



Uniwersytet Jagielloński
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

Dominik Trzupek

Dynamika płaskich i cylindrycznych powierzchni materiałów w pełnym zakresie współczynnika Poissona

Rozprawa doktorska wykonana
pod kierunkiem prof. dr. hab. Piotra Zielińskiego

Kraków 2010

Pragnę podziękować promotorowi prof. dr. hab. Piotrowi Zielińskiemu za przekazaną wiedzę oraz za zaangażowanie i nieocenioną pomoc okazaną w czasie pisanie niniejszej rozprawy. Dziękuje również wszystkim innym, którzy swoją pomocą i wsparciem także przyczynili się do powstania tej pracy.

Autor

Praca ta była częściowo finansowana ze środków na naukę MNiSW w latach 2009-2010 w ramach projektu badawczego nr N N202 237337.

Spis treści

Wstęp	7
Założenia i zakres tematyczny rozprawy	7
Ważniejsze wyniki prac opublikowanych w czasie studiów doktoranckich	8
Układ i zawartość rozprawy	9
 Rozdział 1	
Fale i rezonanse powierzchniowe: Własności ogólne i prosty model	13
1.1 Ogólny schemat analizy dynamiki harmonicznych układów z powierzchniami.....	14
1.1.1 Radiacyjne pasma objętościowe	14
1.1.2 Powierzchniowe stany wibracyjne	15
1.2 Model	16
1.3 Relacje dyspersji i pasma objętościowe	17
1.4 Fale i rezonanse powierzchniowe	17
1.5 Lokalna gęstość stanów.....	23
1.6 Efektywne równanie ruchu warstwy powierzchniowej	26
1.6.1 Jądro całkowe $K(\tau)$	27
1.6.2 Przypadek $k_{\parallel} = 0$	28
1.7 Reakcja modelu powierzchni na oscylujące oddziaływanie zewnętrzne	29
 Rozdział 2	
Fale i rezonanse powierzchniowe na wewnętrznej powierzchni cylindrycznego wydrążenia 35	
2.1 Model	36
2.2 Numeryczne wyznaczanie częstości fal i rezonansów powierzchniowych	39
2.3 Wyniki.....	41
2.3.1 Prawdziwa fala powierzchniowa	41
2.3.2 Fale ciekące	42
 Rozdział 3	
Auksetyk z powierzchnią poddany naprężeniu zewnętrznemu	55
3.1 Model i własności statyczne.....	56
3.1.1 Naprężenia w ośrodku	57
3.1.2 Dopuszczalne wartości parametrów modelu.....	58
3.1.3 Stałe sprężyste	59
3.1.4 Warunki stabilności	59
3.1.5 Współczynnik Poissona	60
3.2 Własności dynamiczne	63
3.2.1 Równania ruchu ośrodka	63
3.2.2 Macierz dynamiczna.....	65
3.2.3 Pierwsza strefa Brillouina	65
3.2.4 Relacje dyspersji i przerwa wzbroniona	66
3.3 Własności powierzchniowe	69
3.3.1 Równania ruchu	69

3.3.2	Fale powierzchniowe	71
3.3.3	Pasma objętościowe	72
3.4	Izolowana prawdziwa fala powierzchniowa (ITSW)	73
3.4.1	Istota ITSW	75
3.4.2	Zależność od parametrów powierzchni	75
3.4.3	Odbicie fal	76
Rozdział 4		
Rola własności sprężystych ścian naczyń i otoczenia tkankowego w propagacji fal tętna		79
4.1	Najprostsze wzory na prędkość fazową modu Younga	79
4.2	Model cienkościennego naczynia tętniczego w otoczeniu lepkosprężystym	80
4.2.1	Równania ruchu cieczy	80
4.2.2	Równania ściany naczynia	83
4.2.3	Granica ciecz-naczynie	86
4.3	Wyznaczanie relacji dyspersji	87
4.4	Mody osiowosymetryczne	88
4.4.1	Profile prędkości	88
4.4.2	Relacje dyspersji	89
4.4.3	Zasięg tłumienia	91
4.5	Wzbudzanie modów	92
Podsumowanie		95
Dodatek A		99
A.1	Macierz stałych sprężystych	99
A.2	Macierz dynamiczna M	100
A.3	Macierze C, D, R	101
A.4	Macierz M dla $n > 0$	102
A.5	Operatory we współrzędnych cylindrycznych	102
Bibliografia		105

Wstęp

Założenia i zakres tematyczny rozprawy

Motywacją do podjęcia badań prezentowanych w tej pracy była chęć zbadania zjawisk powierzchniowych zachodzących przy rozchodzeniu się fal tętna w układzie tętniczym. Najbardziej interesującą powierzchnią jest tu oczywiście granica pomiędzy krwią a ścianą naczynia. Problem ten wydaje się mieć bardzo duże znaczenie praktyczne, ponieważ na tej właśnie granicy powstają wyjątkowo groźne dla zdrowia zmiany chorobowe i/lub degeneracyjne znane pod nazwą blaszki miażdżycowej. Wykryto, że mechanizm ochrony naczyń przed powstawaniem blaszki miażdżycowej związany jest z reakcjami chemicznymi zachodzącymi w pobliżu ścian naczyń z udziałem m.in. prostacykliny [1]. Z powodu bardzo szybkiego rozkładu jakiemu ulega ta substancja, jej wykrycie w roku 1976 uznano za osiągnięcie zasługujące na nagrodę Nobla [2]. Mechaniczne ruchy ściany naczynia i krwi w pobliżu tej ściany z pewnością wpływają na efektywną kinetykę zachodzących tam reakcji chemicznych.

Obecna wiedza na temat funkcjonowania naczyń tętniczych pozwala wyróżnić dwa mechanizmy takich ruchów. Pierwszy to czynna reakcja naczynia na bodźce pochodzące z układu nerwowego a drugi związany jest z biernymi odkształceniami materiału naczynia poddanego zmiennym naprężeniom. Odkształcenia takie rozprzestrzeniają się w materiale w postaci fal mechanicznych. W podjętych w ramach tej pracy badaniach ograniczono się do ruchów ścian naczyń krwionośnych traktowanych jako elementy bierne. Nawet tak zawężony program badań przedstawia znaczne trudności, obejmuje on bowiem dynamikę granicy ciecz-ośrodek lepkosprężysty o geometrii zbliżonej do wydrążenia w kształcie walca. Własności reologiczne krwi i naczyń krwionośnych nie są do końca poznane. Oprócz tego wydaje się istotne uwzględnienie warunków powstających w wyniku zastąpienia fragmentu tętnicy sztuczną protezą. Wśród materiałów stosowanych do protezowania tętnic wymienia się auksetyki, tj. materiały o ujemnym współczynniku Poissona [3].

Obecna rozprawa streszcza wyniki moich prac nad poszczególnymi zagadnieniami istotnymi dla zrozumienia mechanizmów ruchów falowych w materiałach o własnościach i geometrii zbliżonych do występujących w zarysowanych powyżej skrótowo problemach hemodynamicznych. Wyniki tych prac zostały już częściowo opublikowane. Poniżej przedstawiam ich streszczenie.

Ważniejsze wyniki prac opublikowanych w czasie studiów doktoranckich

1. D. Trzupek, M. Lepers, K. Jagielska, P. Zieliński, *Dispersion and excitation of waves in a model of artery: effect of surrounding tissues*, Phase Transitions **79**, 605 (2006)

W prostym modelu zakładającym cienką ścianę naczynia tętniczego zbadano wpływ otoczenia tkankowego na podstawowe osiowosymetryczne mody fal tętna: mod Younga i mod Lamba. Stwierdzono, że amplituda modu Lamba okazuje się znacząco przewyższać amplitudę modu Younga przy wzbudzeniach odpowiadających niektórym fizjologicznym ruchom tętnicy. Wyzaczyłem relacje dyspersji i parametry tłumienia dla modów osiowosymetrycznych, a także dla najniższych modów niewykazujących tej symetrii, m.in. dla modu zginającego. Znalazłem stosunki amplitud modów Lamba i Younga dla prostych sposobów ich wzbudzania.

2. K. Jagielska, D. Trzupek, M. Lepers, A. Pelc, P. Zieliński, *Effect of surrounding tissue on propagation of axisymmetric waves in arteries*, Physical Review E **76**, 066304 (2007)

W modelu analogicznym do użytego w poprzedniej publikacji zbadano wpływ otoczenia tkankowego na mod Younga, mod Lamba i mod skręcający. Stwierdzono m.in., że często pomijany w literaturze mod Lamba może rozprzestrzeniać się na odległości porównywalne z wielkością narządów wewnętrznych i dlatego może odgrywać nieznana dotąd rolę w procesach fizjologicznych. W tym celu wykonałem obliczenia zasięgu tłumienia badanych modów. Wyzaczyłem również dla nich profile prędkości i relacje dyspersji.

3. P. Zieliński, D. Twaróg, D. Trzupek, *On surface waves in materials with negative Poisson's ratio*, Acta Physica Polonica A **115**, 513 (2009)

Zbadano dynamikę płaskiej powierzchni ośrodka ciągłego pokrytego cienką warstwą powierzchniową. Ośrodek mógł wykazywać współczynnik Poissona w dozwolonym przedziale $-1 < \nu < 1/2$. Po raz pierwszy zaobserwowano tam izolowaną prawdziwą falę powierzchniową w paśmie fal objętościowych.

4. D. Trzupek, D. Twaróg, P. Zieliński, *Stress induced phononic properties and surface waves in 2D model of auxetic crystal*, Acta Physica Polonica A **115**, 576 (2009)

W modelu dwuwymiarowego auksetyka poddanego naprężeniu zewnętrznemu stwierdzono zależne od naprężenia otwieranie się przerwy wzbronionej (kryształ fononiczny). Ośrodek mógł wykazywać współczynnik Poissona o dowolnej wartości, również spoza przedziału $-1 < \nu < 1$. Wyzaczyłem pasma objętościowe, relacje dyspersji fal i rezonansów powierzchniowych oraz powierzchnie powolności, a także opracowałem dynamikę materiału sprężystego poddanego zewnętrznym naprężeniom.

5. D. Twaróg, D. Trzupek, P. Zieliński, *Surface Dynamics and phononic properties of 2D model of auxetic crystal*, Acta Physica Polonica A **115**, 579 (2009)

W modelu dwuwymiarowego auksetyka o polarnych elementach składowych stwierdzono możliwość sterowania szerokością przerwy wzbronionej przez zmianę natężenia pola zewnętrznego. Pokazano, że dla wystarczająco silnych pól prędkość akustycznej fali poprzecznej może stać się większa od podłużnej. Dla odpowiednio dobranych parametrów powierzchni uzyskano izolowaną prawdziwą falę powierzchniową w obszarze pasma objętościowego. Opracowałem metodę wyznaczania lokalnej gęstości stanów na podstawie odpowiedzi liniowej układu.

6. D. Trzupek, P. Zieliński, *Isolated True Surface Wave in a Radiative Band on a Surface of a Stressed Auxetic*, Physical Review Letters **103**, 075504 (2009)

Skonstruowano realistyczny model auksetyka, w którym występują wewnętrzne rotacyjne stopnie swobody. Wykazano, że dzięki przyłożonemu naprężeniu współczynnik Poissona może tam przyjmować dowolne wartości $-\infty < \nu < \infty$. Stwierdzono możliwość istnienia prawdziwych fal powierzchniowych w paśmie objętościowym (ITSW). Skonstruowałem macierz dynamiczną dla badanego modelu poddanego zewnętrznemu naprężeniu oraz wykonałem obliczenia powierzchni dyspersji, lokalnej gęstości stanów oraz współczynników odbicia fal od powierzchni materiału. Zaobserwowałem anomalie współczynnika odbicia dla częstości bliskich odpowiadającym falom ITSW.

7. D. Trzupek, P. Zieliński, *Surface true and leaky waves in subsonic and supersonic regions*, Acta Physica Polonica A **117**, 570 (2010)

W prostym modelu dwuwymiarowego ośrodka ciągłego pokazano możliwość występowania zarówno pod- jak i naddźwiękowych rezonansów powierzchniowych. Przedyskutowano znaczenie fizyczne fal ciekących przy pomocy eksperymentu myślowego polegającego na przyłożeniu rezonansowego wzbudzenia do powierzchni.

8. D. Trzupek, P. Zieliński, *Fully symmetrical surface modes on the inner side of an elastic cylinder*, Phase Transitions, submitted (2010)

Zbadano zależność osiowosymetrycznych modów powierzchniowych w cylindrycznym wydrążeniu w izotropowym ośrodku ciągłym w zależności od współczynnika Poissona dla całego jego przedziału zmienności z uwzględnieniem obszaru auksetycznego. Stwierdzono występowanie poddźwiękowych fal ciekących w takim układzie. Pokazano, że analog fali Rayleigha dla fal długich zmienia się w falę objętościową „muskającą” powierzchnię (*surface skimming bulk wave*).

Układ i zawartość rozprawy

Z powyższego przeglądu uzyskanych wyników widać, że badanie materiałów mogących mieć znaczenie dla fizjologii tętnic doprowadziło do wykrycia szeregu zjawisk istotnych dla ogólnej wiedzy na temat zjawisk powierzchniowych. Za najciekawsze z tych zjawisk uważam możliwość wystąpienia izolowanych „prawdziwych”, tj. nieskończenie długo żyjących, fal powierzchniowych (*isolated true surface waves*) w zakresie częstości „zarezerwowanym” dla krótkożyłowych rezonansów oraz – na odwrót – rezonansów powierzchniowych w zakresach częstości, w których spodziewane są prawdziwe fale powierzchniowe. Niniejsza rozprawa stara się wyjaśnić istotę tych zjawisk w sposób możliwie dostępny i przeglądowy. W tym celu został skonstruowany możliwie najprostszy model, dla którego większość omawianych zjawisk można opisać w sposób analityczny. Model ten został przedstawiony w rozdziale 1. Zadaniem tego rozdziału jest przybliżenie używanych w dalszej części tej pracy metodologii i pojęć.

Na przedstawiony w rozdziale 1 układ składa się półnieskończona płaszczyzna zakończona brzegiem o zadanej gęstości liniowej umieszczonym w potencjale harmonicznym. W takim układzie mogą rozchodzić się fale objętościowe, a ze względu na obecność powierzchni (w tym wypadku jednowymiarowej), również fale powierzchniowe. Dla prezentowanego układu zostały wyznaczone pasma objętościowe dla zadanej orientacji powierzchni oraz relacje dyspersji fal powierzchniowych. Z reguły dla częstości i składowej wektora falowego

równoległej do powierzchni leżących poza obszarem pasm objętościowych otrzymujemy „prawdziwe” fale powierzchniowe natomiast wewnątrz pasma możemy otrzymać rezonanse powierzchniowe, tzw. fale ciekące (*leaky waves*). W przypadku tego modelu udaje się nam uzyskać również fale ciekące poniżej dolnej granicy pasma. Zjawisko takie znane było dotychczas na granicy ciecz – ciało stałe [4]. W rozdziale tym przeanalizowana została zależność relacji dyspersji fal i rezonansów powierzchniowych od parametrów modelu, a więc też możliwość występowania fal/ rezonansów powierzchniowych dla danych wartości użytych parametrów. W celu zbadania reakcji modelu na zaburzenie zewnętrzne wyznaczona została zależność lokalnej gęstości stanów od częstości i wektora falowego. Podjęta została próba wyjaśnienia istoty fal ciekących, którym formalnie odpowiada rosnąca do nieskończoności wartość odkształcenia ośrodka wraz z podążaniem w głąb ośrodka.

Ponieważ wewnątrz naczynia krwionośnego ma z dobrym przybliżeniem kształt wydrążonego cylindra, w rozdziale 2 zbadano dynamikę powierzchni cylindrycznego wydrążenia w trójwymiarowym, jednorodnym i izotropowym ośrodku ciągłym o współczynniku Poissona przyjmującym wartości w zakresie $-1 < \nu < 1/2$. Dla umożliwienia rozróżnienia fal objętościowych i powierzchniowych, przyjęto nieskończoną grubość warstwy wokół wydrążenia. Wyznaczono relacje dyspersji i czasy życia fal i rezonansów powierzchniowych w tym modelu w zależności od osiowej składowej wektora falowego. Ze względu na chęć zastosowania uzyskanych wyników w modelowaniu zachowania się protez auksetycznych (o ujemnym współczynniku Poissona) przebadano zależność wspomnianych wielkości od współczynnika Poissona z uwzględnieniem obszaru auksetycznego. Zaskakującym wynikiem tego rozdziału jest stwierdzenie całego szeregu rezonansów powierzchniowych poza pasmami fal objętościowych. Zjawisko takie nie występuje na płaskiej, niezaburzonej swobodnej powierzchni ośrodka. Cylindryczna geometria układu jest przyczyną kolejnego ciekawego efektu, jakim jest przekształcanie się w granicy długofalowej akustycznych powierzchniowych fal Rayleigha w objętościowe fale „muskające” powierzchnię (*surface skimming bulk waves*).

Rozdział 3 pokazuje możliwość zaistnienia jeszcze ciekawszego zjawiska niż opisywanego w rozdziale poprzednim, mianowicie możliwość otrzymania prawdziwych fal powierzchniowych w obszarze pasma objętościowego dla odpowiednio dobranych parametrów powierzchniowych materiału auksetycznego i odpowiednio dobranego naprężenia wywieranego na materiał. Okazuje się, że dla fizycznej realizacji ujemnego współczynnika Poissona przybliżenie ośrodka sprężystego jest niewystarczające i należy uwzględnić pewne wewnętrzne stopnie swobody. Prezentowany tu model dwuwymiarowego auksetyka jest oparty na stosowanym w literaturze modelu złożonym ze sztywnych prętów oddziałujących za pośrednictwem sił sprężystych. Wychylenia kątowe tych prętów są niezbędnymi wewnętrznymi stopniami swobody. Uwzględniono także możliwość naprężeń zewnętrznych, gdyż w istocie materiały protetyczne są zawsze poddane pewnym naprężeniom. Dla takiego układu zostały wyznaczone warunki stabilności oraz inne własności statyczne w tym anizotropia współczynnika Poissona w zależności od naprężenia zewnętrznego. Badany układ, okazał się kryształem fononicznym dla odpowiednio dobranego naprężenia zewnętrznego a wielkością uzyskanej przerwy wzbronionej można sterować zmieniając naprężenie. Dla prezentowanego układu po wprowadzeniu powierzchni wyznaczono pasma objętościowe i relacje dyspersji fal i rezonansów powierzchniowych. Możliwość występowania izolowanej prawdziwej fali powierzchniowej została potwierdzona dodatkowo wyznaczeniem lokalnej

gęstości stanów powierzchniowych. Przedstawiono dalej również ciekawy efekt selektywnego wzbudzania poszczególnych fal cząstkowych uzyskiwany przy odbiciu fal od powierzchni rozpatrywanego ośrodka, którym to efektem można sterować zmieniając napężenie zewnętrzne.

W ostatnim rozdziale 4 przedstawione zostały wyniki uzyskane dla modelu tętnicy wypełnionej krwią i otoczonej tkanką zewnętrzną. Tętnica jest tu modelowana jako sprężysta rura cienkościenna a krew jako nieściśliwa ciecz newtonowska. Tkanka zewnętrzna jest scharakteryzowana zespolonym modułem sprężystości, a więc jest ośrodkiem lepkosprężystym. Znalaziono postać macierzy dynamicznej opisującej taki układ dla warunków brzegowych bez poślizgu (*non-slip*) i modów odpowiadających różnej symetrii. Dla najniższych modów o symetrii osiowej wyznaczono relacje dyspersji oraz profile prędkości cieczy. Obliczono zasięg tłumienia będący odwrotnością części urojonej wektora falowego i wskazujący na szybkość zaniku z odległością danego modu. Wyniki wskazują, że zaniebawiany w literaturze tzw. mod Lamba może rozchodzić się na odległości porównywalne z wielkością narządów wewnętrznych człowieka dla fizjologicznych parametrów tkanki otaczającej naczynie tętnicze. Zbadano również proporcje amplitud wzbudzonych modów, co doprowadziło do wniosku, że dla pewnych rodzajów wzbudzeń wspomniany, często pomijany, mod Lamba może się wzbudzać z amplitudą przewyższającą amplitudę podstawowego modu fal tętna znanego jako mod Younga. Obiecujący wydaje się fakt, że nadanie wartości ujemnej współczynnikowi Poissona ściany naczynia prowadzi do zmniejszenia prędkości modu Younga, tj. działa w kierunku przeciwnym do zmian chorobowych i degeneracyjnych.

Rozdział 1

Fale i rezonanse powierzchniowe: Własności ogólne i prosty model

Obecność powierzchni sprawia, że niezmienniczość translacyjna materiału w kierunku do tej powierzchni prostopadłym zostaje zniesiona. Przestaje zatem w tym kierunku obowiązywać twierdzenie Blocha. Oznacza to, że zbiór stanów własnych układu z powierzchnią nie jest już ograniczony do fal płaskich z rzeczywistymi wektorami falowymi pochodzącymi z pierwszej strefy Brillouina. Kiedy powierzchnia jest płaska, układ wykazuje najczęściej periodyczność w kierunkach równoległych do powierzchni i wtedy – także w myśl twierdzenia Blocha – każdy stan własny jest falą płaską o rzeczywistym wektorze falowym równoległym do powierzchni pochodzącym z dwuwymiarowej pierwszej strefy Brillouina. Wektory falowe fal Blocha muszą być rzeczywiste, aby zapewnić skończoną wartość rozwiązań problemu własnego w całym nieskończonym obszarze zajmowanym przez idealnie periodyczny materiał. Rozwiązania z zespolonymi wektorami falowymi stają się natomiast dopuszczalne w obecności powierzchni. Dzieje się tak wtedy, gdy amplitudy opisywanych przez nie fal maleją przy posuwaniu się w głąb materiału. Z tego powodu nowe stany noszą nazwę fal powierzchniowych. Fakt, że odpowiednie funkcje rosłyby do nieskończoności przy oddalaniu się od powierzchni w kierunku na zewnątrz materiału w niczym tu nie przeszkadza, gdyż w tym obszarze materiał po prostu nie istnieje.

Zjawiska fal powierzchniowych znane są dla skal wielkości rzędu powierzchni gwiazd i planet, np. Ziemi [5], jak również dla powierzchni kryształów [6] i nanocząsteczek [7]. Akustyczne fale powierzchniowe zostały po raz pierwszy wyjaśnione przez Lorda Rayleigha w 1885 roku [8]. Częstości tych fal powierzchniowych są zawsze niższe od częstości fal objętościowych o takiej samej składowej wektora falowego równoległej do powierzchni.

Sama powierzchnia bywa nierzadko układem bardziej skomplikowanym niż tylko geometryczne ograniczenie materiału. Jednym z najprostszych przykładów mogą tu być warstwy atomów zaadsorbowanych z atmosfery. Wówczas taka powierzchnia rozpatrywana jako obiekt izolowany od podłoża może wykazywać wibracyjne stany własne o częstościach przypadających w obszarze fal objętościowych podłoża. Energia takich drgań będzie unoszona w głąb materiału przez fale objętościowe, skutkiem czego amplituda drgań będzie maleć

z czasem. Tego rodzaju drgania o skończonym czasie życia nazywa się niekiedy stanami quasi-normalnymi [9, 10]. W fizyce powierzchni noszą one nazwę rezonansów powierzchniowych w analogii do wzbudzeń rozpatrywanych w fizyce cząstek elementarnych, gdzie stany o bardzo krótkim czasie życia określa się mianem rezonansów w odróżnieniu od długożyciowych cząstek [11].

W rozdziale tym przedstawione zostały podstawy matematycznej analizy fal powierzchniowych oraz zostały zdefiniowane podstawowe pojęcia używane w fizyce powierzchni. Opisany został tutaj również prosty model skonstruowany przez autora, w którym można zaobserwować fale powierzchniowe jak również rezonanse powierzchniowe. Co ciekawe, w modelu tym mogą się pojawić rezonanse, dla których część rzeczywista częstości przypada poza obszarem fal objętościowych podłoża. Takie rezonanse nazywa się czasem „poddźwiękowymi” (*subsonic*). Zostały one stwierdzone na powierzchni rozdziału ciecz – ciało stałe [4]. Podobne rezonanse poddźwiękowe zostały także wykryte przez autora w geometrii cylindrycznej materiału jednorodnego ośrodka sprężystego i opisane w rozdziale 2 niniejszej pracy. Model opisany w dalszym ciągu obecnego rozdziału pozwala przedstawić to zjawisko w sposób bardzo prosty, a wiele wyników można otrzymać w sposób analityczny. Umożliwia to nadanie fizycznej interpretacji otrzymanym wynikom, m.in. zjawisku „fal ciekących” (*leaky waves*), które odpowiadają rezonansom powierzchniowym. Są one formalnie opisywane wektorami falowymi zespolonymi i pozornie przewidują nieskończony wzrost amplitud tych fal przy posuwaniu się w głąb materiału.

1.1 Ogólny schemat analizy dynamiki harmoniczných układów z powierzchniami

Dynamikę układu składającego się z półnieskończonego ośrodka ograniczonego powierzchnią opisują równania ruchu ośrodka uzupełnione warunkami brzegowymi wyrażającymi równania ruchu warstwy powierzchniowej.

1.1.1 Radiacyjne pasma objętościowe

Rozwiązania równań ruchu w obszarze ośrodka są w przybliżeniu harmonicznymi kombinacjami fal Blocha

$$w_{\mu}(\mathbf{r}, t) = e_{\mu}(\mathbf{k}, \omega) e^{-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad (1.1)$$

gdzie $\mathbf{k}$ jest wektorem falowym z pierwszej strefy Brillouina, ω jest odpowiadającą mu częstością a e_{μ} , gdzie $\mu = 1, 2, \dots, n$, jest wektorem polaryzacji. Wymiar n wektora polaryzacji jest równy liczbie stopni swobody komórki elementarnej rozważanego materiału. Wektory polaryzacji są wektorami własnymi a częstości $\omega_j(\mathbf{k})$, gdzie $j = 1, 2, \dots, n$, są wartościami własnymi zależnej od $\mathbf{k}$ macierzy $M(\mathbf{k}, \omega)$ o wymiarach $n \times n$. Równanie charakterystyczne $\det M(\mathbf{k}, \omega_j) = 0$ definiuje relacje dyspersji $\omega_j(\mathbf{k})$ fal objętościowych. Rozkładając wektor falowy na składowe $k_{\parallel}$ i $k_{\perp}$, odpowiednio równoległą i prostopadłą do powierzchni, można rozwiązać równanie $\det M(k_{\parallel}, k_{\perp}, \omega) = 0$ ze względu na $k_{\perp}$ dla zadanych wartości $k_{\parallel}$ i ω . W obszarach płaszczyzny $(k_{\parallel}, \omega)$, w których obrębie przynajmniej jedna z otrzymanych wartości $k_{\perp}$ jest rzeczywista, mogą istnieć fale objętościowe o wektorze falowym $(k_{\parallel}, k_{\perp})$ i częstości ω . Obszary te są więc obszarami radiacyjnymi nazywanymi również pasmami fal objętościowych lub po prostu pasmami objętościowymi (*bulk bands, radiative regions*). Na

pasma objętościowe można również patrzeć jak na rzut relacji dyspersji fal objętościowych na płaszczyznę $(k_{\parallel}, \omega)$. Układ pasm objętościowych zależy od przestrzennej orientacji powierzchni (indeksów Millera w przypadku powierzchni płaskich w kryształach), ale jest niezależny od własności samej powierzchni, tzn. od warunków brzegowych rozważanego zagadnienia dynamicznego.

Zespolone rozwiązania $k_{\perp}$ równania charakterystycznego dla częstości rzeczywistej takie, że $\text{Im } k_{\perp} > 0$ opisują pola bliskie (*near fields*), również nazywane zanikającymi falami cząstkowymi (*evanescent partial waves*). Zanikają one wykładniczo z odległością od powierzchni ośrodka (ośrodek dla $y > 0$). Takie rozwiązania odrzuca się w układzie nieskończonym ze względu na to, że wzrastałyby do nieskończoności w pewnych kierunkach. W przypadku układu półnieskończonego z powierzchnią są one jednak skończone wszędzie w obrębie ośrodka.

Podsumowując, każde rozwiązanie problemu dynamicznego dla ośrodka z powierzchnią w przybliżeniu harmonicznym jest liniową kombinacją cząstkowych fal objętościowych i zanikających, czyli odpowiednio takich, dla których wektor falowy $k_{\perp}$ jest rzeczywisty i takich, dla których jest on zespolony. Współczynniki tych kombinacji liniowych zależą od własności warstwy powierzchniowej.

1.1.2 Powierzchniowe stany wibracyjne

Równania ruchu warstwy powierzchniowej stanowią warunki brzegowe dla rozważanego zagadnienia. Rozwiązanie dla całego zagadnienia dynamicznego dla zadanych $k_{\parallel}$ i ω w obecności lub bez zewnętrznego zaburzenia jest więc taką kombinacją fal objętościowych i cząstkowych fal zanikających, która spełnia warunki brzegowe. Rozwiązania, które otrzymujemy dla rzeczywistych częstości bez zewnętrznego zaburzenia, są nazywane stanami powierzchniowymi lub też falami powierzchniowymi. Jeśli występują poza pasmami objętościowymi, tzn. mają wszystkie fale cząstkowe zanikające w głąb ośrodka, wtedy nazywa się je prawdziwymi falami powierzchniowymi (*true surface waves*), jako że faktycznie ograniczają się tylko do obszaru powierzchniowego. Gdy fale takie utrzymują się również w granicy długofalowej to ich prędkości fazowe rozchodzenia się wzdłuż powierzchni muszą być niższe niż prędkość dźwięku najwolniejszej akustycznej fali objętościowej w tym samym kierunku. Dlatego nazywane są one poddźwiękowymi falami powierzchniowymi (*subsonic surface waves*). Pokazano, że istnienie naddźwiękowych fal powierzchniowych (*supersonic surface waves*), tzn. występujących w granicy fal długich dla częstości rzeczywistych w obrębie radiacyjnych pasm objętościowych jest możliwe dla pewnych orientacji powierzchni i dla pewnych symetrii materiału ośrodka. Ich nazwa – odosobnione fale powierzchniowe (*secluded surface waves*) pochodzi stąd, że ich relacje dyspersji są reprezentowane w tej granicy przez odosobnione proste linie na tle pasm radiacyjnych [12, 13]. Every [14] znalazł analogiczne fale na granicy ośrodków będącej szeregiem współpłaszczyznowych cienkich szczelin w ośrodku ciągłym. W rozdziale 3 pokazano możliwość istnienia prawdziwych fal powierzchniowych w pojedynczym punkcie pasma radiacyjnego w materiałach z dodatkowymi rotacyjnymi stopniami swobody [15, 16]. Fale tego typu zostały również znalezione dla ośrodka ciągłego pokrytego specyficzną powierzchnią [17]. Fale takie nazwaliśmy izolowanymi prawdziwymi falami powierzchniowymi (*isolated true surface waves*) [16].

Oprócz rozwiązań z częstościami czysto rzeczywistymi warunki brzegowe mogą dopuszczać rozwiązania z częstościami zespolonymi. Warunek $\text{Im } \omega < 0$ zapewnia wtedy wykładniczy zanik w czasie takiego rozwiązania. Stała czasowa tego zaniku wynosi $\tau = 1/\text{Im } \omega$. W granicy długich fal i niskich częstości, dla ośrodka ciągłego bez wewnętrznych stopni swobody, odpowiedni wektor falowy $k_{\perp}$ okazuje się spełniać warunek $\text{Im } k_{\perp} < 0$, tzn. amplituda odpowiedniej fali rośnie w głąb ośrodka. Mechanizm leżący u podstaw skończonego czasu życia drgań jest prosty: energia drgań jest zabierana w głąb ośrodka przez poruszające się fale objętościowe, a więc – obrazowo – energia „wycieka” z powierzchni tak jak woda z ciekącego naczynia. Ze względu na to porównanie takie wzbudzenia o skończonym czasie życia są czasem nazywane falami ciekącymi (*leaky waves*) [18, 19]. Niekiedy stosowana jest również nazwa fala pseudopowierzchniowa (*pseudo surface wave*) lub rezonans powierzchniowy (*surface resonance*). Kiedy część rzeczywista $\text{Re } \omega$ częstości takiej fali leży w obszarze pasma radiacyjnego, obserwujemy maksimum lokalnej gęstości stanów powierzchniowych o szerokości proporcjonalnej do $\text{Im } \omega$. Mówi się wtedy o naddźwiękowych ciekących falach powierzchniowych (*supersonic leaky surface waves*). Jednakże również można znaleźć fale ciekące z $\text{Re } \omega$ leżącą poza pasmami objętościowymi w pewnych specyficznych układach z powierzchnią rozdziału ciała stałe – ciecz. Fizyczne znaczenie takich rozwiązań jak również interpretacja nieskończonego przestrzennego wzrostu amplitudy z odległością od powierzchni w przypadku fal ciekących pozostają kontrowersyjne [4].

W dalszej części rozdziału zaproponowany zostanie prosty model, w którym oprócz zwykłych prawdziwych fal powierzchniowych mogą występować ciekące fale powierzchniowe zarówno poddźwiękowe jak i naddźwiękowe. Fizyczne znaczenie znalezionych stanów powierzchniowych zostanie wyjaśnione za pomocą prostego eksperymentu myślowego.

1.2 Model

Najprostszym znalezionym układem dwuwymiarowym, w którym mogą pojawić się poddźwiękowe ciekące fale powierzchniowe jest półnieskończona sprężysta membrana ograniczona prostoliniową krawędzią. Dla uproszczenia zapisu wybieramy układ współrzędnych tak, aby membrana leżała w płaszczyźnie (x, y) , a jej krawędź była wyznaczona osią x . Równanie ruchu takiego ośrodka dla wychyleń u prostopadłych do płaszczyzny membrany, tj. poprzecznych ruchów poza płaszczyznę (*out-of-plane*) ma postać

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (1.2)$$

gdzie $-\infty < x < +\infty$ oraz $0 < y < +\infty$.

Zakładamy, że brzeg membrany może posiadać liniową gęstość masy ρ_s . Elementy brzegu oddziałują z membraną za pośrednictwem sił sprężystych proporcjonalnych do gradientu wychyleń $T \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}$. Dodatkowo zakładamy, że brzeg membrany jest umieszczony w potencjale harmonicznym zapewniającym mu położenie równowagi dla $u(y=0) = 0$. Potencjał ten ma zatem postać

$$V = \begin{cases} \frac{1}{2}\beta u^2, & y = 0 \\ 0, & y > 0 \end{cases}. \quad (1.3)$$

W rezultacie równanie ruchu brzegu w obecności siły zewnętrznej, której gęstość na jednostkę długości krawędzi membrany wynosi F , wyraża się następująco:

$$\rho_s \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} - \beta u + F. \quad (1.4)$$

Jest to warunek brzegowy dla równania (1.2). Równanie (1.4) zakłada, że sztywność brzegu jest zaniedbywalna.

1.3 Relacje dyspersji i pasma objętościowe

Równanie (1.2) ma rozwiązanie w postaci fal biegnących

$$u(x, y, t) = u_0 e^{-i\omega t + ik_{\parallel}x + ik_{\perp}y}, \quad (1.5)$$

gdzie $k_{\parallel}$ i $k_{\perp}$ są składowymi wektora falowego odpowiednio równoległą i prostopadłą do brzegu membrany. Wstawiając to rozwiązanie do równania (1.2) otrzymujemy relację dyspersji

$$\omega^2 = c^2(k_{\perp}^2 + k_{\parallel}^2). \quad (1.6)$$

Warto zauważyć, że przyjmując $k_{\parallel}$ za parametr możemy uważać związek (1.6) za relację dyspersji w jednowymiarowym równaniu Kleina-Gordona, ze zmienną y i odpowiednio wektorem falowym $k_{\perp}$. W obecnej reprezentacji częstości i wektora falowego warunek brzegowy (1.4) przyjmuje postać

$$(\beta - \rho_s \omega^2 - ik_{\perp}T)u_0 = f_0, \quad (1.7)$$

gdzie f_0 jest amplitudą siły zewnętrznej, którą w tej reprezentacji przyjmujemy za oscylującą z częstością ω , tak że $f = f_0 e^{-i\omega t + ik_{\parallel}x}$.

Równanie (1.6) określa pasmo fal objętościowych (obszar radiacyjny):

$$\frac{\omega^2}{c^2} - k_{\parallel}^2 > 0, \quad (1.8)$$

tzn. miejsce geometryczne na płaszczyźnie $(k_{\parallel}, \omega)$ takich punktów, dla których wg równania (1.6) wektor falowy $k_{\perp}$ jest rzeczywisty.

1.4 Fale i rezonanse powierzchniowe

Niektóre rozwiązania równania (1.6) z warunkiem brzegowym (1.7) dla $f_0 = 0$ mają znaczenie fizyczne. W szczególności rozwiązania z rzeczywistą częstością $\omega > 0$ i czysto urojonym $k_{\perp} = ik'_{\perp}$ przy $k'_{\perp} > 0$ odpowiadają stacjonarnym falom powierzchniowym. Amplitudy tych fal zanikają wykładniczo z odległością od brzegu. Natomiast rozwiązania, dla których $\omega = \omega' + i\omega''$ z $\omega'' < 0$ oraz $k_{\perp} = k'_{\perp} + ik'_{\perp}$ z $k'_{\perp} < 0$ zanikają wykładniczo w czasie. Mimo, że ich amplituda rośnie wykładniczo dla $y \rightarrow +\infty$, mają one dobrze udokumentowany sens fizyczny jako tzw. fale ciekące, zwane też falami pseudopowierzchniowymi (lepiej: pseudo falami powierzchniowymi) albo rezonansami powierzchniowymi [20]. Ze względu na relację

dyspersji (1.6) mamy w naszym modelu $\omega' \omega'' = c^2 k'_\perp k''_\perp$, a więc fale zanikające w czasie, tj. z $\omega'' < 0$, i poruszające się w głąb materiału nie mogą mieć $k''_\perp > 0$ czyli nie mogą równocześnie mieć amplitudy zanikającej dla $y \rightarrow +\infty$.

Z postaci równania (1.6) łatwo wywnioskować, że fale powierzchniowe powstają poza obszarem radiacyjnym a fale ciekące wewnątrz tego obszaru. Opisywany model dopuszcza jeszcze inne typy rozwiązań, których znaczenie fizyczne jest w dostępnej literaturze dyskusyjne. Rozwiązania, w których $k_\parallel = k'_\parallel + i k''_\parallel$ z $k'_\parallel > 0$, $k''_\parallel > 0$ i $k_\perp = k'_\perp + i k''_\perp$ z $k'_\perp > 0$, $k''_\perp > 0$ oraz $\omega = \omega' + i \omega''$ z $\omega'' > 0$ były interpretowane jako inny rodzaj fal ciekących [20], natomiast rozwiązania z $\omega = \omega' + i \omega''$ dla których $\omega'' < 0$ i $\omega' < c k_\parallel$ i z rzeczywistym $k_\parallel$ i zespolonym $k'_\perp = k'_\perp + i k''_\perp$ takim że $k''_\perp < 0$ – jako tzw. poddźwiękowe fale ciekące (*subsonic leaky waves*) [4]. Ta ostatnia nazwa pochodzi stąd, że prędkość fazowa takiej fali jest mniejsza niż prędkość c dźwięku w płycie.

W końcu również otrzymujemy w naszym modelu rozwiązania z rzeczywistą częstością ω oraz zespolonym $k'_\perp = k'_\perp + i k''_\perp$ z $k''_\perp < 0$. W zasadzie takie rozwiązania powinniśmy odrzucić, gdyż ich amplituda rośnie do nieskończoności dla $y \rightarrow +\infty$ i nie wykazują one zaniku w czasie.

W tym rozdziale jak również w następnych przyjęto dla uproszczenia zapisu, że znak *prim* oznacza część rzeczywistą, a znak podwójny *prim* oznacza część urojoną danej wielkości.

