tych zmianach, uwzględniając fakt, że $\partial_k^3 \chi(k,p) = -\frac{6p^2(k+5p)}{(k+p)^5}$ oraz wyliczając część rzeczywistą otrzymujemy

$$\begin{aligned}\varepsilon_a^{\mathrm{cg}} = \varepsilon_\infty &- \frac{C_M}{6\pi^2 \tilde{a} M_0} + \frac{1}{48\pi\tilde{a}^2 M_0} + \frac{I_0\zeta(3)}{8\pi^4\tilde{a}^3 M_0^2} - \frac{1}{6\pi^2\tilde{a}^3} + o(a^{-3}) \\ &- \frac{2}{\pi^3\tilde{a}^3}\sum_{n\in 2\mathbb{N}} \frac{1}{n^3}\int\limits_\Omega \frac{p^2(k+5p)}{(k+p)^5}\sin(nak)\,dk\,dp \\ &+ \frac{2}{\pi^3\tilde{a}^3}\sum_{n\in 2\mathbb{N}-1} \frac{1}{n^3}\int\limits_\Omega \frac{p^2(k+5p)}{(k+p)^5}\cos(ap)\sin(nak)\,dk\,dp\,. \qquad (8.20)\end{aligned}$$

Powyższe całki wyliczamy również analogicznie do przypadku Dirichleta. Funkcję $C(n,\ell,a)$ definiujemy w tym przypadku jako

$$C(n,\ell,a) = \int\limits_{k+p\leqslant 1} \left(\frac{p^2}{(k+p)^4} + \frac{4p^3}{(k+p)^5}\right)\sin(nak + \ell ap)dp\,dk\,, \qquad \ell = 0, \pm 1\,.$$

Jej związek z rozważanymi całkami jest identyczny jak w poprzednim podrozdziale. Dostajemy tutaj

$$\lim_{a\to\infty} C(n,\ell,a) = \begin{cases} \frac{2\pi}{3}\,, & \text{dla } \ell = 0,1, \\ \frac{\pi}{3}\left(-2 + \frac{n^3}{(n+1)^3} + \frac{3n^4}{(n+1)^4}\right)\,, & \text{dla } \ell = -1. \end{cases}$$

Dla dwóch ostatnich linijek wzoru (8.20) otrzymujemy

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{3\pi^2\tilde{a}^3}\left[\sum_{n\in 2\mathbb{N}}\frac{4}{n^3} - \sum_{n\in 2\mathbb{N}-1}\left(\frac{1}{(n+1)^3} + \frac{3n}{(n+1)^4}\right)\right] + o(a^{-3}) \\ &\qquad = -\frac{\zeta(4)}{16\pi^2\tilde{a}^3} + o(a^{-3}) = -\frac{\pi^2}{1440\tilde{a}^3} + o(a^{-3})\,.\end{aligned}$$

Uwzględniając ten wynik dostajemy dla energii

$$\varepsilon_a^{\mathrm{cg}} = \varepsilon_\infty - \frac{C_M}{6\pi^2 M_0\tilde{a}} + \frac{1}{48\pi M_0\tilde{a}^2} - \frac{1}{\tilde{a}^3}\left[\frac{1}{6\pi^2} - \frac{I_0\zeta(3)}{8\pi^4 M_0^2} + \frac{\pi^2}{1440}\right] + o(a^{-3})\,.$$

Wyliczmy teraz wkład do energii pochodzący od stanu związanego, tj. drugi człon we wzorze (8.3), który oznaczymy $\varepsilon_a^{\text{st.zw.}}$. Dla prostoty podamy jego rozwinięcie także w potęgach $\tilde{a}^{-1}$ (zamiast w a^{-1}). Korzystając z (5.11) i (5.14) dostajemy

$$\varepsilon_a^{\text{st.zw.}} = \frac{1}{3\pi(\pi M_0 a - I_0)} \int_0^\infty pM_p \sin^2(bp)\, dp = \frac{1}{6\pi^2 M_0 \tilde{a}} \left[C_M - \int_0^\infty pM_p \cos(ap)\, dp \right],$$

gdzie w ostatniej równości skorzystaliśmy z (8.18) oraz z faktu wynikającego wprost z definicji $\tilde{a}$, $a\pi M_0 - I_0 = \pi M_0 \tilde{a}$. Pozostałą całkę liczymy raz przez części skąd, korzystając z (8.17), otrzymujemy

$$\varepsilon_a^{\text{st.zw.}} = \frac{1}{6\pi^2 M_0 \tilde{a}} \left[C_M + \frac{M_0}{\tilde{a}^2} + o(\tilde{a}^{-3}) \right] = \frac{C_M}{6\pi^2 M_0 \tilde{a}} + \frac{1}{6\pi^2 \tilde{a}^3} + o(\tilde{a}^{-3})\,.$$

Dla pełnej energii mamy więc

$$\varepsilon_a = \varepsilon_a^{\text{cg}} + \varepsilon_a^{\text{st.zw.}} = \varepsilon_\infty + \frac{1}{48\pi M_0 \tilde{a}^2} - \frac{1}{\tilde{a}^3} \left[-\frac{I_0 \zeta(3)}{8\pi^4 M_0^2} + \frac{\pi^2}{1440} \right] + o(a^{-3})\,.$$

Na koniec wracamy do zmiennej bez tyldy. Korzystając z zależności

$$\frac{1}{\tilde{a}^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{2I_0}{\pi M_0 a^3} + o(a^{-3})\,, \qquad \frac{1}{\tilde{a}^3} = \frac{1}{a^3} + o(a^{-3})\,,$$

otrzymujemy ostatecznie

$$\varepsilon_a = \varepsilon_\infty + \frac{1}{48\pi M_0 a^2} + \frac{I_0}{8\pi^2 M_0^2 a^3} \left(\frac{\zeta(3)}{\pi^2} + \frac{1}{3} \right) - \frac{\pi^2}{1440 a^3} + o(a^{-3})\,. \tag{8.21}$$

8.3 Wyliczenie siły

Chcemy teraz wyznaczyć siłę na jednostkę powierzchni. Korzystając z wyznaczonej już energii na jednostkę powierzchni (wzory (8.10) i (8.21)) oraz z zależności siły od energii (wzor (2.29)) łatwo wyliczymy szukane ciśnienie, o ile tylko pochodna po a ze wszystkich pominiętych członów, należących do $o(a^{-3})$, daje wyrazy należące do $o(a^{-4})$. Wyniki dodatku B.2 dowodzą, iż rzeczywiście tak jest. Odpowiednio dla przypadku Dirichleta i Neumanna, siła na jednostkę powierzchni wynosi zatem

$$\begin{aligned} f_a &= -\frac{\pi^2}{480 a^4} + o(a^{-4})\,, \\ f_a &= \frac{1}{24\pi M_0 a^3} + \frac{3I_0}{8\pi^2 M_0^2 a^4} \left(\frac{\zeta(3)}{\pi^2} + \frac{1}{3} \right) - \frac{\pi^2}{480 a^4} + o(a^{-4})\,. \end{aligned} \tag{8.22}$$

Rozdział 9

Własności lokalne

W tym rozdziale omawiamy pewne lokalne własności rozważanego w niniejszej rozprawie modelu. Po krótkim wprowadzeniu kilku oznaczeń i faktów, w podrozdziale 9.1 pokazujemy, że przy ograniczeniu się do algebr obserwabli zlokalizowanych poza nośnikiem rozważanej klasy potencjałów, w granicy skalowania stany próżni naszych modeli odtwarzają stan próżni modelu z ostrymi warunkami brzegowymi na płytach. W następnym podrozdziale rozważamy lokalną gęstość energii wraz z jej granicą skalowania.

Analizujemy sytuację płyt odległych o ustaloną, niezmienną odległość $a = 2b$. Jak wspomnieliśmy, jako algebrę obserwabli przyjmujemy teraz lokalną algebrę pól zlokalizowanych poza nośnikiem potencjału V. Dla pierwotnego (nieprzeskalowanego) modelu oznacza to że w kierunku z nośnik pól jest poza zbiorem $\langle -b - R, -b + R\rangle \cup \langle b - R, b + R\rangle$ (w pozostałych kierunkach nie nakładamy żadnych ograniczeń na nośnik), natomiast w granicy skalowania $\lambda \to 0^+$ każdy nośnik nie dotykający płyt, tj. leżący poza płaszczyznami $z = \pm b$ jest dozwolony. Pola o takich nośnikach należą także do algebry pól w modelu z ostrymi warunkami brzegowymi w $z = \pm b$, możemy więc dla takiej algebry rozważać także sytuację ostrych warunków Dirichleta bądź Neumanna. Oznaczmy przez $\mathcal{D}_b$ przestrzeń gładkich funkcji na $\mathbb{R}^3$ o zwartym nośniku leżącym poza płaszczyznami $z = \pm b$. W granicy skalowania naszych modeli oraz w modelu ostrych warunków brzegowych, rozważaną algebrą będzie więc algebra Weyla oparta na przestrzeni symplektycznej $\mathcal{D}_b \oplus \mathcal{D}_b$ (por. rozdział 2, szczególnie (2.11)). Taka przestrzeń symplektyczna i algebra nie są niezmiennicze ze względu na ewolucję. Ich wybór ma służyć możliwości lokalnego porównania naszego modelu z modelem ostrych warunków.

Przy pomocy hamiltonianu kierunku z, h^B_{za} zdefiniowanego poprzez wzór (4.4), definiujemy pełny hamiltonian ostrych warunków

$$h^B_a = \sqrt{(h_\perp \otimes \mathrm{id})^2 + (\mathrm{id} \otimes h^B_{za})^2}\,,$$

gdzie $-h_\perp^2$ jest dwuwymiarowym laplasjanem w kierunkach x-y (równoległych do płyt). Pełny hamiltonian h_a jest zdefiniowany wzorem (2.25).

Stany w podejściu algebraicznym zdefiniowane są jako unormowane funkcjonały liniowe na algebrze obserwabli (wartość takiego funkcjonału dla pewnego argumentu — liczba zespolona — interpretowana jest jako wartość oczekiwana danej obserwabli na rozważanym stanie). Stany podstawowe rozważanego w tej pracy modelu oraz modelu z ostrymi warunkami brzegowymi, odpowiednio, mają jako funkcjonały na algebrze postać (zob. [30] podrozdział 5.2.3 lub dodatek A w [7])

$$\omega_a(W(V)) = \exp\big[-\tfrac{1}{4}\|j_a(V)\|^2\big]\,,\quad \omega_a^B(W(V)) = \exp\big[-\tfrac{1}{4}\|j_a^B(V)\|^2\big]\,,\tag{9.1}$$

gdzie

$$j_a(V) = h_a^{1/2}v - ih_a^{-1/2}u\,,\quad j_a^B(V) = \big[h_a^B\big]^{1/2}v - i\big[h_a^B\big]^{-1/2}u\,.\tag{9.2}$$

Stany podstawowe $\omega_{a,\lambda}$ przeskalowanych modeli zdefiniowane są analogicznie za pomocą operatorów $h_{a,\lambda}$.

9.1 Lokalna granica stanów

W niniejszym podrozdziale dowodzimy, że przeskalowane stany podstawowe naszego modelu odtwarzają w słabej granicy skalowania stan podstawowy modelu z ostrymi warunkami brzegowymi, tzn.

$$\lim_{\lambda\to 0^+}\omega_{a,\lambda}(W(V)) = \omega_a^B(W(V))\,.\tag{9.3}$$

Korzystając z (2.3) i (9.2) mamy, że $\|j_a(V)\|^2 = (v, h_a v) + (u, h_a^{-1}u)$, zatem aby udowodnić (9.3) wystarczy pokazać, iż dla dowolnych $\varphi,\psi\in\mathcal{D}_b$ zachodzi

$$\lim_{\lambda\to 0^+}\Big(\varphi, h_{a,\lambda}^{\pm 1}\psi\Big) = \Big(\varphi, \big[h_a^B\big]^{\pm 1}\psi\Big)\,.\tag{9.4}$$

Dla takich ψ (i odpowiednio małych λ) mamy

$$h_{a,\lambda}^2\psi = \big[h_a^B\big]^2\psi = h^2\psi \equiv -\Delta\psi\,.\tag{9.5}$$

Zachodzi więc $(\varphi, h_{a,\lambda}\psi) = -(\varphi, h_{a,\lambda}^{-1}\Delta\psi)$ i analogicznie dla h_a^B. Ponieważ jednak $\Delta\mathcal{D}_b\subseteq\mathcal{D}_b$, dostajemy stąd iż wystarczy wykazać (9.4) jedynie dla dolnych znaków. Dodatkowo $\mathcal{D}_b\subset\mathcal{D}\big(h_\perp^{-1/2}\big)$ (dokładnie dla $h_\perp^{-1/2}\otimes\mathrm{id}$, ale będziemy używać skrótowego zapisu), zachodzi zatem

$$(\varphi, h_{a,\lambda}^{-1}\psi) = \Big(\varphi, h_\perp^{-1/2}h_\perp^{1/2}h_{a,\lambda}^{-1}h_\perp^{1/2}h_\perp^{-1/2}\psi\Big) = \Big(h_\perp^{-1/2}\varphi, h_\perp^{1/2}h_{a,\lambda}^{-1}h_\perp^{1/2}h_\perp^{-1/2}\psi\Big)$$

i analogicznie dla h_a^B. Wystarczy wykazać więc, iż (w sensie słabej granicy operatorowej)

$$\mathrm{w}-\lim_{\lambda\to 0^+} h_\perp^{1/2} h_{a,\lambda}^{-1} h_\perp^{1/2} = h_\perp^{1/2}[h_a^B]^{-1} h_\perp^{1/2}\,.$$

Zauważmy, że niezależnie od λ mamy $\|h_\perp^{1/2} h_{a,\lambda}^{-1} h_\perp^{1/2}\| \leqslant 1$, wystarczy więc wykazać powyższą równość dla funkcji o postaci $\varphi(\vec{x}) = \varphi_\perp(\vec{x}_\perp)\varphi_z(z)$, których (skończone) kombinacje liniowe tworzą zbiór gęsty (zob. dodatek A.9). Korzystając z reprezentacji spektralnej operatora $h_\perp$ dostajemy

$$\Big(\varphi, h_\perp^{1/2} h_{a,\lambda}^{-1} h_\perp^{1/2}\psi\Big) = \int \Big(\varphi_z, \frac{|\vec{p}_\perp|}{\sqrt{h_{za,\lambda}^2 + \vec{p}_\perp^{\,2}}}\,\psi_z\Big)\,\overline{\widehat{\varphi_\perp}(\vec{p}_\perp)}\widehat{\psi_\perp}(\vec{p}_\perp)\, d^2p_\perp\,.$$

Iloczyn skalarny pod całką jest, niezależnie od λ, ograniczony przez $\|\varphi_z\|\|\psi_z\|$, możemy zatem wejść z granicą $\lim_{\lambda\to 0^+}$ pod całkę. Dla dowolnego ustalonego $|\vec{p}_\perp|$ funkcja $\frac{|\vec{p}_\perp|}{\sqrt{h_{za,\lambda}^2+\vec{p}_\perp^{\,2}}}$ jest ciągłą i ograniczoną funkcją $h_{za,\lambda}$ zatem na mocy rozdziału 4 wzór (4.6) (silna zbieżność implikuje słabą), dostajemy dla dowolnych φ_z, ψ_z z $L^2(\mathbb{R})$

$$\lim_{\lambda\to 0^+}\Big(\varphi_z, \frac{|\vec{p}_\perp|}{\sqrt{h_{za,\lambda}^2 + \vec{p}_\perp^{\,2}}}\,\psi_z\Big) = \Big(\varphi_z, \frac{|\vec{p}_\perp|}{\sqrt{[h_{za}^B]^2 + \vec{p}_\perp^{\,2}}}\,\psi_z\Big)\,,$$

co kończy dowód (9.3).

9.2 Lokalna gęstość energii

Stan ω_a (inaczej niż stan ω_a^B) jest zdefiniowany na całej algebrze (2.15) (której podalgebrą jest aktualnie rozważana algebra). Gęstość energii w tym stanie jest dana w całej przestrzeni poprzez procedurę rozszczepienia punktowego (point-splitting)

$$\mathcal{E}_a(\vec{x}) = \lim_{\vec{y}\to\vec{x}} T_a(\vec{x},\vec{y})\,,$$

gdzie $T_a(\vec{x},\vec{y})$ jest jądrem dystrybucji, którą będziemy tak samo oznaczać (jednak argumenty zamiast współrzędnych będą funkcjami), zdefiniowanej przez

$$T_a(\varphi,\psi) = \tfrac{1}{4}(\varphi,(h_a - h)\psi) + \tfrac{1}{4}(\vec{\nabla}\varphi,(h_a^{-1} - h^{-1})\vec{\nabla}\psi)\,, \tag{9.6}$$

gdzie drugi człon należy rozumieć dodatkowo jako iloczyn skalarny gradientów. Powyższa postać wynika z pracy [7], rozdział 6. Dokładniej, $\mathcal{E}_a(\vec{x})$ to wartość oczekiwana operatora $H(\vec{x})$ ze wzoru (6.2) cytowanej pracy, wyliczona na stanie Ω_a. Korzystając ze wzoru (6.4) tego artykułu (kładziemy w tym wzorze $m = 0$ gdyż rozpatrujemy bezmasowe pole), dostajemy dla jądra

$$\begin{aligned} T_a(\varphi,\psi) = {}& \frac{1}{2}\Big(\Omega_a, (\Phi(\varphi,0)\Phi(\psi,0) + \Phi(0,\vec{\nabla}\varphi)\cdot\Phi(0,\vec{\nabla}\psi))\Omega_a\Big) \\ & - \frac{1}{2}\Big(\Omega, (\Phi(\varphi,0)\Phi(\psi,0) + \Phi(0,\vec{\nabla}\varphi)\cdot\Phi(0,\vec{\nabla}\psi))\Omega\Big)\,. \end{aligned}$$

Na podstawie wzorów (6.5) i (6.6) z [7] dostajemy już stąd postać (9.6).

Symetria translacyjna w kierunkach równoległych do płyt (zmienne dotyczące tych kierunków będziemy oznaczać z indeksem dolnym $\perp$, gdyż są to kierunki prostopadłe do wyróżnionej osi z — normalnej do płyt) wymaga aby zależność T_a od $\vec{x}_\perp, \vec{y}_\perp$ była jedynie poprzez ich różnicę $\vec{x}_\perp - \vec{y}_\perp$. Usunięcie rozszczepienia punktowego w tych kierunkach może być osiągnięte albo przez wzięcie granicy $\vec{x}_\perp - \vec{y}_\perp \to 0$ albo przez scałkowanie transformaty Fouriera w tych kierunkach z T_a po całym zakresie zmiennej fourierowskiej. Wybieramy ten drugi sposób. Pochodne w kierunkach prostopadłych do osi z, wynikające z gradientów, przerzucamy za pomocą całkowania przez części. Transformata Fouriera jądra w tych kierunkach ma postać (x, y są teraz zmiennymi w kierunku prostopadłym do płyt)

$$T_a(\vec{x}_\perp, x, \vec{y}_\perp, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int e^{i\vec{p}_\perp \cdot (\vec{x}_\perp - \vec{y}_\perp)} \widehat{T}_a(\vec{p}_\perp, x, y) d^2 p_\perp \,,$$

gdzie skorzystaliśmy już ze wspomnianej symetrii translacyjnej. Wprowadzając oznaczenie

$$T_{za}(x, y) = \lim_{\vec{y}_\perp \to \vec{x}_\perp} T_a(\vec{x}_\perp, x, \vec{y}_\perp, y)$$

i wykonując omówione powyżej przekształcenia dostajemy

$$\mathcal{E}_a(x) = \lim_{y \to x} T_{za}(x, y) \,,$$

gdzie

$$\begin{aligned} T_{za}(\varphi, \psi) = \frac{1}{16\pi^2} \int \Big\{ & \Big(\varphi, [(h_{za}^2 + \vec{p}_\perp^{\,2})^{1/2} - (h_z^2 + \vec{p}_\perp^{\,2})^{1/2}]\psi\Big) \\ & + \vec{p}_\perp^{\,2} \Big(\varphi, [(h_{za}^2 + \vec{p}_\perp^{\,2})^{-1/2} - (h_z^2 + \vec{p}_\perp^{\,2})^{-1/2}]\psi\Big) \\ & + \Big(\varphi', [(h_{za}^2 + \vec{p}_\perp^{\,2})^{-1/2} - (h_z^2 + \vec{p}_\perp^{\,2})^{-1/2}]\psi'\Big) \Big\} d^2 p_\perp \,. \end{aligned} \tag{9.7}$$

Prim w φ', ψ' oznacza pochodną po argumencie. Przy wyliczeniu powyższej całki pomocne są następujące elementarne całki (c, d są dodatnimi stałymi, a $p \equiv |\vec{p}_\perp|$)

$$\int \Big\{ \Big(c + \vec{p}_\perp^{\,2}\Big)^{\frac{1}{2}} - \Big(d + \vec{p}_\perp^{\,2}\Big)^{\frac{1}{2}} + \vec{p}_\perp^{\,2} \Big[\Big(c + \vec{p}_\perp^{\,2}\Big)^{-\frac{1}{2}} - \Big(d + \vec{p}_\perp^{\,2}\Big)^{-\frac{1}{2}} \Big] \Big\} d^2 p_\perp$$

$$= \frac{2\pi}{3} \Big[2\left(c+p^2\right)^{\frac{3}{2}} - 3c\sqrt{c+p^2} - 2\left(d+p^2\right)^{\frac{3}{2}} + 3d\sqrt{c+p^2} \Big]_{p=0}^{p=\infty} = \frac{2\pi}{3}\Big(c^{\frac{3}{2}} - d^{\frac{3}{2}}\Big) \,,$$

$$\int \Big[\Big(c + \vec{p}_\perp^{\,2}\Big)^{-\frac{1}{2}} - \Big(d + \vec{p}_\perp^{\,2}\Big)^{-\frac{1}{2}} \Big] d^2 p_\perp = -2\pi \left(\sqrt{c} - \sqrt{d}\right) \,.$$

Z (9.7) dostajemy zatem

$$T_{za}(\varphi,\psi) = \frac{1}{24\pi}\big(\varphi, (h_{za}^3 - h_z^3)\psi\big) - \frac{1}{8\pi}\big(\varphi', (h_{za} - h_z)\psi'\big)\,.$$

Funkcje próbne mają nadal nośnik poza $z = \pm b$, tak więc, podobnie jak wcześniej (zob. (9.5)), dla odpowiednio małych λ mamy $h_{za}^2\psi = h_z^2\psi$, otrzymujemy więc

$$T_{za}(\varphi,\psi) = -\frac{1}{24\pi}\big(\varphi, (h_{za} - h_z)\psi''\big) - \frac{1}{8\pi}\big(\varphi', (h_{za} - h_z)\psi'\big)\,. \tag{9.8}$$

Rozważmy zatem najpierw ogólne wyrażenie $\big(\eta, (h_{za}-h_z)\xi\big)$, z η, ξ gładkimi o nośniku poza $z = \pm b$. Dla $c \geqslant 0$ zachodzi tożsamość

$$c = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{c^2}{c^2 + r^2}\, dr\,,$$

korzystając więc z twierdzenia spektralnego dostajemy

$$h_{za} = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{h_{za}^2}{h_{za}^2 + r^2}\, dr$$

i analogicznie dla h_z. Mamy stąd

$$\begin{aligned} h_{za} - h_z &= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \left[\frac{h_{za}^2}{h_{za}^2 + r^2} - \frac{h_z^2}{h_z^2 + r^2}\right] dr = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \left[\frac{1}{-r^2 - h_{za}^2} - \frac{1}{-r^2 - h_z^2}\right] r^2\, dr \\ &= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \Big[G(-r^2) - G_0(-r^2)\Big]\, r^2\, dr\,. \end{aligned}$$

Rozważane wyrażenie przyjmuje zatem postać

$$\big(\eta, (h_{za} - h_z)\xi\big) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \big(\eta, [G(-r^2) - G_0(-r^2)]\xi\big) r^2 dr\,. \tag{9.9}$$

W celu wyznaczenia jądra całkowego $[G(-r^2) - G_0(-r^2)](x,y)$, liczymy transformatę do przestrzeni położeń z jądra (3.15):

$$[G(-r^2) - G_0(-r^2)](x,y) = \frac{1}{2\pi}\int e^{ipx}\frac{\mathcal{F}_p}{p^2 + r^2}\, dp\; \mathcal{T}(-r^2)\int e^{-iqy}\frac{\mathcal{F}_q^\dagger}{q^2 + r^2}\, dq\,.$$

Powyższe całki fourierowskie liczymy przez residua domykając kontury od dołu albo od góry, tak aby dostać znikanie całek po odpowiednich łukach. Korzystamy przy tym z oszacowania dla funkcji $\widehat{f}$ analogicznego do (A.4) (zamiast czynnika $2R$ w wykładniku w tym wzorze, będzie teraz czynnik R) oraz z zachowania eksponent występujących w liczonych całkach (które ostatecznie dają odpowiednie znikanie). Przykładowo mamy

$$\begin{aligned}&\int e^{-iqy}\frac{\mathcal{F}_q^\dagger}{q^2+r^2}\,dq = \pi i^{-\frac{1-\sigma}{2}} r^{-\frac{1+\sigma}{2}}\overline{\widehat{f}(ir)}\\ &\times\begin{pmatrix}[\chi_{(b+R,\infty)}(y)+\chi_{(-b+R,b-R)}(y)]e^{-(y+b)r}+\sigma\chi_{(-\infty,-b-R)}(y)e^{(y+b)r}\\ \chi_{(b+R,\infty)}(y)e^{-(y-b)r}+\sigma[\chi_{(-b+R,b-R)}(y)+\chi_{(-\infty,-b-R)}(y)]e^{(y-b)r}\end{pmatrix},\end{aligned}$$

gdzie, jak w rozdziale 4, $\chi_\Omega(\cdot)$ jest funkcją charakterystyczną zbioru Ω. Ponieważ na końcu będziemy usuwać rozszczepienie punktowe, zakładamy więc od razu że x i y są w tym samym regionie. Oznaczając $\mathcal{T}(-r^2) = \begin{pmatrix}\mathcal{A} & \mathcal{B}\\ \mathcal{B} & \mathcal{A}\end{pmatrix}$, gdzie $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ są funkcjami r, dostajemy

$$\begin{aligned}&[G(-r^2)-G_0(-r^2)](x,y) = \frac{\pi}{r^{1+\sigma}}|\widehat{f}(ir)|^2\\ &\times\begin{cases} e^{-|x+y|r}[\mathcal{A}\cosh(ar)+\mathcal{B}]\,, & \text{dla } x,y>b+R \text{ lub } x,y<-b-R\,,\\ e^{-ar}[\mathcal{A}\cosh((x+y)r)+\sigma\mathcal{B}\cosh((x-y)r)]\,, & \text{dla } x,y\in(-b+R,b-R)\,.\end{cases}\end{aligned}$$

Wstawiamy to jądro do (9.9), po czym otrzymane wyrażenie wykorzystujemy do wyliczenia (9.8) (dobierając odpowiednio funkcje η i ξ). Pochodne z funkcji próbnych przerzucamy na jądro całkując przez części. Przy oznaczeniu

$$(\varphi', (h_{za}-h_z)\psi') = (\varphi, W\psi)\,,$$

jądro $W(x,y)$ przyjmuje postać

$$W(x,y) = 2\int_0^\infty r^{3-\sigma}|\widehat{f}(ir)|^2\times\left\{\begin{matrix} e^{-|x+y|r}[\mathcal{A}\cosh(ar)+\mathcal{B}]\\ e^{-ar}[\mathcal{A}\cosh((x+y)r)-\sigma\mathcal{B}\cosh((x-y)r)]\end{matrix}\right\}dr,$$

gdzie górny i dolny przypadek dotyczą tych samych zakresów x i y jak w poprzednim wzorze. Podobnie dla iloczynu skalarnego w pierwszym członie w (9.8) (jedyna zmiana to przeciwny znak przy wyrażeniu proporcjonalnym do $\sigma\mathcal{B}$). Po usunięciu rozszczepienia punktowego otrzymujemy zatem

$$\begin{aligned}&\mathcal{E}_a(x) = \lim_{y\to x} T_{za}(x,y)\\ &= -\frac{1}{6\pi}\int_0^\infty r^{3-\sigma}|\widehat{f}(ir)|^2\times\left\{\begin{matrix}2e^{-2|x|r}(\mathcal{A}\cosh(ar)+\mathcal{B})\\ e^{-ar}(2\mathcal{A}\cosh(2xr)-\sigma\mathcal{B})\end{matrix}\right\}dr\,,\quad \begin{matrix}\text{dla } |x|>b+R\,,\\ \text{dla } |x|<b-R\,.\end{matrix}\end{aligned}$$

Chcemy teraz rozważyć granicę skalowania tej gęstości energii w przypadku przeskalowanego modelu. Dzięki odpowiedniemu zachowaniu funkcji podcałkowej możemy, dzięki twierdzeniu Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej, wejść z granicą $\lim_{\lambda\to 0^+}$ pod znak całki. W przeskalowanym modelu zależność od λ zyskują $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ oraz f. Korzystając z (4.10) (dla $w = ir$) oraz z (4.2) dostajemy

$$\mathcal{T}_\lambda(-r^2) \underset{\lambda\to 0^+}{\simeq} \frac{\sigma(\lambda r)^\sigma}{\pi M_0(1-e^{-2ar})}\begin{pmatrix} 1 & -e^{-ar} \\ -e^{-ar} & 1 \end{pmatrix}, \quad |\widehat{f}_\lambda(ir)|^2 \underset{\lambda\to 0^+}{\simeq} \lambda^{-\sigma} M_0 \,.$$

Przypominamy, że nośnik przeskalowanego potencjału zawiera się w zbiorze $\langle -b-\lambda R, -b+\lambda R\rangle \cup \langle b-\lambda R, b+\lambda R\rangle$, zatem w granicy skalowania ($\lambda \to 0^+$) wszystkie $x \neq \pm b$ są dozwolone. Po prostych przekształceniach otrzymujemy stąd

$$\lim_{\lambda\to 0^+} \mathcal{E}_{a,\lambda}(x) = -\frac{\sigma}{6\pi^2}\int_0^\infty \left\{ \begin{array}{c} e^{-(2|x|-a)r} \\ \dfrac{e^{(2x-a)r} + e^{-(2x+a)r} + \sigma e^{-2ar}}{1-e^{-2ar}} \end{array} \right\} r^3 dr\,, \quad \begin{array}{l} \text{dla } |x| > b\,, \\ \text{dla } |x| < b\,. \end{array}$$

Całka w górnym przypadku jest elementarna. Do policzenia całki w dolnym przypadku korzystamy z reprezentacji całkowej funkcji dzeta Hurwitza. Dla $s, u \in \mathbb{C}$ takich, że $\mathfrak{Re}\, s > 1$ i $\mathfrak{Re}\, u > 0$ zachodzi (zob. [41])

$$\zeta(s,u) \equiv \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(u+n)^s} = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{t^{s-1}e^{-ut}}{1-e^{-t}}\, dt\,,$$

skąd otrzymujemy dla $\beta > 0$

$$\frac{1}{6}\int_0^\infty \frac{r^3 e^{-2\beta r}}{1-e^{-2ar}}\, dr = \frac{1}{(2a)^4}\zeta\Big(4, \frac{\beta}{a}\Big) = \frac{1}{16}\sum_{n=0}^\infty (\beta + an)^{-4}\,.$$

Korzystając z powyższych uwag po prostych przekształceniach dostajemy

$$\mathcal{E}_a^B(x) \equiv \lim_{\lambda\to 0^+} \mathcal{E}_{a,\lambda}(x) = \begin{cases} -\dfrac{\sigma}{16\pi^2(|x|-b)^4}\,, & \text{dla } |x| > b\,, \\ -\dfrac{\pi^2}{1440a^4} - \displaystyle\sum_{n\in(2\mathbb{Z}+1)} \frac{\sigma}{16\pi^2(nb-x)^4}\,, & \text{dla } |x| < b\,, \end{cases} \tag{9.10}$$

gdzie $2\mathbb{Z}+1$ oznacza zbiór liczb nieparzystych. Podsumujmy powyższy wynik: dla funkcji próbnych φ o zwartym nośniku poza $x = \pm b$ zachodzi

$$\lim_{\lambda\to 0^+} \int \mathcal{E}_{a,\lambda}(x)\varphi(x)dx = \int \mathcal{E}_a^B(x)\varphi(x)dx\,.$$

Przekształćmy teraz energię $\mathcal{E}_a^B(x)$ do nieco innej postaci. W tym celu oznaczmy

$$\mathcal{E}^B(x) = -\frac{\sigma}{16\pi^2 x^4} \qquad \text{dla } x \neq 0\,. \tag{9.11}$$

Wzór (9.10) możemy teraz zapisać jako

$$\mathcal{E}^B_a(x) = \mathcal{E}^B(x+b) + \mathcal{E}^B(x-b) + \mathcal{E}^B_{a,\mathrm{int}}(x)\,, \tag{9.12}$$

gdzie

$$\mathcal{E}^B_{a,\mathrm{int}}(x) = \begin{cases} +\dfrac{\sigma}{16\pi^2(|x|+b)^4} & \text{dla } |x| > b\,, \\ -\dfrac{\pi^2}{1440a^4} - \displaystyle\sum_{n\in(2\mathbb{Z}+1)\setminus\{1,-1\}} \dfrac{\sigma}{16\pi^2(nb-x)^4} & \text{dla } |x| < b\,. \end{cases} \tag{9.13}$$

Jak łatwo zobaczyć $\mathcal{E}^B_{a,\mathrm{int}}(x) = a^{-4}F(\frac{x}{a})$, dla pewnej ograniczonej na moduł i całkowalnej funkcji F. $\mathcal{E}^B_{a,\mathrm{int}}(x)$ daje więc skończony przyczynek do energii oraz znika dla $a \to \infty$. Dla dużych odległości pomiędzy płytami energia jest więc skoncentrowana w pierwszych dwóch członach (9.12) (które są rozbieżne na płytach). $\mathcal{E}^B(x)$ ma więc interpretację gęstości energii wokół pojedynczej płyty, natomiast $\mathcal{E}^B_{a,\mathrm{int}}(x)$ może być postrzegana jako lokalna, poza samymi płytami, gęstość energii oddziaływania. Wycałkowana po $x \in \mathbb{R}$ gęstość ta nie da globalnej energii oddziaływania, gdyż obowiązuje ona właśnie jedynie poza płytami (wyprowadzając ją pominęliśmy obszar zasięgu potencjału). Dla porównania z globalną energią wyznaczoną w poprzednim rozdziale wykonajmy jednak wspomniane całkowanie. Zauważmy, że dla $|x| < b$ szereg możemy całkować wyraz po wyrazie, gdyż (zakres sumowania jak w (9.13))

$$\sum \frac{1}{(nb-x)^4} \leqslant \frac{1}{b^4} \sum \frac{1}{(|n|-1)^4} \leqslant \mathrm{const} \in L^1\big((-b,b)\big)\,.$$

Po prostych rachunkach otrzymujemy

$$\mathcal{E}^B_{a,\mathrm{int}} \equiv \int \mathcal{E}^B_{a,\mathrm{int}}(x)\,dx = -\frac{\pi^2}{1440a^3}\,, \tag{9.14}$$

zarówno dla przypadku Dirichleta i Neumanna.