Rozwiązania równań (1.6) i (1.7) z $k_\parallel$ traktowanym jako parametr są następujące:

$$k_\perp = -\frac{T}{2\rho_s c^2} i \pm \sqrt{\frac{\beta}{\rho_s c^2} - \frac{T^2}{4\rho_s^2 c^4} - k_\parallel^2} \quad (1.9)$$

i odpowiednio

$$\omega^2 = \frac{\beta}{\rho_s} - \frac{T^2}{2\rho_s^2 c^2} \mp i \frac{T}{\rho_s} \sqrt{\frac{\beta}{\rho_s c^2} - \frac{T^2}{4\rho_s^2 c^4} - k_\parallel^2}. \quad (1.10)$$

Warto rozważyć dwa przypadki w zależności od znaku wyrażenia pod pierwiastkiem oraz przedstawić powyższe wyrażenia w zmiennych zredukowanych (1.11). Przyjmujemy, że $\text{Im } k_\parallel = 0$.

$$\tilde{\beta} = \frac{\beta \rho_s c^2}{T^2}, \quad \tilde{k}_\parallel = \frac{k_\parallel \rho_s c^2}{T}, \quad \tilde{k}_\perp = \frac{k_\perp \rho_s c^2}{T}, \quad \tilde{\omega} = \frac{\omega \rho_s c}{T}. \quad (1.11)$$

1. W przypadku gdy $\tilde{k}_\parallel^2 < \tilde{\beta} - \frac{1}{4}$ co odpowiada $k_\parallel^2 < \frac{\beta}{\rho_s c^2} - \frac{T^2}{4\rho_s^2 c^4}$ i dodatniemu wyrażeniu pod pierwiastkiem w (1.9) i (1.10) otrzymujemy

$$\tilde{k}'_\perp = \pm \sqrt{\tilde{\beta} - \frac{1}{4} - \tilde{k}_\parallel^2}, \quad \tilde{k}''_\perp = -\frac{1}{2}, \quad (1.12)$$

$$\tilde{\omega}^2 = \tilde{\beta} - \frac{1}{2} \mp i \sqrt{\tilde{\beta} - \frac{1}{4} - \tilde{k}_\parallel^2}. \quad (1.13)$$

2. W przypadku gdy $\tilde{k}_{\parallel}^2 \geq \tilde{\beta} - \frac{1}{4}$ mamy natomiast

$$\tilde{k}_{\perp}' = 0, \quad \tilde{k}_{\perp}'' = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\tilde{k}_{\parallel}^2 - \tilde{\beta} + \frac{1}{4}}, \quad (1.14)$$

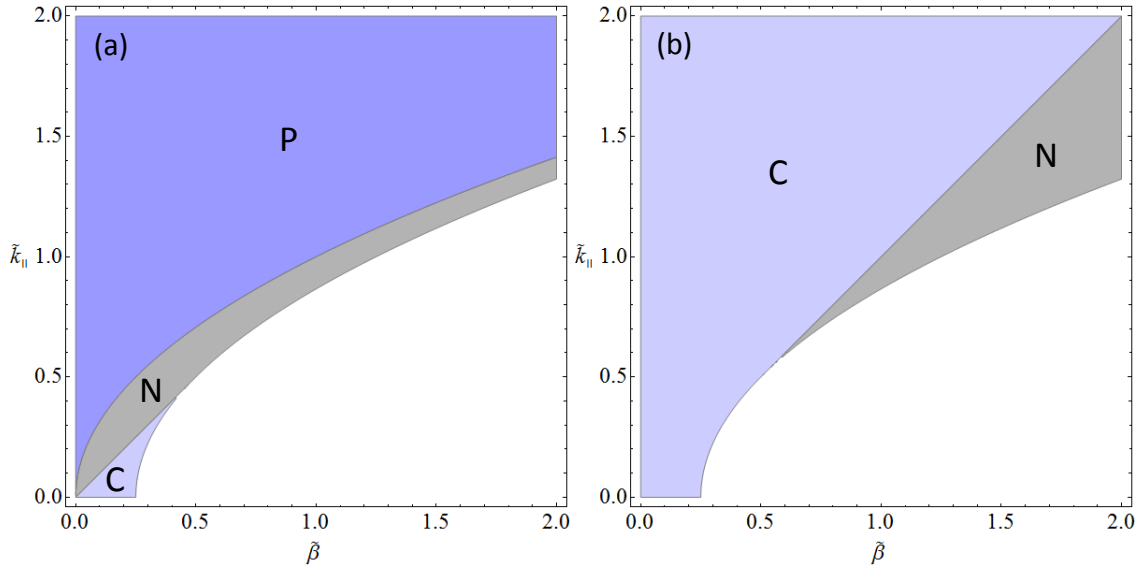
$$\tilde{\omega}^2 = \tilde{\beta} - \frac{1}{2} \pm \sqrt{\tilde{k}_{\parallel}^2 - \tilde{\beta} + \frac{1}{4}}. \quad (1.15)$$

W przypadku 1. mamy $\tilde{k}_{\perp}'' < 0$ tzn. amplituda fali rośnie do nieskończoności przy $y \rightarrow +\infty$. Aby takie rozwiązanie było fizyczne amplituda ta musi odpowiednio maleć w czasie, musimy więc mieć $\tilde{\omega}'' < 0$. Z drugiej strony rozważamy tylko te rozwiązania, dla których czas płynie w przód czyli te, dla których $\tilde{\omega}' > 0$. Skoro $\tilde{\omega}^2 = (\tilde{\omega}' + i\tilde{\omega}'')^2 = \tilde{\omega}'^2 - \tilde{\omega}''^2 + 2i\tilde{\omega}'\tilde{\omega}''$, a musimy mieć $\tilde{\omega}'\tilde{\omega}'' < 0$, to fizyczne rozwiązanie w (1.13) to tylko to ze znakiem minus i odpowiednio w (1.12) ze znakiem plus. Mając na uwadze znaki $\tilde{\omega}'$ i $\tilde{\omega}''$ otrzymujemy

$$\tilde{\omega}' = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\tilde{\beta} - \frac{1}{4} - \tilde{k}_{\parallel}^2}}{\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\tilde{\beta}^2 - \tilde{k}_{\parallel}^2} - \frac{1}{2}\left(\tilde{\beta} - \frac{1}{2}\right)}}, \quad (1.16)$$

$$\tilde{\omega}'' = -\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\tilde{\beta}^2 - \tilde{k}_{\parallel}^2} - \frac{1}{2}\left(\tilde{\beta} - \frac{1}{2}\right)}. \quad (1.17)$$

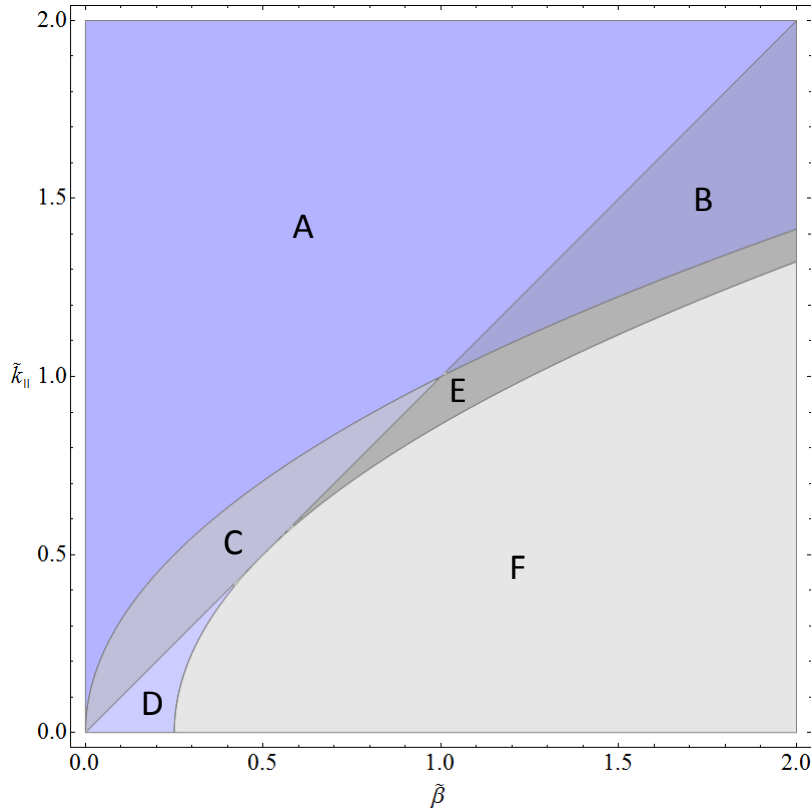
A więc dla $\tilde{k}_{\parallel}^2 < \tilde{\beta} - \frac{1}{4}$ otrzymujemy zawsze jedno rozwiązanie typu fali cieknącej.



Rys. 1.1 Obszary występowania fal powierzchniowych i fal ciekących na płaszczyźnie $(\tilde{\beta}, \tilde{k}_{\parallel})$ dla górnego (a) i dolnego (b) znaku w rozwiązaniu (1.14) i (1.15). Obszar jasnoniebieski (C) – fala ciekąca: $\tilde{k}_{\perp}'' < 0$ i $\tilde{\omega}^2 < 0$, obszar szary (N) – rozwiązanie niefizyczne: $\tilde{k}_{\perp}'' < 0$ i $\tilde{\omega}^2 > 0$, obszar ciemnoniebieski (P) – fala powierzchniowa: $\tilde{k}_{\perp}'' > 0$ i $\tilde{\omega}^2 > 0$.

W przypadku 2. rozwiązanie na $\tilde{k}_\perp''$ ze znakiem minus jest zawsze ujemne natomiast to ze znakiem plus może być zarówno ujemne jak i dodatnie. Dodatnie $\tilde{k}_\perp''$ dostajemy tylko gdy $\tilde{k}_\parallel > \sqrt{\tilde{\beta}}$, a dla mniejszych wartości $\tilde{k}_\parallel$ w tym przypadku mamy dwa rozwiązania ujemne. Dodatniemu $\tilde{k}_\perp''$ odpowiada $\tilde{\omega}^2 > 0$, co sprowadza się do $\tilde{\omega}$ rzeczywistego (wybieramy znak plus – rozwiązania biegnące w przód w czasie), a więc dostajemy rozwiązanie niezanikające w czasie i zanikające eksponencjalnie dla $y \rightarrow +\infty$, tj. falę powierzchniową. Obszar występowania takiego rozwiązania został oznaczony na Rys. 1.1a kolorem ciemnoniebieskim. Obszary oznaczony kolorem szarym na Rys. 1.1a i Rys. 1.1b odpowiadają rozwiązaniom niezanikającym w czasie i rosnącym eksponencjalnie dla $y \rightarrow +\infty$ a więc niefizycznym. Obszary jasnoniebieskie na tych rysunkach odpowiadają rozwiązaniom zanikającym w czasie i rosnącym eksponencjalnie dla $y \rightarrow +\infty$. Takie rozwiązania nazywamy falami ciekącymi (*leaky waves*). Widać więc, że w rozważanym przypadku dla obszaru poniżej prostej $\tilde{k}_\parallel = \tilde{\beta}$ przy $\tilde{\beta} < \frac{1}{2}$ mamy dwa rozwiązania będące falami ciekącymi (w tym wypadku bez składowej oscylującej), powyżej tej prostej mamy jedno takie rozwiązanie a dodatkowo dla $\tilde{k}_\parallel > \sqrt{\tilde{\beta}}$ mamy rozwiązanie będące falą powierzchniową.

Obszary występowania poszczególnych rozwiązań zebrane zostały na Rys. 1.2. W Tab. 1.1 zostały zebrane możliwe rozwiązania w zależności od znaku $\tilde{k}_\perp''$ oraz $\tilde{\omega}''$, dla $\tilde{k}_\parallel'' = 0$.



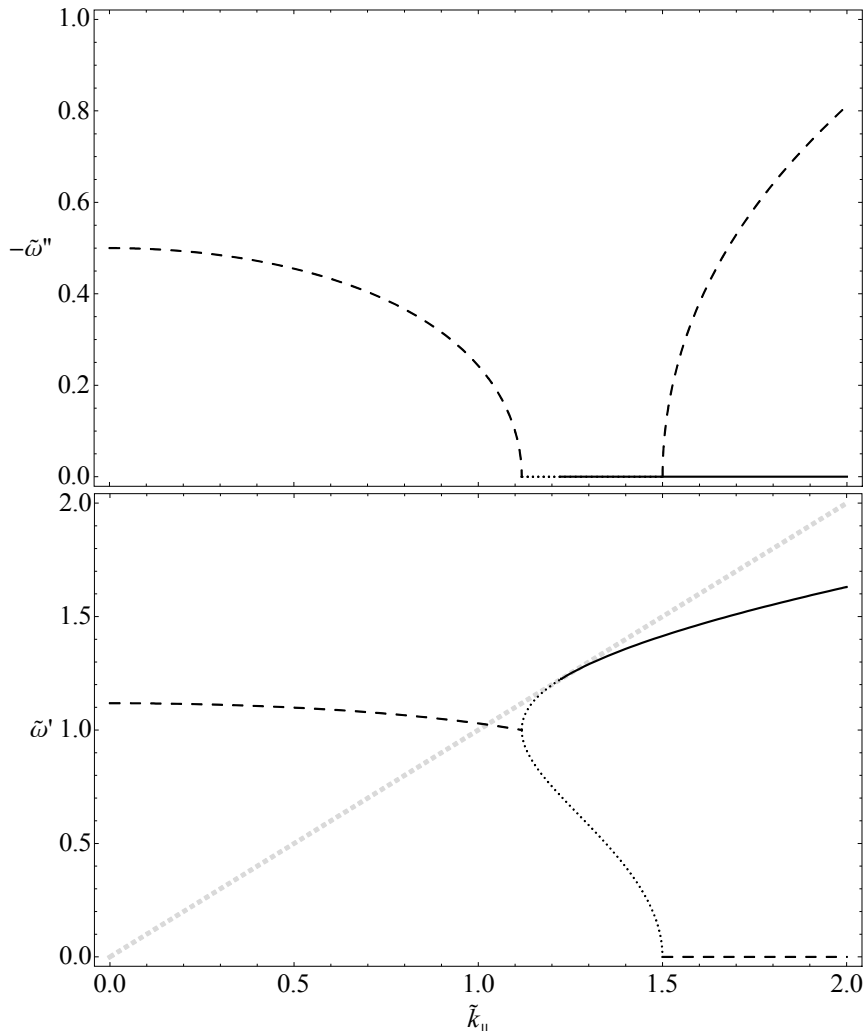
Rys. 1.2 Obszary występowania rozwiązań typu fala powierzchniowa i fala ciekąca.

- | | |
|--|--|
| (A) 1. f.pow.: $\tilde{k}_\perp' = 0, \tilde{k}_\perp'' > 0, \tilde{\omega}' > 0, \tilde{\omega}'' = 0$, | 2. f.ciek.: $\tilde{k}_\perp' = 0, \tilde{k}_\perp'' < 0, \tilde{\omega}' = 0, \tilde{\omega}'' < 0$, |
| (B) 1. f.pow.: $\tilde{k}_\perp' = 0, \tilde{k}_\perp'' > 0, \tilde{\omega}' > 0, \tilde{\omega}'' = 0$, | 2. n.fiz.: $\tilde{k}_\perp' = 0, \tilde{k}_\perp'' < 0, \tilde{\omega}' > 0, \tilde{\omega}'' = 0$, |
| (C) 1. n.fiz.: $\tilde{k}_\perp' = 0, \tilde{k}_\perp'' < 0, \tilde{\omega}' > 0, \tilde{\omega}'' = 0$, | 2. f.ciek.: $\tilde{k}_\perp' = 0, \tilde{k}_\perp'' < 0, \tilde{\omega}' = 0, \tilde{\omega}'' < 0$, |
| (D) 1. f.ciek.: $\tilde{k}_\perp' = 0, \tilde{k}_\perp'' < 0, \tilde{\omega}' = 0, \tilde{\omega}'' < 0$, | 2. f.ciek.: $\tilde{k}_\perp' = 0, \tilde{k}_\perp'' < 0, \tilde{\omega}' = 0, \tilde{\omega}'' < 0$, |
| (E) 1. n.fiz.: $\tilde{k}_\perp' = 0, \tilde{k}_\perp'' < 0, \tilde{\omega}' > 0, \tilde{\omega}'' = 0$, | 2. n.fiz.: $\tilde{k}_\perp' = 0, \tilde{k}_\perp'' < 0, \tilde{\omega}' > 0, \tilde{\omega}'' = 0$, |
| (F) f.ciek.: $\tilde{k}_\perp' > 0, \tilde{k}_\perp'' < 0, \tilde{\omega}' > 0, \tilde{\omega}'' < 0$. | |

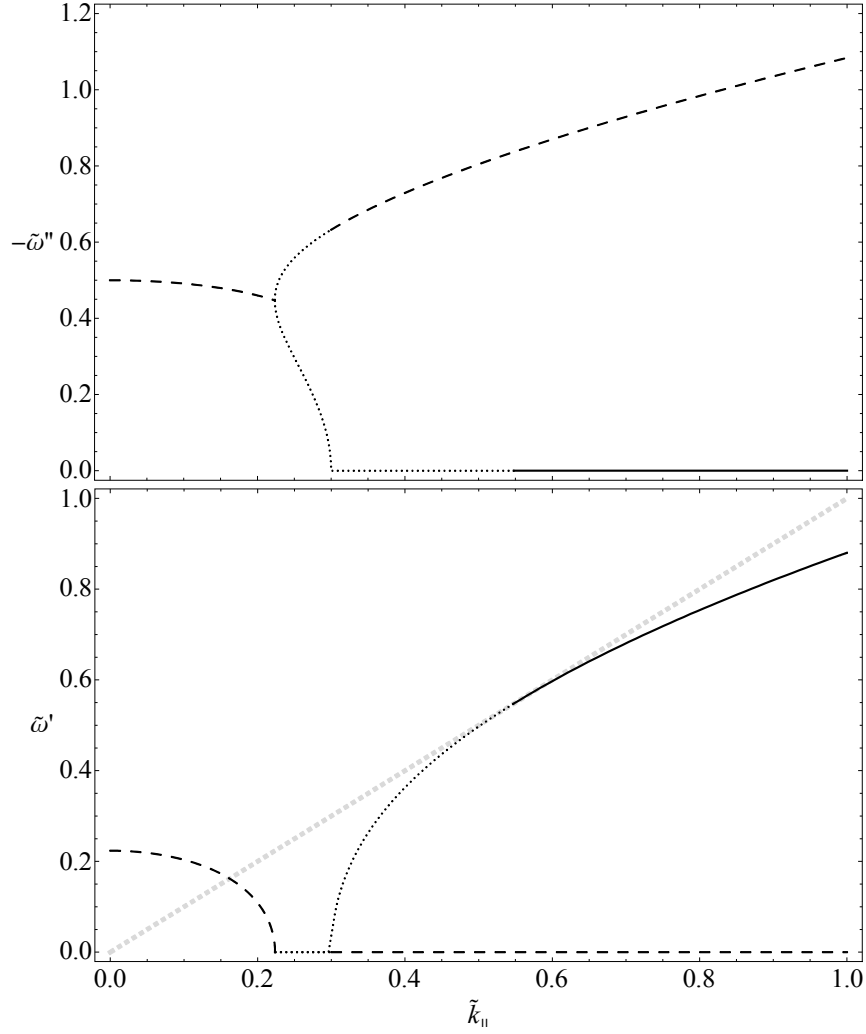
Tab. 1.1 Typ rozwiązania w zależności od znaku części urojonych $\tilde{\omega}$ i wektora falowego $\tilde{k}_\perp$.

	$\tilde{k}_\perp'' < 0$	$\tilde{k}_\perp'' = 0$	$\tilde{k}_\perp'' > 0$
$\tilde{\omega}'' < 0$	Fala cieknąca	Nie występuje w rozważanym modelu	Nie występuje w rozważanym modelu
$\tilde{\omega}'' = 0$	Niefizyczne	Fale objętościowe	Fala powierzchniowa
$\tilde{\omega}'' > 0$	Niefizyczne	Niefizyczne	Niefizyczne

Na Rys. 1.3–1.5 przedstawione zostały rozwiązania równań (1.6) i (1.7) z $f_0 = 0$. Na dolnych panelach została przedstawiona część rzeczywista częstotliwości $\tilde{\omega}'$ w zależności od składowej wektora falowego równoległej do powierzchni $\tilde{k}_\parallel$ dla wybranych wartości parametru $\tilde{\beta}$. Są to więc relacje dyspersji dla rozważanego układu przedstawione na płaszczyźnie $(\tilde{k}_\parallel, \tilde{\omega}')$. Na górnych panelach Rys. 1.3–1.5 przedstawiona została część urojona częstotliwości ze znakiem minus: $-\tilde{\omega}''$ w zależności od $\tilde{k}_\parallel$. Czytelnik łatwo zauważy jakościowe różnice występujące przy różnych wartościach parametru $\tilde{\beta}$.



Rys. 1.3 Część rzeczywista i urojona częstotliwości w funkcji $\tilde{k}_\parallel$ dla $\tilde{\beta} = 1.5$. Linia ciągła odpowiada fali powierzchniowej a linie kreskowane falom ciekącym. Czarne linie kropkowane odpowiadają rozwiązaniom niefizycznym. Szara linia kropkowana jest dolną granicą pasma objętościowego. Fale ciekące występują również poniżej dolnej granicy pasma objętościowego – poddźwiękowe fale ciekące (*subsonic leaky waves*).



Rys. 1.4 Część rzeczywista i urojona częstości dla $\tilde{\beta} = 0.3$. Oznaczenia jak na Rys. 1.3.

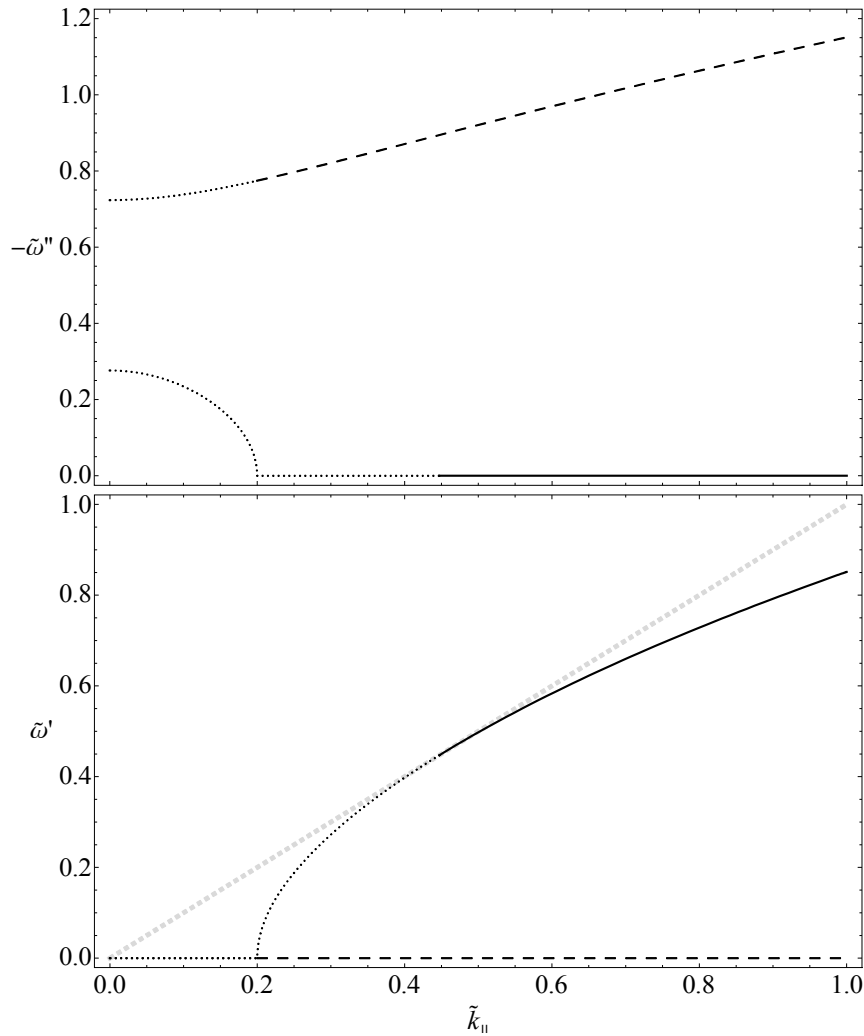
Z Rys. 1.1 można wnioskować, że jakościowa zmiana charakteru relacji dyspersji wystąpi dla $\tilde{\beta} = 0.5$ oraz $\tilde{\beta} = 0.25$ i rzeczywiście widać to na Rys. 1.3–1.5. Prawdziwą falę powierzchniową (linia ciągła) można teraz łatwo odróżnić od rezonansów powierzchniowych (linia kreskowana), gdyż te ostatnie posiadają niezerową część urojoną częstości. Rozwiązania niefizyczne oznaczono linią kropkowaną.

Rozwiązanie fizyczne dla $\tilde{\beta} > 0.5$ przedstawia falę powierzchniową, której relacja dyspersji na Rys. 1.3 jest górną gałęzią dla $\tilde{k}_{||} > \sqrt{\tilde{\beta}}$, oraz falę ciekącą dla $\tilde{k}_{||}^2 < \tilde{\beta} - \frac{1}{4}$, przy czym należy zwrócić uwagę, że fragment relacji dyspersji fali ciekącej znajduje się poniżej dolnej granicy pasma objętościowego. Jest to więc poddźwiękowa fala ciekąca (*subsonic leaky wave*).

Dla $0.25 < \tilde{\beta} < 0.5$ (jak na Rys. 1.4) również mamy falę powierzchniową dla $\tilde{k}_{||} > \sqrt{\tilde{\beta}}$ oraz falę ciekącą dla $\tilde{k}_{||}^2 < \tilde{\beta} - \frac{1}{4}$, ale teraz relacja dyspersji dla fali ciekącej nie ulega już bifurkacji w punkcie, w którym $\tilde{\omega}' > 0$. Gdy $\tilde{\beta} < 0.25$ (jak na Rys. 1.5) nie dostajemy już rozwiązań typu fala ciekąca z dodatnią częścią rzeczywistą $\tilde{\omega}$ a jedynie falę powierzchniową dla $\tilde{k}_{||} > \sqrt{\tilde{\beta}}$.

Dla przypadku granicznego $\tilde{\beta} = 0.5$ zależność $\tilde{\omega}'$ od $\tilde{k}_{\parallel}$ jest podobna jak na Rys. 1.4 z tym, że łuki krzywych zbiegają się na osi w jednym punkcie $\tilde{k}_{\parallel} = 0.5$. Zależność $\tilde{\omega}''$ od $\tilde{k}_{\parallel}$ jest podobna zaś jak na Rys. 1.3 z tym, że tu też łuki krzywych zbiegają się na osi w jednym punkcie $\tilde{k}_{\parallel} = 0.5$. Przypadek $\tilde{\beta} = 0.25$ odpowiada granicznemu $\tilde{\beta}$, od którego przestajemy otrzymywać łuki krzywych kreskowanych po lewej stronie panelu dolnego i górnego Rys. 1.4.

Występujące na Rys. 1.3–1.5 rozwiązania z $\tilde{\omega}' = 0$ i $\tilde{\omega}'' < 0$ są skrajnymi przykładami poddźwiękowych rezonansów powierzchniowych zanikającymi w czasie z pojedynczym czasem relaksacji $\tau = 1/\tilde{\omega}''$ bez oscylacji.



Rys. 1.5 Część rzeczywista i urojona częstości dla $\tilde{\beta} = 0.2$. Oznaczenia jak na Rys. 1.3.

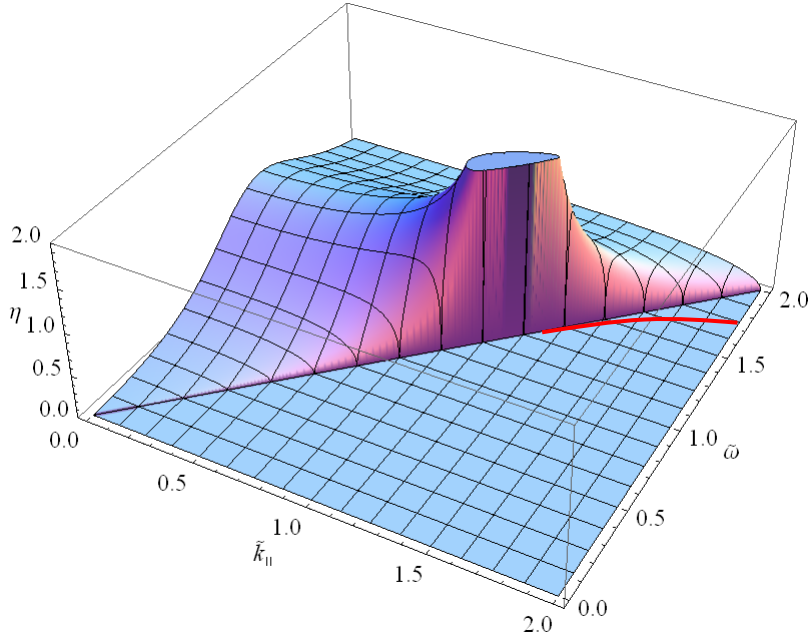
1.5 Lokalna gęstość stanów

Znaczenie fizyczne otrzymanych rozwiązań najłatwiej prześledzić wyznaczając reakcję układu na jednostkową siłę oscylującą $f = f_0 e^{-i\omega t + i k_{\parallel} x}$ przyłożoną do krawędzi rozpatrywanej membrany. Wielkość $\text{Im}(u_0/f_0)$ jest wówczas proporcjonalna do lokalnej gęstości stanów η [21].

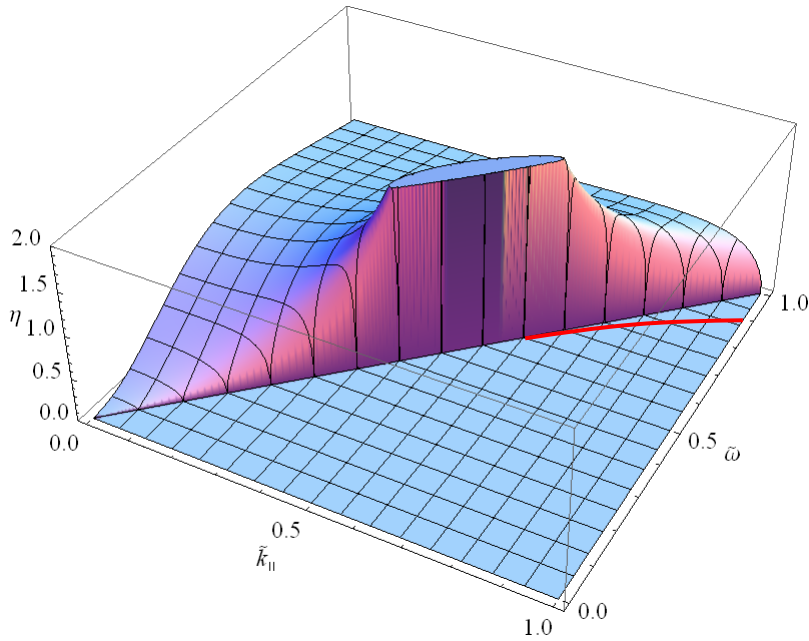
$$\eta(\tilde{\omega}) \sim \tilde{\omega} \operatorname{Im} \left(\frac{u_0}{f_0} \right) = \tilde{\omega} \operatorname{Im} \left(\frac{1}{\tilde{\beta} - \tilde{\omega}^2 - i \sqrt{\tilde{\omega}^2 - \tilde{k}_{\parallel}^2}} \right) \quad (1.18)$$

Powyżej został uwzględniony znak odpowiadający $\tilde{k}'_{\perp} \geq 0$.

Rys. 1.6 i Rys. 1.7 wskazują, że fala ciekąca wewnątrz obszaru radiacyjnego odpowiada wyraźnemu maksimum gęstości stanów. Poza pasmem radiacyjnym lokalna gęstość stanów przyjmuje wartość nieskończoną (δ -Diraca) dla fal powierzchniowych, co zaznaczono grubą czerwoną linią na Rys. 1.6 i Rys. 1.7.



Rys. 1.6 Lokalna gęstość stanów powierzchniowych przy $\tilde{\beta} = 1.5$



Rys. 1.7 Lokalna gęstość stanów powierzchniowych przy $\tilde{\beta} = 0.3$

Kolejnym krokiem w badaniu znaczenia fizycznego otrzymanych rozwiązań jest wprowadzenie tłumienia dla wszystkich stopni swobody. Odpowiada to zanurzeniu całego układu w cieczy o pewnej lepkości. Taka operacja pozwala uwidocznic w lokalnej gęstości stanów maksimum o charakterze delta Diraca w postaci wąskich maksimów lorentzowskich. W istocie każdy układ wielu ciał wykazuje pewne straty energii. Po wprowadzeniu tłumienia równanie ruchu i warunek brzegowy dla naszego układu sprowadzają się do

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - c^2 k_{\parallel}^2 u - \gamma \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (1.19)$$

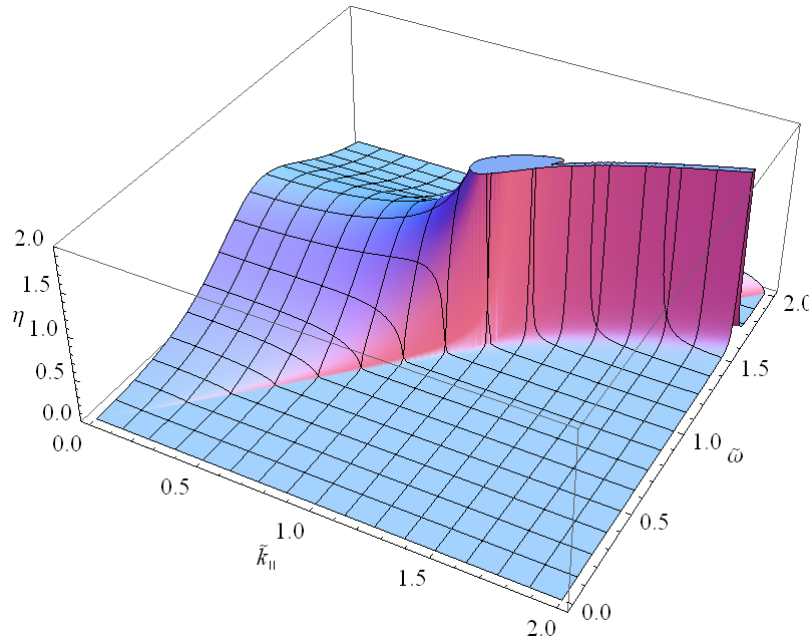
$$\rho_s \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} - \beta u - \gamma \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (1.20)$$

Równania te w reprezentacji częstości i wektora falowego sprowadzają się do

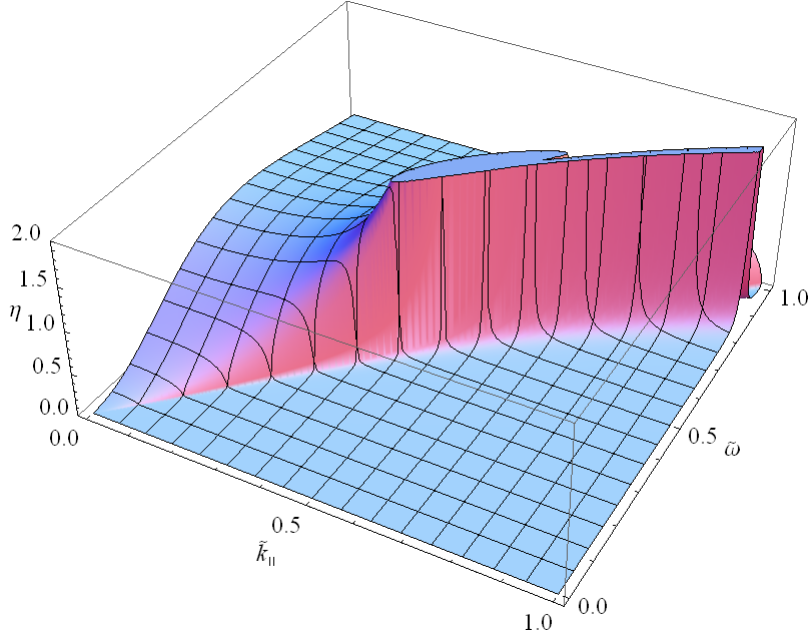
$$\omega^2 = c^2(k_{\perp}^2 + k_{\parallel}^2) - i\omega\gamma, \quad (1.21)$$

$$\beta - \rho_s \omega^2 - ik_{\perp} T - i\omega\gamma = 0. \quad (1.22)$$

Można zauważyć, że dla małego ω'' mamy $(\omega + i\omega'')^2 = \omega^2 + 2i\omega\omega'' + \sigma(\omega''^2)$ czyli wprowadzenie małego tłumienia sprowadza się do dodania do ω małej dodatniej części urojonej tak, że $\omega'' = \gamma/2$. Analogiczne do powyższych związki można napisać dla zmiennych zredukowanych (1.11).



Rys. 1.8 Lokalna gęstość stanów powierzchniowych przy $\tilde{\beta} = 1.5$ i $\tilde{\omega}'' = 0.001$



Rys. 1.9 Lokalna gęstość stanów powierzchniowych przy $\tilde{\beta} = 0.3$ i $\tilde{\omega}'' = 0.001$

Rys. 1.8 i Rys. 1.9 przedstawiają lokalną gęstość stanów przy założeniu $\tilde{\omega}'' = 0.001$. Łatwo zauważyć, że poddźwiękowa fala ciekąca nie objawia się żadną anomalią dla częstości na wykresie gęstości stanów zgadzającej się z częścią rzeczywistą częstości fali ciekącej (niezależnie od $\tilde{k}_{||}$). Oznacza to, że jedynym skutkiem występowania poddźwiękowej fali ciekącej jest pewna zmiana gęstości stanów wewnątrz pasma radiacyjnego. Zgodnie z oczekiwaniami niefizyczna gałąź relacji dyspersji nie wnosi widocznego wkładu do lokalnej gęstości stanów nawet po wprowadzeniu tłumienia.

1.6 Efektywne równanie ruchu warstwy powierzchniowej

Jeśli podłoże nie jest bezdyspersyjne i/lub składowa $k_{||}$ wektora falowego nie jest równa zero to efektywne równanie ruchu powierzchni nie jest równaniem różniczkowym, ale równaniem różniczkowo-całkowym typu Volterry. Przykładowo dla dwuwymiarowego bezdyspersyjnego podłoża zakończonego jednowymiarową gęstością w lokalnym potencjale harmonicznym mamy jak w rozdziale 1.2:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (1.23)$$

$$\rho_s \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} - \beta u + f(t). \quad (1.24)$$

Powyższe równania mogą być rozwiązane w dziedzinie (ω, k) gdy się założy $f(t) = f_0 e^{-i\omega t + ik_{||}x}$ oraz $u = u_0 e^{-i\omega t + ik_{||}x}$. Uzyskujemy wtedy zależność:

$$\left(-\rho_s \omega^2 - iT \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_{\parallel}^2} + \beta\right) u_0 = f_0. \quad (1.25)$$

Równanie powyższe może być przetransformowane do dziediny czasu:

$$\rho_s \frac{\partial^2 u(t)}{\partial t^2} + \int_{-\infty}^t K(t-t') u(t') dt' + \beta u(t) = f(t), \quad (1.26)$$

gdzie $u(t) = u(t, y = 0)$ (zależność od x jest dana przez $e^{ik_{\parallel}x}$)

1.6.1 Jądro całkowe $K(\tau)$

Aby wyznaczyć jądro $K(\tau)$ z równania (1.26) należy skorzystać z faktu, że dla $u(t, x, y) = u_0 e^{-i\omega t + ik_{\parallel}x + ik_{\perp}y}$ równanie to ma postać (1.25), tzn.

$$\int_{-\infty}^t K(t-t') u_0 e^{-i\omega t' + ik_{\parallel}x} dt' = -iT u_0 e^{-i\omega t + ik_{\parallel}x} \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_{\parallel}^2}. \quad (1.27)$$

Po zamianie zmiennych $\xi = t - t'$ i prostych przekształceniach otrzymujemy

$$\int_0^{+\infty} K(\xi) e^{i\omega \xi} d\xi = -i \frac{T}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}, \quad (1.28)$$

gdzie $\omega_0 = ck_{\parallel}$.

Widać, że całkę po lewej stronie możemy traktować jako transformatę Laplace'a funkcji $K(\xi)$ tak że mamy

$$\mathcal{L}\{K(\xi)\} = \omega_0 \frac{T}{c} \sqrt{\frac{p^2}{\omega_0^2} + 1}, \quad (1.29)$$

gdzie $p = -i\omega$.

Wprowadzając $\tilde{K}(\xi) = \frac{K(\xi/\omega_0)}{\omega_0^2 T/c}$ otrzymujemy

$$\mathcal{L}\{\tilde{K}(\xi)\} = \sqrt{p^2 + 1}. \quad (1.30)$$

Korzystając z

$$\sqrt{p^2 + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)_n p^{1-2n} = p + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)_n p^{1-2n} \quad (1.31)$$

otrzymujemy

$$\tilde{K}(\xi) = \mathcal{L}^{-1}\{\sqrt{p^2 + 1}\} = \mathcal{L}^{-1}\{p\} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)_n \mathcal{L}^{-1}\{p^{1-2n}\}, \quad (1.32)$$

co dalej sprowadza się do

$$\begin{aligned}\tilde{K}(\xi) &= \delta'(\xi) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)_n \frac{\xi^{2n-2}}{\Gamma(2n-1)} \\ &= \delta'(\xi) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(n+2)\Gamma(2n+1)\Gamma(\frac{1}{2}-n)} \xi^{2n},\end{aligned}\tag{1.33}$$

gdzie $\Gamma(n)$ jest tutaj funkcją gamma Eulera.

Po prostych przekształceniach otrzymujemy

$$\tilde{K}(\xi) = \delta'(\xi) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{-1-2n}}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+2)} \xi^{2n}.\tag{1.34}$$

Iloczyn ξ i drugiego wyrazu powyższego wyrażenia jest rozwinięciem funkcji Bessela pierwszego rodzaju a więc dostajemy

$$\tilde{K}(\xi) = \delta'(\xi) + \frac{J_1(\xi)}{\xi},\tag{1.35}$$

czyli ostatecznie

$$K(\tau) = \omega_0^2 \frac{T}{c} \left(\delta'(\omega_0 \tau) + \frac{J_1(\omega_0 \tau)}{\omega_0 \tau} \right) = \frac{T}{c} \left(\delta'(\tau) + \omega_0 \frac{J_1(\omega_0 \tau)}{\tau} \right).\tag{1.36}$$

W ten sposób udowodniliśmy, że efektywne równanie ruchu warstwy powierzchniowej przyjmuje postać różniczkowo-całkowego równania typu Volterry. Obecność jądra całkowego oznacza, że na chwilowy stan warstwy powierzchniowej ma wpływ jej stan we wszystkich chwilach poprzedzających.