Rozdział 10

Podsumowanie i dyskusja uzyskanych wyników

Model

Zamierzeniem niniejszej rozprawy była analiza pewnej klasy modeli aproksymujących ostre warunki brzegowe, służących jednocześnie do opisu efektu Casimira w tradycyjnej konfiguracji dwóch równoległych płyt. Modele te z założenia miały służyć bardziej analizie teoretycznej niż opisowi realistycznego układu związanego z tym efektem. Opis przewodzących płyt za pomocą nielokalnego potencjału wynika właśnie już z samej analizy dopuszczalnych idealizacji, a nie z zamiaru modelowania sytuacji skończenie szerokich płyt, czy ich skończonego przewodnictwa.

Przypomnijmy, że zaproponowana klasa modeli jest zgodna ze wspomnianymi dopuszczalnymi idealizacjami obowiązującymi przy modelowaniu m.in. efektu Casimira, związanymi z algebraiczną strukturą kwantowej teorii pola, a podanymi przez A. Herdegena w [7, 8] (zob. także rozdział 2 niniejszej pracy). Oznacza to, że układ w obecności płyt jest opisywany w tej samej algebrze Weyla co swobodne pole, a oddziaływanie wprowadzone przez nielokalny potencjał modelujący płyty nie wyprowadza poza reprezentację próżniową tej algebry (dokładnie rzecz biorąc, reprezentacje próżniowe dla dowolnych odległości pomiędzy płytami — dowolne a — są unitarnie równoważne reprezentacji próżniowej swobodnego pola). Dzięki tej własności opis efektu Casimira za pomocą tych modeli jest od samego początku wolny od wszelkich rozbieżności oraz nie pojawia się w żadnym momencie potrzeba dodatkowego ad hoc poprawiania źle zdefiniowanych wielkości. Jednocześnie, wybrana konkretna klasa nielokalnych potencjałów jest na tyle prosta, że umożliwia przeprowadzenie rygorystycznych rachunków.

Odtwarzanie ostrych warunków brzegowych

Rozważane modele, po przeskalowaniu, odtwarzają w granicy skalowania ostre warunki brzegowe Dirichleta i Neumanna. Będąc bardziej precyzyjnym, udowodniona została zbieżność odpowiednich rezolwent w sensie normy Hilberta-Schmidta (wzór (4.5)). Własność ta implikuje zbieżność względem normy dowolnych ciągłych, znikających w nieskończoności funkcji od hamiltonianów (pierwszej kwantyzacji) układu z potencjałem i ostrymi warunkami brzegowymi lub analogicznie silną zbieżność dla dowolnych ciągłych i ograniczonych funkcji. Nośnik nielokalnych potencjałów jest pod ścisłą kontrolą i w granicy skalowania kurczy się do płaszczyzny na której zadane są ostre warunki. Ponadto pokazany został pozytywny związek podklasy modeli dla których zachodzi $I_0 = 0$ z szybszym odtwarzaniem warunku Neumanna (por. wzór (4.17)).

Energia globalna

Rozwinięcie energii globalnej, zdefiniowanej jako wartość oczekiwana swobodnego hamiltonianu wyliczona na stanie podstawowym układu z płytami (zob. wzór (2.22)), dla dużych wartości parametru a, wykazuje szereg ciekawych własności. Przede wszystkim pojawia się tradycyjny wyraz Casimira, $-\frac{\pi^2}{1440a^3}$, który w przypadku Dirichleta (wzór (8.10)) jest pierwszym niezerowym wyrazem zależnym od a i jedynym proporcjonalnym do a^{-3}. Tym samym potwierdza to dużą uniwersalność tego typu zachowania (jest to wynik dla całej, dość szerokiej, klasy modeli — zob. dodatek C).

Przypadek Neumanna (wzór (8.21)) wykazuje jednak znacząco inne zachowanie. W ogólności zmianie ulega nawet wyraz proporcjonalny do a^{-3}, choć jednak istnieje cała szeroka (nieskończona — zob. dodatek C) podklasa modeli dla których wyraz ten ma postać tradycyjnego wyrażenia Casimira, tak jak w przypadku Dirichleta. Jest to ta sama podklasa (charakteryzowana spełnianiem dodatkowego warunku $I_0 = 0$), która została powiązana z własnością szybszego odtwarzania, w granicy skalowania, ostrego warunku Neumanna. Nieusuwalną własnością, dla całej klasy modeli w przypadku Neumanna, jest jednak pojawienie się dodatkowego, dodatniego członu proporcjonalnego do a^{-2}. Tym samym potwierdzony został analogiczny wynik z pracy [8] (sama dodatniość tego członu w cytowanej pracy nie jest tak oczywista jak w naszym podejściu, jednak jest ona wspominana — zob. tamże, str. 270). Stała M_0 występująca w mianowniku omawianego członu jest wielkością zależną od danego modelu. Przy rozmyciu warunków brzegowych pojawienie się zależności energii od danego modelu jest naturalne (por. [4]), a jako wyjątkowe należy postrzegać zachowanie uniwersalne (np. jak to z przypadku Dirichleta). Zwracamy uwagę, że dla stałej M_0 zachodzi oszacowanie (zob. (A.5) oraz warunek (3.4))

$$M_0 \leqslant \frac{R}{\pi} \leqslant \frac{a}{2\pi} \,. \tag{10.1}$$

Współczynnik stojący przy a^{-2}, tj. $(48\pi M_0)^{-1}$, dla ustalonego R, nie może więc być dowolnie mały.

Wspominaliśmy już o niefizyczności warunków Dirichleta i Neumanna. Jednym z jej przejawów jest rozbieżność energii Casimira w granicy skalowania. Chcąc jednak nawiązać do energii wyznaczonej (po odpowiednim odjęciu rozbieżności) przez H. Casimira możemy, dla podklasy modeli dla której w przypadku Neumanna zachodzi $I_0 = 0$, napisać (por. wzory (7.2), (8.10), (8.21))

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \left(\varepsilon_{a,\lambda} - \frac{\varepsilon_\infty}{\lambda^3} - \frac{1-\sigma}{2} \frac{1}{48\pi M_0 \lambda a^2} \right) = -\frac{\pi^2}{1440 a^3} \,,$$

gdzie jak zawsze $\sigma = 1$ odpowiada przypadkowi Dirichleta, zaś $\sigma = -1$ Neumanna.

Własności lokalne

Rozpatrywane modele, dzięki przestrzennemu zlokalizowaniu rozważanych potencjałów, umożliwiły analizę własności lokalnych. Na algebrach pól zlokalizowanych poza nośnikiem potencjałów (tj. dla funkcji próbnych poza tym obszarem) możemy rozważać zarówno swobodny stan próżni, jak i stany podstawowe naszych modeli oraz stan podstawowy układu z ostrymi warunkami na płytach. W restrykcji do tych algebr stany podstawowe naszych modeli dążą słabo, w granicy skalowania, do stanu podstawowego modelu z ostrymi warunkami.

Lokalna gęstość energii jest poprawnie zdefiniowana w rozważanych modelach w całej fizycznej przestrzeni poprzez procedurę rozszczepienia punktowego (point-splitting). Dokładniej rozważyliśmy jednak tylko gęstość energii w obszarze poza nośnikiem potencjału opisującego płyty, który w granicy ostrych warunków brzegowych dopuszcza wszystkie punkty poza $z = \pm b$ (por. początek rozdziału 9). W granicy skalowania gęstość energii dla tego obszaru wyraża się wzorem (9.10) (niezależnym od wyjściowego modelu). Po odseparowaniu (zob. dyskusja pod koniec rozdziału 9) i odjęciu rozbieżnych (co znowu pokazuje niefizyczność ostrych warunków) przyczynków energii pola związanej z obecnością pojedynczej płyty — $\mathcal{E}^B_a(\cdot)$, otrzymaliśmy skończoną i całkowalną gęstość energii oddziaływania $\mathcal{E}^B_{a,\mathrm{int}}(\cdot)$ (wzór (9.13)). Energia ta w obszarze pomiędzy płytami ma postać sumy wartości stałej i funkcji zależnej od odległości od płyt, która dla przypadku Dirichleta przyjmuje wartości ujemne, a dla Neumanna dodatnie (dokładnie przeciwne). Wycałkowana po całej przestrzeni (w kierunku prostopadłym do płyt) daje energię na jednostkę powierzchni (zob. wzór (9.14))

$$\mathcal{E}^B_{a,\mathrm{int}} = -\frac{\pi^2}{1440 a^3} \,.$$

Wynik ten obowiązuje dla obu przypadków, Dirichleta i Neumanna.

Przypominamy, iż przy wyprowadzeniu tej energii pominęliśmy najpierw energię z obszaru nośnika potencjału, a następnie odjęliśmy jedynie wyrazy związane z obecnością pojedynczych płyt. Nieobecność, dla przypadku Neumanna, żadnej pozostałości związanej z członem z globalnej energii proporcjonalnym do a^{-2} (zob. (8.21)) oznacza, iż człon ten pochodzi jakby „z wnętrza" płyt. Tym samym zrozumiała jest zależność tego wyrazu od modelu, tj. od sposobu opisania płyt za pomocą danego potencjału. Widzimy tutaj także jak duża jest różnica pomiędzy energią globalną a lokalną — wyliczoną z pominięciem obszaru oddziaływania z potencjałem.

Porównanie z literaturą

Istnieje szereg pozycji w literaturze dotyczących zastosowania nielokalnych potencjałów do opisu efektu Casimira (zob. np. [47, 48, 49]), nie jest nam jednak znane (poza pracą [31], na której tutaj bazujemy) takie podejście — stosowane w niniejszej rozprawie, które korzysta z nielokalnych potencjałów w ramach ujęcia algebraicznego teorii kwantowej.

Oprócz tego, w cytowanych powyżej publikacjach nie pojawia się dokładna analiza odtwarzania ostrych warunków brzegowych przez modele z nielokalnymi potencjałami analogiczna do tej z rozdziału 4. Rozwinięcie energii Casimira, analogiczne do tego z rozdziału 8, jest również nieobecne. Niespotykaną wydaje się także przeprowadzona w niniejszej rozprawie analiza lokalnych własności modeli z nielokalnymi potencjałami. Poniżej osobno dyskutujemy różne wyniki dotyczące gęstości energii pomiędzy płytami z ostrymi warunkami brzegowymi, jednak wszystkie cytowane tam prace wychodzą od razu od ostrych warunków, a nie — jak w naszym podejściu — od nielokalnych potencjałów które dopiero w odpowiedniej granicy odtwarzają te warunki.

Oczywiście w literaturze znajdują się także ciekawe, nowe rezultaty nie objęte w niniejszej rozprawie. Na przykład w [48] autorzy otrzymują wynik, że dla układu dwóch równoległych płyt z nielokalnym potencjałem (opartym o funkcję gaussowską) w granicy zerowej odległości pomiędzy płytami zanika siła Casimira. Wynik ten jest znacznie różny od tradycyjnego wzoru na siłę Casimira, a ponadto jest on poza naszym aktualnym zasięgiem, gdyż założyliśmy że $b > R$ — zob. (3.3). Autorzy cytowanej pracy uzyskują także rezultat, iż dla małych wartości zmiennej $\frac{\epsilon}{a}$, gdzie ϵ jest związany z szerokością potencjału, natomiast a z odległością pomiędzy płytami, poprawki do energii są nieanalityczne w tej zmiennej.

W literaturze nie tylko same metody i podejścia do efektu Casimira znacznie różnią się od siebie, ale także same wyniki bywają sprzeczne ze sobą. Przyjrzyjmy się dwóm różnym rezultatom dotyczącym gęstości energii pomiędzy płytami z ostrymi warunkami brzegowymi. Nasz wynik — funkcja $\mathcal{E}_a^B(\cdot)$, wzór (9.10) — dokładnie pokrywa się z gęstością energii $\langle T^{00}\rangle(\cdot)$ wyliczoną w publikacji [42] (wzory (2.27)–(2.29)), dla przypadku Dirichleta (tylko taki został przedstawiony w cytowanej pracy). Inny wynik natomiast znajduje się w pracach [46] i [23] (dotyczy on także tylko warunku Dirichleta, przypadek Neumanna nie został w tych publikacjach rozważony). Wszystkie człony, poza tym który daje ostatecznie tradycyjny wyraz Casimira, należałoby przemnożyć przez stałą „-2". Operacja ta dotyczy wzoru (2.12a) w [46] i przedostatniego wzoru na str. 2882 w [23] (w ostatnim wzorze na tej stronie jest drobna pomyłka związana z błędną wartością $\zeta(4)$, poprawna wartość daje oryginalny człon Casimira). Niezgodność dotyczy więc także samego znaku energii. Powyższe rozbieżności potwierdzają dodatkowo potrzebę bardziej uporządkowanego opisu efektu Casimira i zwrócenia uwagi na zasadność stosowanych modeli, o czym pisaliśmy już w rozdziale 1.

Pole elektromagnetyczne, ograniczenia modeli i problemy otwarte

W niniejszej pracy rozważaliśmy pole skalarne. Do porównania z doświadczeniem potrzebujemy natomiast wyniku dla pola elektromagnetycznego. Można jednak wykazać (zob. [8] rozdz. 7), że w rozważanej sytuacji energia pola elektromagnetycznego jest równa sumie energii pola skalarnego dla przypadku Dirichleta i Neumanna. Siła Casimira dla pola elektromagnetycznego, przewidywana przez podklasę rozważanych tutaj modeli dla której w przypadku Neumanna $I_0 = 0$, wynosi więc (korzystamy z (8.22))

$$f_a^{EM} = \frac{1}{24\pi M_0 a^3} - \frac{\pi^2}{240 a^4} + o(a^{-4})\,.$$

Na postawie (10.1) dostajemy stąd, że

$$f_a^{EM} \geqslant \left(\frac{1}{12} - \frac{\pi^2}{480}\right)\frac{1}{a^4} + o(a^{-4})\,,$$

gdzie czynnik liczbowy w nawiasie jest ściśle dodatni. Oznacza to, że jeśli pominąć dodatkowe człony ($o(a^{-4})$ powyżej) przewidywana siła jest odpychająca. Wynik ten stanowi podstawową słabość rozważanej klasy modeli. W naszych modelach przyjęliśmy potencjał opisujący płytę jako jeden z najprostszych (tzw. operator rzędu jeden), pozostaje kwestią otwartą zbadanie modeli z bardziej złożonymi potencjałami (np. skończonego rzędu większego niż jeden). Wydaje się ponadto, iż mocno ograniczającym założeniem było niedopuszczenie do przekrywania się nośników potencjałów dla poszczególnych płyt (warunek $R < b$ w (3.3)). Osłabienie tego warunku jest więc kolejnym problemem otwartym czekającym na rozwiązanie.

Zwracamy uwagę na oczywisty fakt, że jeśli w danym doświadczeniu nie mierzy się całkowitej siły Casimira, a tylko współczynnik liczbowy występujący przy a^{-4} (por. dyskusja pod koniec rozdz. 7 w [8]), wtedy przewidywania rozważanych w niniejszej rozprawie modeli z podklasy z $I_0 = 0$ będą zgodne z wynikami takiego eksperymentu dokładnie w takim samym stopniu jak np. oryginalny wynik H. Casimira z [1].

W kwestii geometrii innych niż dwie równoległe płyty udało się już nam, wraz z A. Herdegenem, uzyskać znaczące wyniki dla odtwarzania przez modele z nielokalnym potencjałem warunku Dirichleta na sferze. Opis efektu Casimira dla sfery i innych geometrii w ujęciu algebraicznym pozostaje jednak nadal kolejnym problemem otwartym.

Dodatek A

Użyteczne własności

W tym dodatku przytaczamy pewne bardziej techniczne fakty, z których korzystamy w głównej części pracy. Pracujemy tutaj przy założeniach (3.3), (3.4), (5.2) i (5.3), chyba że wprost przyjmiemy co innego.

A.1

Zbierzmy najpierw kilka związków i własności dotyczących funkcji $f, \widehat{f}, M$ oraz $\check{M}$. Dla funkcji z przestrzeni $L^2(\mathbb{R})$ zachodzi oczywiście $\|\widehat{f}\| = \|f\|$. Funkcję $\widehat{f}$ w sposób naturalny rozszerzamy do funkcji na całym $\mathbb{C}$ poprzez

$$\widehat{f}(w) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-iwx} f(x) dx\,, \quad w \in \mathbb{C}\,.$$

Jako transformata Fouriera funkcji gładkiej o zwartym nośniku jest to funkcja m.in. całkowita (zob. np. [40] str. 174 tw. 5). Parzystość f przenosi się na parzystość $\widehat{f}$ również dla zespolonych argumentów. Dla $p \in \mathbb{R}$ zdefiniowaliśmy $M_p \equiv M(p) = |\widehat{f}(p)|^2$. Ponieważ f jest funkcją Schwartza, więc jej transformata $\widehat{f}$ jako funkcja na $\mathbb{R}$ również. Stąd także M (jako funkcja na $\mathbb{R}$) jest funkcją Schwartza. Zdefiniujmy $\check{M}$ jako odwrotną transformatę Fouriera funkcji M, a więc

$$\check{M}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{ipx} M(p)\, dp\,, \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{A.1}$$

Parzystość M przechodzi również na $\check{M}$. Zachodzi także

$$\begin{aligned}\check{M}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{ipx} \overline{\widehat{f}(p)} \widehat{f}(p)\, dp = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big(\check{\overline{\widehat{f}}} * f \Big)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \overline{f(-y)} f(x-y)\, dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \overline{f(y)} f(x-y)\, dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\overline{f} * f)(x)\,. \end{aligned} \tag{A.2}$$

Jako splot funkcji o zwartym nośniku, $\check{M}$ ma również zwarty nośnik, który zawiera się w $\langle -2R, 2R\rangle$. Dla $a > 2R$ zachodzi więc

$$\int \cos(ap)M(p)\,dp = \int e^{iap}M(p)\,dp = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\check{M}(a) + \check{M}(-a)\right] = 0\,, \tag{A.3}$$

Chcemy teraz rozszerzyć funkcję M na cały zbiór $\mathbb{C}$ z zachowaniem analityczności. Dla $w \in \mathbb{C}$ definiujemy

$$M(w) \equiv M_w = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-iwx}\check{M}(x)\,dx\,.$$

Ponieważ M jest transformatą Fouriera funkcji gładkiej o zwartym nośniku zawierającym się w $\langle -2R, 2R\rangle$, więc (jak już to widzieliśmy przy okazji funkcji $\widehat{f}$) jest to funkcja całkowita. Na podstawie twierdzenia Paleya-Wienera (zob. tw. IX.11 w [37]) zachodzi ponadto oszacowanie

$$|M(w)| \leqslant \frac{\mathrm{const}(N)e^{2R|\,\mathfrak{Im}\,w|}}{(1+|w|)^N}\,, \tag{A.4}$$

dla dowolnego $N \in \mathbb{N}$ i $w \in \mathbb{C}$. Można pokazać również, że między $M(w)$ a $\widehat{f}(w)$ zachodzi związek

$$M(w) = \overline{\widehat{f}(\overline{w})}\widehat{f}(w)\,.$$

Wyprowadzimy teraz górne oszacowanie na M_0. Z definicji mamy

$$M_0 = \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int f(x)dx\right|^2 = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-R}^{R} f(x)dx\right|^2 \leqslant \frac{R}{\pi}\|f\|^2\,, \tag{A.5}$$

gdzie w ostatniej nierówności skorzystaliśmy z nierówności Schwarza.

Chcemy teraz pokazać, że (jak zawsze dla $a > 2R$)

$$\int \frac{\cos(ap)(M_p - M_k)}{p^2 - k^2}dp = 0\,. \tag{A.6}$$

Obliczamy tę całkę metodą residuów. Rozpisując $\cos(ap) = \frac{1}{2}(e^{iap} + e^{-iap})$, całkę z pierwszą eksponentą domykamy od góry, z drugą od dołu. Korzystając z faktu, że $\frac{M_p - M_k}{p^2 - k^2}$ jest funkcją analityczną, dostajemy zerowy wkład od residuów. Pozostaje więc wykazać jedynie znikanie całek po łukach. Dla ustalonego k i odpowiednio dużego na moduł w mamy

$$\left|\frac{M_w - M_k}{w^2 - k^2}\right| \leqslant \mathrm{const}(k)\big(|M_w| + \mathrm{const}\big)\,.$$

Korzystamy następnie z oszacowania (A.4) oraz z założenia $a > 2R$, co daje odpowiednie zachowanie na łuku i kończy dowód.

Udowodnimy teraz, że

$$\int_0^\infty pM_p \cos(ap)\, dp = -\frac{M_0}{\tilde{a}^2} + O(\tilde{a}^{-3})\,, \tag{A.7}$$

gdzie $\tilde{a} \equiv a - \frac{I_0}{\pi M_0}$. Całkując trzy razy przez części lewą stronę (A.7) dostajemy

$$\int_0^\infty pM_p \cos(ap)\, dp = -\frac{M_0}{a^2} + a^{-3} \int_0^\infty (2M_p' + p\, M_p'')' \sin(ap)\, dp\,.$$

Korzystając z lematu Riemanna-Lebesgue'a dla całki po prawej stronie powyższego wzoru dostajemy

$$\int_0^\infty pM_p \cos(ap)\, dp = -\frac{M_0}{a^2} + o(a^{-3})\,.$$

Korzystając z zależności

$$\frac{1}{a^2} = \frac{1}{\tilde{a}^2} + O(\tilde{a}^{-3})\,,$$

otrzymujemy (A.7).

A.2

Wyprowadzamy tutaj wzory (4.7) i (4.8). Rozważmy najpierw (4.7) dla przypadku Dirichleta. Mamy

$$(g_\lambda, G_0(w^2) g_\lambda) = \lambda^{-1} \int \frac{M_{\lambda p}}{w^2 - p^2} dp = \lambda^{-1} \int \frac{M_{\lambda p} - M_0}{w^2 - p^2} dp - i\pi(\lambda w)^{-1} M_0\,,$$

gdzie przy ostatniej równości wykonaliśmy standardowe całkowanie przez residua. Pozostaje pokazać, że

$$\lambda^{-1} \int \frac{M_{\lambda p} - M_0}{w^2 - p^2} dp = I_0 + O(\lambda)\,,$$

gdzie I_0 jak w (4.9). Wprowadzając nową zmienną $u = \lambda p$, rozpiszmy różnicę

$$\begin{aligned} \lambda^{-1} \int \frac{M_{\lambda p} - M_0}{w^2 - p^2} dp - I_0 &= \int \frac{M_u - M_0}{u^2} \left(\frac{u^2}{\lambda^2 w^2 - u^2} + 1 \right) du \\ &= \lambda w \int \frac{M_u - M_0}{u^2} \frac{\lambda w}{\lambda^2 w^2 - u^2}\, du\,. \end{aligned} \tag{A.8}$$

Popatrzmy na powyższą całkę jak na iloczyn skalarny dwóch funkcji. Z unitarności transformaty Fouriera iloczyn ten jest równy iloczynowi skalarnemu transformat Fouriera tych funkcji. Dla jednej z tych funkcji, wykonując proste całkowanie przez residua, otrzymujemy (por. wzór (4.14) dla $\sigma = 1$)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{ixu} \frac{\lambda w}{\lambda^2 w^2 - u^2}\, du = -\frac{i\pi}{\sqrt{2\pi}} \left[\theta(x) e^{i\lambda w x} + \theta(-x) e^{-i\lambda w x}\right].$$

Całkę z drugiej linijki (A.8) możemy zatem zapisać jako

$$-\frac{i}{2} \iint e^{-ixu} \frac{M_u - M_0}{u^2}\, du \Big[\theta(x) e^{i\lambda w x} + \theta(-x) e^{-i\lambda w x}\Big] dx\,. \tag{A.9}$$

Korzystając z faktu, że $\mathfrak{Im}\, w > 0$ zauważmy, że dla wyrażenia w nawiasie kwadratowym powyżej mamy oszacowanie $\big|[\ldots]\big| \leqslant 2$. Funkcja $\frac{M_u - M_0}{u^2}$ natomiast, jest gładka i całkowalna, dzięki czemu jej transformata Fouriera jest funkcją całkowalną (por. [40] str. 166 tw. 1). Mamy więc, że wyrażenie (A.9) jest na moduł szacowane od góry przez stałą, a to oznacza, że (A.8) jest na moduł szacowane przez $\lambda\,$const, co kończy dowód (4.7) dla przypadku Dirichleta.

Dla przypadku Neumanna otrzymujemy

$$(g_\lambda, G_0(w^2) g_\lambda) = \lambda \int \frac{p^2 M_{\lambda p}}{w^2 - p^2} dp = -\int M_u du + \lambda w^2 \int \frac{M_{\lambda p}}{w^2 - p^2} dp\,.$$

Korzystając dla pierwszej całki z prawej strony powyżej ze wzoru (3.4), a drugą rozwijając w λ jak dla przypadku Dirichleta przed chwilą, otrzymujemy (4.7) dla przypadku Neumanna.

Wzór (4.8) otrzymujemy dokonując zmiany zmiennych

$$(U_a g_\lambda, G_0(w^2) g_\lambda) = \lambda^{-1} \int \frac{e^{iap} (\lambda p)^{1-\sigma} M_{\lambda p}}{w^2 - p^2} dp = \int \frac{e^{ia\lambda^{-1} u} u^{1-\sigma} M_u}{\lambda^2 w^2 - u^2} du\,,$$

korzystając z (3.11), a następnie rozwijając $M_{\lambda w}$ w szereg Taylora wokół zera.

A.3

Udowodnimy teraz oszacowania (4.11) i (4.12). Zaczniemy od (4.11) w przypadku Dirichleta. Zachodzi

$$\widehat{f}(\lambda p) - \widehat{f}(0) = p^2 \int_0^\lambda \widehat{f}\,''(p\xi)(\lambda - \xi)\, d\xi\,, \tag{A.10}$$

skąd dostajemy, że

$$\left| \frac{\widehat{f}(\lambda p) - \widehat{f}(0)}{w^2 - p^2} \right| = \left| \frac{p^2}{w^2 - p^2} \right| \left| \int_0^\lambda \widehat{f}\,''(p\xi)(\lambda - \xi) d\xi \right| \leqslant \mathrm{const}(w)\, \lambda \int_0^\lambda |\widehat{f}\,''(p\xi)| d\xi\,.$$

Korzystając m.in. z nierówności Schwartza, dla ostatniej całki powyżej mamy (poniższe normy należy rozumieć jako normy L^2, wszystkie poza ostatnią dotyczą funkcji zmiennej p)

$$\left\| \int_0^\lambda |\widehat{f}''(p\xi)| d\xi \right\|^2 \leqslant \int_{\langle 0,\lambda\rangle^2} \|\widehat{f}''(p\xi)\| \|\widehat{f}''(p\tilde{\xi})\| d\xi d\tilde{\xi}$$

$$\leqslant \|\widehat{f}''\|^2 \int_{\langle 0,\lambda\rangle^2} (\xi\tilde{\xi})^{-1/2} d\xi d\tilde{\xi} \leqslant \mathrm{const}\lambda\,,$$

co kończy dowód. Te same rozważania pokazują poprawność szacowania (4.12). Dowód przypadku Neumanna w (4.11) jest zasadniczo taki sam, należy tylko zamiast (A.10) skorzystać z

$$\widehat{f}(\lambda p) - \widehat{f}(0) = p \int_0^\lambda \widehat{f}'(p\xi) d\xi\,.$$

A.4

Przytaczamy tutaj podstawowy fakt wykorzystany przy wyprowadzeniu wzoru (4.13). Niech dla funkcji całkowalnych z kwadratem, zależnych od parametru λ, zachodzi (nie piszemy argumentów funkcji, a normy są normami L^2)

$$\lim_{\lambda\to 0^+} \|\varphi_\lambda - \varphi\| = 0\,, \quad \lim_{\lambda\to 0^+} \|\eta_\lambda - \eta\| = 0\,. \tag{A.11}$$

Zakładamy, że funkcje φ, η są także całkowalne z kwadratem. Wtedy

$$\|\varphi_\lambda \otimes \eta_\lambda - \varphi\otimes\eta\| = \|(\varphi_\lambda - \varphi)\otimes\eta_\lambda + \varphi\otimes(\eta_\lambda - \eta)\| \leqslant \|\eta_\lambda\|\,\|\varphi_\lambda - \varphi\| + \|\varphi\|\,\|\eta_\lambda - \eta\|$$

$$\leqslant \mathrm{const}\Big(\|\varphi_\lambda - \varphi\| + \|\eta_\lambda - \eta\|\Big) \xrightarrow[\lambda\to 0^+]{} 0\,,$$

zatem

$$\|\varphi_\lambda \otimes \eta_\lambda - \varphi \otimes \eta\| \xrightarrow[\lambda\to 0^+]{} 0\,.$$

Przy wyprowadzaniu wzoru (4.13) przyjmujemy $\varphi_\lambda = \eta_\lambda$ oraz $\varphi = \eta$, więc założenia (A.11) są spełnione dzięki (4.11).

A.5

Rozważymy teraz pewne własności funkcji I_k zdefiniowanej wzorem (5.1). Pokażemy najpierw, że dla pewnego $0 < \epsilon_0 < 1$ zachodzi (stała R związana jest z nośnikiem funkcji f, zob. (3.3))

$$I_0 \leqslant 2\pi R M_0 (1 - \epsilon_0)\,, \tag{A.12}$$

Korzystając z (5.12) i (5.13) mamy dla $b > R$

$$4\int_0^\infty \frac{\sin^2(bp)M_p}{p^2}\,dp = 2\pi b M_0 - I_0\,.$$

Ponieważ całka powyżej jest funkcją ciągłą w b, powyższa równość zachodzi również gdy podstawić $b = R$. Wtedy korzystając ze ścisłej dodatniości lewej strony otrzymujemy (A.12).

Udowodnimy teraz następujące dalsze oszacowania

$$I_k \geqslant \frac{\mathrm{const}(k_*)}{k^2}\,, \qquad k \geqslant k_*\,, \tag{A.13a}$$

$$I_k \leqslant \frac{\mathrm{const}}{(1+k)^2}\,, \qquad k \geqslant 0\,, \tag{A.13b}$$

dla dowolnego $k_* > 0$. W otoczeniu zera, druga z tych nierówności jest trywialna, gdyż I_k jest gładka. Zakładamy dalej $k > 0$. Możemy zapisać

$$I_k = \int \frac{M_k - M_p}{p^2 - k^2}dp = -\mathcal{P}\int \frac{M_p}{p^2 - k^2}dp\,.$$

Traktujemy I_k jako wartość dystrybucji wyliczoną na funkcji próbnej M_p, przechodzimy następnie do przestrzeni położeń i korzystając z

$$\mathcal{P}\int \frac{e^{-ipx}}{p^2 - k^2}dp = -\frac{\pi}{k}\sin(k|x|)\,,$$

dostajemy

$$I_k = \frac{\sqrt{2\pi}}{k}\int_0^\infty \sin(kx)\check{M}(x)dx\,. \tag{A.14}$$

Całkując przez części otrzymujemy

$$I_k = \frac{\sqrt{2\pi}}{k^2}\left[\check{M}(0) + \int_0^\infty \check{M}'(x)\cos(kx)dx\right]. \tag{A.15}$$

(A.13b) jest już oczywiste z tej postaci, jako że $\check{M}'(x) \in L^1(\mathbb{R}_+)$. Oszacowanie (A.13a) powyżej pewnego $K > 0$ dostajemy na podstawie lematu Riemanna-Lebesgue'a. Pomiędzy zerem a K dostajemy udowadniany wynik dzięki założeniu (5.2) i ciągłości I_k.