Wyjątek stanowi tu przypadek $k_{\parallel} = 0$, tj. $\omega_0 = 0$, w którym jądro całkowe sprowadza się do pochodnej z delty Diraca

$$K(\tau) = \frac{T}{c} \delta'(\tau).\tag{1.37}$$

Efektywne równanie ruchu warstwy powierzchniowej przyjmuje wtedy postać równania różniczkowego

$$\rho_s \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{T}{c} \frac{\partial u}{\partial t} + \beta u = f(t).\tag{1.38}$$

Odprowadzanie energii z warstwy powierzchniowej za pośrednictwem fal objętościowych wyraża się tu poprzez siłę oporu (tłumienie) proporcjonalną i przeciwną do chwilowej prędkości warstwy powierzchniowej ze stałą tłumienia T/c .

1.6.2 Przypadek $k_{\parallel} = 0$

Dla $k_{\parallel} = 0$ równanie ruchu (1.26) ma postać równania różniczkowego zwyczajnego (1.38), które daje się rozwiązać standardowymi metodami. Siła wymuszająca o częstotliwości ω_A zostaje przyłożona do powierzchni układu w chwili $t = 0$, tak że $f(t) = f_0 \theta(t) e^{-i\omega_A t}$.

Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego jest postaci

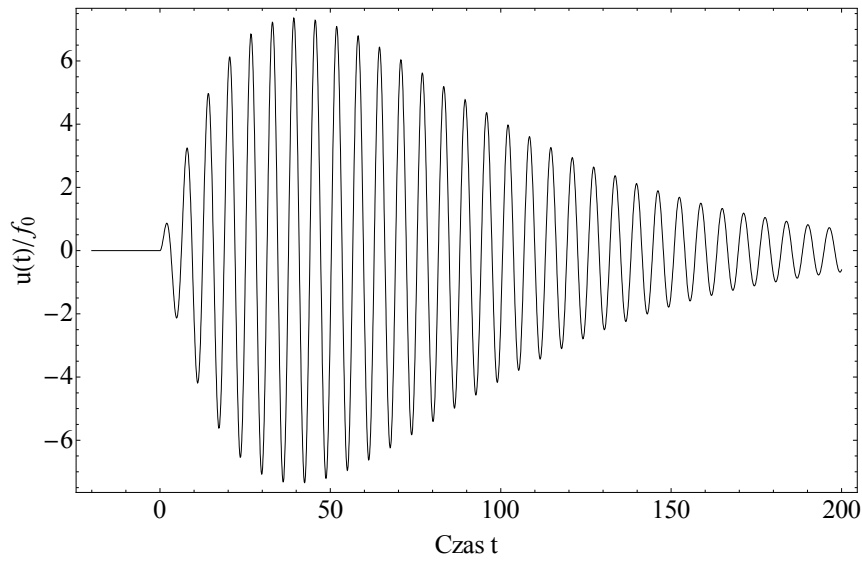
$$u = C_1 e^{-i\omega_+ t} + C_2 e^{-i\omega_- t}, \quad (1.39)$$

gdzie

$$\omega_{\pm} = \frac{1}{2\rho_s} \left(\pm \sqrt{4\beta\rho_s - (T/c)^2} - iT/c \right). \quad (1.40)$$

Poniższe rozwiązanie szczególne (1.41) równania (1.38) dla częstości wymuszającej ω_A równej częstości rezonansowej ω_+ jest równocześnie rozwiązaniem ogólnym dla warunków początkowych $u(0) = 0$ i $u'(0) = 0$ ze względu na to, że wtedy $C_1 = C_2 = 0$.

$$u(t) = f_0 \theta(t) \left(\rho_s \frac{e^{-i\omega_+ t} - e^{-i\omega_- t}}{4\beta\rho_s - (T/c)^2} + it \frac{e^{-i\omega_+ t}}{\sqrt{4\beta\rho_s - (T/c)^2}} \right). \quad (1.41)$$



Rys. 1.10 Wychylenie od czasu dla $\beta/\rho_s = 1$ i $T/(c\rho_s) = 0.05$.

1.7 Reakcja modelu powierzchni na oscylujące oddziaływanie zewnętrzne

Metody rozwiązywania równań różniczkowo-całkowych nie są tak powszechnie znane jak dla równań różniczkowych, których rozwiązywanie jest często zadaniem dużo łatwiejszym. W rozpatrywanym przypadku wykorzystano fakt, że w dziedzinie częstości część całkowa równania ruchu warstwy powierzchniowej sprowadza się do stosunkowo prostego wyrażenia (patrz równanie (1.25)).

Najbardziej interesującym zagadnieniem jest tu reakcja naszego układu na oddziaływanie zewnętrzne (siłę) oscylujące z zadaną częstością ω_A , ogólnie zespoloną, która to częstość może w szczególnym przypadku przyjąć wartość odpowiadającą rezonansowi powierzchniowemu (wartość zespolona) lub stanowi powierzchniowemu (wartość rzeczywista). Znalazienie rozwiązania równania ruchu z takim oddziaływaniem zewnętrznym pozwoli lepiej zrozumieć fizyczne znaczenie „fal ciekących”, których amplituda formalnie wzrasta do nieskończoności przy poruszaniu się w głąb materiału od jego powierzchni (patrz równanie (1.5) z $k_{\perp}'' < 0$).

Przyjmujemy zatem prawą stronę równania (1.26) w postaci

$$f(t) = f_0 \theta(t) e^{-i\omega_A t}, \quad (1.42)$$

przy czym chwila $t = 0$ odpowiada momentowi włączenia oddziaływania. Aby przejść do dziedziny ω rozkładamy tę funkcję na składowe fourierowskie $A(\omega)$, tzn. na fale monochromatyczne

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (1.43)$$

skąd otrzymujemy (dla ω_A z niezerową częścią urojoną)

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt = \frac{if_0}{\sqrt{2\pi}(\omega - \omega_A)}. \quad (1.44)$$

Zgodnie z równaniem (1.25) amplitudę drgań powierzchni dla pojedynczego wymuszenia monochromatycznego o częstotliwości ω i amplitudzie $A(\omega)$ można przedstawić wzorem

$$u_0(\omega) = \frac{A(\omega)}{-\rho_s \omega^2 - iT \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_{\parallel}^2} + \beta}. \quad (1.45)$$

Takie drganie rozchodzi się w ośrodku w postaci fali płaskiej o wektorze falowym

$$k_{\perp} = \begin{cases} \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_{\parallel}^2} & \text{dla } \omega > k_{\parallel} c \\ i \sqrt{k_{\parallel}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} & \text{dla } \omega < k_{\parallel} c \end{cases}. \quad (1.46)$$

Należy podkreślić, że gdy częstotliwość ω jest mniejsza niż częstotliwość dolnej granicy pasma fal objętościowych $\omega_0 = ck_{\parallel}$, wektor falowy $k_{\perp}$ jest czysto urojony, przy czym znak pierwiastka musi być dodatni dla zapobieżenia nieskończonemu wzrostowi amplitudy w granicy dużych odległości od powierzchni, tj. gdy $y \rightarrow +\infty$.

Zatem reakcja naszego układu na przyłożone do niego wymuszenie $f(t) = f_0 \theta(t) e^{-i\omega_A t}$ wyraża się w chwili t i na głębokości y następującą całką:

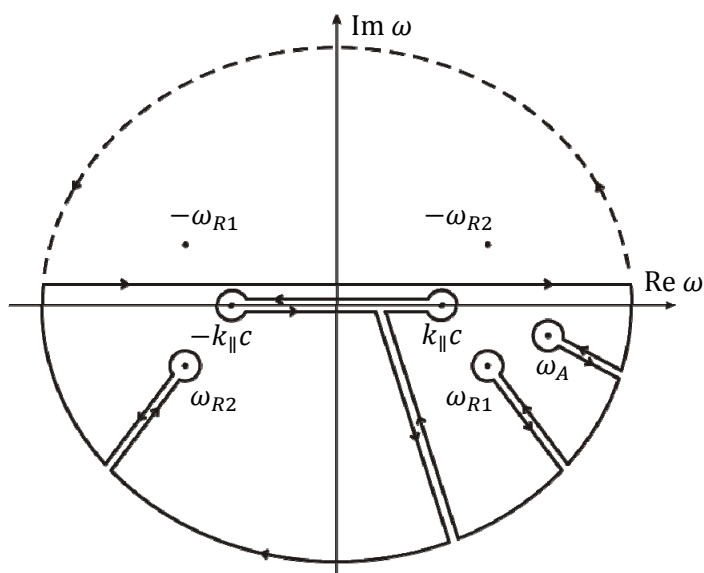
$$\begin{aligned} u(y, t) &= \frac{if_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega t + ik_{\perp}(\omega)y}}{(\omega - \omega_A)(\beta - \rho_s \omega^2 - iT k_{\perp}(\omega))} d\omega \\ &= \frac{if_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega t + ik_{\perp}(\omega)y} (\beta - \rho_s \omega^2 + iT k_{\perp}(\omega))}{(\omega - \omega_A)((\beta - \rho_s \omega^2)^2 + T^2 k_{\perp}^2(\omega))} d\omega. \end{aligned} \quad (1.47)$$

W celu obliczenia tej całki warto rozłożyć mianownik wyrażenia podcałkowego na iloczyn

$$\rho_s^2 (\omega - \omega_A)(\omega - \omega_{R1})(\omega - \omega_{R2})(\omega + \omega_{R1})(\omega + \omega_{R2}), \quad (1.48)$$

w którym ω_{R1} i ω_{R2} są pierwiastkami wielomianu $(\beta - \rho_s \omega^2)^2 + T^2 k_{\perp}^2(\omega)$ spełniającymi warunek $\text{Im } \omega_{R1} < 0$ i $\text{Im } \omega_{R2} < 0$. Warto zauważyć, że gdy $\text{Re } \omega_{R1} \neq 0$, to $\text{Re } \omega_{R1} = -\text{Re } \omega_{R2}$ oraz $\text{Im } \omega_{R1} = \text{Im } \omega_{R2} < 0$. W takich przypadkach przyjmujemy, że $\text{Re } \omega_{R1} > 0$. Wówczas częstość $\omega_{R1} = \text{Re } \omega_{R1} + i \text{Im } \omega_{R1}$ jest częstością rezonansu powierzchniowego.

Całkę z równania (1.47) można obliczyć używając przedłużenia analitycznego funkcji podcałkowej na płaszczyznę zespolonej częstości ω . Osobliwości funkcji podcałkowej przedstawia Rys. 1.11.



Rys. 1.11 Osobliwości funkcji podcałkowej z wyrażenia (1.47) oraz kontury całkowania.

Gdy $t < y/c$, poszukiwana całka jest równa całce po konturze zaznaczonym na Rys. 1.11 linią przerywaną, tj. po półokręgu o promieniu dążącym do nieskończoności na górnej półpłaszczyźnie ω . Występują tam dwa miejsca zerowe mianownika funkcji podcałkowej ze wzoru (1.47). Łatwo jednak sprawdzić, że są to jednocześnie miejsca zerowe licznika tej funkcji podcałkowej. W konsekwencji funkcja podcałkowa jest analityczna w całej górnej półpłaszczyźnie ω i całka ze wzoru (1.47) jest równa zero dla $t < y/c$, co oczywiście zgadza się z wymaganiem przyczynowości: wystąpienie reakcji w danym miejscu nie może wyprzedzać sygnału.

Kiedy $t > y/c$ należy użyć konturu zaznaczonego na Rys. 1.11 linią ciągłą, tj. półokręgu zamkniętego na dolnej półpłaszczyźnie. W tym przypadku funkcja podcałkowa ma trzy bieguny: ω_A , ω_{R1} i ω_{R2} oraz cięcie na osi rzeczywistej zaznaczone w postaci „kości” pomiędzy wartościami $-k_{||}c$ i $+k_{||}c$.

Kiedy wymuszenie będzie mieć częstość rezonansową tj. $\omega_A = \omega_{R1}$, pozostaną tylko dwa residua, przy czym residuum ω_{R1} będzie miało rząd 2.

W tym przypadku

$$u(y, t) = \frac{if_0}{2\pi} \theta\left(t - \frac{y}{c}\right) (A + B + C), \quad (1.49)$$

gdzie

$$A = -2\pi i e^{-i\omega_{R1}t + ik_{\perp}(\omega_{R1})y} \left(\frac{i \left(-t + \frac{\partial k_{\perp}}{\partial \omega} \Big|_{\omega_{R1}} y \right) (\beta - \rho_s \omega_{R1}^2 + iTk_{\perp}(\omega_{R1}))}{(\omega_{R1} + \omega_{R1})(\omega_{R1} - \omega_{R2})(\omega_{R1} + \omega_{R2})} + \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{\beta - \rho_s \omega^2 + iTk_{\perp}(\omega)}{(\omega + \omega_{R1})(\omega - \omega_{R2})(\omega + \omega_{R2})} \right) \Big|_{\omega_{R1}} \right), \quad (1.50)$$

$$B = -2\pi i e^{-i\omega_{R2}t + ik_{\perp}(\omega_{R2})y} \frac{(\beta - \rho_s \omega_{R2}^2 + iTk_{\perp}(\omega_{R2}))}{(\omega_{R2} - \omega_{R1})^2(\omega_{R2} + \omega_{R1})(\omega_{R2} + \omega_{R2})}, \quad (1.51)$$

$$C = - \int_{-k_{\parallel}c}^{k_{\parallel}c} \frac{e^{-i\omega t - \sqrt{k_{\parallel}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}y} \left(\beta - \rho_s \omega^2 - T \sqrt{k_{\parallel}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \right)}{(\omega - \omega_{R1})^2(\omega + \omega_{R1})(\omega - \omega_{R2})(\omega + \omega_{R2})} - \frac{e^{-i\omega t + \sqrt{k_{\parallel}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}y} \left(\beta - \rho_s \omega^2 + T \sqrt{k_{\parallel}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \right)}{(\omega - \omega_{R1})^2(\omega + \omega_{R1})(\omega - \omega_{R2})(\omega + \omega_{R2})} d\omega. \quad (1.52)$$

Problem znacznie się upraszcza dla $k_{\parallel} = 0$:

$$u(y, t) = \frac{if_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega(t - \frac{y}{c})}}{(\omega - \omega_{R1})(\beta - \rho_s \omega^2 - i\omega T/c)} d\omega. \quad (1.53)$$

W tym przypadku efektywne równanie ruchu ma postać równania oscylatora tłumionego (1.38) ze stałą tłumienia T/c równą impedancji falowej a powyższe wyrażenie sprowadza się do (1.41).

Reakcja na przyłożone wymuszenie w postaci tłumionej funkcji wykładniczej składa się z wyrazu tłumionego oraz z wyrazu przemieszczającego się w głąb materiału z prędkością c bez zmiany kształtu. Ten drugi wyraz odpowiada rozwiązaniu d'Alemberta występującemu zawsze w ośrodku bezdyspersyjnym.

Dla $k_{\parallel} \neq 0$ rozwiązanie dane jest wzorem (1.49). Występują w nim wyrazy tłumione oraz „wkład od kości”. Ten ostatni można oszacować dla $y = 0$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{MaxM} \int_{-k_{\parallel}c}^{k_{\parallel}c} T e^{-i\omega t} \sqrt{k_{\parallel}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} d\omega \\ & < \int_{-k_{\parallel}c}^{k_{\parallel}c} \frac{T e^{-i\omega t} \sqrt{k_{\parallel}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}}{(\omega - \omega_{R1})^2(\omega + \omega_{R1})(\omega - \omega_{R2})(\omega + \omega_{R2})} d\omega \\ & < \frac{1}{MinM} \int_{-k_{\parallel}c}^{k_{\parallel}c} T e^{-i\omega t} \sqrt{k_{\parallel}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} d\omega, \end{aligned} \quad (1.54)$$

gdzie $MaxM$ i $MinM$ są odpowiednio największą i najmniejszą wartością bezwzględną mianownika na odcinku $-k_{\parallel}c < \omega < k_{\parallel}c$, zaś całki po lewej i prawej stronie nierówności (1.54) wynoszą

$$\int_{-k_{\parallel}c}^{k_{\parallel}c} T e^{-i\omega t} \sqrt{k_{\parallel}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} d\omega = \pi T k_{\parallel} \frac{J_1(k_{\parallel}ct)}{t}. \quad (1.55)$$

Jak widać, jest to również wielkość zanikająca w czasie.

Przyłożenie zewnętrznej siły do powierzchni z częstotliwością (również zespoloną) odpowiadającą rezonansowi powierzchniowemu (poddźwiękowa lub naddźwiękowa fala ciekąca) daje stosunek wychylenia warstwy powierzchniowej do amplitudy przyłożonej siły rosnący do nieskończoności dla długich czasów w analogii do prawdziwej fali powierzchniowej. Jednakże dla zespolonych częstotliwości amplituda wychylenia maleje w czasie ponieważ amplituda siły wymuszającej również dąży do zera w sposób wykładniczy. Maksimum wychylenia w domenie czasu odpowiada czasowi życia rezonansu powierzchniowego. Przestrzenna obwiednia fali ciekącej uzyskana przy stymulacji o częstotliwości dostosowanej do rezonansu powierzchniowego jest bezpośrednio dana przez zmianę zmiennej typu d'Alemberta w przypadku ośrodka wykazującego liniową relację dyspersji bez przerwy na osi częstotliwości. W przeciwnym wypadku ogólny kształt będzie jakościowo podobny, ale zdeformowany ze względu na dyspersję prędkości fali.

Poddźwiękowe fale powierzchniowe znalezione zostały również przez autora w modelu ośrodka sprężystego z cylindrycznym wydrążeniem, co jest pierwszym przybliżeniem dla problemu fal powierzchniowych w tętnicach. Model ten został opisany w rozdziale 2. Fizyczna manifestacja poddźwiękowych fal ciekących jako dodatkowa gęstość stanów w obszarach bliskich granicy pasma objętościowego może być ważna dla fizjologicznych funkcji ścian naczyń tętniczych podobnie jak ważne mogą być mody objętościowe (*bulk modes*) po stronie cieczy i ciała stałego na granicy ośrodków krew-ściana naczynia. W rozdziale 4 podjęta została próba opisu modów występujących w układzie ciecz-elastyczna rura-wiskoelastyczne otoczenie.

Rozdział 2

Fale i rezonanse powierzchniowe na wewnętrznej powierzchni cylindrycznego wydrążenia w nieskończonym trójwymiarowym izotropowym ośrodku sprężystym

Model rozpatrywany w poprzednim rozdziale zakłada najprostszą z możliwych geometrii, tj. geometrię powierzchni płaskiej. W obecnym rozdziale zostaną przedstawione wyniki dotyczące dynamiki powierzchni wewnętrznej cylindrycznego wydrążenia w nieskończonym izotropowym ośrodku sprężystym. Taka geometria jest najprostszym przybliżeniem ściany naczynia krwionośnego. Nieskończona grubość ściany pozwala łatwo odróżnić fale powierzchniowe od fal objętościowych. Głównym celem obliczeń przedstawionych w tym rozdziale jest zbadanie wpływu ilorazu Poissona ośrodka na dynamikę omawianego układu. Motywacją podjęcia tych badań jest fakt, że do wytwarzania protez tętniczych stosuje się auksetyki tj. materiały o ujemnym współczynniku Poissona [3]. Dynamika wewnętrznej powierzchni naczynia może mieć istotny wpływ na tworzenie się lub zapobieganie tworzeniu się blaszki miażdżycowej [22, 23]. Opisany w rozdziale 2.1 model jest wariantem modelu cylindrycznej rury znanego z publikacji Gazisa [24, 25]. Podstawowa różnica polega na przyjęciu nieskończonej grubości ściany. Eliminuje to automatycznie fale odbite od powierzchni zewnętrznej rury. W praktyce ściana naczynia ma budowę warstwową i jest złożona z warstw o różnych wartościach parametrów lepkosprężystych, a samo naczynie jest zwykle zanurzone w jeszcze innym ośrodku, np. płynie mózgowo-rdzeniowym lub tkance mięśniowej. Z tego powodu na jego wewnętrznej powierzchni pojawiają się fale częściowo odbite od granic poszczególnych warstw. Problem ten jednak wykracza poza ramy tej pracy, podobnie jak zbadanie wpływu cieczy wypełniającej naczynie, który dotychczas został rozwiązany dla dość uproszczonego modelu (por. rozdział 4).

Mimo swojej prostoty obecny model dostarcza ciekawych wyników, z których najważniejszymi są stwierdzenie, że fala, której w geometrii płaskiej odpowiada fala Rayleigha, w obszarze fal długich staje się falą objętościową „muskającą” powierzchnię (*surface skimming bulk wave*), oraz stwierdzenie obecności poddźwiękowych fal ciekących. Należy podkreślić, że te ostatnie są tu wyłącznie wynikiem geometrii cylindrycznej w odróżnieniu od analogicznego zjawiska opisywanego w pracy [4] na granicy rozdziału ośrodek sprężysty – ciecz doskonała.

2.1 Model

Rozważamy trójwymiarowy izotropowy ośrodek sprężysty, dla którego równania ruchu [26] mogą być przedstawione w postaci:

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (2.1)$$

gdzie $\mathbf{u}$ jest wektorem przemieszczenia elementu ośrodka, ρ jest gęstością ośrodka, μ i λ są współczynnikami Lamégo, a ∇^2 jest operatorem Laplace'a tutaj działającym na wektor. Pole wektorowe $\mathbf{u}$ możemy rozłożyć na część bezwirową i część bezźródłową:

$$\mathbf{u} = \nabla \varphi + \nabla \times \boldsymbol{\Psi}. \quad (2.2)$$

Ze względu na niezmienniczość cechowania dywergencja pola wektorowego $\boldsymbol{\Psi}$ może być dowolną funkcją F położenia i czasu

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\Psi} = F(r, t). \quad (2.3)$$

Po wstawieniu (2.2) do (2.1) okazuje się, że nowa reprezentacja (2.2) pola przemieszczenia spełnia równanie ruchu jeśli φ i $\boldsymbol{\Psi}$ spełniają równania falowe

$$c_L^2 \nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad c_T^2 \nabla^2 \boldsymbol{\Psi} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{\Psi}}{\partial t^2}, \quad (2.4)$$

gdzie

$$c_L^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad c_T^2 = \frac{\mu}{\rho} \quad (2.5)$$

są kwadratami prędkości podłużnych i poprzecznych fal akustycznych.

Podstawiając do równań (2.4) rozwiązania próbne o odpowiedniej symetrii w postaci:

$$\varphi = f(r) \cos n\theta e^{-i\omega t + ikz}, \quad (2.6)$$

$$\psi_r = g_r(r) \sin n\theta e^{-i\omega t + ikz},$$

$$\psi_\theta = g_\theta(r) \cos n\theta e^{-i\omega t + ikz}, \quad (2.7)$$

$$\psi_z = g_z(r) \sin n\theta e^{-i\omega t + ikz}$$

otrzymujemy równania Bessela

$$\mathcal{B}_{n,\alpha r}[f] = 0, \quad \mathcal{B}_{n,\beta r}[g_3] = 0, \quad (2.8)$$

$$\mathcal{B}_{n+1,\beta r}[g_r - g_\theta] = 0, \quad \mathcal{B}_{n-1,\beta r}[g_r + g_\theta] = 0,$$

gdzie $\mathcal{B}_{n,x} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} - \left(\frac{n^2}{x^2} - 1\right)$ oraz

$$\alpha^2 = \frac{\omega^2}{c_L^2} - k^2, \quad \beta^2 = \frac{\omega^2}{c_T^2} - k^2. \quad (2.9)$$

Ogólne rozwiązania równań Bessela (2.8) mają postać $AJ_n(x) + BY_n(x)$, a więc są kombinacjami liniowymi funkcji Bessela pierwszego i drugiego rodzaju. W rozważanym zagadnieniu wygodniej jednak posługiwać się innymi liniowo niezależnymi rozwiązaniami równania Bessela – funkcjami Hankela:

$$\begin{aligned} H_n^{(1)}(x) &= J_n(x) + iY_n(x), \\ H_n^{(2)}(x) &= J_n(x) - iY_n(x). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Rozpatrując postać asymptotyczną funkcji Hankela pierwszego i drugiego rodzaju: $H_n^{(1)}$ i $H_n^{(2)}$ w granicy dużych r łatwo się przekonać, że $H_n^{(1)}$ odpowiada falam o symetrii cylindrycznej przemieszczającym się od osi $r = 0$, zaś $H_n^{(2)}$ falam wędrującym ku osi $r = 0$.

Rozwiązanie równań (2.8) można więc przedstawić w postaci

$$\begin{aligned} f(r) &= AH_n^{(1)}(\alpha r) + BH_n^{(2)}(\alpha r), \\ g_r(r) &= A_1 H_{n+1}^{(1)}(\beta r) + B_1 H_{n+1}^{(2)}(\beta r), \\ g_\theta(r) &= -A_1 H_{n+1}^{(1)}(\beta r) - B_1 H_{n+1}^{(2)}(\beta r), \\ g_z(r) &= A_3 H_n^{(1)}(\beta r) + B_3 H_n^{(2)}(\beta r). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Powyżej wykorzystano fakt, że ze względu na niezmienniczość cechowania jedna składowa potencjału Ψ może być wyznaczona jako kombinacja dwóch pozostałych składowych tak, że można pokazać, że bez straty ogólności rozwiązania możemy przyjąć $g_r = -g_\theta$.

Przemieszczenia można wyznaczyć korzystając ze związków (2.2) i (2.3) i z wyrażeń na gradient i rotację we współrzędnych cylindrycznych:

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_z}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi_\theta}{\partial z}, \\ u_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi_r}{\partial z} - \frac{\partial \psi_z}{\partial r}, \\ u_z &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r\psi_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_r}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

W celu znalezienia wyrażeń na naprężenie w rozważanym ośrodku korzystamy z relacji między odkształceniami i przemieszczeniami, które we współrzędnych cylindrycznych przyjmują postać [27]:

$$\begin{aligned} \epsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \epsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right), \\ \epsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (2.13)$$

oraz uogólnionego prawa Hooke'a, które stanowi liniową relację między odkształceniami i naprężeniami

$$\sigma_{rr} = 2\mu\epsilon_{rr} + \lambda\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right), \quad (2.14)$$

$$\sigma_{rz} = 2\mu\epsilon_{rz}, \quad \sigma_{r\theta} = 2\mu\epsilon_{r\theta}.$$

Jawna postać wyrażeń na naprężenia w układzie współrzędnych cylindrycznych po uwzględnieniu próbných rozwiązań jest następująca:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \left\{ -\lambda(\alpha^2 + k^2)f + 2\mu\left(f'' + \frac{n}{r}\left(g'_3 - \frac{g_3}{r}\right) + kg'_1\right) \right\} \cos n\theta e^{-i\omega t + ikz}, \\ \sigma_{rz} &= \mu\left\{ -2kf' - \frac{n}{r}\left(g'_1 + g_1\frac{n+1}{r}\right) - g_1(k^2 - \beta^2) - \frac{nk}{r}g_3 \right\} \cos n\theta e^{-i\omega t + ikz}, \\ \sigma_{r\theta} &= \mu\left\{ -\frac{2n}{r}\left(f' - \frac{f}{r}\right) - (2g''_3 + \beta^2 g_3) - k\left(\frac{n+1}{r}g_1 - g'_1\right) \right\} \sin n\theta e^{-i\omega t + ikz}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Do tej pory rozważaliśmy nieograniczony ośrodek sprężysty, ale układ który nas interesuje to cylindryczne wydrążenie w takim ośrodku o promieniu a i osi wzdłuż kierunku z . Gdy wydrążenie jest puste, warunki brzegowe dla takiego układu wyrażają znikanie naprężeń na ścianach wydrążenia. Mają one zatem postać:

$$\sigma_{rr} = \sigma_{rz} = \sigma_{r\theta} = 0 \quad \text{dla } r = a. \quad (2.16)$$

Ze względu na to, że układ jest nieograniczony interesują nas tylko fale rozchodzące się w kierunku na zewnątrz od osi symetrii wydrążenia, a więc ograniczamy się do rozwiązań opisujących takie fale czyli przyjmujemy $B = B_1 = B_3 = 0$. Po tym podstawieniu równania (2.16) sprowadzają się do jednorodnego układu równań liniowych na współczynniki A, A_1 i A_3 , tj. $M_{ij}A_j = 0$, gdzie $i, j = 1, 2, 3$. Macierz tego układu jest następująca:

$$\begin{aligned} M_{11} &= -(2n(1+n) + a^2(k^2 - \beta^2))H_{n-2}(a\alpha) \\ &\quad - 2\left(2n - 2n^3 + a^2(\alpha^2 + (n-1)(\beta^2 - k^2))\right)H_{n-1}(a\alpha)/a\alpha, \\ M_{12} &= 2iak(a\beta H_n(a\beta) - (1+n)H_{n+1}(a\beta)), \\ M_{13} &= 2an\beta H_{n-1}(a\beta) - 2n(1+n)H_n(a\beta), \\ M_{21} &= ia^2k\alpha H'_n(a\alpha), \\ M_{22} &= a^2(k^2 - \beta^2)H_{n-1}(a\beta) + na(\beta^2 - 2k^2)H_n(a\beta)/\beta, \\ M_{23} &= iaknH_n(a\beta), \\ M_{31} &= -2an\alpha H_{n-1}(a\alpha) + 2n(1+n)H_n(a\alpha), \\ M_{32} &= -ia^2k\beta H_{n+2}(a\beta), \\ M_{33} &= (2n(1+n) - a^2\beta^2)H_{n-2}(a\beta) + 2n(2 - 2n^2 + a^2\beta^2)H_{n-1}(a\beta)/a\beta. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Dla $n = 0$ macierz ta znacznie się upraszcza. Ruchy osiowo-radialne ulegają rozprężeniu od ruchów skręcających. Pierwsze wykazują bowiem symetrię względem odbicia w płaszczyznach zawierających oś z , podczas gdy drugie symetrię tę łamią.

Warto zastosować zmienne zredukowane

$$\tilde{k} = \frac{ka}{2\pi}, \quad \tilde{\omega} = \frac{\omega a}{\pi c_T}. \quad (2.18)$$

Dla przejrzystości w dalszej części tego rozdziału $\tilde{k}$ i $\tilde{\omega}$ będę nazywał odpowiednio wektorem falowym i częstotścią bez określenia „zredukowany”.

Korzystając dodatkowo z zależności $\nu = \lambda/(2(\lambda + \mu))$, gdzie ν jest ilorazem Poissona, możemy zapisać iloraz prędkości fazowych fal poprzecznych i podłużnych:

$$\frac{c_T}{c_L} = \sqrt{\frac{\mu}{\lambda + 2\mu}} = \sqrt{\frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)}}. \quad (2.19)$$

W nowych zmiennych równanie

$$\det M(\tilde{\omega}, \tilde{k}) = 0 \quad (2.20)$$

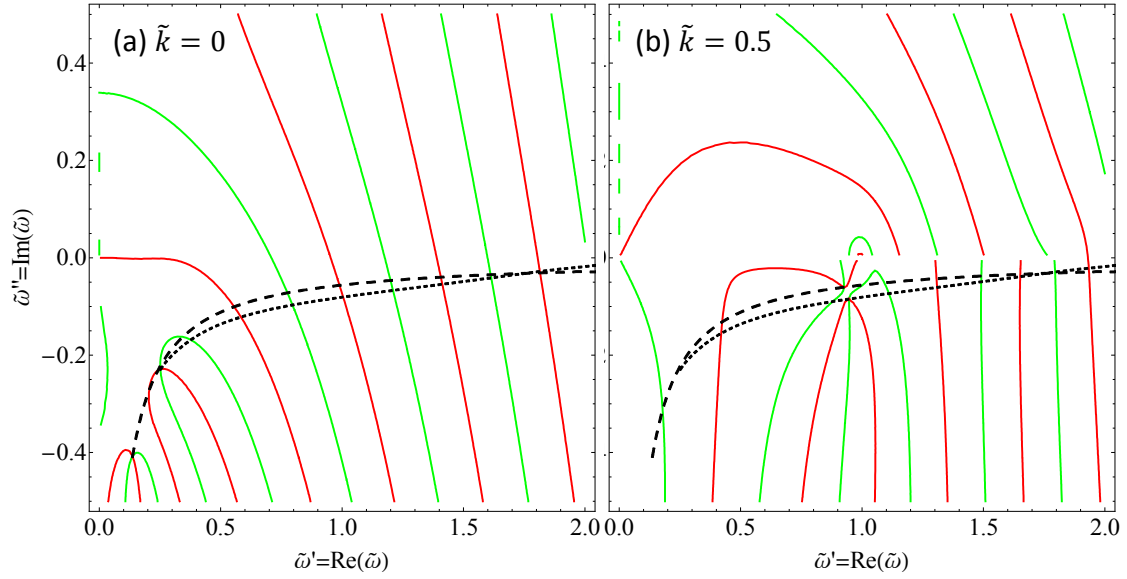
jest sparametryzowane tylko ilorazem Poissona oraz liczbą n .

Kiedy wydrążenie jest nieskończenie długie, dopuszczalne rozwiązania charakteryzują się rzeczywistym wektorem falowym. Rozważamy więc tutaj tylko takie fale, dla których $\tilde{k}$ jest rzeczywiste, jednak $\tilde{\omega}$ może być zespolone. Lewa strona równania (2.20) może również przyjmować wartości zespolone zatem rozwiązaniem tego równania dla danego $\tilde{k}$ i n będzie takie $\tilde{\omega}$, które jednocześnie zeruje część rzeczywistą i urojoną wyznacznika po lewej stronie równania.

2.2 Numeryczne wyznaczanie częstotści fal i rezonansów powierzchniowych

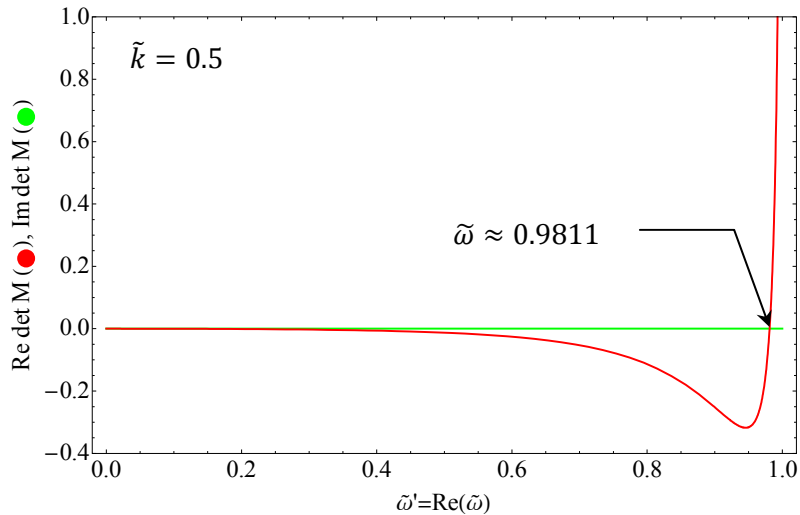
Aby znaleźć częstotść wzbudzeń powierzchniowych należy rozwiązać równanie (2.20) zawierające przestępną funkcję zespoloną argumentu $\tilde{\omega}$ na ogół zespolonego. Jak wiadomo problem znajdowania miejsc zerowych funkcji przestępnych należy do najmniej określonych w matematyce, nie istnieją proste reguły, które by zapewniały istnienie lub określoną liczbę rozwiązań [28].

W obecnym problemie została zastosowana metoda polegająca na śledzeniu miejsc zerowych rzeczywistych funkcji $\text{Re } \det M(\tilde{\omega}, \tilde{k})$ oraz $\text{Im } \det M(\tilde{\omega}, \tilde{k})$ na płaszczyźnie $(\text{Re } \tilde{\omega}, \text{Im } \tilde{\omega})$. Rys. 2.1 przedstawia przykład tej procedury dla zadanego współczynnika Poissona ($\nu = 0.3$) i konkretnych wartości zredukowanego wektora falowego ($\tilde{k} = 0$ i $\tilde{k} = 0.5$). Miejsca zerowe części rzeczywistej są tam oznaczone kolorem czerwonym, a miejsca zerowe części urojonej kolorem zielonym. Punkty przecięcia tych krzywych, o ile istnieją, oznaczają zespolone miejsca zerowe rozważanego wyznacznika. Dodatkowo przerywanymi liniami oznaczono ścieżki, po których podążają rozwiązania zespolone $\tilde{\omega}$ (w tym wypadku dwa) dla rosnącej wartości $\tilde{k}$. W celu wyznaczenia relacji dyspersji należy prześledzić położenia wspomnianych miejsc zerowych dla wartości $\tilde{k}$ z zadanego interesującego nas przedziału. Część rzeczywista częstotści została oznaczona przez $\tilde{\omega}'$ a część urojona przez $\tilde{\omega}''$, tj. $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}' + i\tilde{\omega}''$.



Rys. 2.1 Poziomice odpowiadające zerowaniu się rzeczywistej (kolor czerwony) i urojonej (kolor zielony) części wyznacznika z równania (2.20) otrzymane dla $\tilde{k} = 0$ (a) oraz dla $\tilde{k} = 0.5$ (b). Przecięcia poziomice wyznaczają rozwiązania tego równania. Linie kreskowane i kropkowane odpowiadają ścieżkom, po którym poruszają się rozwiązania zespolone (tutaj dwa) równania (2.20), gdy zmieniamy wartość $\tilde{k}$. Oba rysunki odpowiadają $n = 0$ oraz współczynnikowi Poissona $\nu = 0.3$.

Ponadto dla $\tilde{\omega} < 2\tilde{k}$ jesteśmy poniżej dolnej granicy obszaru radiacyjnego, a więc możemy dostać rozwiązania z rzeczywistym $\tilde{\omega}$ dla fal powierzchniowych. W celu lepszego zobrazowania tych rozwiązań na Rys. 2.2 przedstawiona została wartość rozważanego wyznacznika dla $\tilde{\omega}$ rzeczywistego.



Rys. 2.2 Wartość części rzeczywistej (kolor czerwony) i urojonej (kolor zielony, wartość zerowa) wyznacznika $\det M$ dla częstotści $\tilde{\omega}$ czysto rzeczywistej, poniżej dolnej granicy obszaru radiacyjnego dla $\tilde{k} = 0.5$ i współczynnika Poissona $\nu = 0.3$. Zaznaczono wartość $\tilde{\omega} \approx 0.9811$, dla której wartość wyznacznika wynosi zero.

2.3 Wyniki

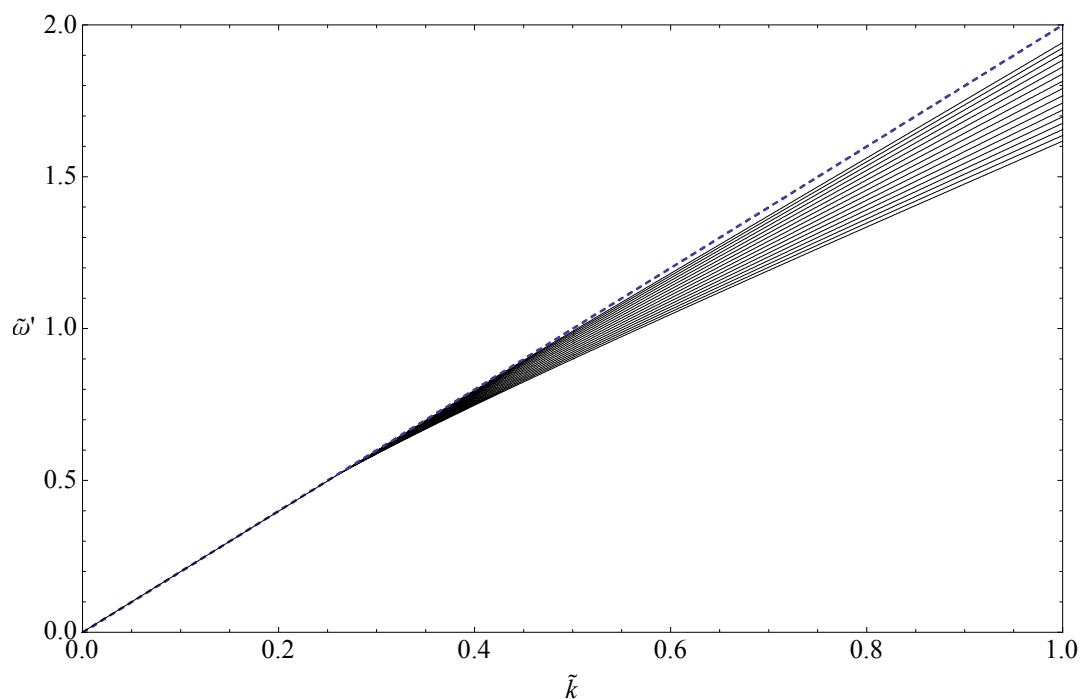
Ze względu na symetrię osiową problemu wzbudzenia powierzchniowe w wydrążonym cylindrze są klasyfikowane przez „azymutalną” liczbę kwantową n . Liczba ta wskazuje liczbę węzłów fal na obwodzie cylindra. Z tego powodu najniżej energetyczne są wzbudzenia odpowiadające najmniejszym wartościom n . W rozważanym modelu dla każdego n dostajemy rozwiązania typu fala powierzchniowa (z rzeczywistą częstością) oraz typu fala ciekająca (z zespoloną częstością)

2.3.1 Prawdziwa fala powierzchniowa

W przypadku płaskiej powierzchni ograniczającej izotropowy ośrodek ciągły jedyną falą powierzchniową jest fala Rayleigha [29]. Polaryzacja tej fali jest eliptyczna i leży w płaszczyźnie wyznaczonej przez wektor falowy $k_{\parallel}$ oraz przez normalną do powierzchni (tzw. płaszczyzna strzałkowa). Prędkość fazowa takiej fali jest niezależna od wektora falowego $k_{\parallel}$ i jest zawsze mniejsza od prędkości fazowej poprzecznych fal objętościowych. Inne fale powierzchniowe w ośrodkach izotropowych mogą występować tylko w przypadku, gdy powierzchnia jest w jakiś sposób zmodyfikowana przez osadzone na niej warstwy. Wśród takich fal wyróżnia się fale o polaryzacji w płaszczyźnie powierzchni, tzw. falę poziomo ścinającą (*shear horizontal*). Kiedy powierzchnia jest jedynie ograniczeniem ośrodka bez modyfikacji ta fala staje się poprzeczną falą objętościową poruszającą się równolegle do powierzchni. Nazywa się ją falą objętościową „muskającą” powierzchnię (*surface skimming bulk wave*) [29]. Czasami mówi się o niestabilnej fali powierzchniowej ponieważ niewielka zmiana warunków brzegowych może ją przekształcić w prawdziwą falę powierzchniową.

W rozpatrywanym tu przypadku powierzchni w kształcie wydrążonego cylindra fala o cechach fali Rayleigha okazuje się także jedyną prawdziwą falą powierzchniową dla wszystkich zbadanych wartości n . Rys. 2.3 przedstawia relacje dyspersji dla tej fali dla różnych wartości współczynnika Poissona dla $n = 0$. Istotna różnica w porównaniu z powierzchnią płaską polega na tym, że prędkość fazowa zależy od długości fali, a w granicy fal długich dąży do prędkości fazowej fal poprzecznych c_T . Zatem w tej granicy rozpatrywana fala staje się falą objętościową „muskającą” powierzchnię. Z kolei w granicy fal krótkich nachylenie krzywej dyspersji dąży do wartości c_R , tzn. prędkość grupowa tych fal w wydrążonym cylindrze staje się równa prędkości fal Rayleigha. Jest to zgodne z oczekiwaniem, gdyż dla promienia wydrążenia dążącego do nieskończoności (lub gdy długość fali jest mała w porównaniu ze średnicą wydrążenia) powinniśmy otrzymać wynik zgodny z tym dla powierzchni płaskiej. Z Rys. 2.3 widać, że wraz ze wzrostem wartości współczynnika Poissona kąt nachylenia krzywych zwiększa się. Warto zaznaczyć również, że prędkość c_T jest także prędkością fazową odpowiadającą podstawowemu bezdyspersyjnemu modowi skręcającemu, który otrzymujemy w rozważanym modelu, o relacji dyspersji będącej w zmiennych zredukowanych prostą $\tilde{\omega} = 2\tilde{k}$.

Polaryzacja znalezionych fal powierzchniowych obejmuje przemieszczenia w kierunku radialnym i osiowym co jest analogiczne do polaryzacji strzałkowej. Analogiem polaryzacji poziomo-ścinającej jest ruch azymutalny. Podobnie jak w przypadku fal na płaskiej powierzchni nie znaleziono prawdziwych fal powierzchniowych o tej polaryzacji na wewnętrznej powierzchni cylindra.

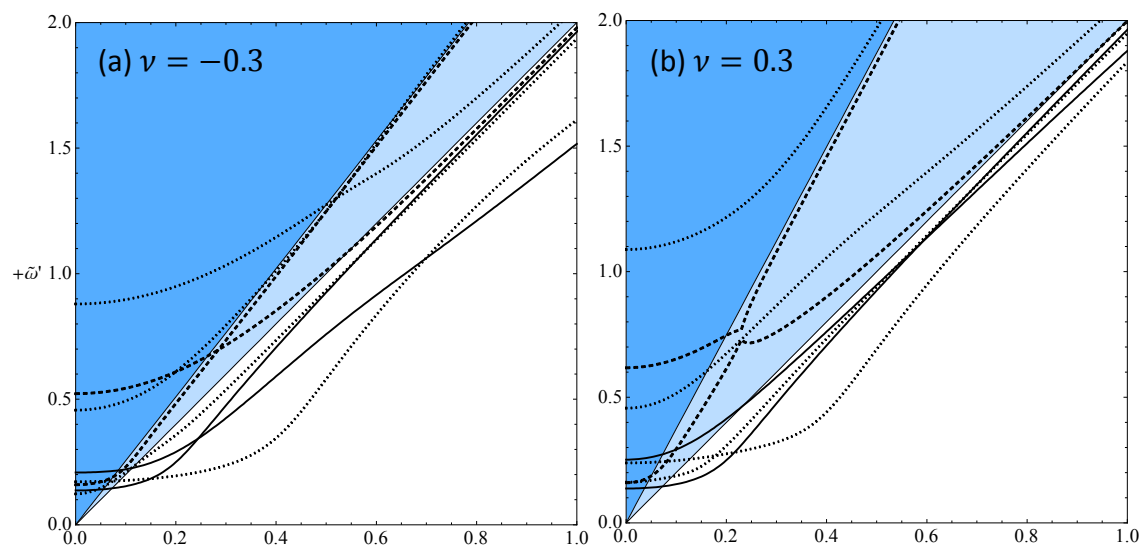


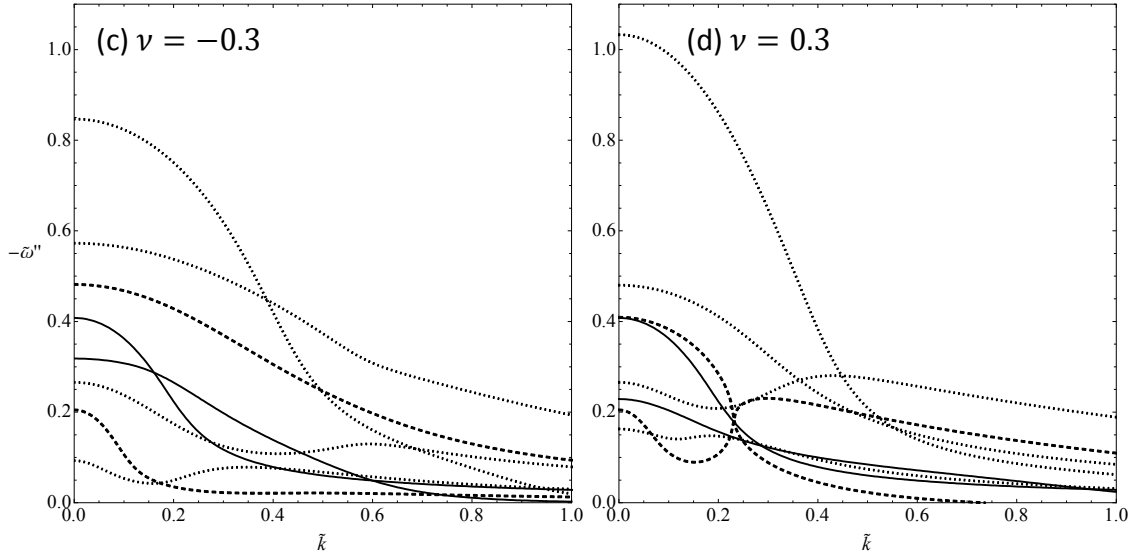
Rys. 2.3 Relacja dyspersji dla odpowiednika fali Rayleigha dla $n = 0$ dla współczynników Poissona od $\nu = -1$ (najmniejszy kąt nachylenia krzywej) do $\nu = 0.5$ (największy kąt) co 0.1. Linią przerywaną została oznaczona dolna granica pasma objętościowego.

2.3.2 Fale ciekące

Dla każdego n oprócz modu z częstotliwością rzeczywistą, odpowiadającego fali Rayleigha dla ośrodka zakończonych płaską powierzchnią, dostajemy szereg modów z częstotliwością zespoloną – którym odpowiadają fale ciekące

Na Rys. 2.4 przedstawiono zależność części rzeczywistej i urojonej częstotliwości $\tilde{\omega}$ od wektora falowego $\tilde{k}$ dla poszczególnych modów dla $n = 0$ (linie ciągłe), $n = 1$ (linie kreskowane) i $n = 2$ (linie kropkowane). Wspomniane zależności zostały narysowane zarówno dla wybranej dodatniej ($\nu = 0.3$) jak i ujemnej ($\nu = -0.3$) wartości współczynnika Poissona.



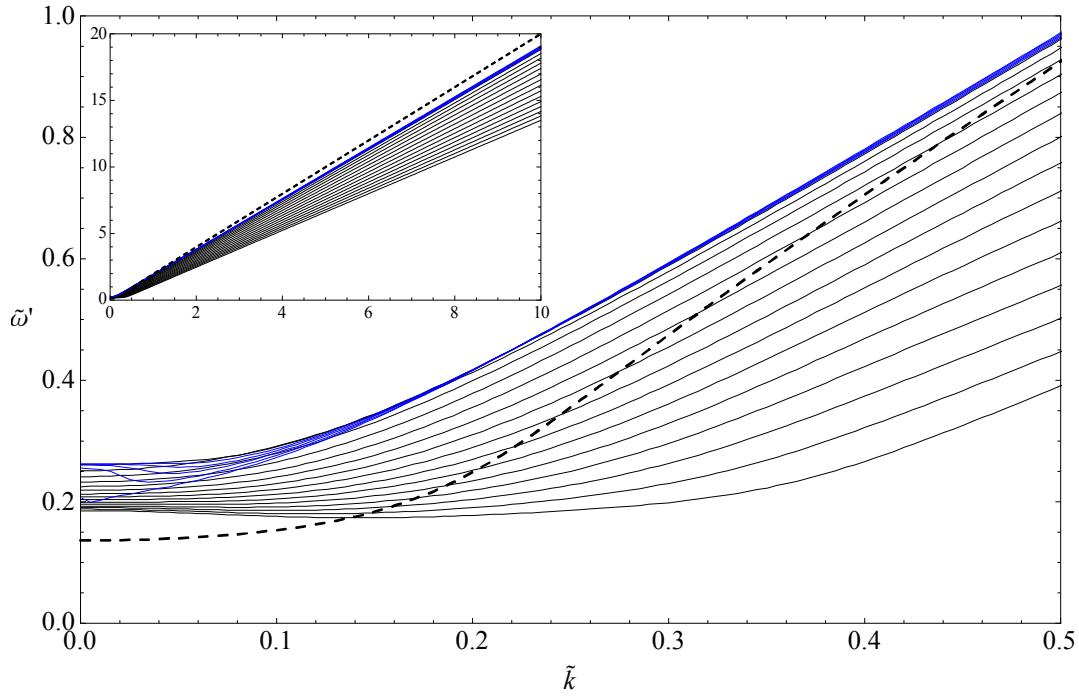


Rys. 2.4 Zależność części rzeczywistej (a) i urojonej (c) częstości $\tilde{\omega}$ od wektora falowego $\tilde{k}$ dla poszczególnych modów dla współczynnika Poissona $\nu = -0.3$ dla $n = 0$ (linie ciągłe), $n = 1$ (linie kreskowane) i $n = 2$ (linie kropkowane). Wykresy (b) i (d) przedstawiają analogiczne zależności dla współczynnika Poissona $\nu = 0.3$.

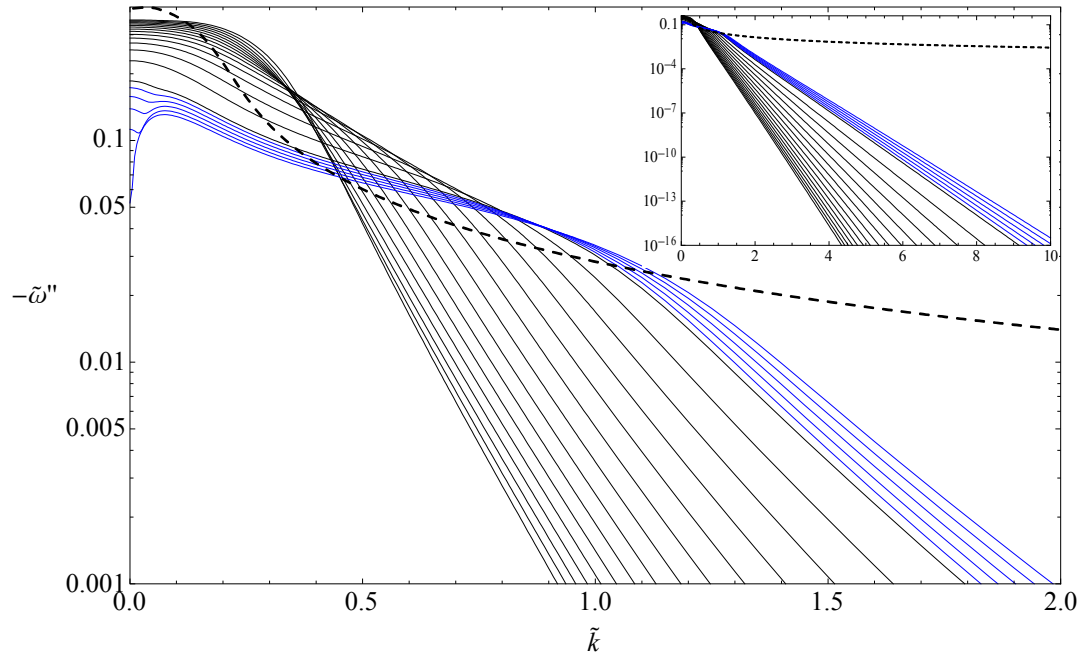
W przeprowadzonych obliczeniach nie ograniczamy się więc tylko do dodatnich wartości współczynnika Poissona jak to ma miejsce w wielu publikacjach, ale uwzględniamy również obszar auksetyczny: $\nu < 0$.

Przypadek $n = 0$ jest szczególny, ponieważ macierz M rozpada się wtedy na dwa bloki o wymiarach 2×2 oraz 1×1 . Pierwszy z tych bloków obejmuje ruchy osiowe i radialne wykazujące symetrię zwierciadlaną względem płaszczyzn zawierających oś cylindra, podczas gdy drugi z bloków – ruchy skręcające, łamiące tę symetrię.

Dla $n = 0$ otrzymujemy dwa rozwiązania równania (2.20) z $\tilde{\omega}$ zespolonym. Jedno z tych rozwiązań (mod 1 na Rys. 2.5, linia przerywana), odpowiadające ruchowi skręcającemu, nie zależy od współczynnika Poissona w zmiennych zredukowanych, podczas gdy zależność drugiego rozwiązania (mod 2) od tego współczynnika jest widoczna wyraźnie na Rys. 2.5. Dla fal długich część rzeczywista $\tilde{\omega}$ słabo zależy od $\tilde{k}$ natomiast dla fal krótszych ($\tilde{k} > 1$) relacja ta staje się z dobrym przybliżeniem liniowa a część urojona $\tilde{\omega}$ (co do wartości bezwzględnej) jest bardzo mała i maleje wykładniczo z rosnącym $\tilde{k}$. Obliczając prędkość fazową tej fali jako $\partial\tilde{\omega}'/\partial\tilde{k}$ dostajemy wartości zbliżone do wartości prędkości dla fali Rayleigha. Widać, że charakter zależności zarówno części rzeczywistej jak i części urojonej $\tilde{\omega}$ od $\tilde{k}$ nie ulega znaczącej zmianie w przedziale współczynnika Poissona od $\nu = -1$ do $\nu \approx 0.4$. W tym przedziale wraz ze wzrostem współczynnika Poissona rośnie wielkość przerwy $\tilde{\omega}'(\tilde{k} = 0)$ oraz maleje co do wartości bezwzględnej wartość $\tilde{\omega}''(\tilde{k} = 0)$. Dla większego współczynnika Poissona charakter tych zależności ulega zmianie w obszarze długofalowym, jednak dla całego przedziału ν w obszarze fal krótkich (duże $\tilde{k}$) zależność $\tilde{\omega}'(\tilde{k})$ i $\log \tilde{\omega}''(\tilde{k})$ pozostaje liniowa. Warto zauważyć, że chociaż część urojona częstości staje się mała dla dużych wektorów falowych, tj. czas życia tych modów się wydłuża, to jednak pozostają one zawsze tłumione, czyli mają charakter poddźwiękowych fal ciekących.

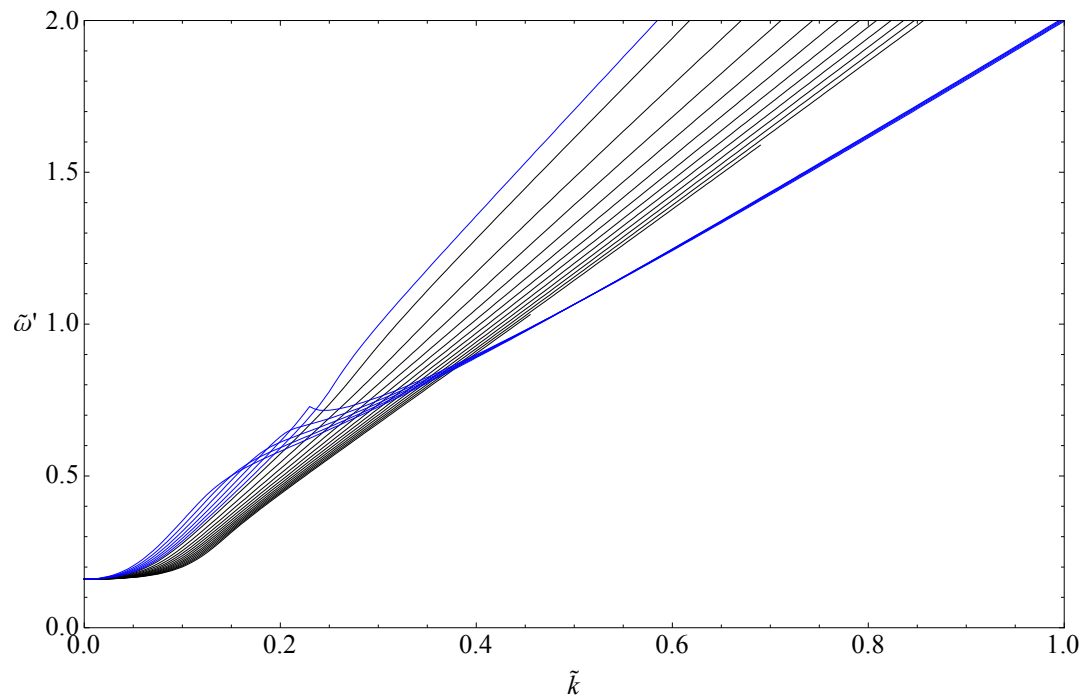


Rys. 2.5 Zależność części rzeczywistej częstości $\tilde{\omega}$ od wektora falowego $\tilde{k}$ dla modu 2 (linie ciągłe), $n = 0$ oraz dla wartości współczynnika Poissona od $\nu = -1$ do $\nu = 0.4$ co 0.1 (kolor czarny) oraz od $\nu = 0.42$ do $\nu = 0.5$ co 0.02 (kolor niebieski). Na wykresie zaznaczono również analogiczną zależność dla modu 1 (linia przerywana), która nie zależy od współczynnika Poissona w zmiennych zredukowanych. Warto zauważyć silną zależność od ν dla małych $\tilde{k}$.

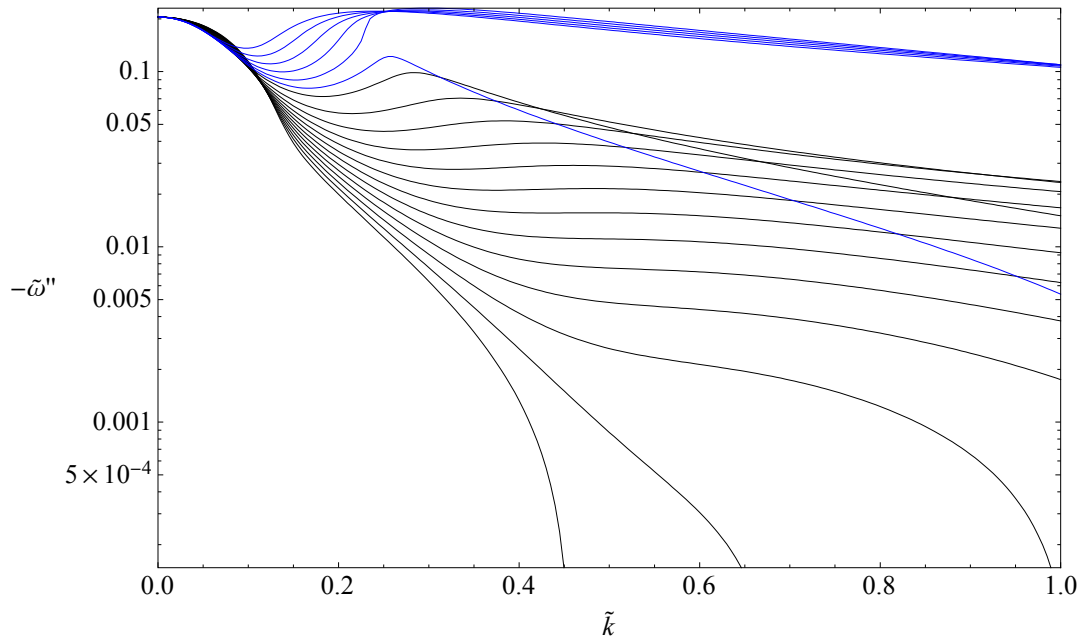


Rys. 2.6 Zależność części urojonej częstości $\tilde{\omega}$ od wektora falowego $\tilde{k}$ dla modu 1 (linie ciągłe), $n = 0$ oraz dla wartości współczynnika Poissona od $\nu = -1$ do $\nu = 0.4$ co 0.1 (kolor czarny) oraz od $\nu = 0.42$ do $\nu = 0.5$ co 0.02 (kolor niebieski). Na wykresie zaznaczono również analogiczną zależność dla modu 2 (linia przerywana), która nie zależy od współczynnika Poissona w zmiennych zredukowanych.

Na Rys. 2.7-2.10 zostały przedstawione wyniki uzyskane dla $n = 1$. Dostajemy dwa mody z częstotliwościami zespolonymi. Dla modu pierwszego (Rys. 2.7 i Rys. 2.8) charakter zależności części rzeczywistej częstotliwości od wektora falowego nie zmienia się znacząco w przedziale współczynników Poissona od $\nu = -1$ do $\nu \approx 0.3$. Dla granicznych wartości współczynnika Poissona z dodatniego końca tego przedziału widoczna jest anomalia w postaci przegięcia krzywej relacji dyspersji w okolicach $\tilde{k} = 0.25$. Dla Współczynników Poissona $\nu > 0.3$ widać zdecydowaną zmianę charakteru krzywych, których kąt nachylenia ulega znacznemu zmniejszeniu i jest słabo zależny od wartości współczynnika Poissona. Zmiana charakteru krzywych w zależności od wielkości współczynnika Poissona widoczna jest dopiero dla $\tilde{k} > 0.1$, dla mniejszych $\tilde{k}$ charakter krzywych jest podobny i niezależny od $\tilde{k}$ dostajemy przerwę na osi rzeczywistej częstotliwości, której wielkość jest niezależna od współczynnika Poissona. Krzywe relacji dyspersji na Rys. 2.7 są kontynuowane do miejsca gdzie część urojona częstotliwości, widoczna na Rys. 2.8, staje się zerowa. Również na Rys. 2.8 widać zmianę charakteru krzywych od $\nu \approx 0.3$, kiedy to krzywe zależności części urojonej ulegają przegięciu w okolicach $\tilde{k} = 0.25$ i dalej ich położenie jest słabo zależne od współczynnika Poissona a część urojona częstotliwości jest przynajmniej o rząd wielkości większa dla tych krzywych niż dla krzywych odpowiadających mniejszym współczynnikom Poissona (dla zadanych $\tilde{k}$).

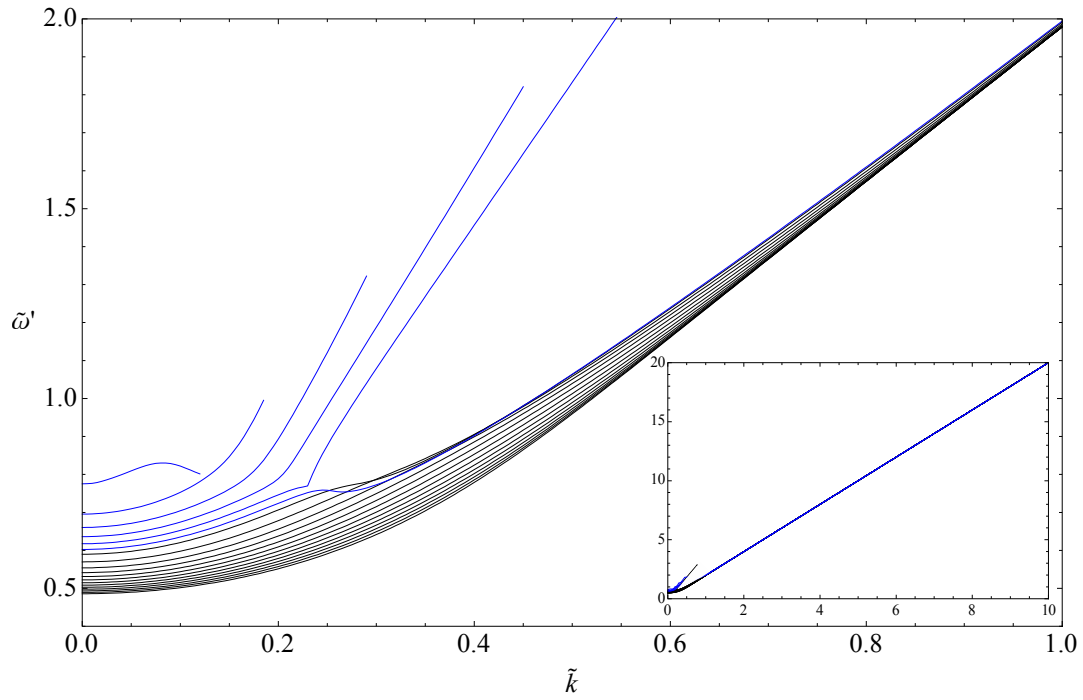


Rys. 2.7 Zależność części rzeczywistej częstotliwości $\tilde{\omega}$ od wektora falowego $\tilde{k}$ dla modu 1, $n = 1$ oraz dla wartości współczynnika Poissona od $\nu = -1$ do $\nu = 0.2$ co 0.1 (kolor czarny) oraz od $\nu = 0.25$ do $\nu = 0.5$ co 0.05 (kolor niebieski).

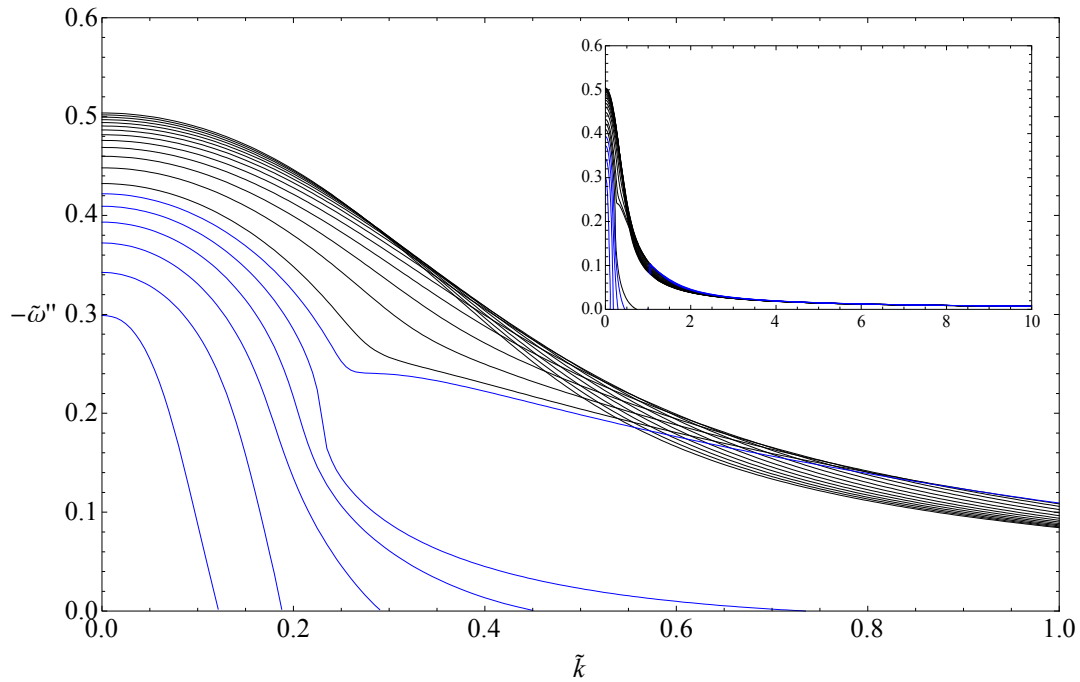


Rys. 2.8 Zależność części urojonej częstości $\tilde{\omega}$ od wektora falowego $\tilde{k}$ dla modu 1, $n = 1$ oraz dla wartości współczynnika Poissona od $\nu = -1$ do $\nu = 0.2$ co 0.1 (kolor czarny) oraz od $\nu = 0.25$ do $\nu = 0.5$ co 0.05 (kolor niebieski).

Dla modu drugiego krzywe zależności rzeczywistej i urojonej części zredukowanej częstości w zależności od zredukowanego wektora falowego $\tilde{k}$ są przedstawione na Rys. 2.9 i Rys. 2.10. Również dla tego modu widać zmianę charakteru krzywych w zależności od wartości współczynnika Poissona. Dla współczynników Poissona z przedziału od $\nu = -1$ do $\nu \approx 0.3$ zależność części rzeczywistej częstości od wektora falowego ma podobny charakter jak dla modu pierwszego z tym że teraz przerwa na osi częstości jest zależna od wartości współczynnika Poissona (por. Rys. 2.9 i Rys. 2.7) oraz kąty nachylenia krzywych są bardzo słabo zależne od częstości (por. wstawka na Rys. 2.9) – sama zależność rzeczywistej części częstości od wektora falowego dla obu modów dla dużych wektorów falowych jest liniowa. Dla współczynników Poissona większych od $\nu \approx 0.3$ wspomniane krzywe ulegają przegięciu ku wyższym wartościom części rzeczywistej częstości. Na Rys. 2.9 są one kontynuowane aż do miejsca gdzie część urojona częstości znika, co jest również dobrze widoczne na Rys. 2.10 gdzie dla współczynników Poissona mniejszych od $\nu \approx 0.3$ charakter zależności części urojonej częstości od wektora falowego jest podobny i dla większych wektorów falowych położenie krzywych słabo zależy od wartości współczynnika Poissona (por. wstawka na Rys. 2.10). Dla większych współczynników Poissona część urojona częstości stosunkowo szybko zmierza do zera.



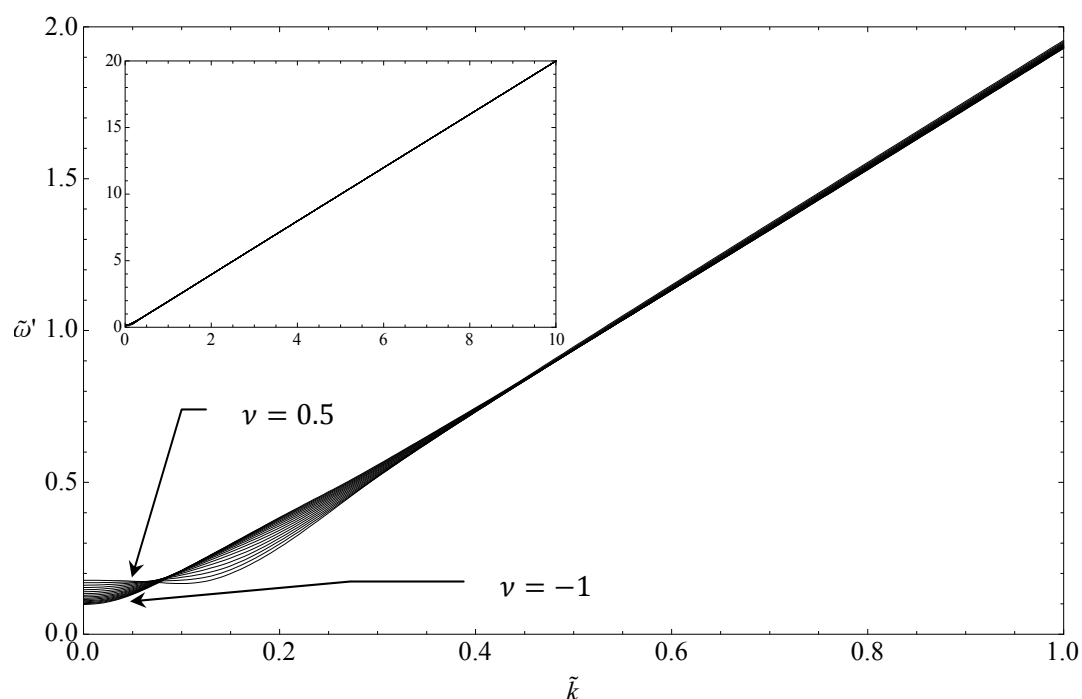
Rys. 2.9 Zależność części rzeczywistej częstości $\tilde{\omega}$ od wektora falowego $\tilde{k}$ dla modu 2, $n = 1$ oraz dla wartości współczynnika Poissona od $\nu = -1$ do $\nu = 0.2$ co 0.1 (kolor czarny) oraz od $\nu = 0.25$ do $\nu = 0.5$ co 0.05 (kolor niebieski).



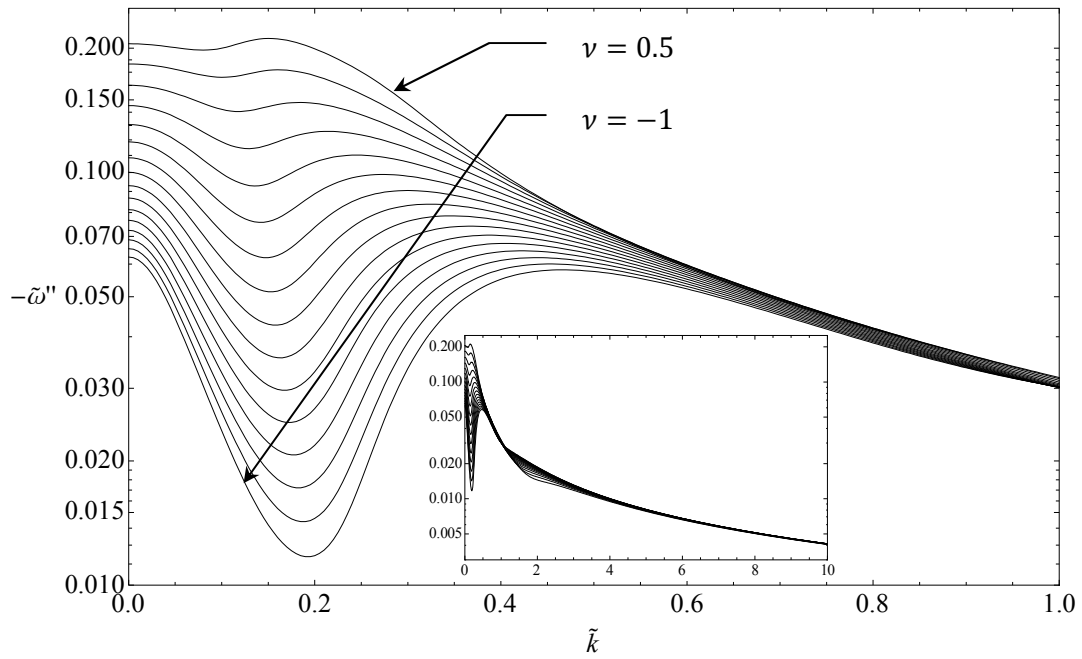
Rys. 2.10 Zależność części urojonej częstości $\tilde{\omega}$ od wektora falowego $\tilde{k}$ dla modu 2, $n = 1$ oraz dla wartości współczynnika Poissona od $\nu = -1$ do $\nu = 0.2$ co 0.1 (kolor czarny) oraz od $\nu = 0.25$ do $\nu = 0.5$ co 0.05 (kolor niebieski). Widać silny zanik tłumienia ze wzrostem $\tilde{k}$ dla dużych ν . Dla pewnej wartości ν obserwujemy jakościową zmianę zachowania: dla $\nu \leq 0.3$ tłumienie powoli maleje z $\tilde{k}$, natomiast od wartości $\nu \approx 0.3$ dąży do zera z $\tilde{k}$.

Dla $n = 2$ dostajemy cztery mody z częstościami zespolonymi. Na Rys. 2.11 i Rys. 2.12 przedstawione zostały zależności odpowiednio części rzeczywistej i urojonej modu pierwszego w zależności od $\tilde{k}$ dla różnych wartości współczynnika Poissona. Dla dużych wektorów falowych zależność części rzeczywistej częstości od wektora falowego pozostaje praktycznie liniowa i niezależna od wartości współczynnika Poissona co jest dobrze widoczne na wstawce na Rys. 2.11. Dla małych wektorów falowych zależność od współczynnika Poissona jest już widoczna a wielkość przerwy na osi częstości rośnie wraz ze wzrostem współczynnika Poissona. Również zależność części urojonej częstości od wektora falowego dla dużych wektorów falowych słabo zmienia się ze współczynnikiem Poissona. Dla małych wektorów falowych zależność ta jest natomiast wyraźna z minimami w okolicach $\tilde{k} = 0.15$, których głębokość rośnie ze zmniejszaniem się wartości współczynnika Poissona.

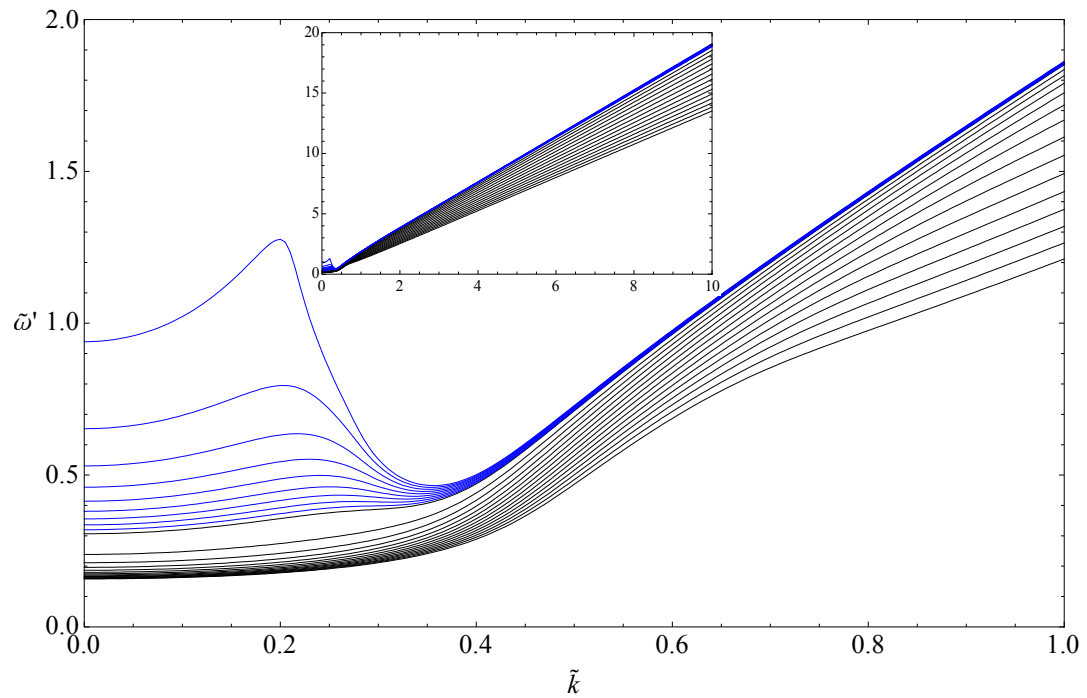
Na Rys. 2.13 i Rys. 2.14 zostały przedstawione analogiczne zależności jak wcześniej ale dla modu drugiego. Dla dużych wektorów falowych dostajemy liniową zależność części rzeczywistej częstości od wektora falowego, co dobrze widać na wstawce na Rys. 2.13, z kątem nachylenia rosnącym wraz ze wzrostem współczynnika Poissona. Wraz ze wzrostem współczynnika Poissona zwiększa się rozmiar przerwy na osi częstości. Dodatkowo dla mniejszych wektorów falowych i dużych współczynników Poissona $\nu > 0.4$ dostajemy anomalie w postaci maksimum dla $\tilde{k} \approx 0.2$ i rosnącego ze wzrostem współczynnika Poissona. Dla większych wektorów falowych zależność urojonej części częstości od wektora falowego jest malejącą funkcją wykładniczą co widać na wstawce na Rys. 2.14 (skala logarytmiczna).