Dla pochodnej z funkcji I_k, korzystając z faktu, że

$$\partial_k \cos(kx) = k^{-1}x\partial_x \cos(kx)$$

i całkując raz przez części otrzymujemy

$$I_k' = -\frac{\sqrt{2\pi}}{k^3}\left[2\check{M}(0) + \int_0^\infty \Big(\check{M}'(x) - x\check{M}''(x)\Big)\cos(kx)dx\right].$$

Postępując analogicznie dostajemy w ogólności dla n-tej pochodnej

$$I_k^{(n)} = \frac{1}{k^{n+2}}\left[c_0\check{M}(0) + \int_0^\infty \cos(kx)\sum_{j=0}^{n} c_{j+1}x^j\check{M}^{(j+1)}(x)dx\right],$$

gdzie c_i są pewnymi stałymi. Stąd, jako że I_k jest gładka oraz $\check{M} \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, dostajemy oszacowanie

$$|I_k^{(n)}| \leqslant \frac{\text{const}}{(1+k)^{n+2}}, \quad k \geqslant 0. \tag{A.16}$$

A.6

Rozważmy teraz funkcję s_k zdefiniowaną w (6.12). Pokażemy poniżej że jest to gładka funkcja, dla której zachodzi następujące oszacowanie dla n-tej pochodnej ($n = 0$ jest także dopuszczalne i oznacza brak pochodnej)

$$|s_k^{(n)}| \leqslant \text{const}(n)\,(1+k)^{-(n+\sigma)}, \quad k \geqslant 0. \tag{A.17}$$

Zauważmy najpierw, że w otoczeniu zera wyrażenie $|s_k| = |M_k - iN_k|^{-1}$ jest ograniczone przez stałą, gdyż $M_0 > 0$. Poza tym otoczeniem, korzystając z (5.3) dla przypadku Dirichleta oraz z (A.13a) dla przypadku Neumanna, mamy

$$|M_k - iN_k|^{-1} \leqslant |N_k|^{-1} \leqslant \text{const}\,k^{-\sigma}.$$

Dla $k \geqslant 0$ zachodzi zatem

$$|s_k| = \frac{1}{|M_k - iN_k|} \leqslant \frac{\text{const}}{(1+k)^\sigma},$$

co na mocy gładkości funkcji M_k i N_k wystarcza do gładkości s_k i jednocześnie dowodzi (A.17) dla $n = 0$. W celu udowodnienia (A.17) dla pozostałych wartości n zauważmy najpierw, że $|N_k^{(n)}| \leqslant \text{const}(1+k)^{-(n+1)}$, dla $n \geqslant 1$, poza $n = 1$ w przypadku Dirichleta kiedy mamy $|N_k'| \leqslant \text{const}$. Ostatnie szacowanie jest trywialne, natomiast poprzednie dostajemy z (A.16) oraz z obserwacji, iż $|N_k^{(n)}| \leqslant \text{const}|I_k^{(n-1)}| + \text{const}\,k|I_k^{(n)}|$. W poniższych rozważaniach niech $\mathscr{W}_k$ oznacza pewną funkcję (za każdym razem może to być inna funkcja), która wraz z jej dowolnymi pochodnymi szacuje się przez funkcję Schwartza. Mamy

$$s_k' = -\frac{M_k' - iN_k'}{(M_k - iN_k)^2} = \mathscr{W}_k + i\frac{N_k'}{(M_k - iN_k)^2},$$

zatem

$$|s'_k| \leqslant \frac{\text{const}}{(1+k)^{1+\sigma}}\,.$$

Jak łatwo sprawdzić dla $j, \ell \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$\frac{d}{dk}\frac{N_k^{(j)}}{(M_k - iN_k)^\ell} = \mathscr{W}_k + \frac{N_k^{(j+1)}}{(M_k - iN_k)^\ell} + i\ell\frac{N_k^{(j)}}{(M_k - iN_k)^\ell}\,\frac{N'_k}{M_k - iN_k}\,.$$

Zatem kolejne pochodne z funkcji s'_k albo generują człony oznaczane tutaj przez $\mathscr{W}_k$ (są to wyrażenia które m.in. są proporcjonalne do pochodnych z funkcji M_k) albo prowadzą do zastąpienia pochodnej N_k znajdującej się w liczniku przez pochodną o jedną wyższą lub też — pomijamy kwestię stałych multiplikatywnych — prowadzą do przemnożenia wcześniej występującego członu przez wyrażenie $N'_k(M_k - iN_k)^{-1}$. Dwie ostatnie operacje, zarówno dla przypadku Dirichleta jak i Neumanna, dają przy szacowaniu co najmniej czynnik $\text{const}(1+k)^{-1}$, co kończy dowód szacowania (A.17).

Z (A.17) wynika, że $q_k \equiv s_k M_k$ i wszystkie jej pochodne szacują się na moduł przez funkcje Schwartza. Zauważmy dodatkowo, że dla $k > 0$ zachodzi

$$|q_k| < 1 \qquad \text{(D,N)}\,. \tag{A.18}$$

Ponieważ $|q_k|^2 = \frac{M_k^2}{M_k^2 + N_k^2}$, do dowodu tej własności wystarczy pokazać, że N_k^2 jest ściśle dodatnia dla $k > 0$, co wynika wprost z definicji funkcji N_k (wzór (5.4)) oraz z założeń (5.2) i (5.3).

A.7

Udowodnimy teraz następujące oszacowanie, które zachodzi dla obu przypadków, Dirichleta i Neumanna:

$$\frac{1}{\left|1 - (q_k e^{iak})^2\right|} \leqslant \text{const}(a)\frac{1+k}{k}\,, \quad k \geqslant 0\,. \tag{A.19}$$

Dla $k = 0$ mamy $1 - (q_0)^2 = 0$, ale pochodna z mianownika

$$\frac{d}{dk}\left[1 - \left(q_k e^{iak}\right)^2\right]\bigg|_{k=0} = -2i\left(a - \frac{I_0}{\pi M_0} + \frac{1+\sigma}{2\pi M_0}\right) \neq 0$$

dzięki (A.12), co dowodzi zachowania w otoczeniu zera. Poza tym otoczeniem, korzystając głównie z (A.13), dostajemy

$$\frac{1}{\left|1 - (q_k e^{iak})^2\right|} \leqslant \frac{1}{1 - |q_k|^2} = \frac{M_k^2 + N_k^2}{N_k^2} \leqslant \text{const}\,,$$

Zauważmy dodatkowo, że dla $k \geqslant 0$ zachodzi

$$\frac{1}{1-|q_k|^2} \leqslant \mathrm{const}\frac{1+k^m}{k^m}\,, \qquad \begin{cases} m=2\,, & \text{(D)} \\ m \geqslant 2\,, & \text{(N)} \end{cases} \tag{A.20}$$

gdzie przypadek Neumanna zależy od zachowania I_k w zerze (jeśli $I_0 \neq 0$ to $m = 2$, natomiast $m = 2 + 4r$ gdy $I_k \underset{k\to 0^+}{\simeq} k^{2r}$, $r \geqslant 1$ jako że I_k jest parzysta — por. (B.9)).

A.8

Rozważamy tutaj kwestię zespolonego logarytmu pojawiającego się w (8.12), jego gałęzi oraz wyboru argumentu głównego. Wyliczamy następnie granicę argumentu występującego w (8.13).

Dla $w \in \mathbb{C}$ takich że $|w| < 1$ rozważmy

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{w^n}{n} = -\ln(1-w)\,.$$

Lewa strona tej równości jest jednoznacznie zdefiniowana na obszarze dopuszczalnych w. Co więcej, widzimy że dla $0 < w < 1$ lewa strona jest liczbą dodatnią (w szczególności rzeczywistą), zatem jako gałąź logarytmu musimy wybrać gałąź (wartość) główną. Zmienna $1 - w$ przyjmuje swoje wartości w kole o środku w 1 i jednostkowym promieniu, zatem $\mathrm{Arg}(1-w) \in \big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big)$.

Wyznaczmy teraz $\lim_{\epsilon\to 0^+} \mathrm{Arg}\,\big(1-\tilde{q}_\epsilon^2 e^{2i\tilde{a}\epsilon}\big)$. W tym celu zauważmy najpierw, że

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \mathrm{Arg}\,\big(1-\tilde{q}_\epsilon^2 e^{2i\tilde{a}\epsilon}\big) = \lim_{\epsilon\to 0^+} \mathrm{Arg}\,\big[\big(1-\tilde{q}_\epsilon e^{i\tilde{a}\epsilon}\big)\big(1+\tilde{q}_\epsilon e^{i\tilde{a}\epsilon}\big)\big] = \lim_{\epsilon\to 0^+} \mathrm{Arg}\,\big(1-\tilde{q}_\epsilon e^{i\tilde{a}\epsilon}\big)\,,$$

gdyż $\lim_{\epsilon\to 0^+}\big(1+\tilde{q}_\epsilon e^{i\tilde{a}\epsilon}\big) = 2$. Rozpisując definicje odpowiednich funkcji z których implicite składa się powyższe wyrażenie którego argument główny chcemy wyznaczyć, dostajemy dla części rzeczywistej i urojonej

$$\mathfrak{Re}\,\big(1-\tilde{q}_\epsilon e^{i\tilde{a}\epsilon}\big) = \frac{\epsilon^2}{\mathscr{M}_\epsilon}\Big[\pi^{-1}I_\epsilon^2 + M_\epsilon^2\frac{1-\cos(a\epsilon)}{\epsilon^2} - \pi^{-1}M_\epsilon I_\epsilon\frac{\sin(a\epsilon)}{\epsilon}\Big]\,,$$

$$\mathfrak{Im}\,\big(1-\tilde{q}_\epsilon e^{i\tilde{a}\epsilon}\big) = -\frac{\epsilon M_\epsilon}{\mathscr{M}_\epsilon}\Big[M_\epsilon\frac{\sin(a\epsilon)}{\epsilon} - \pi^{-1}I_\epsilon\cos(a\epsilon)\Big]\,,$$

gdzie

$$\mathscr{M}_\epsilon \equiv M_\epsilon^2 + \epsilon^2\pi^{-2}I_\epsilon^2\,.$$

Dla części rzeczywistej wystarczy zauważyć, że w granicy zeruje się ona co najmniej jak ϵ^2. Dla części urojonej mamy

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \epsilon^{-1}\,\mathfrak{Im}\,\big(1-\tilde{q}_\epsilon e^{i\tilde{a}\epsilon}\big) = -M_0^{-1}\big(aM_0 - \pi^{-1}I_0\big) < 0\,,$$

gdzie przy ostatniej nierówności skorzystaliśmy z (A.12). Widzimy więc, że dla odpowiednio małych ϵ część urojona jest ujemna oraz w granicy $\epsilon \to 0^+$ zeruje się liniowo. Na podstawie wcześniejszych rozważań dostajemy więc

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \operatorname{Arg}\left(1 - \tilde{q}_\epsilon^2 e^{2i\tilde{a}\epsilon}\right) = -\frac{\pi}{2}\,.$$

A.9

Pokażemy tutaj, że dla ograniczonych operatorów na przestrzeni Hilberta, jeśli A_n są ograniczone na moduł niezależnie od n, to słaba zbieżność A_n do A na gęstym podzbiorze, oznaczmy go przez $\mathscr{D}$, implikuje zbieżność dla dowolnych elementów przestrzeni. Oznaczmy $\Delta A_n \equiv A_n - A$.

Zakładamy, że dla $\varphi, \eta \in \mathscr{D}$ zachodzi $\lim_{n\to\infty}(\varphi, \Delta A_n \eta) = 0$ oraz że niezależnie od n mamy oszacowanie $\|A_n\| \leqslant \text{const}$. Niech teraz φ, η będą dowolnymi elementami przestrzeni Hilberta, a φ_m, η_m elementami $\mathscr{D}$, dla których zachodzi $\lim_{m\to\infty} \varphi_m = \varphi$ i podobnie dla η_m i η (istnienie takich φ_m i η_m zapewnia założenie o gęstości $\mathscr{D}$). Oznaczmy dodatkowo $\Delta\varphi_m \equiv \varphi - \varphi_m$ i podobnie dla $\Delta\eta_m$. Mamy

$$\begin{aligned}
|(\varphi, \Delta A_n \eta)| &= \big|(\varphi - \varphi_m + \varphi_m, \Delta A_n(\eta - \eta_m + \eta_m))\big| \\
&\leqslant \Big[\|\Delta\varphi_m\|\|\Delta A_n\|\|\Delta\eta_m\| + \|\Delta\varphi_m\|\|\Delta A_n\|\|\eta_m\| + \|\varphi_m\|\|\Delta A_n\|\|\Delta\eta_m\| \\
&\qquad + |(\varphi_m, \Delta A_n \eta_m)|\Big] \leqslant \text{const}(\|\Delta\varphi_m\| + \|\Delta\eta_m\|) + |(\varphi_m, \Delta A_n \eta_m)|\,.
\end{aligned}$$

Korzystając z założeń dostajemy, że dla odpowiednio dużych n i m wyrażenie w ostatniej linijce powyżej jest dowolnie małe, co kończy dowód.

Dodatek B

Pewne szacowania

W tym dodatku dowodzimy pewnych oszacowań, z których korzystamy w rozdziale 8 przy liczeniu energii (operacje (i) – (iii)) oraz siły. W całym obecnym dodatku prim w przypadku funkcji jednej zmiennej oznacza pochodną po argumencie, a w przypadku funkcji dwóch zmiennych oznacza pochodną po zmiennej k. $\mathscr{S}_k$ oznacza pewną funkcję Schwartza zmiennej k (za każdym razem może to być inna funkcja). Dla $j \in \{2,3\}$, $\mathbb{N}_j$ oznacza zbiór liczb naturalnych nie mniejszych niż j. Rozważamy jednocześnie zarówno przypadek Dirichleta jak i Neumanna, chyba że zaznaczymy inaczej. Równocześnie przypominamy, że niektóre funkcje (przede wszystkim $\chi(k,p)$, s_k, q_k, $\tilde{q}_k$) mają inną postać dla każdego z tych przypadków. Pracujemy tutaj także przy założeniach (3.3), (3.4), (5.2) i (5.3), chyba że wprost przyjmiemy co innego.

Dla jasności wywodu zdefiniujmy jawnie szereg wyrażeń.

$$E_1(a) \equiv \mathfrak{Re} \sum_{n\in 2\mathbb{N}} in^{-3} \int\limits_{\mathbb{R}^2_+} M_p \left[\Big(\chi(k,p) s_k\, \tilde{q}_k^n \Big)''' - \chi'''(k,p) s_k\, \tilde{q}_k^n \right] e^{in\tilde{a}k} dk\, dp\,,$$

$$E_2(a) \equiv \mathfrak{Re} \sum_{n\in 2\mathbb{N}} in^{-3} \int\limits_{\mathbb{R}^2_+ \setminus \Omega} M_p\, \chi'''(k,p) s_k\, q_k^n\, e^{inak} dk\, dp\,,$$

$$E_3(a) \equiv \mathfrak{Re} \sum_{n\in 2\mathbb{N}} in^{-3} \int\limits_{\Omega} \chi'''(k,p) \Big[M_p s_k\, q_k^n - 1 \Big] e^{inak} dk\, dp\,,$$

$$E_4(a) \equiv \mathfrak{Re} \sum_{n\in 2\mathbb{N}} in^{-3} \left\{ \int\limits_{\Omega} \chi'''(k,p) e^{inak} dk\, dp - \lim_{a'\to\infty} \int\limits_{\Omega} \chi'''(k,p) e^{ina'k} dk\, dp \right\} ,$$

$$E_5(a) \equiv \mathfrak{Re} \sum_{n\in 2\mathbb{N}-1} in^{-3} \int\limits_{\mathbb{R}^2_+} M_p \cos(ap) \left[\Big(\chi(k,p) s_k\, \tilde{q}_k^n \Big)''' \right.$$
$$\left. - \chi'''(k,p) s_k\, \tilde{q}_k^n \right] e^{in\tilde{a}k} dk\, dp\,,$$

$$E_6(a) \equiv \mathfrak{Re} \sum_{n\in 2\mathbb{N}-1} in^{-3} \int\limits_{\mathbb{R}^2_+\setminus\Omega} M_p \cos(ap)\, \chi'''(k,p) s_k\, q_k^n\, e^{inak} dk\, dp\,,$$

$$E_7(a) \equiv \mathfrak{Re} \sum_{n\in 2\mathbb{N}-1} in^{-3} \int\limits_{\Omega} \chi'''(k,p) \cos(ap) \Big[M_p s_k\, q_k^n - 1\Big] e^{inak} dk\, dp\,,$$

$$E_8(a) \equiv \mathfrak{Re} \sum_{n\in 2\mathbb{N}-1} in^{-3} \left\{ \int\limits_{\Omega} \chi'''(k,p) \cos(ap) e^{inak} dk\, dp \right.$$
$$\left. - \lim_{a'\to\infty} \int\limits_{\Omega} \chi'''(k,p) \cos(a'p) e^{ina'k} dk\, dp \right\}\,,$$

gdzie $\Omega = \{k, p > 0, k + p \leqslant 1\}$ (jak w rozdziale 8). Dla uproszczenia często będzimy pomijać jawny zapis argumentu funkcji E_j, $j = 1, \ldots, 8$.

E_1, E_2, E_3, E_4 pomnożone przez $-(3\pi^3\tilde{a}^3)^{-1}$ oraz E_5, E_6, E_7, E_8 pomnożone przez $(3\pi^3\tilde{a}^3)^{-1}$ są wyrażeniami, które — przy wyznaczaniu energii w rozdziale 8 — przyjęliśmy iż należą do $o(a^{-3})$. Przy wyznaczaniu siły w podrozdziale 8.3 przyjęliśmy dodatkowo, że pochodna po a z tych wyrażeń należy do $o(a^{-4})$. W niniejszym dodatku uzasadnimy te czynności, do czego wystarczy pokazać że

$$E_j(a) \in o(a^0) \quad \text{oraz} \quad \frac{d}{da} E_j(a) \in o(a^{-1}), \quad j = 1, \ldots, 8\,.$$

Zauważmy, że w przypadku Neumanna granica $\lim_{\epsilon\to 0^+}$ we wzorze (8.19) może być wykonana jeszcze przed operacją (i) ze strony 49, dlatego powyżej zdefiniowana wielkość E_1 dotyczy także przypadku Neumanna. Możliwość wykonania wspomnianej granicy wynika z oszacowań w B.1 (i) poniżej, które będą obowiązywały na całym $\mathbb{R}_+$. W podrozdziale 8.2 usunęliśmy tę granicę dopiero po operacji (i), gdyż wtedy było to prostsze do wykazania, a nie chcieliśmy pozostawić uzasadnienia tej czynności aż do niniejszego dodatku.

Podstawowym narzędziem tego dodatku będzie następujący prosty lemat. Niech c_n, dla $n \in \mathscr{N} \subseteq \mathbb{N}$, będą zespolonymi funkcjami mierzalnymi na $D \subseteq \mathbb{R}$. Jeśli $\sum_{n\in\mathscr{N}} |c_n(k)|$ jest całkowalna na D, to

$$\lim_{a\to\infty} \sum_{n\in\mathscr{N}} \int\limits_D c_n(k) e^{inak} dk = 0\,. \tag{B.1}$$

Dowód. Korzystając z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej i z założenia lematu dostajemy

$$\sum_{n\in\mathscr{N}} \int\limits_D |c_n(k)| dk = \int\limits_D \sum_{n\in\mathscr{N}} |c_n(k)| dk < \infty\,.$$

Mamy więc, że $\int_D |c_n(k)| dk \in \ell^1(\mathscr{N})$. Korzystając znowu ze wspomnianego twierdzenia Lebesgue'a otrzymujemy

$$\lim_{a\to\infty}\sum_{n\in\mathscr{N}}\int_D c_n(k)e^{inak}dk=\sum_{n\in\mathscr{N}}\lim_{a\to\infty}\int_D c_n(k)e^{inak}dk\,.$$

Z założenia trywialnie wynika, iż dla każdego $n\in\mathscr{N}$ zachodzi $c_n(\cdot)\in L^1(D)$, a stąd na mocy lematu Riemanna-Lebesgue'a dostajemy

$$\lim_{a\to\infty}\int_D c_n(k)e^{inak}dk=0\,,$$

co kończy dowód.

B.1

W tej części dowodzimy, że

$$E_j(a)\in o(a^0),\quad j=1,\ldots,8\,. \tag{B.2}$$

Zauważmy, że dla $j=4,8$ dostajemy trywialnie tę własność (granice występujące w E_4 i E_8 są skończone, wyliczamy je w rozdziale 8). Dla pozostałych E_j, na podstawie lematu (B.1), aby udowodnić (B.2) wystarczy sprawdzić czy odpowiednie funkcje spełniają założenie tego lematu. Będziemy rozważać pełne wyrażenia a nie tylko część rzeczywistą (zob. definicje E_j), co oczywiście implikuje odpowiednie zachowanie w szczególności dla części rzeczywistej (pomijamy także czynnik multiplikatywny i).

(i) $j=1$
Dla tego przypadku mamy rozważyć funkcje

$$c_n(k)=n^{-3}e^{-in\alpha k}\int_0^\infty M_p\Big[\big(\chi(k,p)s_k\tilde{q}_k^n\big)'''-\chi'''(k,p)s_k\tilde{q}_k^n\Big]\,dp\,. \tag{B.3}$$

Korzystając z własności funkcji s_k i q_k przedstawionych w A.6, po stosunkowo prostych przekształceniach, otrzymujemy (przypominamy że $|\tilde{q}_k|=|q_k|$)

$$\begin{aligned}n^{-3}\Big|\big(\chi(k,p)s_k\tilde{q}_k^n\big)'''-\chi'''(k,p)s_k\tilde{q}_k^n\Big|&\leqslant(n^{-3}+n^{-2})\mathscr{S}_k|q_k|^{n-1}\sum_{j=0}^{2}|\partial_k^j\chi(k,p)|\\+n^{-2}(n-1)\mathscr{S}_k|q_k|^{n-2}\sum_{j=0}^{1}|\partial_k^j\chi(k,p)|&+n^{-2}(n-1)(n-2)|\tilde{q}_k'|^3|q_k|^{n-3}|s_k\chi(k,p)|\,,\end{aligned} \tag{B.4}$$

gdzie potęga $n-3$ (i cały ostatni człon-składnik powyżej) występuje tylko dla $n\geqslant 3$. W wyrazie proporcjonalnym do n^{-3} potęga $|q_k|$ jest o jeden niższa gdyż jedno $|q_k|$ oszacowaliśmy przez $\mathscr{S}_k$. Pochodne $|\tilde{q}_k'|$ włączyliśmy do $\mathscr{S}_k$ wszędzie oprócz ostatniego członu. Jak łatwo sprawdzić zachodzi także

$$|\partial_k^j \chi(k,p)| \leqslant \mathrm{const}\, \frac{k^{\frac{(2-j)(1+\sigma)}{2}} p^{\frac{(2-j)(1-\sigma)}{2}}}{k+p}\,, \qquad j=0,1,2\,, \tag{B.5}$$

a stąd mamy dla $j=0,1,2$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty M_p |\partial_k^j \chi(k,p)| dp &\leqslant \mathrm{const}\, k^{\frac{(2-j)(1+\sigma)}{2}} \left[\int_0^1 \frac{dp}{k+p} + \frac{1}{1+k}\int_1^\infty M_p\, p^{\frac{(2-j)(1-\sigma)}{2}} dp\right] \\ &\leqslant \mathrm{const}\, k^{\frac{(2-j)(1+\sigma)}{2}} \left[\ln(1+k^{-1}) + \frac{1}{1+k}\right] \leqslant \mathrm{const}\, k^{\frac{(2-j)(1+\sigma)}{2}} \ln(1+k^{-1})\,.\end{aligned} \tag{B.6}$$

Korzystając z powyższych oszacowań i z (A.17), wciągając czynnik $k^{\frac{(2-j)(1+\sigma)}{2}}$ do $\mathscr{S}_k$ (dla wszystkich członów poza ostatnim poniżej) oraz pamiętając że $|q_k| \leqslant 1$ dostajemy

$$\begin{aligned}|c_n(k)| \leqslant \ln\left(1+k^{-1}\right) \Big[\mathscr{S}_k \Big(n^{-3} + n^{-2} + n^{-1}\big(|q_k|^{n-2} + |q_k|^{n-3}\big)\Big) \\ + \mathrm{const} \frac{k^{1+\sigma}}{(1+k)^\sigma} |\tilde{q}_k'|^3 |q_k|^{n-3}\Big]\,.\end{aligned} \tag{B.7}$$

Z powyższego oszacowania widać już, że skończona suma z $c_n(k)$ jest funkcją całkowalną (ostatni człon w nawiasie kwadratowym zachowuje się w nieskończoności jak funkcja Schwartza, dzięki np. $\tilde{q}_k'$). Zatem, jako że

$$\sum_{n\in 2\mathbb{N}_3} n^{-1}\big(|q_k|^{n-2} + |q_k|^{n-3}\big) \leqslant \mathrm{const} \sum_{n\in 2\mathbb{N}} n^{-1} |q_k|^n \leqslant \mathrm{const} \ln \frac{1}{1-|q_k|^2}\,,$$

dostajemy

$$\sum_{n\in 2\mathbb{N}_3} |c_n(k)| \leqslant \ln\left(1+k^{-1}\right) \left[\mathscr{S}_k + \mathscr{S}_k \ln\frac{1}{1-|q_k|^2} + \mathrm{const} \frac{k^{1+\sigma}}{(1+k)^\sigma} \frac{|\tilde{q}_k'|^3}{1-|q_k|^2}\right]. \tag{B.8}$$

Dla przypadku Dirichleta oraz Neumanna z $I_0 \neq 0$ całkowalność prawej strony powyższej nierówności po całym $\mathbb{R}_+$ wynika już z oszacowania (A.20), z faktu że $\tilde{q}_k' \underset{k\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ (zob. uwagi na początku podrozdziałów 8.1 i 8.2) co najmniej liniowo jako że $\tilde{q}_k$ jest gładka oraz z szacowania $|\tilde{q}_k'| \leqslant \mathscr{S}_k$ (por. dodatek A.6). Przypadek Neumanna z $I_0 = 0$ poza otoczeniem zera traktujemy jak przed chwilą przypadek z $I_0 \neq 0$, pozostaje więc sprawdzić tylko zachowanie w (dodatnim) otoczeniu zera. Jeśli $I_k \underset{k\to 0^+}{\simeq} k^{2r}$, $r \geqslant 1$ (I_k jest parzysta), to wtedy (teraz gdy $I_0 = 0$ mamy $\tilde{q}_k = q_k$)

$$q'_k = -i\frac{M'_k N_k - M_k N'_k}{(M_k - iN_k)^2} \underset{k\to 0^+}{\simeq} k^{2r} \quad \text{oraz} \quad 1 - |q_k|^2 = \frac{N_k^2}{M_k^2 + N_k^2} \underset{k\to 0^+}{\simeq} k^{4r+2}\,, \tag{B.9}$$

zatem

$$\frac{|q'_k|^3}{1 - |q_k|^2} \underset{k\to 0^+}{\simeq} k^{2r-2}\,, \quad r \geqslant 1\,. \tag{B.10}$$

Również w tym przypadku dostajemy więc, że prawa strona (B.8) należy do $L^1(\mathbb{R}_+)$. Ciąg funkcji (B.3) rzeczywiście zatem spełnia założenie lematu (B.1), co na jego mocy dowodzi (B.2) dla $j = 1$.

(ii) $j = 2$
Analogicznie jak wcześniej, korzystając z lematu oraz z oszacowania

$$|M_p \chi'''(k,p) s_k q_k^n| \leqslant \frac{\text{const}}{(k+p)^2} M_p \mathscr{S}_k \in L^1(\mathbb{R}_+^2 \setminus \Omega)\,,$$

dowodzimy (B.2) dla $j = 2$.

(iii) $j = 3$
Korzystając z twierdzenia Taylora mamy

$$M_p = M_0 + R_1(p), \quad |R_1(p)| \leqslant p \sup_{0<\xi<p} |M'_\xi|\,,$$

oraz

$$s_k q_k^n = M_0^{-1} + R_2(k), \quad |R_2(k)| \leqslant k \sup_{0<\eta<k} |(s_\eta q_\eta^n)'|\,.$$

Zachodzi

$$\sup_{0<\xi<1} |M'_\xi| \leqslant \text{const}\,, \qquad \sup_{0<\eta<1} |(s_\eta q_\eta^n)'| \leqslant \text{const}(1+n)\,,$$

dostajemy więc

$$\begin{aligned} |M_p s_k q_k^n - 1| &= M_0^{-1}|R_1(p)| + M_0|R_2(k)| + |R_1(p)||R_2(k)| \\ &\leqslant \text{const}\, p + \text{const}(1+n)k + \text{const}(1+n)pk\,. \end{aligned} \tag{B.11}$$

Korzystając dodatkowo z faktu, że $k\chi'''(k,p), p\chi'''(k,p)$ są całkowalne na Ω, dostajemy już, że założenie lematu jest spełnione również w tym przypadku, co kończy dowód (B.2) dla $j = 3$.

(iv) $j = 5, 6, 7$
Stosujemy tutaj następującą modyfikację lematu (B.1).

Niech c_n, dla $n \in \mathscr{N} \subseteq \mathbb{N}$, będą zespolonymi funkcjami mierzalnymi na zbiorze $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Jeśli $\sum_{n\in\mathscr{N}} |c_n(k,p)|$ jest całkowalna na D, to

$$\lim_{a\to\infty} \sum_{n\in\mathscr{N}} \int_D c_n(k,p) e^{inak} e^{\pm iap} dk\, dp = 0\,. \tag{B.12}$$

Analiza funkcji E_j dla $j = 5,6,7$, korzystając z powyższej modyfikacji lematu, przebiega analogicznie do tej przeprowadzonej wcześniej dla $j = 1,2,3$.

B.2

W tej części dowodzimy, iż

$$\frac{d}{da} E_j(a) \in o(a^{-1}), \quad j = 1,\dots,8\,. \tag{B.13}$$

Zauważmy najpierw, że dla dowolnej funkcji (klasy $\mathcal{C}^1$) zależnej od iloczynu dwóch zmiennych, $f = f(a\xi)$, zachodzi

$$\partial_a f(a\xi) = \frac{1}{a} \xi \partial_\xi f(a\xi)\,. \tag{B.14}$$

Przedstawimy najpierw ogólny schemat. Jeśli dla pewnej funkcji F

$$E_j(a) = \sum_n \int F(n,k,p) e^{inak} dk\, dp\,,$$

to korzystając z (B.14) dostajemy (można pokazać na podstawie oszacowań z niniejszego dodatku, że wejście z pochodną pod znak sumy i całki poniżej jest uprawnione)

$$\frac{d}{da} E_j(a) = \frac{1}{a} \sum_n \int F(n,k,p) k \partial_k e^{inak} dk\, dp\,.$$

Całkując przez części (względem zmiennej k) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{d}{da} E_j(a) &= \frac{1}{a} \sum_n \int \{\text{wyr.brzeg.}\} dp - \frac{1}{a} \sum_n \int [F(n,k,p) + kF'(n,k,p)] e^{inak} dk\, dp \\ &= \frac{1}{a} \sum_n \int \{\text{wyr.brzeg.}\} dp - \frac{1}{a} E_j(a) - \frac{1}{a} \sum_n \int kF'(n,k,p) e^{inak} dk\, dp\,. \end{aligned} \tag{B.15}$$

(i) $j = 1$

W tym przypadku nieco modyfikujemy powyższy schemat.

$$\frac{d}{da} E_1(a) = \frac{d}{d\tilde{a}} E_1(a) = \frac{1}{\tilde{a}} \mathfrak{Re} \sum_{n\in 2\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^2_+} F(n,k,p) k \partial_k e^{in\tilde{a}k} dk\, dp\,,$$

gdzie w tym przypadku

$$F(n,k,p) = in^{-3}M_p\left[\Big(\chi(k,p)s_k\,\tilde{q}_k^n\Big)''' - \chi'''(k,p)s_k\,\tilde{q}_k^n\right].$$

Całkujemy teraz przez części względem zmiennej k (jak w schemacie). Wyrazy brzegowe w tym przypadku znikają, dostajemy więc

$$\frac{d}{da}E_1(a) = -\frac{1}{\tilde{a}}E_1(a) - \frac{1}{\tilde{a}}\,\mathfrak{Re}\sum_{n\in 2\mathbb{N}}\int\limits_{\mathbb{R}_+^2} kF'(n,k,p)e^{in\tilde{a}k}dk\,dp\,.$$

Dzięki (B.2) otrzymujemy już, że $\tilde{a}^{-1}E_1(a) \in o(a^{-1})$, a do drugiego członu stosujemy lemat (B.1). Postępujemy analogicznie do części B.1. Wystarczy sprawdzić, czy funkcje

$$c_n(k) = in^{-3}e^{-in\alpha k}\int\limits_0^\infty M_p k\partial_k\Big[\big(\chi(k,p)s_k\tilde{q}_k^n\big)''' - \chi'''(k,p)s_k\tilde{q}_k^n\Big]\,dp \tag{B.16}$$

spełniają założenie lematu. Podobnie jak w części (i) w B.1, po pewnych przekształceniach dostajemy tutaj

$$\begin{aligned} n^{-3}k\Big|\partial_k\Big[\big(\chi(k,p)s_k\tilde{q}_k^n\big)''' - \chi'''(k,p)s_k\tilde{q}_k^n\Big]\Big| &\leqslant (n^{-3}+n^{-2})k\mathscr{S}_k\sum_{j=0}^{3}|\partial_k^j\chi(k,p)| \\ &+ n^{-1}k\mathscr{S}_k\Big[|q_k|^{n-2}+|q_k|^{n-3}+|q_k|^{n-4}\Big]\sum_{j=0}^{2}|\partial_k^j\chi(k,p)| \\ &+ \mathrm{const}\,k\Big[|q_k|^{n-3}\Big(|\tilde{q}_k'|^3\big|\big(s_k\chi(k,p)\big)'\big| + |\tilde{q}_k'|^2|\tilde{q}_k''||s_k\chi(k,p)|\Big) \\ &+ |q_k|^{n-4}|\tilde{q}_k'|^4|s_k\chi(k,p)|\Big] + nk|q_k|^{n-4}|\tilde{q}_k'|^4|s_k\chi(k,p)|\,, \end{aligned} \tag{B.17}$$

gdzie potęgi $n-3$ i $n-4$ (i całe człony w których występują) obecne są tylko dla $n \geqslant 4$. Oprócz (B.6) dla $j = 0,1,2$, mamy teraz także

$$\int\limits_0^\infty M_p|\partial_k^3\chi(k,p)|dp \leqslant \frac{\mathrm{const}}{k(1+k)}\,. \tag{B.18}$$

Korzystając z tych oszacowań po wycałkowaniu po p i wysumowaniu po n otrzymujemy (skończona suma prawej strony (B.17) jest całkowalna na całym $\mathbb{R}_+$

możemy więc ograniczyć się do sumy po $n \in 2\mathbb{N}_3$)

$$\sum_{n\in 2\mathbb{N}_3} |c_n(k)| \leqslant \mathscr{S}_k\Big[1+\ln(1+k^{-1})\Big(1+\ln\frac{1}{1-|q_k|^2}\Big)\Big]$$
$$+\,\mathrm{const}\frac{k\ln(1+k^{-1})}{1-|q_k|^2}\Big[|\tilde{q}_k'|^3\Big(|s_k'|k^{1+\sigma}+|s_k|k^{\frac{1+\sigma}{2}}\Big)+\Big(|\tilde{q}_k'|^2|\tilde{q}_k''|+|\tilde{q}_k'|^4\Big)|s_k|k^{1+\sigma}\Big]$$
$$+\,\mathrm{const}\frac{k\ln(1+k^{-1})}{\big(1-|q_k|^2\big)^2}|\tilde{q}_k'|^4|s_k|k^{1+\sigma}\,. \tag{B.19}$$

Poza otoczeniem zera, przede wszystkim dzięki (A.20), jest to funkcja całkowalna. Pozostaje zbadać zachowanie w zerze. Dzięki zerowaniu się (co najmniej liniowo) $\tilde{q}_k'$ dla $k \to 0^+$ dostajemy również całkowalność na otoczeniu (dodatnim) zera dla przypadku Dirichleta oraz Neumanna z $I_0 \neq 0$. Jeśli, w przypadku Neumanna, $I_k \underset{k\to 0^+}{\simeq} k^{2r}$, $r \geqslant 1$, to korzystając z (B.9) i (B.10) dostajemy

$$\frac{k|q_k'|^3}{1-|q_k|^2} \underset{k\to 0^+}{\simeq} k^{2r-1}\,,\quad \frac{k|q_k'|^4}{1-|q_k|^2} \underset{k\to 0^+}{\simeq} k^{4r-1}\,,\quad \frac{k|q_k'|^2|q_k''|}{1-|q_k|^2} \underset{k\to 0^+}{\simeq} k^{2r-2}\,,\qquad r\geqslant 1\,. \tag{B.20}$$