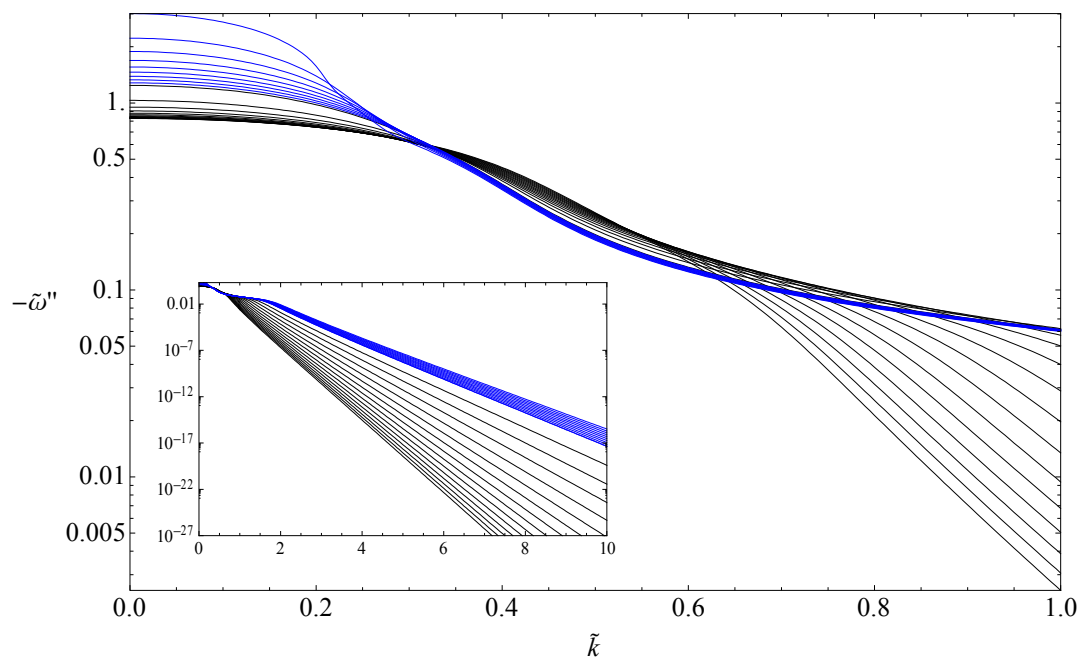
Rys. 2.11 Zależność części rzeczywistej częstości $\tilde{\omega}$ od wektora falowego $\tilde{k}$ dla modu 1, $n = 2$ oraz dla wartości współczynnika Poissona od $\nu = -1$ do $\nu = 0.5$ co 0.1.



Rys. 2.12 Zależność części urojonej częstości $\tilde{\omega}$ od wektora falowego $\tilde{k}$ dla modu 1, $n = 2$ oraz dla wartości współczynnika Poissona od $\nu = -1$ do $\nu = 0.5$ co 0.1. Wyraźne minimum tłumienia dla $\tilde{k} \approx 0.15$ w obszarze poddźwiękowym.



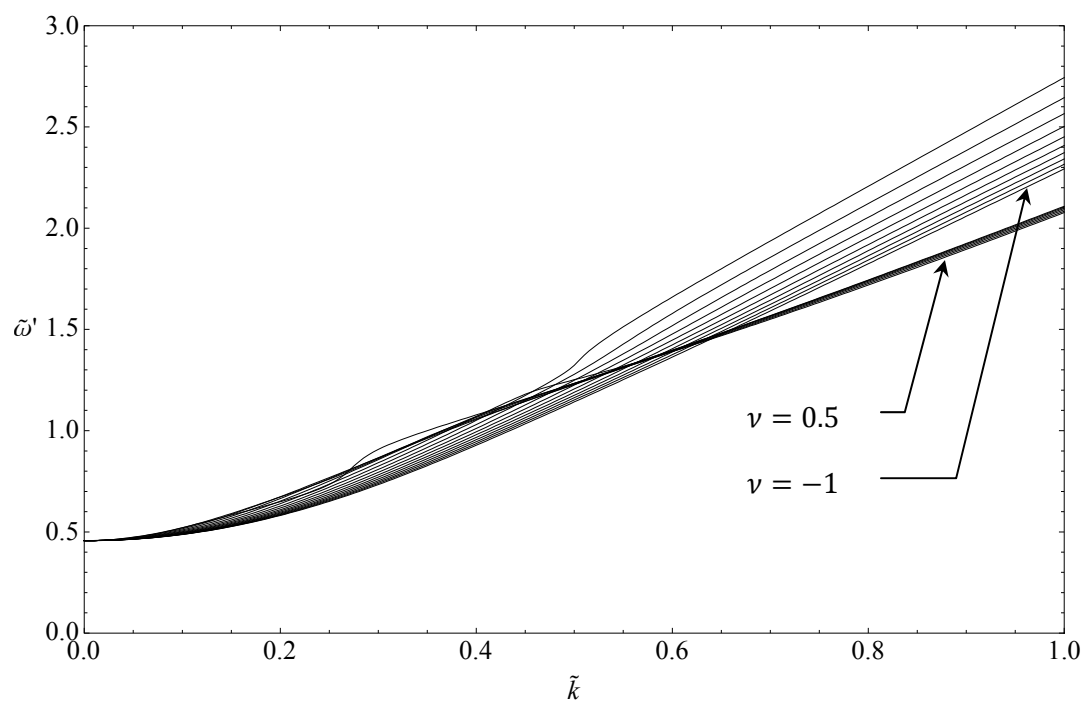
Rys. 2.13 Zależność części rzeczywistej częstości $\tilde{\omega}$ od wektora falowego $\tilde{k}$ dla modu 2, $n = 2$ oraz dla wartości współczynnika Poissona od $\nu = -1$ do $\nu = 0.4$ co 0.1 (kolor czarny) oraz od $\nu = 0.41$ do $\nu = 0.49$ co 0.01 (kolor niebieski).



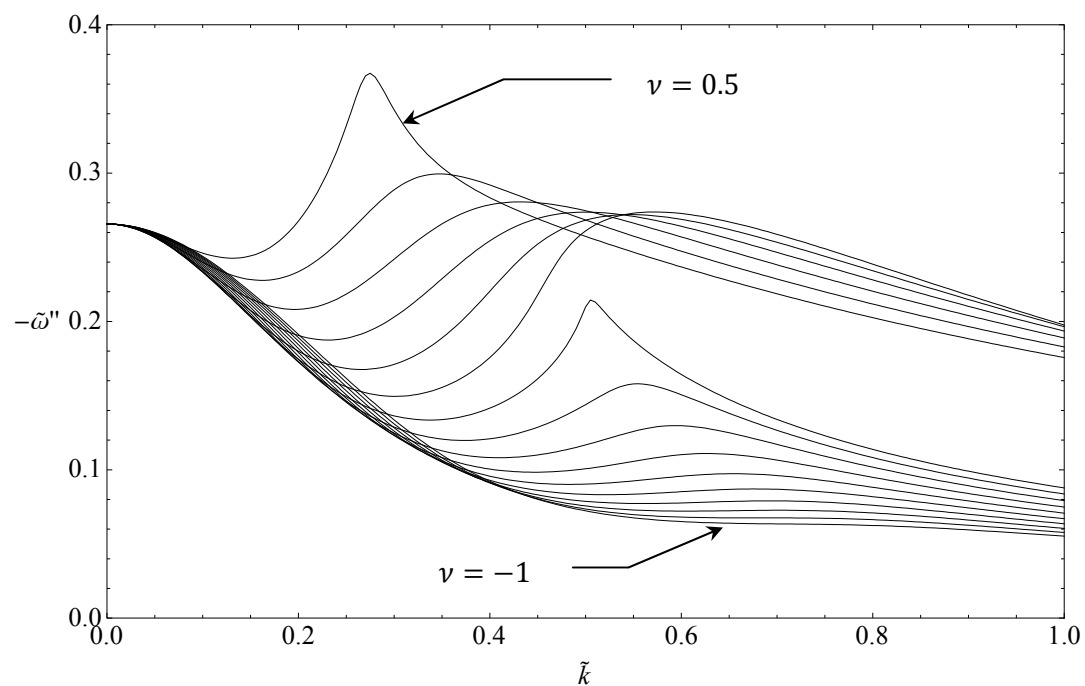
Rys. 2.14 Zależność części urojonej częstości $\tilde{\omega}$ od wektora falowego $\tilde{k}$ dla modu 2, $n = 2$ oraz dla wartości współczynnika Poissona od $\nu = -1$ do $\nu = 0.4$ co 0.1 (kolor czarny) oraz od $\nu = 0.41$ do $\nu = 0.49$ co 0.01 (kolor niebieski).

Na Rys. 2.15 i Rys. 2.16 przedstawione są zależności części rzeczywistej i urojonej od wektora falowego dla modu trzeciego. Na Rys. 2.15 widać, że wielkość przerwy na osi częstości dla tego modu nie zależy od współczynnika Poissona. Zarówno na Rys. 2.15 jak i na Rys. 2.16 widoczna jest zmiana charakteru krzywych przy współczynniku Poissona $\nu \approx 0$. Dla większych współczynników Poissona nachylenie krzywych na Rys. 2.15 staje się zdecydowanie mniejsze i słabiej zależne od wartości współczynnika Poissona niż dla mniejszych współczynników Poissona. Również na Rys. 2.16 widać, że od wartości współczynnika Poissona $\nu \approx 0$ ostre maksimum w okolicy $\tilde{k} = 0.5$ znika i na jego miejsce pojawia się szerokie maksimum, którego szerokość przy zwiększającym się współczynniku Poissona maleje i które przesuwa się wtedy w kierunku mniejszych $\tilde{k}$.

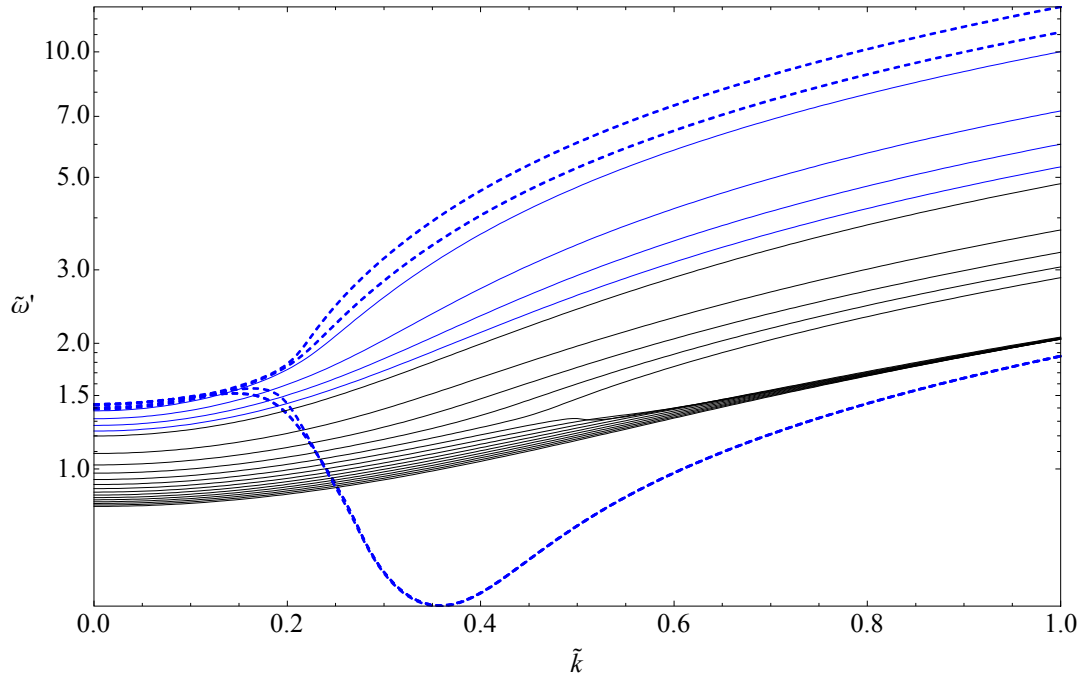
Na Rys. 2.17 i Rys. 2.18 przedstawione zostały analogiczne zależności do poprzednich ale dla modu czwartego. Na Rys. 2.17 widoczne są anomalie w zależności części rzeczywistej częstości od wektora falowego dla $\nu \approx 0$ oraz $\nu \approx 0.49$. W pierwszym wypadku w okolicy $\tilde{k} = 0.5$ dostajemy odchylenie krzywych ku niższym wartościom części rzeczywistej częstości. W drugim przypadku dostajemy natomiast zdecydowane zakrzywienie zależności w okolicy $\tilde{k} = 0.2$ z wyraźnym minimum w okolicy $\tilde{k} = 0.35$. Dla zależności części urojonej częstości od wektora falowego obraz zmian wraz ze wzrostem współczynnika Poissona jest bardziej skomplikowany. Dla $\nu \leq 0.4$ charakter krzywych na Rys. 2.18 jest podobny. Jedynie dla $\nu \approx 0$ widzimy anomalię w postaci przegięcia krzywych w okolicy $\tilde{k} = 0.5$. Natomiast dla większych wartości współczynnika Poissona obserwujemy coraz wyższe maksimum w okolicy $\tilde{k} = 0.2$, które następnie od $\nu \approx 0.49$ zaczyna maleć.



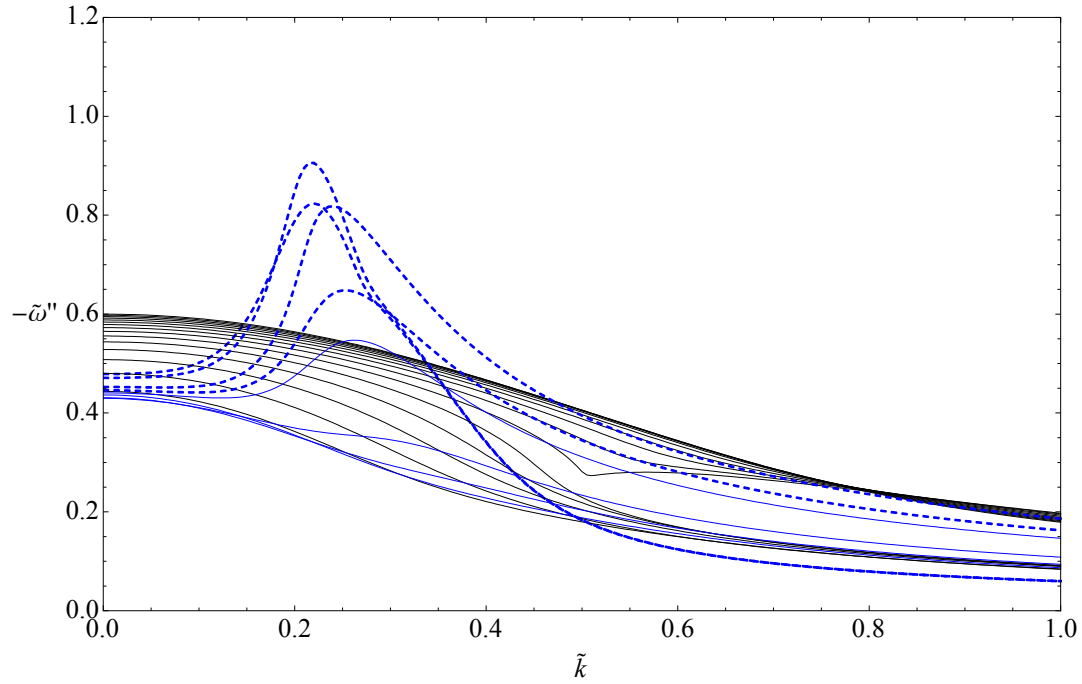
Rys. 2.15 Zależność części rzeczywistej częstości $\tilde{\omega}$ od wektora falowego $\tilde{k}$ dla modu 3, $n = 2$ oraz dla wartości współczynnika Poissona od $\nu = -1$ do $\nu = 0.5$ co 0.1.



Rys. 2.16 Zależność części urojonej częstości $\tilde{\omega}$ od wektora falowego $\tilde{k}$ dla modu 3, $n = 2$ oraz dla wartości współczynnika Poissona od $\nu = -1$ do $\nu = 0.5$ co 0.1.



Rys. 2.17 Zależność części rzeczywistej częstotliwości $\tilde{\omega}$ od wektora falowego $\tilde{k}$ dla modu 4, $n = 2$ oraz dla wartości współczynnika Poissona od $\nu = -1$ do $\nu = 0.4$ co 0.1 (kolor czarny), od $\nu = 0.42$ do $\nu = 0.48$ co 0.02 (kolor niebieski, linia ciągła) oraz od $\nu = 0.485$ do $\nu = 0.5$ co 0.005 (kolor niebieski, linia przerywana).



Rys. 2.18 Zależność części urojonej częstotliwości $\tilde{\omega}$ od wektora falowego $\tilde{k}$ dla modu 4, $n = 2$ oraz dla wartości współczynnika Poissona od $\nu = -1$ do $\nu = 0.4$ co 0.1 (kolor czarny), od $\nu = 0.42$ do $\nu = 0.48$ co 0.02 (kolor niebieski, linia ciągła) oraz od $\nu = 0.485$ do $\nu = 0.5$ co 0.005 (kolor niebieski, linia przerywana).

Przedstawione wyniki pokazują, że geometria cylindryczna prowadzi do powstawania fal obserwowanych jedynie w obszarze interfejsu ciało stałe – ciecz dla geometrii płaskiej [4], tj. tzw. podźwiękowych fal ciekących. Czas życia tych fal na ogół maleje ze wzrostem wektora falowego. Współczynnik Poissona ma duży wpływ na charakter uzyskanych ciekących fal powierzchniowych – w szczególności dla wartości ν bliskich 0.5 tj. dla materiałów, w których objętość zmienia się niewiele pod wpływem rozciągania jednoosiowego. W badanym układzie otrzymuje się również prawdziwe fale powierzchniowe będące odpowiednikiem fal Rayleigha, jednak w granicy fal długich, jak pokazano, stają się one falami objętościowymi muskającymi powierzchnię.

Rozdział 3

Auksetyk z powierzchnią poddany naprężeniu zewnętrznemu

W rozdziale tym przedstawiona jest analogia dynamiki powierzchni w dwuwymiarowym modelu auksetyka. Model ten jest bardzo prosty. Składa się ze sztywnych prętów połączonych nieważkimi sprężynami. Mimo swej prostoty model ten wykazuje szereg ciekawych własności w zależności od przyłożonego naprężenia zewnętrznego, m.in.:

- może posiadać współczynnik Poissona w zakresie $-\infty < \nu < \infty$,
- przy pewnej wartości naprężenia otwiera się przerwa wzbroniona dla fal sieciowych, co jest charakterystyczne dla kryształów fononicznych,
- przy odpowiednio dobranych parametrach powierzchni w obszarze pasma fal objętościowych może pojawić się izolowana prawdziwa fala powierzchniowa.

Auksetyki są materiałami o ujemnym współczynniku Poissona. Zwiększają one więc swoje wymiary poprzeczne przy podłużnym rozciąganiu. Mechanizm fizyczny odpowiedzialny za to dość nieintuicyjne [26, 30] zachowanie polega często na istnieniu w materiale pewnych skośnych połączeń np. wiązań chemicznych lub innych quasi-sztywnych elementów, które przy rozciąganiu odchylają się od osi przykładanego naprężenia [31-34]. Model rozpatrywany w tym rozdziale należy właśnie do tej kategorii auksetyków, jednak znane są również materiały, w których ujemny współczynnik Poissona jest wynikiem współgrania obsadzonych i nieobsadzonych stanów elektronowych [35].

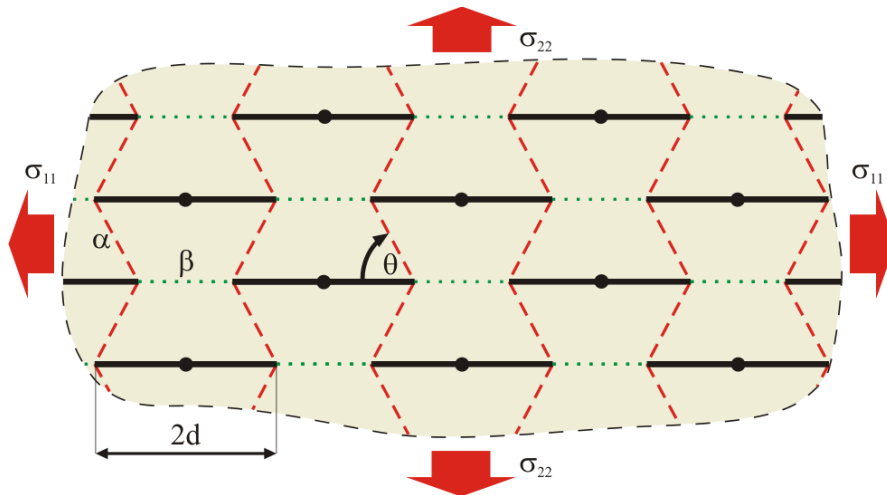
Mimo że istnienie wspomnianych sztywnych segmentów wydaje się prowadzić do nowych, interesujących efektów dynamicznych ze względu na dodatkowe rotacyjne stopnie swobody, literatura na temat dynamiki sieci materiałów auksetycznych nie jest zbyt bogata. Sparavigna [36] badała ruchy poza płaszczyznę (*out-of-plane*) w układzie przypominającym sieć o strukturze powracającej sześciokątnej (*reentrant honeycomb*) [34]. Pokazała ona, że w takim układzie otrzymujemy pasma wzbronione zależne od parametrów układu. W prezentowanym w tym rozdziale modelu pokazane jest analogiczne zachowanie jeśli chodzi o własności fononiczne materiału ale dla ruchów w płaszczyźnie (*in-plane*) w podobnym modelu w polu zewnętrznym kwadrupolowym [15, 16]. Wcześniej podobne zachowanie zaobserwowaliśmy dla zewnętrznego pola dipolowego [31]. Okazuje się, że współczynnik Poissona może w takich

przypadkach przybierać dowolnie duże wartości dodatnie i ujemne. Prowadzi to do ciekawego zjawiska jakim jest przyjmowanie przez falę poprzeczną prędkości fazowej większej niż prędkość fali podłużnej.

W rozdziale tym pokażę również, że rotacyjne stopnie swobody, niezbędne do uzyskania ujemnego współczynnika Poissona dla wielu auksetyków, mogą prowadzić do istnienia prawdziwej fali powierzchniowej (*true surface wave, TSW*) występującej w pojedynczym izolowanym punkcie pasma objętościowego. Zjawisko to zostało przez nas nazwane izolowaną prawdziwą falą powierzchniową (*isolated true surface wave, ITSW*) [16].

3.1 Model i własności statyczne

Rozważamy model ośrodka auksetycznego jak na Rys. 3.1 oparty na pomysśle Evansa [34] ze zmianami wprowadzonymi przez Sparavignę [36]. Model ten składa się ze sztywnych prętów o długości $2d$ połączonych poziomymi i ukośnymi nieważkimi sprężynami o stałych siłowych odpowiednio β i α i o długościach swobodnych $l_{\beta 0}$ i $l_{\alpha 0}$. Masy prętów oznaczmy przez m a ich momenty bezwładności przez τ .



Rys. 3.1 Model ośrodka auksetycznego. Sztywne pręty o długości $2d$ mogą ulegać przemieszczeniom, a także mogą się obracać (na rysunku zaznaczono nie przytwierdzone do podłoża środki prętów). Pręty ułożone w jednej poziomej linii będziemy nazywać warstwą. Przerywanymi liniami oznaczono sprężyny o stałych siłowych α i β . Układ jest poddany zewnętrznemu naprężeniu.

Wprowadzenie ukośnych stałych siłowych zamiast sztywnych elementów obecnych w pierwotnym modelu sieci (1, 4) refleksyny [34] o powracającej strukturze sześciokątnej (*reentrant honeycomb*) nie zmienia istotnie własności dynamicznych modelu, a znacznie upraszcza obliczenia ponieważ wszystkie występujące tu oddziaływania są dwuciałowe.

Wektory sieci opisujące jej przestrzenną, dwuwymiarową okresowość można wybrać w następujący sposób:

$$a = (3d, 0), \quad b = \left(\frac{3}{2}d, \frac{\sqrt{3}}{2}d \right). \quad (3.1)$$

Przyjmujemy, że wyjściowy stan modelu to układ nienaprzężony ze sprężynami przyjmującymi swoje długości swobodne równe d , co daje nam strukturę przypominającą plaster miodu (obecność wklęsłych sześciokątów utworzonych przez sprężyny α i pręty tłumaczy nazwę „powracającej struktury sześciokątnej” – *reentrant hexagonal structure* [34]). Taki model poddajemy zewnętrznemu naprężeniu – ściskamy lub rozciągamy w kierunku x lub y . Odształcenie modelu definiujemy poprzez względne wydłużenia: ϵ_{11} w kierunku x i ϵ_{22} w kierunku y . Wektory sieci poddanej takim odkształceniom są następujące:

$$a = (3d(1 + \epsilon_{11}), 0), \quad b = \left(\frac{3}{2}d(1 + \epsilon_{11}), \frac{\sqrt{3}}{2}d(1 + \epsilon_{22}) \right) \quad (3.2)$$

Dla zadanych odkształceń w kierunkach x i y sprężyny α tworzą konkretny kąt z prętami oznaczony na Rys. 3.1 przez θ .

Ze względu na fakt, że d jest tylko wielkością skalującą cały model, przyjmujemy dalej, że $d = 1$.

3.1.1 Naprężenia w ośrodku

Jeśli długości sprężyn są inne niż ich długości swobodne model nie jest w minimum energii i aby utrzymać cały układ w równowadze trzeba przyłożyć zewnętrzne naprężenie. Przyłożone naprężenia muszą zrównoważyć naprężenia w ośrodku, które wynoszą:

$$\sigma_{11} = \frac{\alpha l_{\alpha 0}(2 - 6\epsilon_{11}) + (-2\beta(-1 + l_{\beta 0} - 3\epsilon_{11}) + \alpha(-1 + 3\epsilon_{11}))S}{\sqrt{3}(1 + \epsilon_{22})S}, \quad (3.3)$$

$$\sigma_{22} = \frac{\alpha(1 + \epsilon_{22})(-2l_{\alpha 0} + S)}{\sqrt{3}(1 + \epsilon_{11})S}, \quad (3.4)$$

gdzie w celu uproszczenia zapisu wprowadzono zmienną pomocniczą:

$$S = \sqrt{4 - 6\epsilon_{11} + 9\epsilon_{11}^2 + 3\epsilon_{22}(2 + \epsilon_{22})}. \quad (3.5)$$

Naprężenia możemy przyłożyć zarówno w kierunku x jak i y , ale teraz interesuje nas tylko przypadek gdy nie ma naprężeń w kierunku y , czyli nie ma będzie też naprężeń na powierzchni układu równoległej do osi x . Mając dane odkształcenie ϵ_{11} aby uzyskać $\sigma_{22} = 0$ odkształcenie ϵ_{22} musi wynosić:

$$\epsilon_{22} = -1 + \frac{\sqrt{4l_{\alpha 0}^2 - (1 - 3\epsilon_{11})^2}}{\sqrt{3}}. \quad (3.6)$$

Naprężenia w ośrodku wynoszą wtedy:

$$\sigma_{11} = \frac{2\beta(1 - l_{\beta 0} + 3\epsilon_{11})}{\sqrt{4l_{\alpha 0}^2 - (1 - 3\epsilon_{11})^2}}, \quad \sigma_{22} = 0. \quad (3.7)$$

Naprężenia i inne wielkości mogą być również wyrażone dla przypadku $\sigma_{22} = 0$ przez kąt $0 < \theta < \pi$ między prętem i sprężyną α z wykorzystaniem związku

$$\epsilon_{11} = \frac{1}{3}(1 - 2l_{\alpha 0} \cos \theta). \quad (3.8)$$

3.1.2 Dopuszczalne wartości parametrów modelu

Geometria modelu, obecność sztywnych elementów oraz wymaganie mechanicznej stabilności narzucają ograniczenia wartości parametrów. Dozwolone są nieujemne wartości długości swobodnych sprężyn. Dodatkowo, ze względu na fakt, że $l_{\alpha 0} = 0$ prowadzi do zdegenerowanego przypadku gdy grubość ośrodka kierunku y staje się zerowa mamy następujące ograniczenia na $l_{\alpha 0}$ i $l_{\beta 0}$:

$$l_{\alpha 0} > 0, \quad l_{\beta 0} \geq 0. \quad (3.9)$$

Gdy ściskamy materiał wystarczająco mocno może dojść do zachodzenia na siebie sąsiednich prętów, aby tego uniknąć należy przyjąć

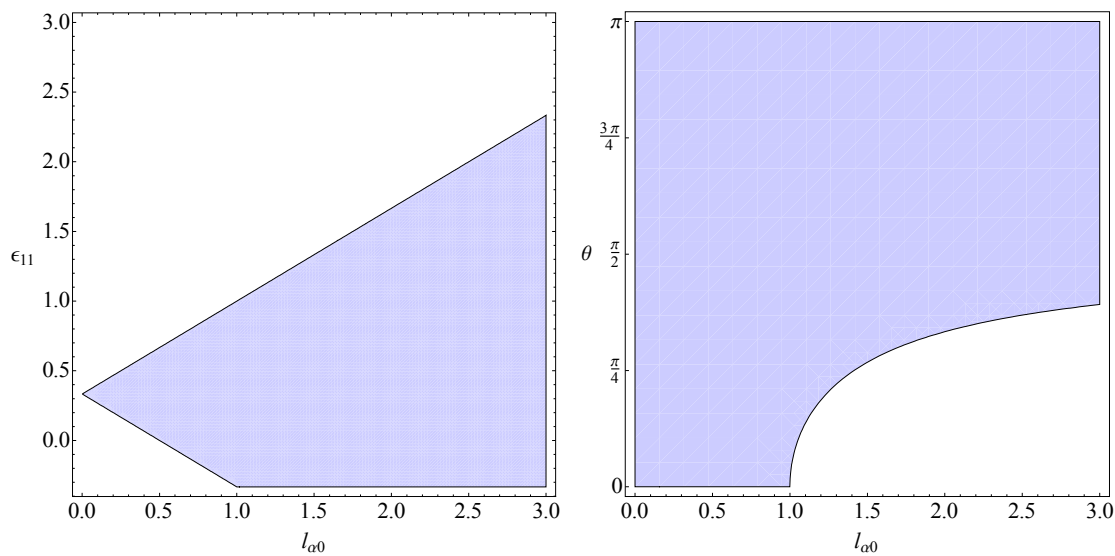
$$\epsilon_{11} > -\frac{1}{3}. \quad (3.10)$$

Rozciągając lub ściskając materiał w kierunku x możemy dla odpowiednio dużego odkształcenia doprowadzić do zerowej odległości pomiędzy równoległymi warstwami prętów. Ponieważ pręty nie mogą się przenikać, musimy założyć, że

$$4l_{\alpha 0}^2 - (1 - 3\epsilon_{11})^2 > 0 \quad (3.11)$$

Skrajny przypadek odpowiadający równości w powyższym wzorze odpowiada więc sytuacji, gdy wszystkie pręty byłyby ułożone w jednej linii.

Powyższe relacje na ϵ_{11} i $l_{\alpha 0}$ dają nam obszary dopuszczalnych wartości tych parametrów zobrazowane na Rys. 3.2.



Rys. 3.2 Obszary dopuszczalnych wartości parametrów modelu.

3.1.3 Stałe sprężyste

Brak niezmienniczości rotacyjnej rozważanego układu prowadzi do sprzężenia odkształceń z obrotami, co wyraża nierówność stałych sprężystych $c_{1212} \neq c_{2121}$. Z drugiej strony symetria prostokątna $C2mm$ [37], której nie naruszają naprężenia σ_{11} i σ_{22} , zapewnia rozprężenie odkształceń ścinających i obrotów od odkształceń jednoosiowych $\eta_{11} = \epsilon_{11}$ i $\eta_{22} = \epsilon_{22}$. Zatem ogólna postać macierzy stałych sprężystych jest następująca:

$$C = \begin{pmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1112} & c_{1121} \\ c_{2211} & c_{2222} & c_{2212} & c_{2221} \\ c_{1211} & c_{1222} & c_{1212} & c_{1221} \\ c_{2111} & c_{2122} & c_{2112} & c_{2121} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} c_{1111} & c_{1122} & 0 & 0 \\ c_{2211} & c_{2222} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{1212} & c_{1221} \\ 0 & 0 & c_{2112} & c_{2121} \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Stałe sprężyste użyte dalej do wyrażenia współczynnika Poissona w kierunku x i y wyrażają się wzorami:

$$c_{1111} = \frac{3(8l_{\alpha 0}^2\beta + \alpha(1 - 3\epsilon_{11})^2)(1 + \epsilon_{11})}{4l_{\alpha 0}^2\sqrt{4l_{\alpha 0}^2 - (1 - 3\epsilon_{11})^2}}, \quad (3.13)$$

$$c_{2222} = \frac{\alpha(4l_{\alpha 0}^2 - (1 - 3\epsilon_{11})^2)^{3/2}}{12l_{\alpha 0}^2(1 + \epsilon_{11})}, \quad (3.14)$$

$$c_{1122} = c_{2211} = \frac{\alpha\sqrt{4l_{\alpha 0}^2 - (1 - 3\epsilon_{11})^2}(-1 + 3\epsilon_{11})}{4l_{\alpha 0}^2}. \quad (3.15)$$

Wyrażenia na wszystkie stałe sprężyste zostały umieszczone w dodatku A, gdzie zamieszczono również odpowiednie wzory wyrażone z użyciem kąta θ .

3.1.4 Warunki stabilności

Koniecznym warunkiem stabilności mechanicznej układu jest dodatnia wartość wszystkich wartości własnych macierzy stałych sprężystych (3.12). Warunek ten jest równoważny dodatniej określoności macierzy (dla macierzy hermitowskich, jak tutaj). Fizycznie warunek ten wyraża, że każde jednorodne odkształcenie i/lub obrót układu wiąże się ze wzrostem jego energii, tj. wyprowadza go z minimum energii. Warunek powyższy sprowadza się w naszym przypadku do:

$$c_{2121} > 0, \quad c_{1212} > 0, \quad c_{2222} > 0, \quad c_{1111} > 0, \quad (3.16)$$

$$c_{1221}^2 < c_{1212}c_{2121}, \quad c_{1122}^2 < c_{1111}c_{2222}, \quad (3.17)$$

co można wyrazić przez parametry modelu:

$$\alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad \epsilon_{11} \neq \frac{1}{3} \quad \text{oraz} \quad l_{\beta 0} < 1 + 3\epsilon_{11}, \quad (3.18)$$

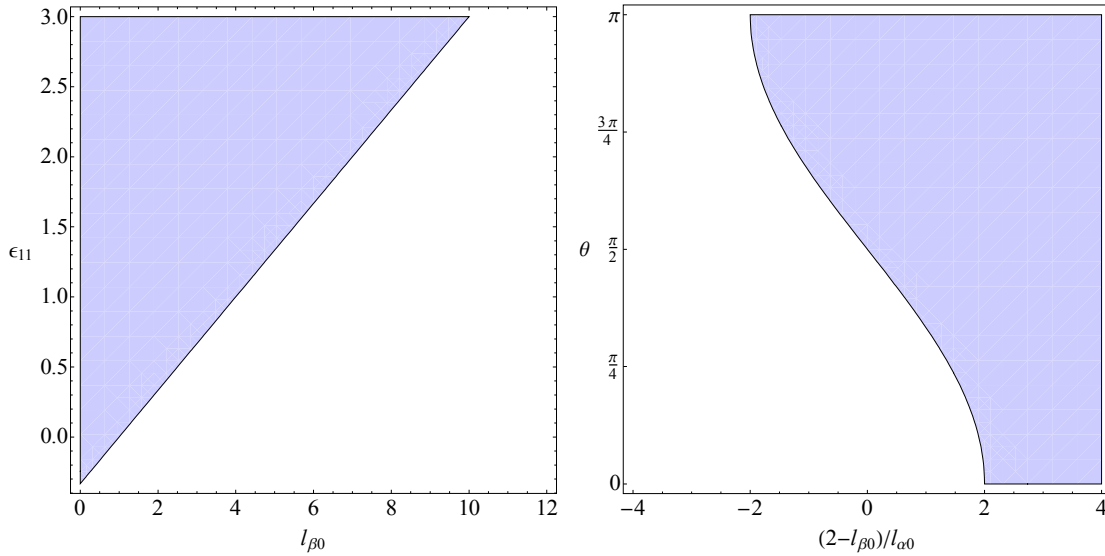
lub używając kąta θ :

$$\alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad \theta \neq \frac{\pi}{2} \quad \text{oraz} \quad 2 \cos \theta < \frac{2 - l_{\beta 0}}{l_{\alpha 0}}. \quad (3.19)$$

W całym obszarze dopuszczalnych wartości ϵ_{11} oraz $l_{\alpha 0}$ oprócz prostej $\epsilon_{11} = 1/3$ (odpowiadającej $\theta = \pi/2$) da się dobrać wartość $l_{\beta 0}$ tak aby macierz stałych sprężystych była

dotatnio określona. Dla $\epsilon_{11} = 1/3$ jedna z wartości własnych osiąga wartość 0. Układ jest wtedy niestabilny ze względu na składową $\eta_{12} = \frac{\partial u_x}{\partial y}$. Obszar wartości parametrów ϵ_{11} oraz $l_{\beta 0}$ odpowiadający dodatniej określoności macierzy stałych elastycznych jest zobrazowany na Rys. 3.3a. Ten sam obszar ale wyrażony przez kąt θ został przedstawiony na Rys. 3.3b. Wprowadzony został tutaj parametr ζ :

$$\zeta = \frac{2 - l_{\beta 0}}{l_{\alpha 0}} \quad (3.20)$$



Rys. 3.3 Obszary dopuszczalnych wartości parametrów modelu ze względu na warunek stabilności mechanicznej układu. Z obszarów tych należy wyłączyć proste odpowiadające $\epsilon_{11} = 1/3$ i $\theta = \pi/2$.

3.1.5 Współczynnik Poissona

Współczynnik Poissona materiału dwuwymiarowego wyraża się stosunkiem względnego wydłużenia do względnego skrócenia w kierunku prostopadłym. Wielkość ta wynosi

$$\nu_1 = \frac{c_{2211}}{c_{2222}} = \frac{3(1 + \epsilon_{11})(-1 + 3\epsilon_{11})}{4l_{\alpha 0}^2 - (1 - 3\epsilon_{11})^2} \quad (3.21)$$

dla naprężenia rozciągającego w kierunku x oraz

$$\nu_2 = \frac{c_{1122}}{c_{1111}} = \frac{\alpha(4l_{\alpha 0}^2 - (1 - 3\epsilon_{11})^2)(-1 + 3\epsilon_{11})}{3(8l_{\alpha 0}^2\beta + \alpha(1 - 3\epsilon_{11})^2)(1 + \epsilon_{11})} \quad (3.22)$$

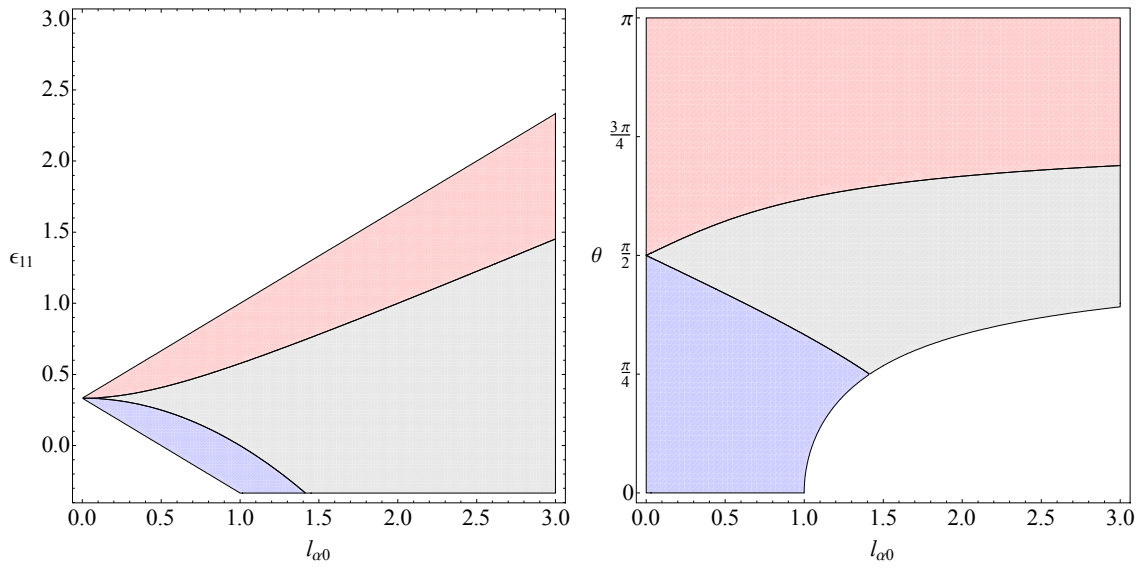
dla naprężenia rozciągającego w kierunku y .

Z powodu anizotropii modelu jak i przyłożonego naprężenia utrzymującego równowagę dla aktualnego kąta θ współczynnik Poissona jest na ogół różny w obydwu kierunkach. Powyższe wielkości można wyrazić przez kąt θ :

$$\nu_1 = \frac{(-2 + l_{\alpha 0} \cos \theta) \operatorname{ctg} \theta \csc \theta}{l_{\alpha 0}} \quad (3.23)$$

$$\nu_2 = \frac{l_{\alpha 0} \alpha \cos \theta \sin^2 \theta}{(-2 + l_{\alpha 0} \cos \theta)(2\beta + \alpha \cos^2 \theta)} \quad (3.24)$$

Rys. 3.4 przedstawia obszary gdzie współczynnik Poissona ν_1 przyjmuje standardowe wartości dla dwuwymiarowego ośrodka tzn. $-1 < \nu_1 < 1$. W górnym obszarze współczynnik Poissona przekracza wartość 1, a w dolnym jest mniejszy od -1 . Na Rys. 3.5 przedstawiona została zależność ν_1 od θ oraz $l_{\alpha 0}$. Widoczne plateau na tym trójwymiarowym wykresie odpowiada obszarowi, gdzie $-1 < \nu_1 < 1$ na Rys. 3.4. Poza tym obszarem współczynnik Poissona ν_1 silnie rośnie co do wartości bezwzględnej tak, że dla małych kątów θ możemy dostać wartości współczynnika Poissona ν_1 znacznie mniejsze od -1 natomiast dla kątów bliskich $\pi/2$ możemy uzyskać wartości współczynnika Poissona ν_1 znacznie większe od 1. Dla kątów $0 < \theta < \pi/2$ jesteśmy w obszarze auksetycznym: $\nu_1 < 0$ natomiast dla kątów $\pi/2 < \theta < \pi$ w obszarze nieauksetycznym: $\nu_1 > 0$, ze względu na rozciąganie w kierunku x .

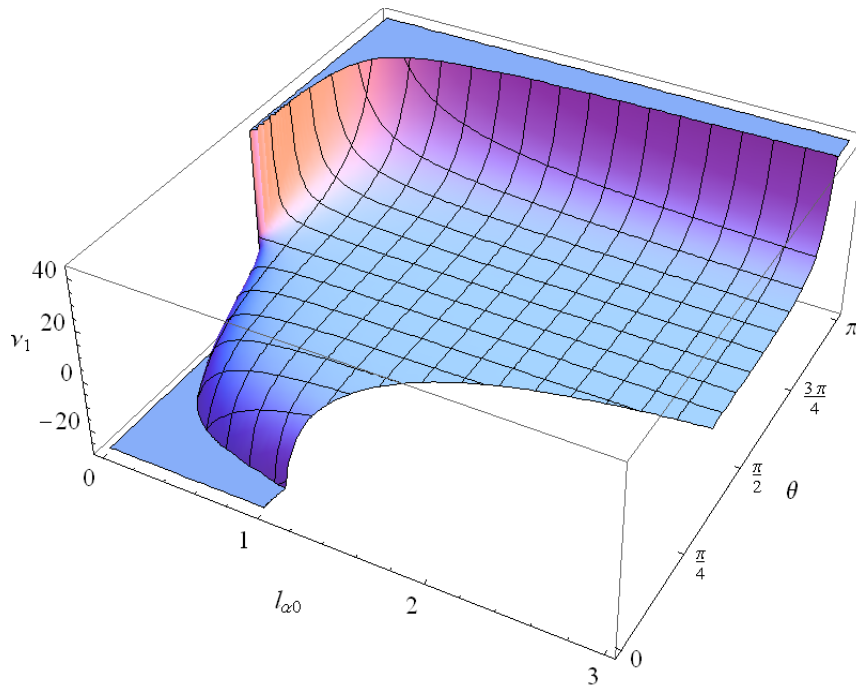


Rys. 3.4 Obszary, w których współczynnik Poissona przyjmuje wartości: $-1 < \nu_1 < 1$ (kolor szary), $\nu_1 < -1$ (kolor niebieski), $\nu_1 > 1$ (kolor czerwony). Powyżej prostych $\epsilon_{11} = 1/3$ i $\theta = \pi/2$ mamy obszar nieauksetyczny, natomiast poniżej – auksetyczny.

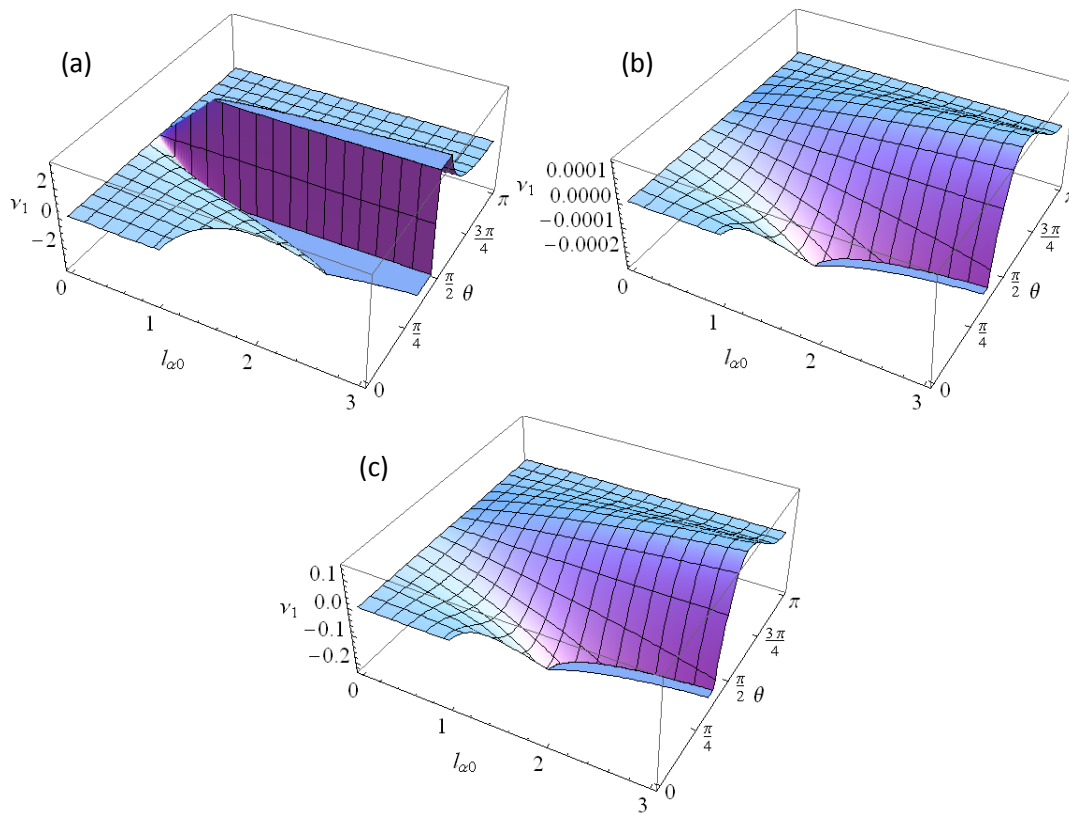
Na Rys. 3.6 przedstawiona została zależność ν_2 od kąta θ oraz $l_{\alpha 0}$ w dopuszczalnym obszarze tych parametrów. Wartość ν_2 zależy nie tylko od θ i $l_{\alpha 0}$ ale również od stosunku

$$\xi = \frac{\beta}{\alpha}. \quad (3.25)$$

Dla dużych wartości ξ występujące w równaniu (3.24) wyrażenie $\cos^2 \theta$ staje się zaniedbywalne w porównaniu z ξ i ν_2 jest wtedy w dobrym przybliżeniu proporcjonalne do ξ^{-1} . Zależność ν_2 od kąta θ oraz $l_{\alpha 0}$ wygląda wtedy jak na Rys. 3.6b z wartościami na pionowej skalowanej wartością ξ^{-1} . Powyższy fakt prowadzi do podobieństwa wykresów Rys. 3.6b i Rys. 3.6c otrzymanych dla ξ różniących się o trzy rzędy wielkości. Dla małych wartości ξ w porównaniu z $\cos^2 \theta$ współczynnik Poissona staje się słabo zależny od ξ . Zależność ν_2 od kąta θ oraz $l_{\alpha 0}$ wygląda wtedy jak na Rys. 3.6a.



Rys. 3.5 Zależność współczynnika Poissona ν_1 od kąta θ oraz $l_{\alpha 0}$. Widoczne obszary, w których współczynnik ten znacznie wykracza poza przedział $-1 < \nu_1 < 1$.



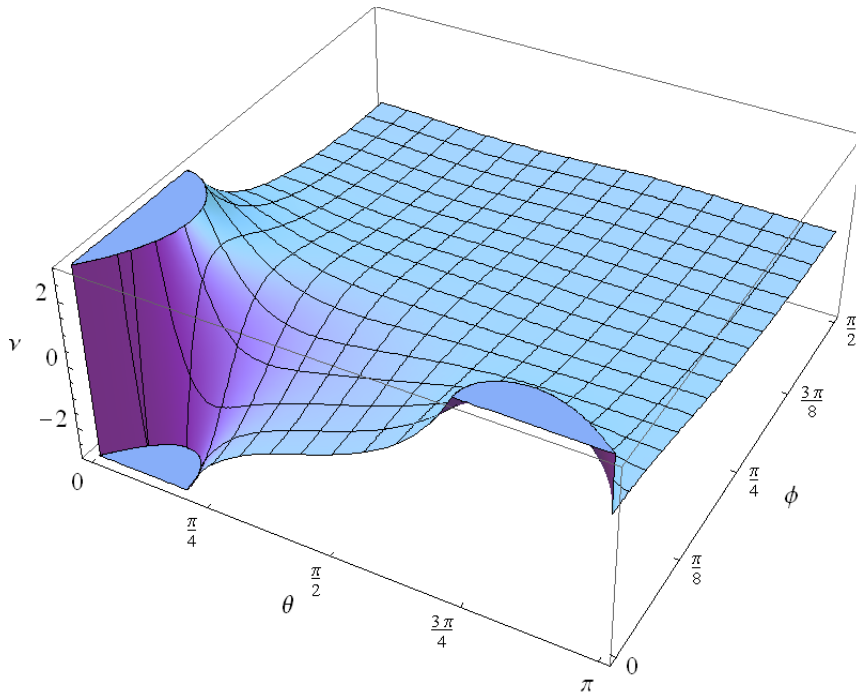
Rys. 3.6 Zależność współczynnika Poissona ν_1 od kąta θ oraz $l_{\alpha 0}$ dla (a) $\xi = 1/1000$, (b) $\xi = 1000$, (c) $\xi = 1$.

Powyżej zostały przedstawione zależności współczynnika Poissona od parametrów modelu tylko dla wybranych kierunków – wzdłuż osi x oraz y . Oczywiście współczynnik Poissona można wyznaczyć dla dowolnego kierunku:

$$\begin{aligned} v(\phi) &= \frac{c_{1122}(\sin^4 \phi + \cos^4 \phi) + (c_{1111} + c_{2222} - c_{1212} - c_{2121} - 2c_{1221}) \sin^2 \phi \cos^2 \phi}{c_{1111} \sin^4 \phi + c_{2222} \cos^4 \phi + (2c_{1122} + 2c_{1221} + c_{1212} + c_{2121}) \sin^2 \phi \cos^2 \phi}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

gdzie kąt ϕ wyznacza kierunek, w którym materiał jest rozciągany i jest liczony od kierunku równoległego do osi x .

Na Rys. 3.7 przedstawiona została zależność współczynnika Poissona od kierunku oraz od kąta θ między sprężyną α i prętem dla przykładowych parametrów modelu. Z rysunku tego widać, że współczynnik Poissona dla rozważanego układu wykazuje największą anizotropię dla kątów $\theta < \pi/4$ oraz dla $\theta > 3\pi/4$. Dla wartości pośrednich zależność współczynnika Poissona od kierunku nie jest już tak silna.



Rys. 3.7 Zależność współczynnika Poissona od kierunku oraz od kąta θ między sprężyną α i prętem dla $\alpha = \beta = 1$, $l_{\alpha 0} = d$, $l_{\beta 0} = 0$. Widoczna jest znaczna anizotropia współczynnika Poissona w szczególności dla kątów θ bliskich 0 i π .

3.2 Własności dynamiczne

3.2.1 Równania ruchu ośrodka

Równanie ruchu pręta w pozycji (n, p) dla małych wychyleń z położenia równowagi na następującą postać:

$$\ddot{\vec{u}}(n, p, t) + \sum_{\tilde{n}, \tilde{p}} Q_{\tilde{n}\tilde{p}} \vec{u}(n + \tilde{n}, p + \tilde{p}, t) = 0, \quad (3.27)$$

gdzie wskaźnik n numeruje kolejne warstwy prętów, natomiast wskaźnik p numeruje tu pręty w każdej warstwie. $Q_{\tilde{n}\tilde{p}}$ są odpowiednimi macierzami indeksowanymi przez $\tilde{n}, \tilde{p} \in \{-1, 0, 1\}$ gdyż zgodnie z naszymi założeniami każdy pręt oddziałuje tylko ze swoimi najbliższymi sąsiadami. Wektor wychyleń $\vec{u}(n, p, t) = (u_x, u_y, u_\theta)$ ma trzy składowe; u_x i u_y opisują przemieszczenia translacyjne środków masy prętów, zaś u_θ obrót prętów względem orientacji poziomej.

Do równania (3.27) wstawiamy rozwiązanie w postaci fali płaskiej

$$\vec{u}(n, p, t) = \vec{u}(n) e^{-i\omega t + ik_x x(n, p)}, \quad (3.28)$$

gdzie

$$x(n, p) = \left(p + \frac{n}{2}\right) a_x, \quad a_x = 3(1 + \epsilon_{11}). \quad (3.29)$$

Wielkość $x(n, p)$ jest pierwszą współrzędną środka masy pręta w pozycji (n, p) natomiast a_x jest pierwszą składową wektora sieciowego a ze wzoru (3.2).

Dynamika ośrodka jest zadana w reprezentacji wektora falowego k_x przez następujący układ równań ruchu:

$$\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & C^\dagger & D & C & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & C^\dagger & D & C & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & C^\dagger & D & C & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \vec{u}(n-2) \\ \vec{u}(n-1) \\ \vec{u}(n) \\ \vec{u}(n+1) \\ \vec{u}(n+2) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}. \quad (3.30)$$

Macierz po lewej stronie powyższego równania jest macierzą blokową składającą się z macierzy C , jej sprzężenia hermitowskiego $C^\dagger$ i macierzy D . Wektory $\vec{u}(n)$ są amplitudami przemieszczeń (u_x, u_y, u_θ) n -tej warstwy prętów.

Przyjmując

$$\vec{u}(n) = \vec{e} e^{ik_y y(n)}, \quad (3.31)$$

gdzie

$$y(n) = n b_y, \quad b_y = \frac{\sqrt{3}}{2} (1 + \epsilon_{22}). \quad (3.32)$$

otrzymujemy równanie opisujące dynamikę naszego układu gdy jest on przestrzennie nieograniczony:

$$(C^\dagger e^{-ik_y b_y} + D + C e^{ik_y b_y}) \vec{e} = 0. \quad (3.33)$$

Wielkość $y(n)$ jest położeniem w kierunku y n -tego łańcucha prętów natomiast b_y jest drugą składową wektora sieciowego b ze wzoru (3.2).

3.2.2 Macierz dynamiczna

Dla omawianego ośrodka macierz dynamiczną można przedstawić w postaci sumy

$$M = C^\dagger z^{-1} + D + Cz, \quad z = e^{ik_y b_y}. \quad (3.34)$$

W jawnej postaci macierzy M występują wyrażenia $m\omega^2$ oraz $\tau\omega^2$. Wzory na elementy macierzy hermitowskiej M zostały przedstawione w dodatku A. Jako macierz o wymiarze 3×3 M ma trzy wartości własne ω^2 dla dowolnego wektora falowego (k_x, k_y) . Wyznacznik macierzy M może być zapisany w postaci:

$$\begin{aligned} \det M &= \det(C^\dagger z^{-1} + D + Cz) \\ &= z^{-3} \det C^\dagger + z^{-2} A_{-2} + z^{-1} A_{-1} + A_0 \\ &\quad + z^1 A_1 + z^2 A_2 + z^3 \det C \end{aligned} \quad (3.35)$$

W ogólnym przypadku otrzymujemy trzy możliwe fale w ośrodku dla każdej zadanej częstotliwości ω rozchodzące się w dodatnim kierunku osi y i odpowiednie trzy fale rozchodzące się w ujemnym kierunku tej osi. Jednak w przypadku $\sigma_{22} = 0$ okazuje się że

$$\det C = \det C^\dagger = 0, \quad (3.36)$$

co powoduje, że stopień wielomianu z równania (3.35) obniża się. W wyniku tego dla każdej wartości ω istnieją w ośrodku tylko dwie fale. Wektory falowe odpowiadające tym falom k_{y1} i k_{y2} mogą być tylko rzeczywiste gdy ośrodek jest nieskończony. Odpowiadające tym wektorom falowym wektory polaryzacji $\vec{e}_1$ and $\vec{e}_2$ spełniają równania

$$M(k_{y1})\vec{e}_1 = 0, \quad (3.37)$$

$$M(k_{y2})\vec{e}_2 = 0. \quad (3.38)$$

Powyższe wektory polaryzacji są liniowo niezależne i rozpinają dwuwymiarową podprzestrzeń w przestrzeni przemieszczeń (u_x, u_y, u_θ) .

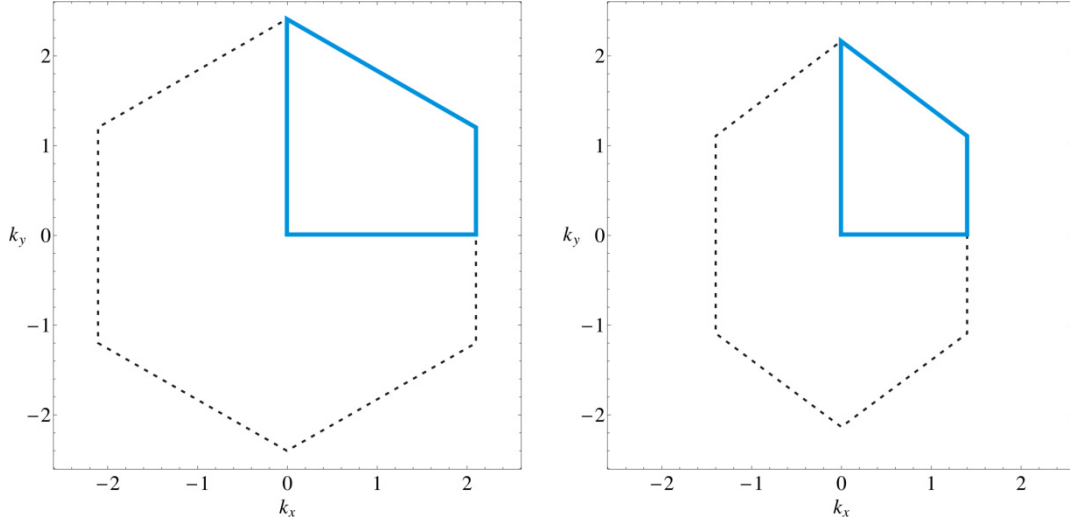
Jawną postać macierzy C i D można znaleźć w dodatku A.

3.2.3 Pierwsza strefa Brillouina

Pod nieobecność naprężeń ścinających sieć krystaliczna naszego modelu jest prostokątna centrowana ($C2mm$). W tej symetrii sieć odwrotną można otrzymać w postaci całkowitych kombinacji następujących wektorów:

$$\left(\frac{2\pi}{3d} \frac{1}{1 + \epsilon_{11}}, -\frac{2\pi}{\sqrt{3}d} \frac{1}{1 + \epsilon_{22}} \right), \quad \left(0, \frac{4\pi}{\sqrt{3}d} \frac{1}{1 + \epsilon_{22}} \right). \quad (3.39)$$

Sieć odwrotna jest również siecią centrowaną. Odształcenie ϵ_{11} lub ϵ_{22} tylko skaluje wyjściową sieć centrowaną (odpowiadającą $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 0$) z czynnikami $1/(1 + \epsilon_{11})$ oraz $1/(1 + \epsilon_{22})$. W wyjściowym przypadku $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 0$ pierwsza strefa Brillouina jest sześciokątem, który dla ϵ_{11} lub ϵ_{22} różnego od zera ulega przeskalowaniu. Na Rys. 3.8 została przedstawiona pierwsza strefa Brillouina odpowiednio dla $\epsilon_{11} = 0$ i $\epsilon_{11} = 0.5$. W pierwszym przypadku otrzymujemy sześciokąt foremny ze względu na to, że przyjęliśmy $l_{\alpha 0} = l_{\beta 0} = d$.



Rys. 3.8 Pierwsza strefa Brillouina dla rozważanego modelu kryształu z Rys. 3.1 dla odkształcenia (a) $\epsilon_{11} = 0$ i (b) $\epsilon_{11} = 0.5$. W obu przypadkach $\sigma_{22} = 0$. Kolorem niebieskim oznaczony został nieredukowalny obszar pierwszej strefy Brillouina.

3.2.4 Relacje dyspersji i przerwa wzbroniona

Równanie ruchu naszego ośrodka bez ograniczeń przestrzennych oraz sił zewnętrznych (oprócz naprężenia utrzymującego zadany kąt θ) ma postać jednorodnego układu równań liniowych

$$M \vec{e} = 0, \quad (3.40)$$

gdzie $\vec{e} = (u_{x0}, u_{y0}, u_{\theta0})^T$, dla którego niezerowe rozwiązanie istnieje tylko gdy

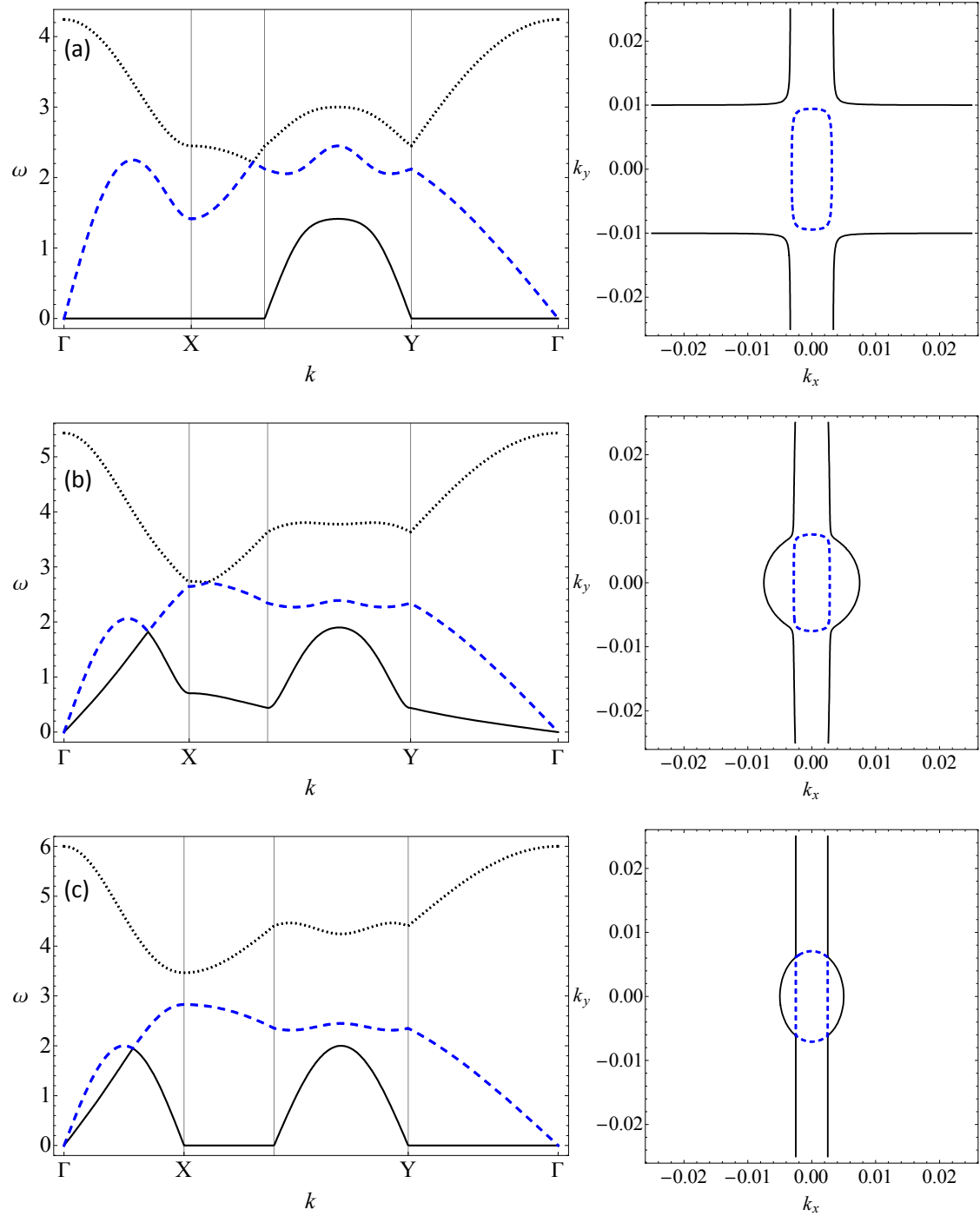
$$\det M = 0. \quad (3.41)$$

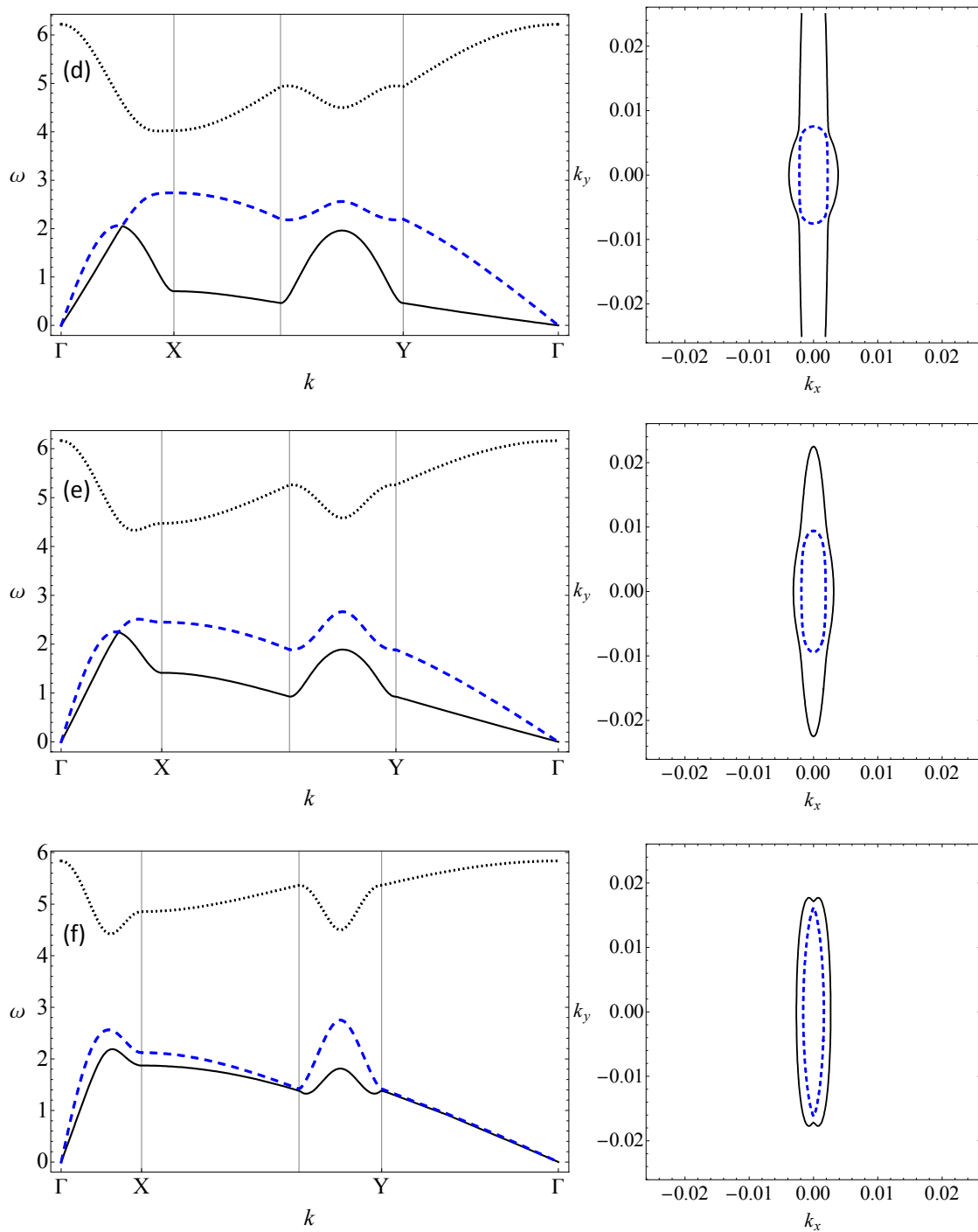
Równanie to daje nam relacje dyspersji $\omega(k)$. W poniższych obliczeniach przyjęto dla ustalenia uwagi $l_{\alpha 0} = 1$, $l_{\beta 0} = 1$ oraz $\alpha = \beta = 1$.

Na Rys. 3.9 po lewej stronie przedstawione zostały relacje dyspersji w zależności od odkształcenia ϵ_{11} dla wektorów falowych z brzegu nieredukowalnego fragmentu strefy Brillouina zaznaczonego na Rys. 3.8. Dla $\epsilon_{11} = 0$ i $\epsilon_{11} = 1/3$ (Rys. 3.9a i Rys. 3.9c) widzimy akustyczną niestabilność manifestującą się tym że relacje dyspersji schodzą do $\omega = 0$. Dla pośrednich wartości ϵ_{11} układ jest stabilny, przykładowe relacje dyspersji dla $\epsilon_{11} = 1/6$ zostały zaprezentowane na Rys. 3.9b. Poczynając od odkształcenia $\epsilon_{11} \approx 0.18$ ($\theta \approx 1.34\text{rad}$) dostajemy przerwę wzbronioną w całej obszarze pierwszej strefy Brillouina (*stop band*). Ulega ona poszerzeniu wraz ze wzrostem ϵ_{11} . Od $\epsilon_{11} = 1/3$ materiał przestaje być auksetyczny.

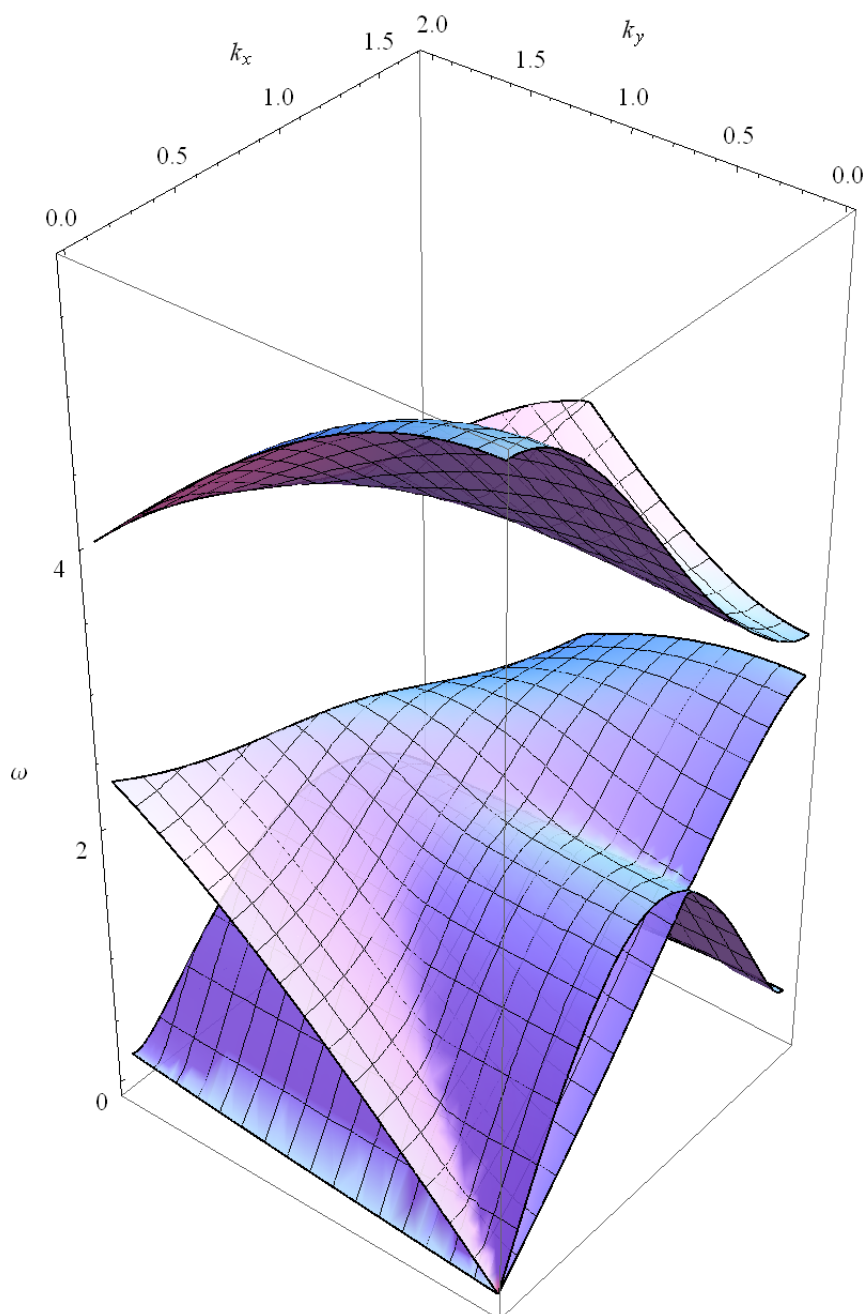
Po prawej stronie na Rys. 3.9 przedstawione zostały powierzchnie powolności, które otrzymujemy dla ustalonego ω (tutaj 0.01) zmieniając kierunek wektora falowego. Odległość od początku układu współrzędnych jest odwrotnie proporcjonalna do prędkości fal (długich) w danym kierunku. Widać tutaj znaczną anizotropię prędkości fali poprzecznej szczególnie dużą dla obszaru auksetycznego ($\epsilon_{11} < 1/3$). Prędkość fali podłużnej nie wykazuje tak znacznej anizotropii w całym przedziale dopuszczalnego odkształcenia ϵ_{11} . Dla $\epsilon_{11} = 0$ i $\epsilon_{11} = 1/3$ powierzchnie powolności dla wybranych kierunków rozbiegają się do nieskończoności w związku z niestabilnością akustyczną układu.

Na Rys. 3.10 przedstawione zostały powierzchnie relacji dyspersji dla $\epsilon_{11} = 1/4$ dla nieredukowalnego fragmentu pierwszej strefy Brillouina. Rysunek ten potwierdza możliwość uzyskania przerwy wzbronionej w całej pierwszej strefie Brillouina dla parametrów odpowiadających obszarowi auksetycznemu naszego modelu. Wielkość przerwy może być kontrolowana przyłożonym naprężeniem.





Rys. 3.9 Relacje dyspersji dla wektorów falowych z brzegu nieredukowalnego obszaru pierwszej strefy Brillouina (Rys. 3.8) oraz powierzchnie powolności dla gałęzi akustycznych w zależności od odkształcenia ϵ_{11} : (a) $\epsilon_{11} = 0$, (b) $\epsilon_{11} = 1/6$, (c) $\epsilon_{11} = 2/6$, (d) $\epsilon_{11} = 3/6$, (e) $\epsilon_{11} = 4/6$, (f) $\epsilon_{11} = 5/6$.



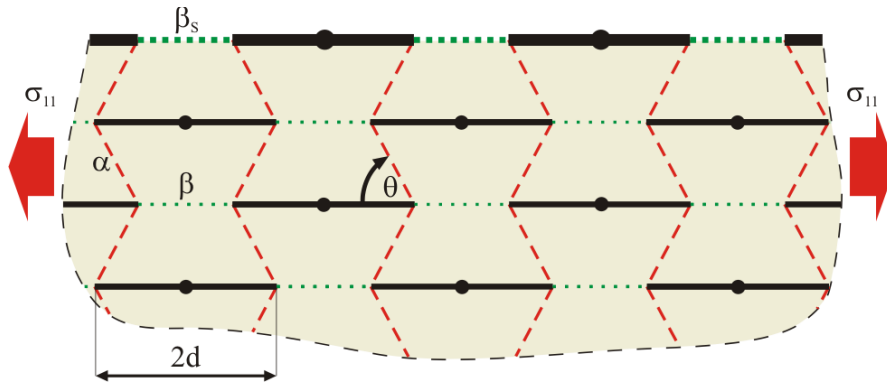
Rys. 3.10 Powierzchnie dyspersji dla $\epsilon_{11} = 1/4$. Widoczna przerwa wzbroniona dla całego obszaru pierwszej strefy Brillouina.

3.3 Własności powierzchniowe

3.3.1 Równania ruchu

Model powierzchni (01) rozpatrywanego ośrodka uzyskujemy poprzez usunięcie prętów i sprężyn znajdujących się w półpłaszczyźnie $y < 0$ jak na Rys. 3.11. Oczywiście w przypadku ośrodka dwuwymiarowego powierzchnia płaska jest linią prostą. Dla ogólności modelu przyjmujemy, że zarówno masy m_s , momenty bezwładności τ_s jak i stała siłowa β_s w powierzchniowej warstwie prętów mogą się różnić od swoich odpowiedników w głębi materiału. W rzeczywistych materiałach podobne zmiany parametrów powierzchniowych są

wynikiem zmiany walencyjności atomów z powodu zmienionej liczby sąsiadów, a także są skutkiem rekonstrukcji, chemisorpcji i fizysorpcji obcych atomów.



Rys. 3.11 Model ośrodka auksetycznego z powierzchnią. Masy m_s , momenty bezwładności τ_s i stała siłowa β_s w powierzchniowej warstwie prętów mogą się różnić od swoich odpowiedników w głębi materiału.

Równania ruchu prętów powierzchniowych w naszym modelu są inne od równań ruchu prętów w ośrodku, gdyż te pierwsze uwzględniają oddziaływanie tylko z jedną sąsiednią warstwą prętów. Przyjmując rozwiązanie równań ruchu w postaci fali płaskiej, tj. w postaci (3.28) otrzymujemy układ równań liniowych z macierzą półnieskończoną:

$$\begin{bmatrix} R & C & 0 & 0 & \dots \\ C^\dagger & D & C & 0 & \dots \\ 0 & C^\dagger & D & C & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{u}(0) \\ \vec{u}(1) \\ \vec{u}(2) \\ \vec{u}(3) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad (3.42)$$

gdzie $\vec{u}(0)$ są amplitudami przemieszczeń (u_x, u_y, u_θ) warstwy powierzchniowej $n = 0$. Wstawiając do powyższego układu równań postać $\vec{u}(n)$ daną przez równość (3.31) otrzymujemy dwa równania – jedno dla ośrodka i jedno dla powierzchni:

$$(C^\dagger e^{-ik_y b_y} + D + C e^{ik_y b_y}) \vec{e} = 0 \quad (3.43)$$

$$(R + C e^{ik_y b_y}) \vec{e} = 0 \quad (3.44)$$

Jawna postać macierzy R została zaprezentowana w dodatku A.

Zgodnie z rozdziałem 3.2.2 przy braku naprężenia w kierunku y dla każdej wartości ω istnieją dwie wartości k_y dające niezerowe $\vec{e}$ w równaniu (3.43). Tym razem ze względu na obecność powierzchni wektory falowe k_{y1} i k_{y2} mogą być wyrażone liczbami zespolonymi, odpowiednie amplitudy wychyleń muszą jednak maleć z odległością w głąb ośrodka. Tego rodzaju rozwiązania noszą nazwę fal powierzchniowych (*surface waves, evanescent waves*). Wektorom falowym k_{y1} i k_{y2} odpowiadają wektory polaryzacji $\vec{e}_1$ i $\vec{e}_2$, tak aby spełniona była równość (3.43).

W dalszym ciągu przydatne okaże się również zbadanie reakcji rozpatrywanego układu na siłę oscylującą z częstotliwością ω , modulowaną przestrzennie zgodnie z wektorem falowym k_x i przyłożoną do powierzchniowej warstwy prętów tj. $n = 0$. Amplitudy drgań prętów w takich

warunkach są proporcjonalne do lokalnej gęstości stanów. Odpowiedni układ równań ma postać:

$$\begin{bmatrix} R & C & 0 & 0 & \dots \\ C^\dagger & D & C & 0 & \dots \\ 0 & C^\dagger & D & C & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{u}(0) \\ \vec{u}(1) \\ \vec{u}(2) \\ \vec{u}(3) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{f} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

gdzie f jest amplitudą siły działającej na powierzchnię. Aby rozwiązać powyższy układ potrzebujemy trzeciego wektora polaryzacji $\vec{e}_3$ aby być w stanie skonstruować rozwiązanie pokrywające całą przestrzeń (u_x, u_y, u_θ) . Odpowiedni wektor $(\vec{u}(0), \vec{u}(1), \vec{u}(2), \vec{u}(3), \dots)$ musi mieć postać $(\vec{e}_3, \vec{0}, \vec{0}, \vec{0}, \dots)$, ponieważ musi się zerować wewnątrz ośrodka. Poza tym musi on spełniać równania dla wnętrza ośrodka z układu równań (3.45). Warunek na to jest następujący:

$$C^\dagger \vec{e}_3 = 0 \quad (3.46)$$

A więc wektor $\vec{e}_3$ jest wektorem własnym macierzy $C^\dagger$ odpowiadającym zerowej wartości własnej tej macierzy.