Wyrażenie w drugiej linijce (B.19) jest więc całkowalne na otoczeniu zera (przypominamy, że teraz gdy $I_0 = 0$ zachodzi $\tilde{q}_k = q_k$). Jednak dla ostatniego członu w (B.19) mamy

$$\frac{k|q_k'|^4}{\big(1-|q_k|^2\big)^2} \underset{k\to 0^+}{\simeq} k^{-3}\,.$$

Ostatecznie więc stosujemy lemat do całego wyrażenia w (B.19) dla przypadku Dirichleta i Neumanna z $I_0 \neq 0$ oraz do członów z pierwszych dwóch linijek (B.19) dla przypadku Neumanna z $I_0 = 0$ i dostajemy w ten sposób, dla tych członów, żądany wynik. Pozostało rozważyć, jedynie dla przypadku Neumanna z $I_0 = 0$, wyrażenie które zostało oszacowane przez ostatni człon w (B.19). Przeanalizujemy je dokładniej jeszcze raz, gdyż jak się okaże powyższe szacowanie jest za grube, a rozważane wyrażenie jest jednak całkowalne również na otoczeniu zera. Wróćmy jeszcze przed wykonanie granicy z ϵ. Mamy

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\sum_{n\in 2\mathbb{N}_2} n\int_0^\infty\int_\epsilon^\infty M_p\chi(k,p)ks_kq_k^{n-4}{q_k'}^4e^{inak}dk\,dp$$
$$=\frac{1}{ia}\lim_{\epsilon\to 0^+}\sum_{n\in 2\mathbb{N}_0}\int_0^\infty\int_\epsilon^\infty M_p\chi(k,p)ks_kq_k^n{q_k'}^4\partial_k e^{i(n+4)ak}dk\,dp=\ldots \tag{B.21}$$

całkując przez części oraz korzystając z dokonanych już analiz członów „proporcjonalnych" do n^0 otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
\ldots = \frac{i}{a} \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{\epsilon s_\epsilon {q'_\epsilon}^4 e^{4ia\epsilon}}{1-q_\epsilon^2 e^{2ia\epsilon}} \int\limits_0^\infty M_p \chi(\epsilon,p) dp \\
+ \frac{i}{a} \lim_{\epsilon\to 0^+} \sum_{n\in 2\mathbb{N}} n \int\limits_0^\infty \int\limits_\epsilon^\infty M_p \chi(k,p) k s_k q_k^{n-1} {q'_k}^5 e^{i(n+4)ak} dk\, dp + o(a^{-1}) = \ldots
\end{aligned}
\tag{B.22}
$$

korzystając z (B.6) i (B.20) dostajemy znikanie wyrazu brzegowego (pierwszy człon powyżej); dla drugiego członu wykonujemy jeszcze raz analogiczne kroki jak przed chwilą i otrzymujemy

$$
\ldots = -a^{-2} \lim_{\epsilon\to 0^+} \sum_{n\in 2\mathbb{N}_0} n \int\limits_0^\infty \int\limits_\epsilon^\infty M_p \chi(k,p) k s_k q_k^n {q'_k}^6 e^{i(n+6)ak} dk\, dp + o(a^{-1})\,.
$$

Wyrażenie to rzeczywiście należy do $o(a^{-1})$, gdyż na podstawie omawianych już szacowań mamy

$$
\begin{aligned}
M_p \chi(k,p) k s_k {q'_k}^6 e^{6iak} \sum_{n\in 2\mathbb{N}_0} n q_k^n e^{inak} \\
= M_p \chi(k,p) k s_k {q'_k}^6 e^{6iak} \frac{2 q_k^2 e^{2iak}}{\left(1-q_k^2 e^{2iak}\right)^2} \in L^1(\mathbb{R}_+^2)\,.
\end{aligned}
$$

Udowodniliśmy zatem (B.13) dla $j=1$.

(ii) $j=2$

Postępujemy tutaj według schematu (B.15). Człon z wyrazem brzegowym wynosi tutaj

$$
-a^{-1}\,\mathfrak{Re} \sum_{n\in 2\mathbb{N}} i n^{-3} \int\limits_0^1 M_p (1-p) \chi'''(1-p,p) s_{1-p}\, q_{1-p}^n\, e^{ina(1-p)} dp\,.
$$

Ponieważ $\chi'''(1-p,p) \leqslant \mathrm{const}$, zatem korzystając z lematu (B.1) dostajemy iż powyższe wyrażenie należy do $o(a^{-1})$. Dzięki (B.2) mamy $a^{-1}E_2(a) \in o(a^{-1})$, pozostaje zatem rozważyć ostatni wyraz w (B.15), który tutaj przyjmuje postać

$$
-\frac{1}{a}\,\mathfrak{Re} \sum_{n\in 2\mathbb{N}} i n^{-3} \int\limits_{\mathbb{R}_+^2\setminus\Omega} M_p k \partial_k \left[\chi'''(k,p) s_k q_k^n\right] e^{inak} dk\, dp\,. \tag{B.23}
$$

Szacując

$$
\left|k\partial_k^4 \chi(k,p)\right| \leqslant \frac{\mathrm{const}}{(k+p)^2}\,, \quad \left|k\partial_k^3 \chi(k,p)\right| \leqslant \frac{\mathrm{const}}{k+p}\,, \tag{B.24}
$$

dostajemy

$$\Big|M_p k\partial_k[\chi'''(k,p)s_k q_k^n]\Big| \leqslant M_p \mathscr{S}_k[(k+p)^{-2}+(1+n)(k+p)^{-1}] \in L^1(\mathbb{R}^2_+ \setminus \Omega)\,.$$

Stosując więc do (B.23) lemat (B.1) otrzymujemy, że (B.23) należy do $o(a^{-1})$. W ten sposób wykazaliśmy (B.13) dla $j = 2$.

(iii) $j = 3$
Podobnie jak powyżej, stosując schemat (B.15) i analogiczne rozumowanie, dzięki lematowi (B.1), dla wyrazu brzegowego dostajemy

$$a^{-1}\,\mathfrak{Re}\sum_{n\in 2\mathbb{N}} in^{-3}\int_0^1 (1-p)\chi'''(1-p,p)[M_p s_{1-p}\,q_{1-p}^n - 1]e^{ina(1-p)}dp \in o(a^{-1})\,.$$

Dzięki (B.2) otrzymujemy także, że $a^{-1}E_3(a) \in o(a^{-1})$, pozostaje zatem rozważyć ostatni wyraz w (B.15), który teraz przyjmuje postać

$$-\frac{1}{a}\,\mathfrak{Re}\sum_{n\in 2\mathbb{N}} in^{-3}\int_\Omega k\partial_k\Big\{\chi'''(k,p)[M_p s_k q_k^n - 1]\Big\}e^{inak}dk\,dp\,. \tag{B.25}$$

Korzystając przede wszystkim z oszacowań (B.11) oraz (B.24) dostajemy, że wyrażenie (B.25) należy do $o(a^{-1})$. Wykazaliśmy zatem (B.13) dla $j = 3$.

(iv) $j = 4$
Oznaczmy dla wygody

$$C_1 \equiv \mathfrak{Re}\sum_{n\in 2\mathbb{N}} in^{-3}\lim_{a\to\infty}\int_\Omega \chi'''(k,p)e^{inak}dk\,dp\,,$$

gdzie, jak cały czas, $\Omega = \{k,p > 0, k+p \leqslant 1\}$. Korzystając z rozdziału 8 można wyliczyć tą stałą (wynosi ona $\frac{\pi}{8}\zeta(3)(3-\sigma)$), jednak jej konkretna wartość nie ma tutaj znaczenia. Mamy zatem

$$E_4(a) = -C_1 - \sum_{n\in 2\mathbb{N}} n^{-3}\int_\Omega \chi'''(k,p)\sin(nak)dk\,dp\,.$$

Tym razem stosujemy schemat (B.15) tylko częściowo, mianowicie tylko jego pierwszą linijkę. Podobnie jak wcześniej, człon z wyrazem brzegowym należy do $o(a^{-1})$. Pozostaje więc zbadać wyrażenie

$$a^{-1}\sum_{n\in 2\mathbb{N}} n^{-3}\int_\Omega \partial_k[k\,\chi'''(k,p)]\sin(nak)dk\,dp\,. \tag{B.26}$$

Korzystając z faktu, że

$$\chi'''(k,p) = 6\sigma\frac{p^2}{(k+p)^4} - 24\frac{p^3}{(k+p)^5}\,,$$

oraz

$$\partial_k \frac{kp^{m-2}}{(k+p)^m} = -(m-1)\frac{p^{m-2}}{(k+p)^m} + m\frac{p^{m-1}}{(k+p)^{m+1}}\,,$$

wyliczając poniższą całkę niemalże identycznie jak w rachunku wyznaczenia funkcji $C(n,\ell,a)$ z podrozdziału 8.1 (stosujemy taką samą zmianę zmiennych, korzystamy również ze wzoru (8.9)), dostajemy

$$\lim_{a\to\infty}\int\limits_{\Omega} \sin(nak)\,\partial_k \frac{kp^{m-2}}{(k+p)^m} dk\,dp = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^1 \big[-(m-1)t^{m-2} + mt^{m-1}\big]dt = 0\,.$$

Stąd wynika, że wyrażenie (B.26) należy do $o(a^{-1})$. Udowodniliśmy więc (B.13) dla $j=4$.

(v) $j=5$
Korzystając z (B.14) (dla $\xi = k$ oraz dla $\xi = p$) możemy zapisać

$$\frac{d}{da}E_5(a) = E'_{5,1}(a) + E'_{5,2}(a)\,,$$

gdzie dwa nowe oznaczenia mają postać

$$E'_{5,1}(a) = a^{-1}\,\mathfrak{Re}\sum_{n\in 2\mathbb{N}-1} in^{-3}\int\limits_{\mathbb{R}^2_+} pM_p\Big[\Big(\chi(k,p)s_k\,\tilde{q}^n_k\Big)''' - \chi'''(k,p)s_k\,\tilde{q}^n_k\Big] \\ \times e^{in\tilde{a}k}\,\partial_p\cos(ap)dk\,dp\,,$$

$$E'_{5,2}(a) = \tilde{a}^{-1}\,\mathfrak{Re}\sum_{n\in 2\mathbb{N}-1} in^{-3}\int\limits_{\mathbb{R}^2_+} M_pk\Big[\Big(\chi(k,p)s_k\,\tilde{q}^n_k\Big)''' - \chi'''(k,p)s_k\,\tilde{q}^n_k\Big] \\ \times \cos(ap)\partial_k e^{in\tilde{a}k}dk\,dp\,.$$

Rozważmy najpierw wyrażenie $E'_{5,1}(a)$. Całkując przez części — wyraz brzegowy znika — dostajemy

$$E'_{5,1}(a) = a^{-1}E_5(a) \\ + a^{-1}\,\mathfrak{Re}\sum_{n\in 2\mathbb{N}-1} in^{-3}\int\limits_{\mathbb{R}^2_+} p\,\partial_p\Big\{M_p\Big[\Big(\chi(k,p)s_k\,\tilde{q}^n_k\Big)''' - \chi'''(k,p)s_k\,\tilde{q}^n_k\Big]\Big\} \\ \times e^{in\tilde{a}k}\cos(ap)dk\,dp\,. \quad \text{(B.27)}$$

Na mocy (B.2) pierwszy człon (prawa strona pierwszej linijki powyżej) należy do $o(a^{-1})$. Dla drugiej linijki, gdy pochodna działa na M_p to powstałe tak wyrażenie również należy do $o(a^{-1})$ dzięki lematowi (B.12) oraz oszacowaniom z B.1 (i), które pozostają w mocy jeśli w miejsce funkcji M_p występującej w (B.6) wziąć pM_p' tutaj teraz obecne. Natomiast w przypadku gdy pochodna działa na nawias kwadratowy korzystamy z szacowania (por. (B.4))

$$\begin{aligned} n^{-3}\Big|p\,\partial_p\Big[\big(\chi(k,p)s_k\tilde{q}_k^n\big)''' - \chi'''(k,p)s_k\tilde{q}_k^n\Big]\Big| & \\ \leqslant (n^{-3}+n^{-2})\mathscr{S}_k|q_k|^{n-1}p\sum_{j=0}^{2}|\partial_p\partial_k^j\chi(k,p)| & \\ + n^{-2}(n-1)\mathscr{S}_k|q_k|^{n-2}p\sum_{j=0}^{1}|\partial_p\partial_k^j\chi(k,p)| & \\ + n^{-2}(n-1)(n-2)|\tilde{q}_k'|^3|q_k|^{n-3}p|s_k\partial_p\chi(k,p)|\,. & \qquad \text{(B.28)} \end{aligned}$$

Dla pochodnych z funkcji χ mamy

$$p|\partial_p\partial_k^j\chi(k,p)| \leqslant \text{const}\,\frac{k^{\frac{(2-j)(1+\sigma)}{2}}p^{\frac{(2-j)(1-\sigma)}{2}}}{k+p}\,, \qquad j=0,1,2\,. \qquad \text{(B.29)}$$

Widzimy zatem, że postępując analogicznie do B.1 (i), korzystając jednakże z lematu (B.12) zamiast (B.1), otrzymujemy wynik $E_{5,1}'(a) \in o(a^{-1})$.

Analiza wyrażenia $E_{5,2}'(a)$ przebiega analogicznie do tej z B.2 (i), korzystamy jednak teraz z lematu (B.12). Pokazaliśmy więc (B.13) dla $j=5$.

(vi) $j = 6, 7$
Bazując na rozważaniach z B.2 (ii) oraz uwzględniając odpowiednie zmiany, podobnie jak to miało miejsce w B.2 (v) w stosunku do B.2 (i), dostajemy (B.13) dla $j=6$.

Analogicznie postępujemy w stosunku do E_7. Korzystając dodatkowo z nowych oszacowań

$$|p\,\partial_p\partial_k^3\chi(k,p)| \leqslant \frac{\text{const}}{(k+p)^2}\,, \quad |p\,\partial_k^3\chi(k,p)| \leqslant \frac{\text{const}}{k+p}\,,$$

otrzymujemy (B.13) dla $j=7$.

(vii) $j = 8$
Analogicznie jak w B.1 (iv) zapiszmy $E_8(a)$ w postaci

$$E_8(a) = -C_2 - \sum_{n\in 2\mathbb{N}-1} n^{-3}\int_\Omega \chi'''(k,p)\cos(ap)\sin(nak)\,dk\,dp\,,$$

gdzie C_2 jest pewną stałą. Mamy zatem

$$\begin{aligned} \frac{d}{da}E_8(a) = -a^{-1}\sum_{n\in 2\mathbb{N}-1} n^{-3}\int_\Omega \chi'''(k,p)\big[&\sin(nak)\,p\,\partial_p\cos(ap) \\ &+ \cos(ap)\,k\,\partial_k\sin(nak)\big]\,dk\,dp\,. \end{aligned}$$

Całkując przez części — wyrazy brzegowe należą do $o(a^{-1})$ — dostajemy

$$\frac{d}{da}E_8(a) = a^{-1} \sum_{n\in 2\mathbb{N}-1} n^{-3} \int\limits_{\Omega} \Big[\partial_p\big(p\chi'''(k,p)\big) + \partial_k\big(k\chi'''(k,p)\big)\Big] \\ \times \cos(ap)\sin(nak)\,dk\,dp + o(a^{-1})\,.$$

Jak łatwo sprawdzić zachodzi

$$\partial_p\big(p\chi'''(k,p)\big) + \partial_k\big(k\chi'''(k,p)\big) = 0\,.$$

Pokazaliśmy więc (B.13) dla $j = 8$.

Dodatek C

Klasy modeli

Rozważane w tej pracy modele są określone przez funkcje f na które nałożyliśmy warunki (3.3) i (5.2) oraz dodatkowo warunek (5.3) dla przypadku Dirichleta i (3.4) dla Neumanna. W niniejszym dodatku dowodzimy niesprzeczności tych założeń znajdując pewne klasy funkcji f dla których są one spełnione. Rozważamy również kwestię klasy funkcji f dla których dodatkowo zachodzi $I_0 = 0$. Znaczenie tej dodatkowej własności zostało omówione w rozdziale 10.

Zauważmy najpierw, że wystarczy spełnić warunki (3.3) i (5.2), gdyż wtedy przemnażając funkcję f przez odpowiednią stałą czynimy już zadość pozostałym dwóm warunkom. Jako funkcję f przyjmujemy aktualnie dowolną niezerową, parzystą, gładką funkcję, o nośniku zawartym w $\langle -R, R\rangle$ ($R < b$), która dodatkowo jest nieujemna i malejąca dla dodatnich argumentów. Warunki (3.3) są teraz trywialnie spełnione. Dla rozważanej funkcji f mamy również (zob. A.1), że $\check{M}$ jest parzysta, ma zwarty nośnik oraz na podstawie (A.2) jest nieujemna. Ponadto dla $x \geqslant 0$ różniczkując (A.2) dostajemy

$$\sqrt{2\pi}\check{M}'(x) = -\int f(y)f'(x-y)dy = \int f'(y)f(x-y)dy$$
$$= \frac{1}{2}\int f'(y)[f(y-x)-f(y+x)]dy = \int_0^\infty \underbrace{f'(y)}_{\leqslant 0}\,[\underbrace{f(|y-x|)-f(y+x)}_{\geqslant 0}]dy \leqslant 0\,,$$

więc $\check{M}$ również jest malejąca dla dodatnich argumentów. Dla $k \neq 0$ zachodzi

$$\left|\int_0^\infty \check{M}'(x)\cos(kx)dx\right| < -\int_0^\infty \check{M}'(x)dx = \check{M}(0)\,,$$

zatem z (A.15) wynika że $I_k > 0$ dla $k \neq 0$, co kończy dowód (5.2).