3.3.2 Fale powierzchniowe

W układzie bez powierzchni rozważanym w rozdziale 3.2 wektor falowy k_y musiał być rzeczywisty ze względu na to, że w układzie nieograniczonym stany własne są falami Blocha. Fale z zespolonymi wektorami falowymi k_y miałyby w takim układzie nieskończoną amplitudę w nieskończoności przestrzennej, a więc są rozwiązaniami niefizycznymi. Teraz, gdy ośrodek jest ograniczony powierzchnią sytuacja jest inna, rozwiązania z zespolonym k_y są dopuszczalne. Znak części urojonej składowej wektora falowego prostopadłej do powierzchni k_y musi być jednak taki, aby fala zanikała w głąb ośrodka. Jeśli w naszym układzie taka fala istnieje, nazywamy ją falą powierzchniową, ponieważ faktycznie jest to fala, która rozchodzi się wzdłuż powierzchni, a której amplituda zanika wykładniczo w głąb ośrodka tak, że ruch falowy ogranicza się do obszaru przypowierzchniowego. Istnienie i liczba fal powierzchniowych zależy od własności układu i nie istnieją proste reguły kiedy takie rozwiązania występują i w jakiej liczbie. Analiza dynamiki układu z powierzchnią polega na znalezieniu rozwiązania układu równań dla ośrodka przy zadanych warunkach brzegowych na powierzchni, która może w ogólności mieć inne parametry niż ośrodek. Dla uzyskanych rozwiązań dla wnętrza ośrodka należy tak dobrać współczynniki kombinacji liniowej tych rozwiązań aby kombinacja ta spełniała warunek brzegowy.

Aby rozwiązać równanie (3.30) musieliśmy znaleźć niezerowe wektory $\vec{e}$ spełniające równanie (3.33). Ze względu na to, że równanie (3.30) jest jednorodne, aby to zrobić musieliśmy znaleźć k_y , dla których wyznacznik macierzy M znika. Dla modelu z $\sigma_{22} = 0$ otrzymujemy dwa rozwiązania tego problemu. Te dwa rozwiązania (dwa k_y i dwa im odpowiadające wektory $\vec{e}$) spełniają oczywiście wszystkie równania układu (3.42) oprócz równania pierwszego. W celu znalezienia ogólnego rozwiązania całego układu (3.42) musimy znaleźć wszystkie rozwiązania w postaci fal z k_y rzeczywistym bądź zespolonym spełniające wszystkie równania tego układu bez równania pierwszego i utworzyć z nich taką kombinację liniową, która spełnia to pierwsze

z równań układu (3.42) – równanie ruchu powierzchni rozważanego ośrodka. Oprócz $\vec{u}_1 = \vec{e}_1(1, e^{ik_{y1}b_y}, e^{2ik_{y1}b_y}, e^{3ik_{y1}b_y}, \dots)$ i $\vec{u}_2 = \vec{e}_2(1, e^{ik_{y2}b_y}, e^{2ik_{y2}b_y}, e^{3ik_{y2}b_y}, \dots)$ również wektor $\vec{u}_3 = \vec{e}_3(1, 0, 0, 0, \dots)$ spełnia wszystkie równania układu (3.42) bez równania pierwszego. Wstawiając kombinację liniową

$$\vec{u} = S_1\vec{u}_1 + S_2\vec{u}_2 + S_3\vec{u}_3 \quad (3.47)$$

tych rozwiązań do pierwszego z równań układu (3.42) dostajemy

$$R\vec{u}(0) + C\vec{u}(1) = 0 \quad (3.48)$$

$$R(S_1\vec{e}_1 + S_2\vec{e}_2 + S_3\vec{e}_3) + C\left(S_1\vec{e}_1 e^{ik_{y1}\Delta y} + S_2\vec{e}_2 e^{ik_{y2}\Delta y} + S_3\vec{e}_3 e^{\frac{0}{ik_{y3}\Delta y}}\right) = 0 \quad (3.49)$$

$$\sum_{j=1}^3 S_j \vec{e}_j (R + C e^{ik_{yj}\Delta y}) = 0. \quad (3.50)$$

Powyższe równanie może zostać przepisane w postaci

$$P \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = 0, \quad (3.51)$$

gdzie P jest odpowiednią macierzą. Jest to jednorodne równanie na współczynniki S_1, S_2, S_3 kombinacji liniowej (3.47). Niezerowe rozwiązania możemy otrzymać jedynie gdy

$$\det P = 0. \quad (3.52)$$

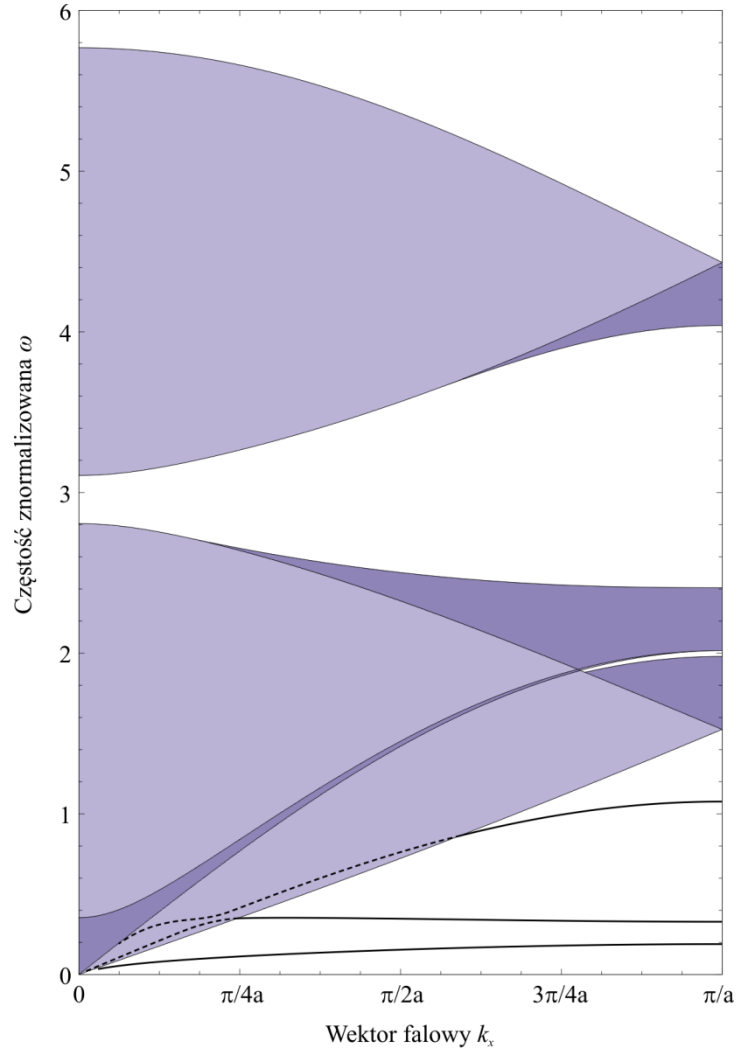
Równanie to dostarcza częstości fal powierzchniowych w zależności od składowej k_x wektora falowego, tj. relacji dyspersji fal powierzchniowych.

3.3.3 Pasma objętościowe

Oprócz fal i rezonansów powierzchniowych (o ile istnieją) do opisu dynamiki układu z powierzchnią należy wyznaczyć obraz pasm objętościowych. Przedstawione na Rys. 3.12 pasma objętościowe dla rozważanego układu oznaczone zostały kolorem jasno i ciemno niebieskim. Pasma objętościowe są zbiorem punktów w przestrzeni częstości i składowej wektora falowego równoległej do powierzchni, dla których można znaleźć składową prostopadłą tego wektora falowego taką, że fala z zadaną częstością i tak dobranym wektorem falowym może rozchodzić się wewnątrz ośrodka, tj. k_y jest rzeczywiste. Obszary jasnoniebieskie odpowiadają jednemu takiemu rozwiązaniu – jednej fali objętościowej, natomiast w obszarach ciemnoniebieskich uzyskujemy dwa takie rozwiązania – dwie fale objętościowe. Oczywiście we wszystkich niebieskich obszarach wektor falowy odpowiadający fali objętościowej jest rzeczywisty. Fale objętościowe nie zależą od własności powierzchni, ale jedynie od jej orientacji tzn. od wybranego kierunku składowej wektora falowego prostopadłej do powierzchni.

Fale powierzchniowe i rezonanse powierzchniowe muszą spełniać równania ruchu powierzchni oprócz równań ruchu wewnątrz ośrodka. Z reguły poza pasmami objętościowymi otrzymujemy nieskończenie długo żyjące fale powierzchniowe a wewnątrz pasm objętościowych rezonanse

powierzchniowe mające skończony czas życia. Tak więc gdy relacje dyspersji fal powierzchniowych oznaczone ciągłą czarną linią na Rys. 3.12 wchodzi w obszar pasma objętościowego mamy do czynienia już z rezonansami powierzchniowymi. Nasuwa się pytanie czy jest możliwe otrzymanie wewnątrz pasm objętościowych rezonansu o nieskończenie małej szerokości tzn. w istocie fali powierzchniowej w obszarze pasma objętościowego.

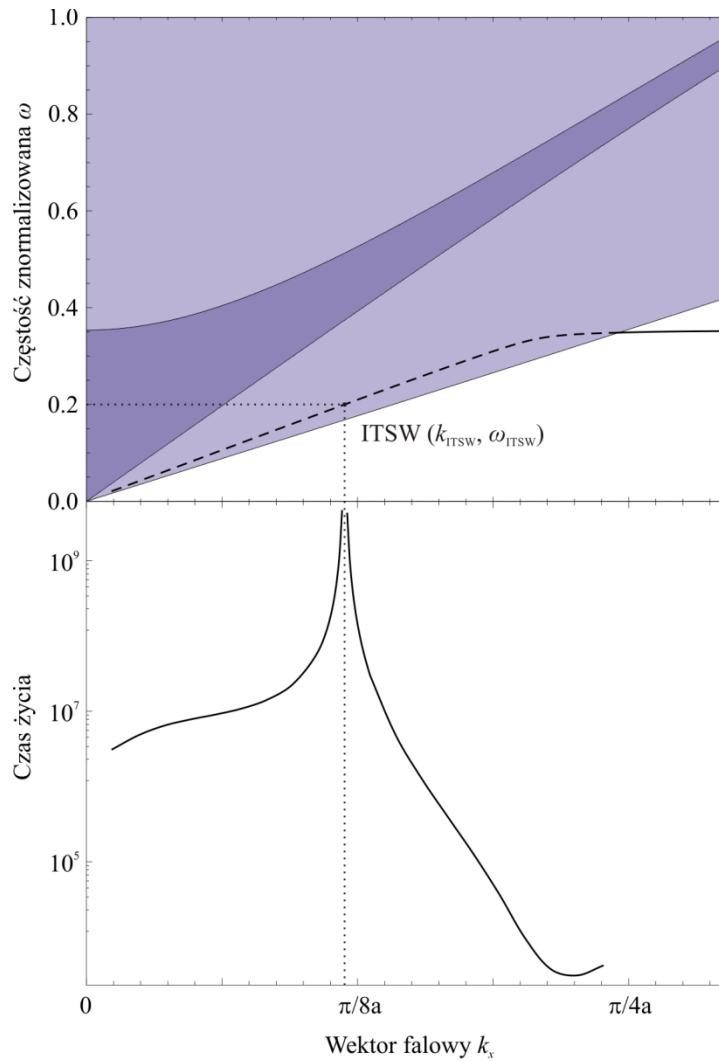


Rys. 3.12 Pasma objętościowe oraz relacje dyspersji fal i rezonansów powierzchniowych. Częstość na tym i następnych rysunkach została znormalizowana do $\sqrt{\beta/m}$. Parametry ośrodka: $l_{\alpha 0} = l_{\beta 0} = d$, $\epsilon_{11} = \frac{1}{4}$, $\epsilon_{22} = \frac{\sqrt{21}}{4} - 1$, co odpowiada: $\sigma_{11}/\beta = \frac{2\sqrt{7}}{7}$ oraz $\sigma_{22} = 0$.

3.4 Izolowana prawdziwa fala powierzchniowa (ITSW)

Okazuje się, że rotacyjne stopnie swobody, niezbędne do uzyskania ujemnego współczynnika Poissona dla wielu auksetyków, mogą prowadzić do istnienia prawdziwej fali powierzchniowej (TSW) występującej w pojedynczym izolowanym punkcie pasma objętościowego w przestrzeni częstości i wektora falowego dla struktury powracającej sześciokątnej z powierzchnią dla odpowiednio dobranych parametrów tej powierzchni. Zjawisko to różni się od znanych „odosobnionych” naddźwiękowych fal powierzchniowych (*secluded supersonic elastic surface waves*) [12, 13], które tworzą całą linię relacji dyspersji fal TSW, podczas gdy w rozważanym w tej pracy przypadku szerokość ogólnie skończenie życiowego rezonansu (również

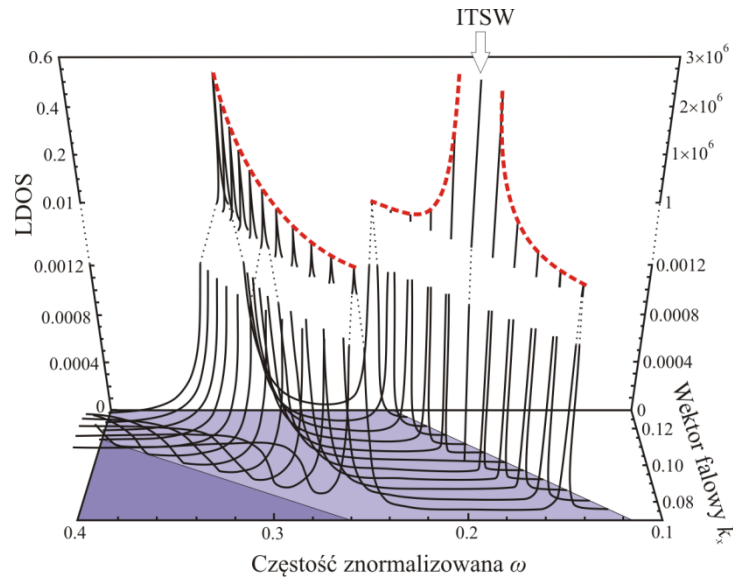
nazywanego PSW [18, 19]) zmierza do zera a jego wysokość do nieskończoności w dokładnie jednym izolowanym punkcie – stąd proponowana nazwa tego zjawiska: izolowana prawdziwa fala powierzchniowa (*isolated true surface wave*, ITSW). Zjawisko takie zostało przez nas zaobserwowane w trójwymiarowym ośrodku ciągłym pokrytym dwuwymiarową warstwą powierzchniową [17, 38] spełniającą zmodyfikowane równania ruchu dla membran [26]. ITSW może wtedy występować zarówno dla ośrodka auksetycznego jak i nieauksetycznego dla dowolnego wektora falowego, w tym dla małych wektorów falowych, pod warunkiem, że gęstość powierzchniowa i sztywność warstwy powierzchniowej będą odpowiednio dobrane. Warunki brzegowe uwzględnione w [17] nie stanowią jednak granicy nieskończenie małej grubości elastycznego ośrodka, a więc powinny być traktowane jako opisujące pewien specyficzny meta materiał. Inne, lecz zbliżone do tego zjawisko dla powierzchni rozdzielającej ośrodki (*true interfacial waves*) zostało później przedstawione w [14], gdzie szerokość rezonansu powierzchniowego maleje do zera w punkcie przecięcia z relacją dyspersji odosobnionych naddźwiękowych fal na powierzchni rozdzielającej ośrodki (*secluded supersonic interfacial waves*).



Rys. 3.13 Obszar długich fal i niskich częstotliwości z Rys. 3.12 oraz zależność czasu życia rezonansu od składowej k_x wektora falowego dla relacji dyspersji oznaczonej linią przerywaną. Widoczne ostre maksimum czasu życia.

3.4.1 Istota ITSW

Rys. 3.13 przedstawia pasma objętościowe i relacje dyspersji fal powierzchniowych na powierzchni (01) rozważanego modelu w obszarze długich fal i niskich częstotliwości. Krzywe relacji dyspersji fal powierzchniowych widoczne na Rys. 3.12 i Rys. 3.13 zostały otrzymane dla parametrów powierzchniowych: $\beta_s/\beta = 10$ i $m_s/m = \tau_s/\tau \approx 34.61$. Przy takim specyficznym wyborze parametrów okazuje się, że równania ruchu warstwy powierzchniowej dopuszczają rozwiązanie zawierające jedynie cząstkowe fale zanikające (*evanescent partial waves*) dla odpowiednio dobranego wektora falowego $k_x = k_{ITSW}$ i częstotliwości ω_{ITSW} w obszarze pasma objętościowego. Na Rys. 3.13 widać relację dyspersji fal powierzchniowych wchodzącą w obszar pasma objętościowego. Przy tym przejściu deltowaty pik lokalnej gęstości stanów (LDOS) przekształca się w szerokie maksimum jak na Rys. 3.14. Dla każdego wektora falowego k_x do pików została dopasowana funkcja Lorentza i odwrotność jej szerokości połówkowej przyjęto do oszacowania czasu życia rezonansu. Na Rys. 3.13 widać, że czas życia rezonansu rośnie do nieskończoności dla wektora falowego $k_x = k_{ITSW}$. Wysokość pików w LDOS na Rys. 3.14 również zmierza do nieskończoności w tym punkcie. ITSW występuje więc jak widać w jednym punkcie przestrzeni odwrotnej w przeciwieństwie do odosobnionych naddźwiękowych fal powierzchniowych (*secluded supersonic surface waves*) [11, 12], które tworzą całą krzywą dyspersji.

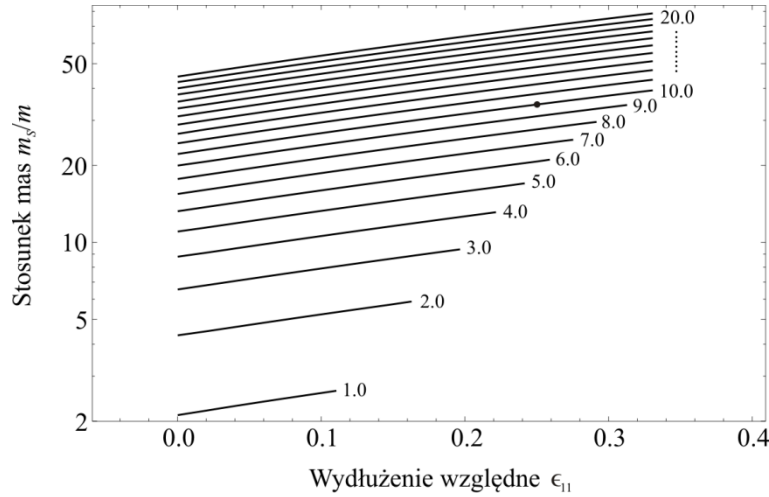


Rys. 3.14 Lokalna gęstość stanów. Widoczne szeregi maksimum odpowiadające rezonansom powierzchniowym. W punkcie na płaszczyźnie (ω, k_x) , który odpowiada ITSW otrzymujemy maksimum o charakterze delta Diraca.

3.4.2 Zależność od parametrów powierzchni

Opisywana ITSW występuje dla parametrów powierzchni dobranych odpowiednio do zadanego naprężenia zewnętrznego. Rys. 3.15 pokazuje stosunki m_s/m oraz β_s/β , dopuszczające istnienie ITSW dla k_{ITSW} i ω_{ITSW} takich jak na Rys. 3.12-3.14, w funkcji względnego wydłużenia ϵ_{11} względem geometrii powracającej sześciokątnej, przy braku naprężenia zewnętrznego w kierunku y , dla $\alpha/\beta = 1$. Dla $\beta_s/\beta \geq 10.0$ przedział występowania ITSW jest największy z możliwych dla przyjętych pozostałych parametrów i rozciąga się od $\epsilon_{11} \approx 0.00075$ ($\theta \approx \frac{\pi}{3} + 0.0013$ rad) do $\epsilon_{11} \approx 0.33245$ ($\theta \approx \frac{\pi}{2} - 0.0013$ rad). Wszystkie przedziały leżą

całkowicie w obszarze, gdzie model jest auksetykiem tzn. $\theta < \pi/2$. Interesującym jest, iż dla mniejszych wartości stałej siłowej β_s masa pręta powierzchniowego m_s może być jedynie około dwa razy większa niż masa m pręta wewnątrz ośrodka, jednak wtedy obszar istnienia ITSW staje się węższy. Fale ITSW nie są oczywiście wykluczone dla nieauksetycznego obszaru modelu przy innym wyborze $l_{\alpha 0}$, $l_{\beta 0}$ lub α/β .



Rys. 3.15 Wartość stosunku $m_s/m (= \tau_s/\tau)$ dla różnych wartości β_s/β (oznaczonych z prawej strony krzywych) w zależności od wydłużenia względnego ośrodka ϵ_{11} .

3.4.3 Odbicie fal

Fala objętościowa rozchodząca się w kierunku powierzchni odbija się od powierzchni tak, że otrzymujemy fale odbite, które spełniają równanie (3.43). Fala padająca również musi spełniać to równanie. Niech fala padająca będzie miała postać

$$\vec{u}_{inc}(n) = S_{inc} \vec{e}_{inc} e^{ik_{yinc} n b_y} \quad (3.53)$$

Wybieramy wolniejszą akustyczną falę objętościową jako falę padającą. Skoro fala ta rozchodzi się w kierunku powierzchni musimy wybrać rozwiązanie z ujemną prędkością grupową.

Suma

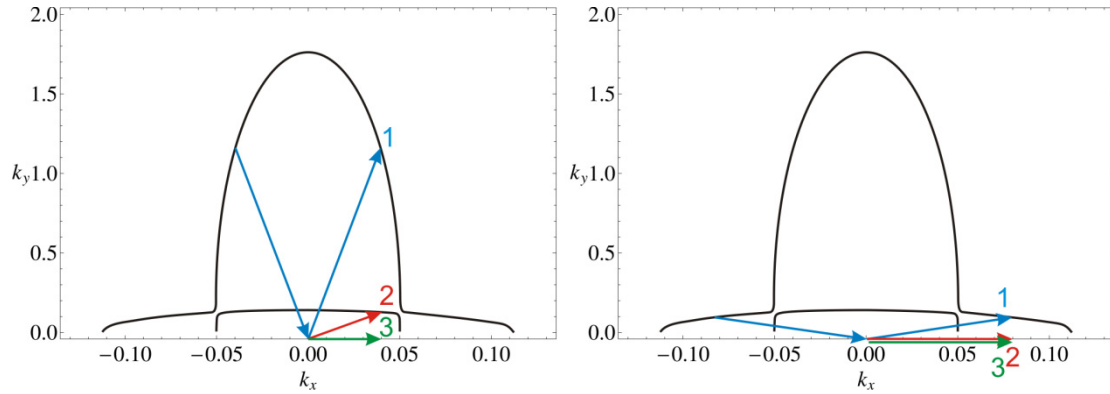
$$\vec{u} = S_{inc} \vec{u}_{inc} + S_1 \vec{u}_1 + S_2 \vec{u}_2 + S_3 \vec{u}_3 \quad (3.54)$$

musi spełniać pierwsze równanie układu równań (3.42). Rozwiązując to jednorodne równanie wektorowe otrzymujemy współczynniki odbicia S_1/S_{inc} , S_2/S_{inc} i S_3/S_{inc} .

Na Rys. 3.16a widzimy jedną falę padającą i trzy fale cząstkowe odbite od powierzchni. Ze względu na zasadę zachowania energii fala padająca i fale odbite mają tę samą częstotliwość, a więc ich wektory falowe należą do jednej powierzchni powolności. Składowa wektora falowego równoległa do powierzchni jest również zachowana przy odbiciu. Skoro fala padająca jest wolniejszą falą akustyczną, jej wektor falowy należy do zewnętrznej powierzchni powolności. Dla wystarczająco małego kąta padania dostajemy dwie fale odbite jak na Rys. 3.16a. Trzecia składowa zanika w głąb ośrodka w taki sposób, że drgania z nią związane ograniczają się jedynie do powierzchniowej warstwy prętów. W przypadku gdy $\sigma_{22} \neq 0$ składowa ta jest

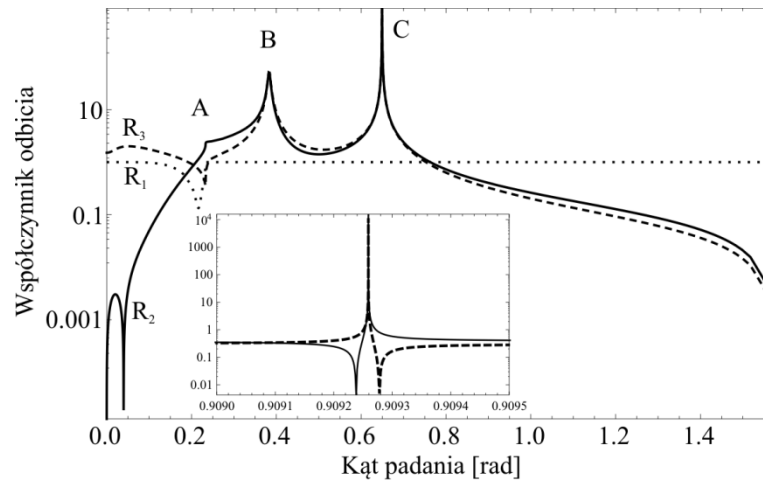
polem bliskim i nie zanika równie szybko. Fala odbita nr 1 spełnia równanie Snelliusa – kąt padania jest równy kątowi odbicia.

Począwszy od pewnej wartości kąta padania jedna z fal odbitych staje się polem bliskim (patrz Rys. 3.16b, fala nr 2), które jest cząstkową falą powierzchniową rozchodzącą się wzdłuż powierzchni i malejącą wykładniczo w głąb ośrodka. Jej składowa wektora falowego prostopadła do powierzchni jest zespolona a nie rzeczywista tak jak wcześniej.



Rys. 3.16 Fale cząstkowe odbite dla dwóch różnych kątów padania.

Fala ITSW może być oczywiście w prosty sposób wzbudzona przez zewnętrzne zaburzenie o tej samej częstotliwości i wektorze falowym ponieważ jest mało prawdopodobne, żeby takie zaburzenie było ortogonalne do przemieszczeń związanych z tą falą. Stany na Rys. 3.14 są spolaryzowane w kierunku (10) tak, że prezentowana lokalna gęstość stanów powierzchniowych LDOS jest proporcjonalna do transferu mocy do sieci przy jednostkowej zewnętrznej sile oscylującej przyłożonej równolegle do prętów powierzchniowych. Ponieważ ITSW jest z definicji nie sprzężona z żadną falą objętościową, jej wpływu na odbicie fal od powierzchni przy padaniu od strony ośrodka można się spodziewać dla częstotliwości różniących się trochę od częstotliwości ω_{ITSW} . Jest to zilustrowane na Rys. 3.17. Wolniejsza fala akustyczna o częstotliwości ω_{ITSW} i jednostkowej amplitudzie pada na powierzchnię pod pewnym kątem i w wyniku odbicia powstają trzy odbite fale cząstkowe o amplitudach R_1 , R_2 oraz R_3 . Fala R_1 jest również wolniejszą falą akustyczną spełniającą prawo odbicia Snelliusa i rozchodzi się w głąb ośrodka dla dowolnego kąta padania. Szybsza fala odbita R_2 staje się eksponencjalnie zanikającym (*evanescent*) polem bliskim za punktem A na Rys. 3.17 oraz tłumionym sinusoidalnym polem bliskim z podwajaniem okresu w kierunku (01) za punktem C. Dla $\sigma_{22} = 0$ fala częściowa R_3 zachowuje się w szczególny sposób, mianowicie ogranicza się wyłącznie do powierzchniowego łańcucha prętów. Anomalie wynikające z ITSW występujące dla częstotliwości nieco odbiegającej od ω_{ITSW} są przedstawione na wstawce na Rys. 3.17 dla $\omega = \omega_{ITSW}(1 + 0.001)$. Współczynniki odbicia dla obu zanikających fal częściowych R_2 i R_3 (*evanescent partial waves*) mają wyraźny ostry pik. Oba pola bliskie są więc szczególnie wzmocnione dla odpowiadającego kąta padania. Ponadto, zanikająca składowa R_2 jest praktycznie całkowicie wyeliminowana przy nieco mniejszym, a składowa R_3 nieco większym, kącie padania. Analogiczny wynik, ale z odwrotnym porządkiem eliminowanych pól bliskich dostajemy dla częstotliwości niższych niż ω_{ITSW} .



Rys. 3.17 Współczynnik odbicia dla trzech odbitych fal cząstkowych w zależności od kąta padania wolniejszej fali akustycznej.

Opisane zjawisko może być użyteczne przy selektywnym wzbudzaniu fal powierzchniowych (fale prowadzone). Kąt padania, dla którego otrzymujemy wysoką amplitudę wzbudzonej fali powierzchniowej musi być bardzo bliski kątowi, dla którego otrzymujemy maksimum współczynnika odbicia.

Rozdział 4

Rola własności sprężystych ścian naczyń i otoczenia tkankowego w propagacji fal tętna

Propagacja fal w ośrodkach sprężystych i lepkosprężystych znajduje liczne zastosowania techniczne, ale ma także duże znaczenie w fizjologii organizmów żywych. W tej dziedzinie wyróżnia się tu zjawisko fal tętna, które są wynikiem cyklicznej, pulsacyjnej pracy serca [39, 40]. Wtłoczenie w światło aorty objętości wyrzutowej (*stroke volume*) krwi powoduje lokalny wzrost ciśnienia i odpowiednie odkształcenie naczynia. Odkształcenie to następnie propaguje się do dalszych części drzewa tętniczego. Najbardziej znaną postacią fal tętna jest tzw. mod Younga, wyczuwalny np. na nadgarstku lub na tętnicy szyjnej. Złożoność budowy naczynia i wypełniającej ją cieczy dopuszcza jednak istnienie innych modów propagacji. Większość z nich ma zapewne małe znaczenie praktyczne, ponieważ są silnie tłumione. W pracy [41] wykazano jednak, że tzw. mod Lamba, pełnosymetryczny z $n = 0$ i obejmujący ruchy osiowe i promieniowe naczynia może, w niektórych warunkach zgodnych z fizjologicznymi wartościami parametrów, rozprzestrzeniać się na odległości porównywalne z rozmiarami narządów wewnętrznych. Zatem mod ten może mieć jakieś znaczenie fizjologiczne, które dotychczas nie zostało zbadane. W pracy [41] przyjęto dość uproszczony, lecz realistyczny model, w którym ściana tętnicy jest cienkościenną sprężystą rurą, jej otoczenie ośrodkiem lepkosprężystym a krew jest nieściśliwą cieczą newtonowską. Wyniki przedstawione w poprzednich rozdziałach niniejszej pracy są wstępnym krokiem do rozszerzenia tego modelu poprzez uwzględnienie warstwowej budowy ściany naczynia i jej skończonej grubości. W takich warunkach można się spodziewać powstawania w niej zarówno fal objętościowych jak i powierzchniowych w analogii do opisanych w rozdziale 2. Użyteczność wyników rozdziału 2 jest tym większa, że materiałów auksetycznych, tj. wykazujących ujemny współczynnik Poissona, używa się do wykonywania protez tętniczych [3]. W obecnym rozdziale przedstawione zostały podstawowe wyniki dotyczące naczyń o małej grubości ściany.

4.1 Najprostsze wzory na prędkość fazową modu Younga

Prędkość rozchodzenia się podstawowego modu, tj. modu Younga, fal tętna ma zasadnicze znaczenie w odżywianiu mięśnia sercowego [40]. Prędkość ta zależy od parametrów reologicznych krwi oraz od sztywności i tarcia wewnętrznego ściany naczynia. W najprostszym modelu, w którym grubość ściany przyjmuje się za małą i niezależną od aktualnej wartości

promienia naczynia, a krew traktuje się jako nieściśliwą i nielepką ciecz wyrażenie na prędkość fali tętna ma postać:

$$c_0 = \sqrt{\frac{Eh}{2R\rho}}, \quad (4.1)$$

gdzie E jest modułem sprężystości Younga ściany naczynia, R i h odpowiadają jego wewnętrznemu promieniowi i grubości, natomiast ρ jest gęstością krwi. Jest to tzw. wzór Moensa-Kortewega [39, 42].

Uwzględnienie zmian grubości ściany towarzyszące zmianom obwodu naczynia w wyniku ruchu pulsacyjnego, tj. w istocie uwzględnienie współczynnika Poissona ν ściany naczynia prowadzi do następującej modyfikacji wyznaczonej po raz pierwszy przez Bergela [39]:

$$\tilde{c}_0^2 = c_0^2 \frac{2 - \gamma}{2 - \gamma(2 - \gamma)(1 - \nu - 2\nu^2) - 2\nu^2}, \quad \gamma = \frac{h}{R}. \quad (4.2)$$

Zastosowanie protez tętniczych wykonanych z materiału o $\nu < 0$ prowadzi zatem, oprócz efektów zwiększenia wytrzymałości naczyń, do istotnych zmian prędkości fal tętna.

Analiza wpływu współczynnika Poissona na dynamikę naczyń staje się bardziej złożona, gdy chcemy zbadać wszystkie istotne postacie drgań (mody) oraz uwzględnić otoczenie tkankowe. Prędkości poszczególnych modów stają się w takim modelu zależne od częstości.

4.2 Model cienkościennego naczynia tętniczego w otoczeniu lepkością dynamiczną

Na rozważany model tętnicy składa się sprężysta, cienkościenna rura wypełniona cieczą newtonowską (z liniową zależnością naprężenia ścinającego od prędkości ścinania) o zadanej lepkości oraz umieszczona w lepkością dynamiczną tkance zewnętrznej otoczonej sztywną cylindryczną osłoną.

4.2.1 Równania ruchu cieczy

Nieściśliwa ciecz newtonowska spełnia równanie ciągłości:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (4.3)$$

oraz równania Naviera – Stokesa będące w istocie równaniami Newtona dla elementu płynu pod wpływem działających na ten element sił:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{grad} \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \frac{\eta}{\rho} \operatorname{div} \operatorname{grad} \mathbf{v}, \quad (4.4)$$

gdzie $\mathbf{v}$ jest wektorem pola prędkości, p jest ciśnieniem, ρ gęstością a η lepkością dynamiczną cieczy. W teorii zlinearyzowanej drugi wyraz po lewej stronie równania (4.4) zaniedbuje się, co jest poprawne dla małych prędkości i w granicy fal długich, gdy $\operatorname{grad} \mathbf{v}$ jest mały. Równanie (4.3) i zlinearyzowane równanie (4.4) we współrzędnych cylindrycznych przyjmują postać:

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\eta}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_r}{r^2} \right), \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\eta}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2} \right), \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\eta}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right), \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (4.8)$$

Aby znaleźć wyrażenie na p można wziąć dywergencję ze zlinearyzowanego równania (4.4) i stosując relację $\text{divgrad}F = \text{graddiv}F - \text{rotrot}F$ oraz równanie (4.3) otrzymujemy równanie Laplace'a:

$$\text{divgrad}p = 0, \quad (4.9)$$

które we współrzędnych cylindrycznych przyjmuje postać

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0. \quad (4.10)$$

Stosując założenie $p = P(r)\exp(-i\omega t + ikz + in\theta)$ i zmianę zmiennych $\xi = ikr$ otrzymujemy z (4.9) równanie Bessela:

$$\xi^2 \frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} + \xi \frac{\partial P}{\partial \xi} + (\xi^2 - n^2)P = 0. \quad (4.11)$$

Ogólne rozwiązanie równania (4.11) ma postać

$$P(\xi) = B_1 J_n(\xi) + B_2 Y_n(\xi), \quad (4.12)$$

ale ze względu na rozbieżność funkcji Bessela drugiego rodzaju przy $\xi = 0$ ograniczamy się do rozwiązania postaci

$$P(r) = B J_n(ikr), \quad (4.13)$$

które daje skończone wartości ciśnienia dla $r = 0$. Przyjęto oznaczenie: $B = B_1$.

Wstawiając do równań (4.5)-(4.8) postać fali płaskiej dla pola prędkości $\mathbf{v} = \mathbf{V}(r)\exp(-i\omega t + ikz + in\theta)$ otrzymujemy

$$\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_r \left(i \frac{\rho\omega}{\eta} - k^2 - (n^2 + 1) \frac{1}{r^2} \right) - 2in \frac{V_\theta}{r^2} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial P}{\partial r}, \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + V_\theta \left(i \frac{\rho\omega}{\eta} - k^2 - (n^2 + 1) \frac{1}{r^2} \right) + 2in \frac{V_r}{r^2} = \frac{in}{\eta r} P, \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial r} + V_z \left(i \frac{\rho\omega}{\eta} - k^2 - n^2 \frac{1}{r^2} \right) = \frac{ik}{\eta} P, \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r} V_r + in \frac{V_\theta}{r} + ik V_z = 0. \quad (4.17)$$

Wprowadźmy

$$\alpha^2 = i \frac{\rho \omega}{\eta} - k^2. \quad (4.18)$$

Stosując zamianę zmiennych $\xi = \alpha r$ i uwzględniając (4.13) otrzymujemy z (4.16) równanie Bessela na V_z , którego rozwiązanie ma postać

$$V_z(r) = C_1 J_n(\alpha r) + C_2 Y_n(\alpha r) + C_3 J_n(ikr), \quad (4.19)$$

gdzie pierwsze dwa wyrazy są rozwiązaniem ogólnym równania jednorodnego a ostatni wyraz jest rozwiązaniem szczególnym równania (4.16). Ze względu na rozbieżność funkcji Bessela drugiego rodzaju przy $\xi = 0$ współczynnik C_2 musi być równy zero. Aby wyznaczyć współczynnik C_3 wstawiamy rozwiązanie szczególne do (4.16) i otrzymujemy $C_3 = kB/(\omega\rho)$.

Teraz rozwiązanie (4.16) można przedstawić następująco:

$$V_z(r) = C J_n(\alpha r) + \frac{kB}{\omega\rho} J_n(ikr). \quad (4.20)$$

Przyjęto oznaczenie: $C = C_1$.

Dla $n \neq 0$ wstawiając V_θ obliczone z (4.17) do (4.14) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_r \left(\alpha^2 - (n^2 - 1) \frac{1}{r^2} \right) \\ = \frac{ikB}{\eta} J'_n(ikr) - \frac{2ik}{r} \left(C J_n(\alpha r) + \frac{kB}{\omega\rho} J_n(ikr) \right). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Stosując zamianę zmiennych $\xi = \alpha r$ i podstawienie $V_r(\xi) = q(\xi)/\xi$ otrzymujemy równanie Bessela na $q(\xi)$, które daje nam ogólne rozwiązanie części jednorodnej równania (4.21) w postaci

$$V_r(r) = D_1 \frac{J_n(\alpha r)}{\alpha r} + D_2 \frac{Y_n(\alpha r)}{\alpha r}. \quad (4.22)$$

Ze względu na osobliwość w $r = 0$ drugiego wyrazu po prawej stronie równości (4.22) współczynnik D_2 musi być równy zero. W przypadku $n \neq 0$ nie mamy rozbieżności dla $r \rightarrow 0$, gdyż wtedy

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{J_n(\xi)}{\xi} \in \left\{ 0, \pm \frac{1}{2} \right\}. \quad (4.23)$$

Szukamy więc rozwiązania równania (4.21) będącego postaci

$$V_r(r) = D_1 \frac{J_n(\alpha r)}{\alpha r} + D_3 J_{n-1}(\alpha r) + D_4 \frac{J_n(ikr)}{ikr} + D_5 J_{n-1}(ikr). \quad (4.24)$$

Wstawiając (4.24) do (4.21) otrzymujemy $D_3 = ikC/\alpha$, $D_4 = inB/(\omega\rho)$, $D_5 = kB/(\omega\rho)$, co daje

$$V_r(r) = \frac{kB}{\omega\rho} \left(J_{n-1}(ikr) - \frac{nJ_n(ikr)}{ikr} \right) + \frac{ikC}{\alpha} J_{n-1}(\alpha r) + D_1 \frac{J_n(\alpha r)}{\alpha r}. \quad (4.25)$$

Korzystając z podstawienia $D_1 = D - nikC/\alpha$ powyższe równanie można przepisać w postaci uproszczonej (4.28). Wstawiając natomiast tak uzyskane $V_r(r)$ oraz wcześniej wyznaczone $V_z(r)$ do (4.17) otrzymujemy wyrażenie (4.29) na $V_\theta(r)$ spełniające również równanie (4.15). Tak więc podsumowując otrzymujemy dla $n \neq 0$:

$$P(r) = BJ_n(ikr), \quad (4.26)$$

$$V_z(r) = CJ_n(\alpha r) + \frac{kB}{\omega\rho} J_n(ikr), \quad (4.27)$$

$$V_r(r) = \frac{kB}{\omega\rho} J'_n(ikr) + \frac{ikC}{\alpha} J'_n(\alpha r) + D \frac{J_n(\alpha r)}{\alpha r}, \quad (4.28)$$

$$V_\theta(r) = \frac{nB}{\omega\rho} \frac{J_n(ikr)}{r} + \frac{iD}{n} J'_n(\alpha r) - \frac{nkCJ_n(\alpha r)}{\alpha^2 r}. \quad (4.29)$$

W przypadku $n = 0$ równania (4.14) i (4.15) są niezależne i rozwiązania (4.32) i (4.33) otrzymujemy bezpośrednio z tych równań, mamy więc wtedy:

$$P(r) = BJ_0(ikr), \quad (4.30)$$

$$V_z(r) = CJ_0(\alpha r) + \frac{kB}{\omega\rho} J_0(ikr), \quad (4.31)$$

$$V_r(r) = \frac{kB}{\omega\rho} J'_0(ikr) + \frac{ikC}{\alpha} J'_0(\alpha r) = -\frac{kB}{\omega\rho} J_1(ikr) - \frac{ikC}{\alpha} J_1(\alpha r), \quad (4.32)$$

$$V_\theta(r) = DJ_1(\alpha r). \quad (4.33)$$

4.2.2 Równania ściany naczynia

Siła działająca na jednostkowy element objętości jest dana przez dywergencję tensora naprężeń:

$$F_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} dV. \quad (4.34)$$

We współrzędnych cylindrycznych powyższy wzór można zapisać w postaci

$$F_r = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\sigma_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial z} - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} \right) dV, \quad (4.35)$$

$$F_\theta = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\sigma_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial z} + \frac{\sigma_{\theta r}}{r} \right) dV, \quad (4.36)$$

$$F_z = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\sigma_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) dV. \quad (4.37)$$

Ściany naczyń tętniczych są cienkie w porównaniu z promieniem naczynia a , co daje nam możliwość założenia, że pochodne składowych tensora naprężeń ze względu na zmienną r znikają oraz że

$$\sigma_{zr} = \sigma_{\theta r} = \sigma_{rr} = 0. \quad (4.38)$$

Biorąc pod uwagę fakt, że tensor naprężeń jest symetryczny i uwzględniając to, że ciecz wypełniająca naczynie oraz tkanka je otaczająca oddziałują z pewną siłą na ścianę naczynia otrzymujemy

$$F_r = -\frac{\sigma_{\theta\theta}}{a}dV + \frac{\tau_r}{h}dV, \quad (4.39)$$

$$F_\theta = \frac{\partial\sigma_{\theta z}}{\partial z}dV + \frac{1}{a}\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta}dV + \frac{\tau_\theta}{h}dV, \quad (4.40)$$

$$F_z = \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}dV + \frac{1}{a}\frac{\partial\sigma_{z\theta}}{\partial\theta}dV + \frac{\tau_z}{h}dV, \quad (4.41)$$

gdzie h jest grubością naczynia a $\tau dV/h$ jest zewnętrzną siłą działającą na element objętości dV .