Dla każdej funkcji f z klasy rozważanej powyżej, nieujemność $\check{M}$ implikuje że $I_0 > 0$ (zob. (A.14)). Rozszerzymy teraz rozważaną wcześniej klasę funkcji tak aby możliwe były także modele z $I_0 = 0$. Dla f należącej do wcześniej rozważanej klasy definiujemy nową funkcję

$$f^r(z) = f(z) - \mu\big(f(z-r) + f(z+r)\big)\,,$$

gdzie $\mu > 0$ i $r > R > 0$ są parametrami. Jak łatwo sprawdzić funkcja ta jest parzysta, ma zwarty nośnik oraz dla $\mu \neq \frac{1}{2}$ zachodzi $\widehat{f^r}(0) \neq 0$. Dla zmniejszenia jej nośnika można użyć np. skalowania z rozdziału 7. W ten sposób sprawdziliśmy dla tej funkcji warunki (3.3). Po prostych przekształceniach otrzymujemy

$$M_p^r \equiv |\widehat{f^r}(p)|^2 = \big(1 - 2\mu\cos(rp)\big)^2 M_p\,.$$

Chcemy teraz wyznaczyć

$$I_k^r = \int \frac{M_k^r - M_p^r}{p^2 - k^2}\,dp\,.$$

Z racji parzystości, zakładamy teraz $k \geqslant 0$. Mamy

$$\begin{aligned} M_k^r - M_p^r = {} & \big(1 - 2\mu\cos(rp)\big)^2 (M_k - M_p) \\ & + \big[\big(1 - 2\mu\cos(rk)\big)^2 - \big(1 - 2\mu\cos(rp)\big)^2\big] M_k\,. \end{aligned}$$

Korzystając z (A.6) dostajemy

$$\int \frac{M_k - M_p}{p^2 - k^2}\big(1 - 2\mu\cos(rp)\big)^2 dp = (1 + 2\mu^2) I_k\,.$$

Następnie, dzięki

$$\mathcal{P}\int \frac{\cos(rp)}{p^2 - k^2}\,dp = -\pi\frac{\sin(rk)}{k}\,,$$

otrzymujemy

$$\int \frac{\big(1 - 2\mu\cos(rk)\big)^2 - \big(1 - 2\mu\cos(rp)\big)^2}{p^2 - k^2}\,dp = -4\pi\mu\frac{\sin(rk)}{k}\big(1 - \mu\cos(rk)\big)\,.$$

Zbierając powyższe fakty dostajemy

$$I_k^r = (1 + 2\mu^2) I_k - 4\pi\mu\frac{\sin(rk)}{k}\big(1 - \mu\cos(rk)\big) M_k\,.$$

Dobieramy teraz μ tak aby $I_0^r = 0$. Dostajemy w ten sposób równanie kwadratowe na μ . Dla odpowiednio dużego r (np. $r = 3R$ jest już wystarczające), dzięki (A.12), wyróżnik tego równania jest dodatni i dostajemy rozwiązania

$$\mu_\pm = \frac{2\pi r M_0 \pm \sqrt{(2\pi r M_0 - I_0)^2 - 3I_0^2}}{4\pi r M_0 + 2I_0}\,.$$

Oba te rozwiązania są dodatnie. Wybieramy μ_-, które jest mniejsze od $\frac{1}{2}$ oraz dąży do zera dla r dążącego do nieskończoności. Będziemy dalej pomijać dolny indeks w μ_-, należy jednak pamiętać, że od teraz $\mu = \mu_-$. Skoro $I_0^r = 0$, mamy więc $(1 + 2\mu^2)I_0 = 4\pi r\mu(1-\mu)M_0$ i stąd możemy zapisać

$$I_k^r = 4\pi r\mu(1-\mu)M_0\frac{I_k}{I_0}\left[1 - \eta(rk)\xi(k)\right],$$

gdzie

$$\eta(rk) = \frac{\sin(rk)}{rk}\,\frac{1-\mu\cos(rk)}{1-\mu}\,, \quad \xi(k) = \frac{I_0 M_k}{M_0 I_k}\,.$$

Zauważmy, że $\eta(0) = 1 = \xi(0)$. Pozostało wykazać warunek (5.2), a więc że $I_k^r > 0$ dla $k \neq 0$, na co wystarcza pokazać że $\eta(rk)\xi(k) < 1$ dla $k \neq 0$. Rozważmy najpierw funkcję η. Oznaczmy $x = rk$ i załóżmy $x > 0$ jako że η jest parzysta. Dla $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ mamy na podstawie standardowych szacowań funkcji trygonometrycznych

$$\frac{\sin x}{x} \leqslant 1 - \frac{x^2}{3\pi} \quad \text{oraz} \quad \frac{1-\mu\cos x}{1-\mu} \leqslant 1 - \frac{\mu}{2(1-\mu)}x^2\,.$$

Niech r będzie na tyle duże aby zachodziło (zawsze jest to możliwe)

$$\frac{\mu}{2(1-\mu)} < \frac{1}{3\pi}\,. \tag{C.1}$$

Mamy wtedy $\eta(x) < 1$ (na rozważanym obszarze). Jak łatwo sprawdzić, dla $x > 0$ zachodzi

$$\eta(x) \leqslant \frac{1}{x}\,\frac{1+\mu}{1-\mu}\,. \tag{C.2}$$

Z tego oszacowania, korzystając z (C.1) dostajemy $\eta(x) < 1$ dla $x \geqslant \frac{\pi}{2}$.

Rozważmy teraz funkcję ξ, znowu z parzystości, dla dodatnich argumentów. Zauważmy, że ξ przyjmuje nieujemne wartości. Ponieważ M_k jest funkcją Schwartza, a dla I_k mamy (A.13a), istnieje więc $K > 0$ takie, że dla $k > K$ zachodzi $\xi(k) < 1$. Załóżmy teraz, iż $\xi''(0) < 0$ (wrócimy później do tego założenia). Ponieważ ξ jest ciągła, parzysta, $\xi(0) = 1$, $\xi'(0) = 0$ oraz $\xi''(0) < 0$, to istnieje $k_0 > 0$ (możemy przyjąć że $k_0 < K$) takie, że dla $k \in (0, k_0)$ zachodzi $\xi(k) < 1$. Z ciągłości istnieje $\xi_{max} > 0$ dla którego mamy $\xi(k) < \xi_{max}$ dla $k \in \langle k_0, K\rangle$. Musimy teraz jedynie poprawić szacowanie funkcji η dla $k \in \langle k_0, K\rangle$. Z (C.2) dostajemy, że dla r odpowiednio dużego mamy $\eta(rk) < \frac{1}{f_{max}}$, co kończy dowód własności $\eta(rk)\xi(k) < 1$ dla $k \neq 0$.

Pozostało tylko pokazać że można spełnić założenie $\xi''(0) < 0$. Nie potrafimy w tym momencie pokazać że założenie to spełnione jest przez pełną klasę funkcji, rozważymy jednak pewną szczególną klasę. Niech f będzie postaci $f(z) = c\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

na $\langle -R, R\rangle$, $c = \mathrm{const} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, a poza tym obszarem zero. Po prostych przekształceniach otrzymujemy wtedy

$$M_k = |c|^2 \frac{\sin^2(Rk)}{k^2}, \quad I_k = -\frac{|c|^2}{2k} \mathcal{P} \int \frac{1 - \cos(2Rp)}{p^2(p-k)}\, dp\,.$$

Całkując przez residua dostajemy

$$I_k = 4\pi |c|^2 R^3 \frac{2Rk - \sin(2Rk)}{(2Rk)^3}\,.$$

Standardowe rozwinięcie daje

$$\frac{I''(0)}{I_0} = -\frac{2}{5} R^2 \quad \text{oraz} \quad \frac{M''(0)}{M_0} = -\frac{2}{3} R^2\,,$$

zatem, jako że

$$\xi''(0) = \frac{M''(0)}{M_0} - \frac{I''(0)}{I_0}\,,$$

otrzymujemy $\xi''(0) < 0$. Funkcja f użyta tutaj nie jest gładka, jednak ponieważ M_k i I_k są ciągłymi funkcjonałami f, można wygładzić odpowiednio tę funkcję nie naruszając otrzymanych wyników.

Bibliografia

[1] H. G. B. Casimir: *On the attraction between two perfectly conducting plates*, Proc. K. Ned. Akad. Wet. **51** (1948) 793.

[2] S. K. Lamoreaux: *Demonstration of the Casimir Force in the* 0.6 *to* 6 μm *Range*, Phys. Rev. Lett. **78** (1997) 5; errata, Phys. Rev. Lett. **81** (1998) 5475; *Calculation of the Casimir force between imperfectly conducting plates*, Phys. Rev. A **59** (1999) R3149; *Reanalysis of the Casimir force measurements in the* 0.6-*to*-6-μm *range*, Phys. Rev. A **82** (2010) 024102.

[3] U. Mohideen, A. Roy: *Precision Measurement of the Casimir Force from* 0.1 *to* 0.9 μm, Phys. Rev. Lett. **81** (1998) 4549. A. Roy, C. Y. Lin, U. Mohideen: *Improved precision measurement of the Casimir force*, Phys. Rev. D **60** (1999) 111101.

[4] D. Deutsch, P. Candelas: *Boundary effects in quantum field theory*, Phys. Rev. D **20** (1979) 3063.

[5] R. L. Jaffe: *Unnatural Acts: Unphysical Consequences of Imposing Boundary Conditions on Quantum Fields*, AIP Conf. Proc. **687** (2003) 3 (arXiv:hep-th/0307014).

[6] A. Herdegen: *No nonsense Casimir force*, Acta Phys. Pol. B **32** (2001) 55 (arXiv:hep-th/0008207).

[7] A. Herdegen: *Quantum Backreaction (Casimir) Effect I. What are Admissible Idealizations?*, Ann. H. Poincaré **6** (2005) 669 (arXiv:hep-th/0412132).

[8] A. Herdegen: *Quantum Backreaction (Casimir) Effect II. Scalar and Electromagnetic Fields*, Ann. H. Poincaré **7** (2006) 253 (arXiv:hep-th/0507023).

[9] G. Plunien, B. Müller, W. Greiner: *The Casimir Effect*, Phys. Rep. **134** (1986) 87.

[10] P. W. Milonni: *The Quantum Vacuum: An Introduction to Quantum Electrodynamics*, Academic Press, San Diego, 1994.

[11] V. M. Mostepanenko, N. N. Trunov: *The Casimir Effect and its Applications*, Clarendon Press, Oxford, 1997.

[12] K. A. Milton: *The Casimir Effect: Physical Manifestations of Zero-Point Energy*, World Scientific, Singapore, 2001.

[13] M. Bordag, U. Mohideen, V. M. Mostepanenko: *New developments in the Casimir effect*, Phys. Rep. **353** (2001) 1 (arXiv:quant-ph/0106045).

[14] K. A.Milton: *The Casimir effect: recent controversies and progress*, J. Phys. A:Math Gen. **37** (2004) R209.

[15] S. K. Lamoreaux: *The Casimir force: background, experiments, and applications*, Rep. Prog. Phys. **68** (2005) 201.

[16] G. L. Klimchitskaya, U. Mohideen, V. M. Mostepanenko: *The Casimir force between real materials: Experiment and theory*, Rev. Mod. Phys. **81** (2009) 1827.

[17] M. Bordag, G. L. Klimchitskaya, U. Mohideen, V. M. Mostepanenko: *Advances in the Casimir Effect*, Oxford U. Press, New York, 2009.

[18] G. Bressi, G. Carugno, R. Onofrio, G. Ruoso: *Measurement of the Casimir Force between Parallel Metallic Surfaces*, Phys. Rev. Lett. **88** (2002) 041804.

[19] H. B. Chan, V. A. Aksyuk, R. N. Kleiman, D. J. Bishop, F. Capasso: *Quantum Mechanical Actuation of Microelectromechanical Systems by the Casimir Force*, Science **291** (2001) 1941.

[20] F. Chen, U. Mohideen, G. L. Klimchitskaya, V.M. Mostepanenko: *Demonstration of the Lateral Casimir Force*, Phys. Rev. Lett. **88** (2002) 101801.

[21] R. S. Decca, D. López, E. Fischbach, G. L. Klimchitskaya, D. E. Krause, V. M. Mostepanenko: *Precise comparison of theory and new experiment for the Casimir force leads to stronger constraints on thermal quantum effects and long-range interactions*, Annals Phys. **318** (2005) 37.

[22] L. S. Brown, G. Jordan Maclay: *Vacuum Stress between Conducting Plates: An Image Solution*, Phys. Rev. **184** 1969 1272.

[23] G. Scharf, W. F. Wreszinski: *The Casimir Effect and Field Quantization with Boundaries*, Nuovo Cim. Note Brevi **107A** (1994) 2879.

[24] B. S. Kay: *Casimir effect in quantum field theory*, Phys. Rev. D **20** (1979) 3052.

[25] G. Scharf, W. F. Wreszinski: *On the Casimir effect without cutoff*, Found. Phys. Lett. **5** (1992) 479.

[26] R. Haag, D. Kastler: *An Algebraic Approach to Quantum Field Theory*, J. Math. Phys. **5** (1964) 848.

[27] R. Haag: *Local Quantum Physics*, Springer, Berlin, 1992.

[28] H. Araki: *Mathematical Theory of Quantum Fields*, Oxford U. Press, 1999.

[29] O. Bratteli, D. W. Robinson: *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics*, vol. I, Springer, Berlin, 1996.

[30] O. Bratteli, D. W. Robinson: *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics*, vol. II, Springer, Berlin, 1996.

[31] A. Herdegen, M. Stopa: *Global Versus Local Casimir Effect*, Ann. H. Poincaré **11** (2010) 1171 (arXiv:1007.2139).

[32] M. E. Taylor: *Partial Differential Equations*, vol. II, Springer, New York, 1996.

[33] D. Shale: *Linear Symmetries of Free Boson Fields*, Trans. Amer. Math. Soc. **103** (1962) 149.

[34] A. van Daele, A. Verbeure: *Unitary Equivalence of Fock Representations on the Weyl Algebra*, Comm. Math. Phys. **20** (1971) 268.

[35] H. Araki, S. Yamagami: *On Quasi-equivalence of Quasifree States of the Canonical Commutation Relations*, Publ. RIMS Kyoto Univ. **18** (1982) 283.

[36] M. Reed, B. Simon: *Methods of Modern Mathematical Physics*, vol. I, Academic Press, London, 1980.

[37] M. Reed, B. Simon: *Methods of Modern Mathematical Physics*, vol. II, Academic Press, London, 1975.

[38] J. R. Taylor: *Scattering Theory*, John Wiley & Sons, 1972.

[39] K. Jedziniak: *Konstrukcja matematycznego modelu do analizy efektu Casimira*, praca magisterska, Instytut Fizyki Uniwersytetu Jagiellońskiego, 1999 (nieopublikowana).

[40] L. Schwartz: *Metody matematyczne w fizyce*, PWN, 1984.

[41] F. W. J. Olver et al.: *NIST Handbook of Mathematical Functions*, Cambridge University Press, 2010 (rozdział 25, sekcja 11, równanie 25, zob. także http://dlmf.nist.gov/25.11.E25).

[42] K. A. Milton: *Calculating Casimir energies in renormalizable quantum field theory*, Phys. Rev. D **68** (2003) 065020.

[43] C. A. Lütken, F. Ravndal: *Energy-level shifts in atoms between metallic planes*, Phys. Rev. A **31** (1985) 2082.

[44] X. Kong, F. Ravndal: *What is the Regularized Casimir Vacuum Energy Density?*, arXiv:quant-ph/9701022.

[45] V. Sopova, L.H. Ford: *The Energy Density in the Casimir Effect*, Phys. Rev. D **66** (2002) 045026 (arXiv:quant-ph/0204125).

[46] N. A. Kawakami, M. C. Nemes, W. F. Wreszinski: *The Casimir effect for parallel plates revisited*, J. Math. Phys. **48** (2007) 102302.

[47] C. D. Fosco, F. C. Lombardo, F. D. Mazzitelli: *Casimir energies with finite-width mirrors*, Phys. Rev. D **77** (2008) 085018; *Derivative expansion for the boundary interaction terms in the Casimir effect: Generalized δ potentials*, Phys. Rev. D **80** (2009) 085004; *Neumann Casimir effect: A singular boundary-interaction approach*, Phys. Lett. B **690** (2010) 189.

[48] C. D. Fosco, E. Losada: *Casimir effect with nonlocal boundary interactions*, Phys. Lett. B **675** (2009) 252 (arXiv:0902.2198).

[49] A. Jaffe, L. R. Williamson: *The Casimir Energy in a Separable Potential*, Annals Phys. **282** (2000) 432.