Przyjmujemy, że zależność między naprężeniem i odkształceniem dla ściany naczynia można wyrazić wzorami [27, 30]:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{1}{E}(\sigma_{rr} - \sigma(\sigma_{zz} + \sigma_{\theta\theta})), \quad (4.42)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{E}(\sigma_{\theta\theta} - \sigma(\sigma_{rr} + \sigma_{zz})), \quad (4.43)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}(\sigma_{zz} - \sigma(\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{rr})), \quad (4.44)$$

$$\varepsilon_{z\theta} = \frac{1+\sigma}{E}\sigma_{z\theta}, \quad \varepsilon_{zr} = \frac{1+\sigma}{E}\sigma_{zr}, \quad \varepsilon_{\theta r} = \frac{1+\sigma}{E}\sigma_{\theta r}. \quad (4.45)$$

Biorąc pod uwagę (4.38) otrzymujemy

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{E}(\sigma_{\theta\theta} - \sigma\sigma_{zz}), \quad (4.46)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}(\sigma_{zz} - \sigma\sigma_{\theta\theta}), \quad (4.47)$$

$$\varepsilon_{zr} = \varepsilon_{\theta r} = 0. \quad (4.48)$$

Korzystając z (4.45) i wyznaczając naprężenia z (4.46) i (4.47) otrzymujemy

$$\sigma_{zz} = \frac{E}{1-\sigma^2}(\varepsilon_{zz} + \sigma\varepsilon_{\theta\theta}), \quad (4.49)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{1-\sigma^2}(\varepsilon_{\theta\theta} + \sigma\varepsilon_{zz}), \quad (4.50)$$

$$\sigma_{z\theta} = \frac{E}{1+\sigma} \varepsilon_{z\theta}. \quad (4.51)$$

Wstawiając powyższe zależności do (4.39)-(4.41) otrzymujemy

$$F_r = -\frac{1}{a} \frac{E}{1-\sigma^2} (\varepsilon_{\theta\theta} + \sigma \varepsilon_{zz}) dV + \frac{\tau_r}{h} dV, \quad (4.52)$$

$$F_\theta = \frac{E}{1+\sigma} \frac{\partial \varepsilon_{z\theta}}{\partial z} dV + \frac{1}{a} \frac{E}{1-\sigma^2} \left(\frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \sigma \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial \theta} \right) dV + \frac{\tau_\theta}{h} dV, \quad (4.53)$$

$$F_z = \frac{E}{1-\sigma^2} \left(\frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial z} + \sigma \frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial z} \right) dV + \frac{1}{a} \frac{E}{1+\sigma} \frac{\partial \varepsilon_{z\theta}}{\partial \theta} dV + \frac{\tau_z}{h} dV, \quad (4.54)$$

a następnie stosując definicję tensora odkształceń we współrzędnych cylindrycznych:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad (4.55)$$

$$2\varepsilon_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}, \quad 2\varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z}, \quad 2\varepsilon_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}, \quad (4.56)$$

otrzymujemy

$$\rho_w \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = -\frac{E}{a^2(1-\sigma^2)} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) - \frac{\sigma E}{a(1-\sigma^2)} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\tau_r}{h}, \quad (4.57)$$

$$\rho_w \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} = \frac{E}{a^2(1-\sigma^2)} \left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) + \frac{E}{2(1+\sigma)} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} + \frac{E}{2a(1-\sigma)} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial \theta} + \frac{\tau_\theta}{h}, \quad (4.58)$$

$$\rho_w \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = \frac{E}{(1-\sigma^2)} \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{\sigma}{a} \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) + \frac{E}{2a^2(1+\sigma)} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{E}{2a(1-\sigma)} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta \partial z} + \frac{\tau_z}{h}, \quad (4.59)$$

gdzie ρ_w jest gęstością ściany naczynia a $\mathbf{u} = (u_r, u_\theta, u_z)$ przemieszczeniem ściany dla danych współrzędnych.

Składowe tensora naprężeń panujących w nieściśliwej cieczy we współrzędnych cylindrycznych wyrażają się wzorami [43]:

$$\sigma_{rr} = -p + 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad (4.60)$$

$$\sigma_{r\theta} = \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right), \quad (4.61)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -p + 2\eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right), \quad (4.62)$$

$$\sigma_{\theta z} = \eta \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right), \quad (4.63)$$

$$\sigma_{zz} = -p + 2\eta \frac{\partial v_z}{\partial z}, \quad (4.64)$$

$$\sigma_{zr} = \eta \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right). \quad (4.65)$$

Naprężenie wywierane przez ciecz na ścianę naczynia jest dane przez (4.60), (4.61) i (4.65) ale z przeciwnym znakiem. Przyjmujemy również, że tkanka otaczająca naczynie wywiera na ścianę naczynia naprężenie równe

$$-\frac{K'_i}{d}u_i - \frac{K''_i}{d}\frac{\partial u_i}{\partial t}, \quad (4.66)$$

gdzie i jest kierunkiem działania naprężenia: r, θ lub z .

Równania ruchu ściany naczynia ostatecznie przyjmują więc postać

$$\begin{aligned} \rho_w \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = & -\frac{E}{a^2(1-\sigma^2)}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r\right) - \frac{\sigma E}{a(1-\sigma^2)}\frac{\partial u_z}{\partial z} \\ & + \frac{1}{h}\left(p - 2\eta\frac{\partial v_r}{\partial r}\right) - \frac{1}{hd}\left(K'_r u_r + K''_r \frac{\partial u_r}{\partial t}\right), \end{aligned} \quad (4.67)$$

$$\begin{aligned} \rho_w \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} = & \frac{E}{a^2(1-\sigma^2)}\left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) + \frac{E}{2(1+\sigma)}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} + \frac{E}{2a(1-\sigma)}\frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial \theta} \\ & - \frac{\eta}{h}\left(\frac{1}{a}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{a}\right) - \frac{1}{hd}\left(K'_\theta u_\theta + K''_\theta \frac{\partial u_\theta}{\partial t}\right), \end{aligned} \quad (4.68)$$

$$\begin{aligned} \rho_w \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = & \frac{E}{(1-\sigma^2)}\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{\sigma}{a}\frac{\partial u_r}{\partial z}\right) + \frac{E}{2a^2(1+\sigma)}\frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{E}{2a(1-\sigma)}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta \partial z} \\ & - \frac{\eta}{h}\left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}\right) - \frac{1}{hd}\left(K'_z u_z + K''_z \frac{\partial u_z}{\partial t}\right). \end{aligned} \quad (4.69)$$

4.2.3 Granica ciecz-naczynie

Wyrażenia na ciśnienie i prędkość cieczy w naczyniu

$$p(r, \theta, z, t) = P(r)\exp(-i\omega t + ikz + in\theta), \quad (4.70)$$

$$\mathbf{v}(r, \theta, z, t) = \mathbf{V}(r)\exp(-i\omega t + ikz + in\theta), \quad (4.71)$$

gdzie $P(r)$ i $\mathbf{V}(r)$ są wyrażone odpowiednio wzorami (4.30)-(4.33) lub (4.26)-(4.29) w zależności od tego czy $n = 0$ czy $n \neq 0$. Ruch ściany naczynia wypełnionego cieczą wyraża się równaniami (4.67)-(4.69).

Prędkości punktów ściany naczynia należy uzgodnić z prędkościami cieczy przy ścianie naczynia (warunek zszycia bez poślizgu, *non-slip*). W przybliżeniu liniowym warunek ten ma postać:

$$\frac{\partial u_r}{\partial t}\bigg|_{r=a} = v_r(a) \quad (4.72)$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t}\bigg|_{r=a} = v_\theta(a) \quad (4.73)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t}\bigg|_{r=a} = v_z(a) \quad (4.74)$$

Zakładając postać fali płaskiej $\mathbf{u} = \mathbf{U}\exp(-i\omega t + ikz + in\theta)$, $\mathbf{U} = (R, T, Z)$ i wykorzystując wcześniej wyprowadzone wyrażenia na prędkość cieczy $\mathbf{v}$ dostajemy z (4.67)-(4.69) i (4.72)-

(4.74) jednorodny układ sześciu równań na sześć niewiadomych B, C, D, R, T, Z , który można przedstawić następująco:

$$\begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B \\ C \\ D \\ R \\ T \\ Z \end{bmatrix} = 0. \quad (4.75)$$

Dla $n = 0$ mamy

$$M_1 = \begin{bmatrix} \frac{a(\rho\omega + 2ik^2\eta)J_0(ia\kappa) - 2k\eta J_1(ia\kappa)}{h\rho\omega} & \frac{2ik\eta(a\alpha J_0(a\alpha) - J_1(a\alpha))}{h\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\eta(2J_1(a\alpha) - a\alpha J_0(a\alpha))}{ha} \\ \frac{2ik^2\eta J_1(ia\kappa)}{h\rho\omega} & -\frac{\eta(k^2 - a^2)J_1(a\alpha)}{h\alpha} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.76)$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} -\frac{E}{a^2(1-\sigma^2)} + \rho_w\omega^2 - \frac{K'_r - iK''_r}{hd} & 0 & -\frac{ik\sigma E}{a(1-\sigma^2)} \\ 0 & -\frac{k^2 E}{2(1+\sigma)} + \rho_w\omega^2 - \frac{K'_\theta - iK''_\theta}{hd} & 0 \\ \frac{ik\sigma E}{a(1-\sigma^2)} & 0 & -\frac{k^2 E}{1-\sigma^2} + \rho_w\omega^2 - \frac{K'_z - iK''_z}{hd} \end{bmatrix} \quad (4.77)$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} -\frac{kJ_1(ia\kappa)}{\rho\omega} & -\frac{ikJ_1(a\alpha)}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & J_1(a\alpha) \\ \frac{kJ_0(ia\kappa)}{\rho\omega} & J_0(a\alpha) & 0 \end{bmatrix} \quad (4.78)$$

$$M_4 = \begin{bmatrix} i\omega & 0 & 0 \\ 0 & i\omega & 0 \\ 0 & 0 & i\omega \end{bmatrix} \quad (4.79)$$

Dla $n > 0$ postać powyższych macierzy została przedstawiona w dodatku A.

Gdy $|x| \ll 1$ możemy przybliżyć funkcję Bessela pierwszym wyrazem jej rozwinięcia w szereg Taylora:

$$J_n(x) \cong \frac{x^n}{2^n n!}, \quad J'_n(x) \cong \frac{nx^{n-1}}{2^n n!}. \quad (4.80)$$

Przybliżenie to możemy zastosować tam, gdzie argumentem funkcji Bessela jest $ia\kappa$, gdyż zgodnie z przyjętymi założeniami $1/k$ jest dużo większe niż promień naczynia a , mamy więc $|ia\kappa| \ll 1$. Można również zastosować przybliżenie [44]:

$$\alpha = \sqrt{i\frac{\omega\rho}{\eta} - k^2} \cong \sqrt{i\frac{\omega\rho}{\eta}}. \quad (4.81)$$

Po zastosowaniu powyższych przybliżeń macierz M , na którą w równaniu (4.75) składają się podmacierze $M_1 - M_4$ upraszcza się, tak że $\det M$ staje się wielomianem ze względu na k .

4.3 Wyznaczanie relacji dyspersji

Jednorodny układ równań liniowych (4.75) może mieć niezerowe rozwiązanie jedynie gdy wyznacznik macierzy M jest równy zero

$$\det M = 0 \quad (4.82)$$

Warunek (4.82) może być rozwiązany numerycznie lub w pewnych przypadkach analitycznie po zastosowaniu wspomnianych wcześniej przybliżeń tak, że dostaniemy relacje dyspersji $\omega(k)$. Dla danej wartości ω można znaleźć wiele modów z wartościami k spełniającymi ten warunek. Dla różnych n są to mody o różnej symetrii. W obliczeniach zastosowano macierz bez wspomnianych przybliżeń i wykorzystano metodę analogiczną do opisanej w rozdziale 2.2.

Kiedy warunek (4.82) jest spełniony, współczynniki B, C, D, R, T, Z nie są wszystkie niezależne. Dla $n = 0$ macierz M jest macierzą blokową diagonalną i wówczas ruchy skręcające ściany i cieczy są niezależne od ruchów osiowo-radialnych, podczas gdy dla $n > 0$ takie rozprężenie ruchów już nie zachodzi. Mamy

$$C = \gamma_C B, \quad R = \gamma_R B, \quad Z = \gamma_Z B, \quad (4.83)$$

a także dla $n = 0$ mamy

$$T = \gamma_T D, \quad (4.84)$$

a dla $n > 0$

$$D = \gamma_D B, \quad T = \gamma_T B. \quad (4.85)$$

Współczynniki γ można wyznaczyć z układu równań odpowiadających macierzy M po odrzuceniu np. pierwszego równania i rozwiązaniu niejednorodnego układu równań na C, D, R, T, Z .

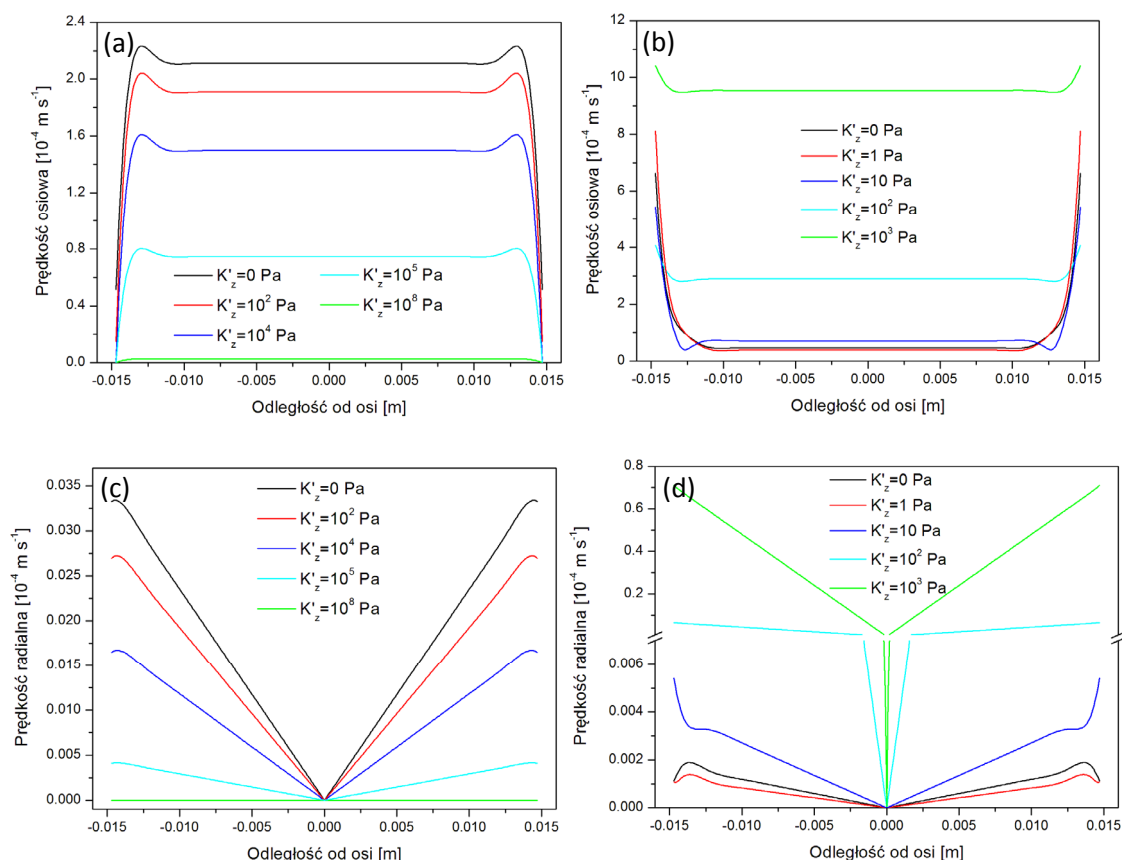
4.4 Mody osiowosymetryczne

Dla $n = 0$ otrzymujemy trzy mody osiowosymetryczne: mod Younga, mod Lamba oraz mod skręcający. Pierwsze dwa obejmują ruchy osiowo-radialne, natomiast ostatni, jak wskazuje nazwa, ruchy skręcające. W obliczeniach przyjęto wartości parametrów odpowiadające aortalnej tętnicy, tj. promień naczynia $a = 0.0147\text{m}$, grubość jego ściany $h = 0.00163\text{m}$, moduł Younga $E = 0.4 \cdot 10^6\text{Pa}$, współczynnik Poissona ściany $\sigma = 0.5$ oraz gęstość $\rho = 1055\text{kg/m}^3$ i lepkość krwi $\eta = 0.0032\text{Pa} \cdot \text{s}$. Grubość otoczenia tkankowego przyjmujemy za równą promieniowi naczynia.

4.4.1 Profile prędkości

Uzyskane z rozwiązania równania (4.75) współczynniki determinują postać profili prędkości cieczy odpowiadających każdemu z modów jak również dają amplitudy ruchów ściany naczynia. Na Rys. 4.1 przedstawione zostały profile prędkości osiowej i radialnej dla modów Younga i Lamba dla różnych wartości parametru K' odpowiadającego modułowi Younga tkanki otaczającej naczynie. Na wykresach prędkości osiowej dobrze uwidacznia się charakter obu wspomnianych modów. Profil prędkości osiowej dla modu Younga ma szerokie maksimum w części centralnej i opada niemal do zera w okolicach ściany naczynia. W przeciwieństwie do modu Younga prędkości osiowe dla modu Lamba osiągają maksymalne wartości właśnie przy ścianie, a w centralnej części naczynia są zdecydowanie mniejsze. Odmienne jest również zachowanie obu modów przy zmianie parametrów tkankowego otoczenia naczynia. Amplituda prędkości osiowej dla zadanej amplitudy ciśnienia (przyjmujemy w obliczeniach $B = 1\text{Pa}$)

maleje dla modu Younga ze wzrostem współczynnika sprężystości otoczenia naczynia, podczas gdy dla modu Lamba jest odwrotnie – amplituda prędkości osiowej rośnie ze zwiększającym się współczynnikiem sprężystości otoczenia. Amplitudy prędkości radialnych dla modu Younga są znacznie większe niż dla modu Lamba, maleją one jednak ze zwiększającym się modułem sprężystości K' , natomiast dla modu Lamba obserwujemy zachowanie przeciwne – wzrost amplitud prędkości radialnych ze wzrostem wartości parametru K' . Mod Lamba nabywa więc coraz bardziej radialnego charakteru wraz ze wzrostem K' .

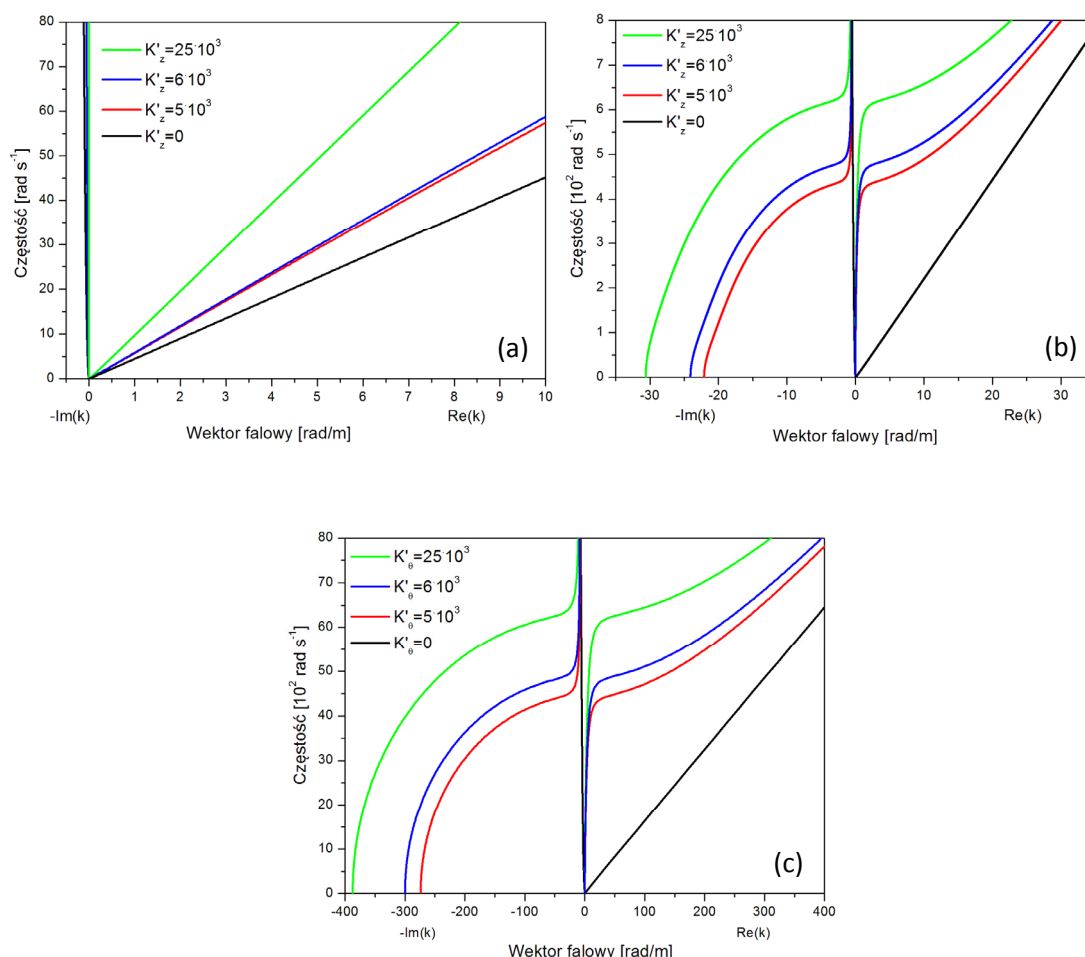


Rys. 4.1 Profile prędkości osiowej i radialnej dla modów Younga (a) i (c) oraz Lamba (b) i (d) dla różnych wartości sprężystości tkanki otaczającej naczynie.

4.4.2 Relacje dyspersji

Na Rys. 4.2 przedstawione zostały relacje dyspersji modów Younga, Lamba i modu skręcającego dla różnych wartości parametrów charakteryzujących sprężystość tkanki zewnętrznej przy znikającym tarciu wewnętrznym. Relacje dyspersji zostały przedstawione na tych rysunkach jako zależność rzeczywistej częstotliwości od zespolonego wektora falowego, przy czym rzeczywista część wektora falowego została odłożona po dodatniej stronie osi natomiast urojona część wektora falowego, która odpowiada przestrzennemu tłumieniu, po ujemnej stronie osi. Dla modu Younga tłumienie przestrzenne jest małe. Prędkość fali odpowiadającej temu modowi dla naczynia bez tkanki je otaczającej wynosi ok. 4.6 m/s i rośnie ona zgodnie z oczekiwaniem dla zwiększającego się współczynnika sprężystości tkanki otaczającej naczynie. Jeśli jej sprężystość odpowiada rozluźnionej tkance mięśniowej gładkiej ($K'_z = K'_r/3 = 6 \times 10^3 \text{ Pa}$) to otrzymujemy prędkość modu ok. 6 m/s natomiast dla tkanki mięśniowej gładkiej naprężonej ($K'_z = K'_r/3 = (10 - 250) \times 10^3 \text{ Pa}$) prędkości z przedziału 6.4–10 m/s. Tłumienie

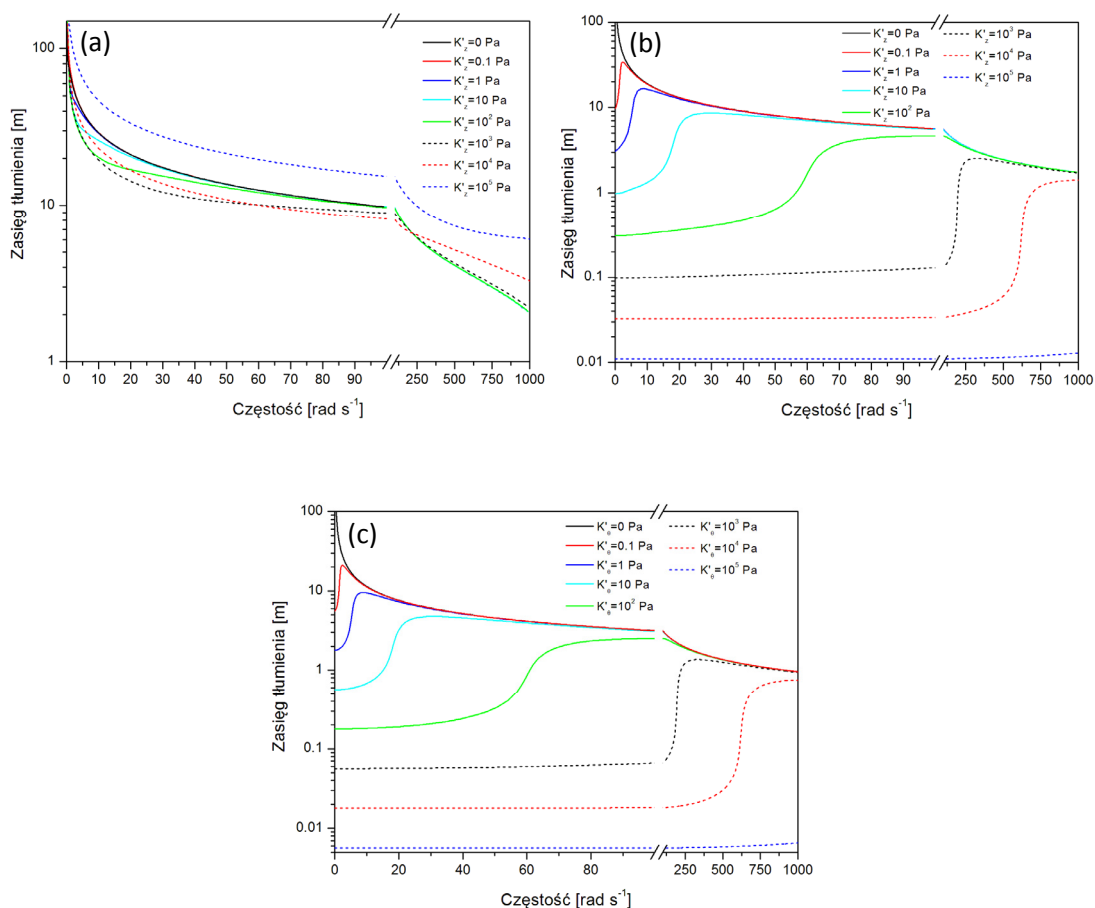
przestrzenne modu Younga słabo zależy od tkanki zewnętrznej i pozostaje małe dla szerokiego przedziału sprężystości tej tkanki. Dla modu Lamba natomiast tłumienie przestrzenne dla częstości niskich pozostaje małe jedynie dla modelu bez tkanki zewnętrznej. Po wprowadzeniu otoczenia tkankowego dostajemy jakościową zmianę w charakterze krzywych dyspersji, mod Lamba teraz od najniższych częstości wykazuje silne tłumienie. Tłumienie to maleje ze wzrostem częstości tak, że od wartości ok. 400 rad/s dla tkanki tłuszczowej i ok. 600 rad/s dla tkanki mięśniowej gładkiej naprężonej staje się na tyle małe, że fale odpowiadające temu modowi mogą rozchodzić się na większe odległości. Powyższy fakt jest związany z tym, że mod Lamba ma raczej optyczny niż akustyczny charakter i część rzeczywista częstości jako funkcja rzeczywistego wektora falowego dąży do niezerowej wartości dla $k \rightarrow 0$ (dostajemy przerwę na osi częstości). Relacje dyspersji dla modu skręcającego mają podobny charakter jak dla modu Lamba. Również tutaj przy braku tkanki zewnętrznej tłumienie przestrzenne okazuje się małe. Jednak po wprowadzeniu tej tkanki wzrasta ono dla niskich częstości do wartości o rząd wielkości większych niż dla modu Lamba. Dodatkowo wartości progowe częstości, od których tłumienie staje się małe dla poszczególnych rodzajów tkanek są o rząd wielkości większe od analogicznych dla modu Lamba.



Rys. 4.2 Relacje dyspersji dla modów Younga (a), Lamba (b) i skręcającego (c) dla różnych wartości sprężystości tkanki otaczającej naczynie.

4.4.3 Zasięg tłumienia

Na Rys. 4.3 przedstawiona została odwrotność części urojonej wektora falowego dla modów Younga, Lamba i skręcającego. Odwrotność ta, nazywana tutaj zasięgiem tłumienia, wyraża jak z odległością zachowuje się amplituda danego modu. Dla modu Younga jak widać na Rys. 4.3a zasięg tłumienia w szerokim zakresie częstości wynosi powyżej 10 m a więc jest kilkakrotnie większy niż rozmiary ciała człowieka, można więc przyjąć, że w fizjologicznym zakresie częstości mod ten jest niemalże nietłumiony. Nie zależy on również znacznie od sprężystości tkanki otaczającej naczynie. Zasięg tłumienia modów Lamba i skręcającego zdecydowanie silniej zależy od parametrów otoczenia tkankowego naczynia. Dla zwiększającej się sprężystości otoczenia tkankowego (rosnący parametr K') dostajemy wyraźne zmniejszenie zasięgu tłumienia w coraz większym obszarze częstości. Dla wartości K' odpowiadających tkance tłuszczowej ($5 \times 10^3 \text{ Pa}$) oraz rozluźnionej tkance mięśniowej gładkiej ($6 \times 10^3 \text{ Pa}$) obszar ten sięga ok. 100 rad/s, nie mniej jednak w całym tym obszarze zasięg tłumienia wynosi ok. 10 cm. Taka odległość może być znacząca z fizjologicznego punktu widzenia, gdyż jest porównywalna z wielkością organów wewnętrznych człowieka.



Rys. 4.3 Zasięg tłumienia dla modu Younga (a), Lamba (b) i skręcającego (c) dla różnych wartości sprężystości tkanki otaczającej naczynie.

4.5 Wzbudzenie modów

Znalezione w poprzednich rozdziałach mody powstają wskutek ruchów fizjologicznych takich jak skurcze mięśni, ruchy lokomocyjne itp. Rozważmy kilka podstawowych rodzajów wymuszonych ruchów ściany naczynia i krwi. Pierwszy będzie polegał na periodycznych ruchach osiowych nierozciągliwego radialnie pierścienia przyczepionego do ściany naczynia od zewnątrz i obejmującego ją dookoła, natomiast drugi na periodycznej zmianie promienia tak umocowanego pierścienia, bez ruchu osiowego. Ostatni rodzaj ruchu będzie przypominał periodyczne ruchy tłoka poruszającego krew w naczyniu. Symetria wszystkich rozważanych tu sposobów wzbudzania powoduje, że oprócz modów Younga i Lamba nie mogą zostać wzbudzone ani mod skręcający ani mody z $n > 0$.

Dla wzbudzania radialnego przyjmijmy, że odchylenie długości promienia pierścienia od wartości spoczynkowej a zmienia się zgodnie z

$$\zeta(t) = A_r e^{-i\omega t}. \quad (4.86)$$

Musimy mieć ze względu na ciągłość ściany naczynia:

$$u_r^+(z=0, t) = u_r^-(z=0, t) = A_r e^{-i\omega t}, \quad (4.87)$$

$$u_z^+(z=0, t) = u_z^-(z=0, t) = 0, \quad (4.88)$$

Gdzie znak + odpowiada modom rozchodzącym się w kierunku dodatnim, a znak – w kierunku ujemnym. Na ruch ściany naczynia składają się mod Younga ($i = 1$) oraz mod Lamba ($i = 2$). Mamy więc $u_r^\pm(z=0, t) = (R_1^\pm + R_2^\pm)e^{-i\omega t}$ i analogicznie $u_z^\pm(z=0, t) = (Z_1^\pm + Z_2^\pm)e^{-i\omega t}$. Po uwzględnieniu (4.83) dostajemy stąd

$$\gamma_{R1}B_1^+ + \gamma_{R2}B_2^+ = \gamma_{R1}B_1^- + \gamma_{R2}B_2^- = A_r, \quad (4.89)$$

$$\gamma_{Z1}B_1^+ + \gamma_{Z2}B_2^+ = \gamma_{Z1}B_1^- + \gamma_{Z2}B_2^- = 0. \quad (4.90)$$

Rozwiązując powyższy układ równań otrzymujemy

$$B_1^+ = \frac{A_r \gamma_{Z2}}{\gamma_{Z2}\gamma_{R1} - \gamma_{Z1}\gamma_{R2}}, \quad (4.91)$$

a stosunek amplitud ciśnień dla modu Lamba i Younga wynosi

$$\frac{B_2^+}{B_1^+} = -\frac{\gamma_{Z1}}{\gamma_{Z2}}. \quad (4.92)$$

Dla wzbudzania osiowego przyjmijmy, że położenie pierścienia zmienia się wzdłuż osi naczynia zgodnie z równaniem

$$\xi(t) = A_z e^{-i\omega t}. \quad (4.93)$$

Musimy mieć ze względu na ciągłość ściany naczynia:

$$u_r^+(z=0, t) = u_r^-(z=0, t) = 0, \quad (4.94)$$

$$u_z^+(z=0, t) = u_z^-(z=0, t) = A_z e^{-i\omega t}, \quad (4.95)$$

Po uwzględnieniu (4.83) dostajemy stąd analogicznie jak dla wzbudzenia radialnego

$$\gamma_{R1} B_1^+ + \gamma_{R2} B_2^+ = \gamma_{R1} B_1^- + \gamma_{R2} B_2^- = 0, \quad (4.96)$$

$$\gamma_{Z1} B_1^+ + \gamma_{Z2} B_2^+ = \gamma_{Z1} B_1^- + \gamma_{Z2} B_2^- = A_z. \quad (4.97)$$

Rozwiązując powyższy układ równań otrzymujemy

$$B_1^+ = \frac{A_z \gamma_{R2}}{\gamma_{R2} \gamma_{Z1} - \gamma_{R1} \gamma_{Z2}}, \quad (4.98)$$

a stosunek amplitud ciśnień dla modu Lamba i Younga wynosi

$$\frac{B_2^+}{B_1^+} = -\frac{\gamma_{R1}}{\gamma_{R2}}. \quad (4.99)$$

Oprócz przedstawionych wzbudzeń radialnych i osiowych rozważmy jeszcze wzbudzenie zdefiniowane przez warunek

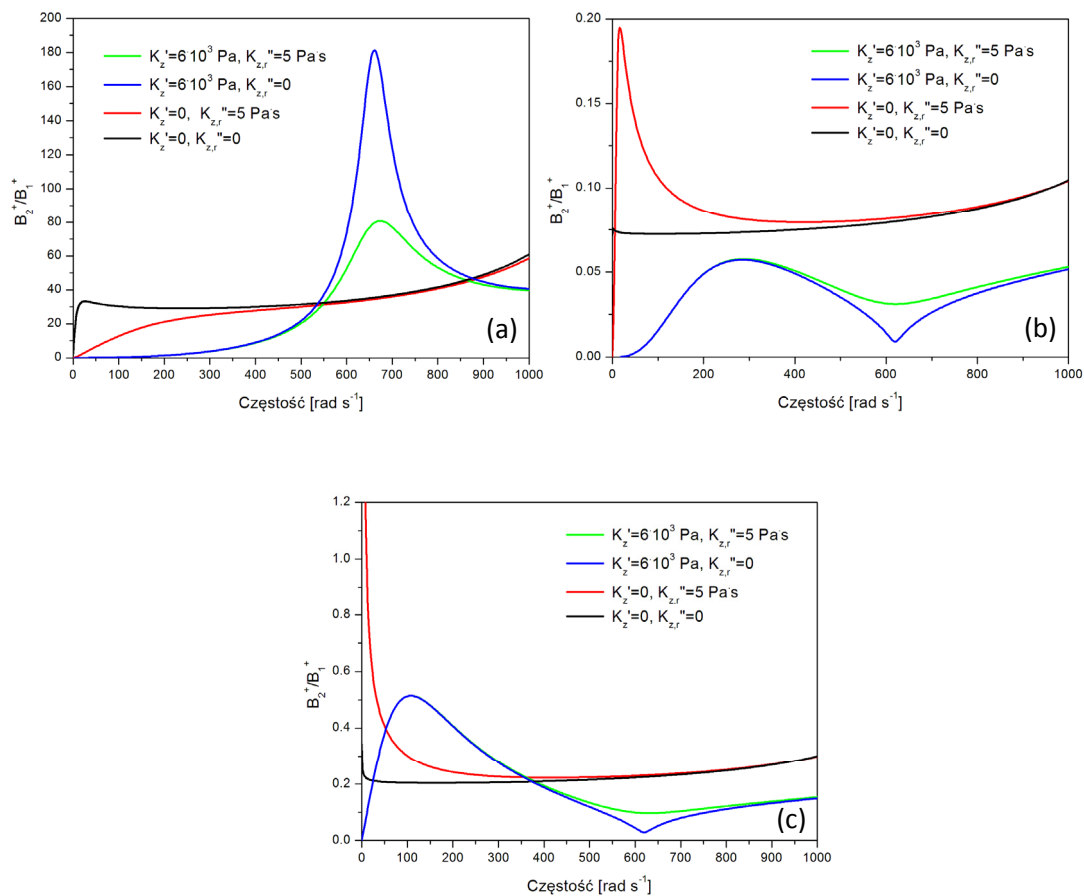
$$C_1^+ + C_2^+ = C_1^- + C_2^- = \gamma_{C1} B_1^+ + \gamma_{C2} B_2^+ = 0. \quad (4.100)$$

Stąd interesujący nas stosunek amplitud ciśnień wynosi

$$\frac{B_2^+}{B_1^+} = -\frac{\gamma_{C1}}{\gamma_{C2}}. \quad (4.101)$$

Warunek (4.100) odpowiada stałości prędkości osiowej cieczy w całym przekroju poprzecznym naczynia w przybliżeniu fal długich (wtedy $J_0(ikr) \approx 1$). Wzbudzenie takie przypomina więc wzbudzenie przy pomocy tłoka o doskonale śliskiej powierzchni poruszającego się wzdłuż osi naczynia, w związku z tym, że prędkość radialna zależy od odległości od osi tłoka. Wydaje się, że ten sposób wzbudzania modów jest zbliżony do działania serca przy wyrzucaniu krwi z komory do aorty.

Na Rys. 4.4 został przedstawiony stosunek amplitud ciśnień dla modu Lamba i Younga B_2^+/B_1^+ dla wspomnianych wcześniej sposobów wzbudzania dla różnych parametrów tkanki otaczającej naczynie. Największy udział modu Lamba widoczny jest w przypadku wzbudzania osiowego (Rys. 4.4a). Dla tego rodzaju wzbudzania w całym rozważanym obszarze częstotliwości, oprócz częstotliwości poniżej ok. 12 rad/s, dostajemy amplitudy ciśnienia dla modu Lamba przekraczające amplitudy dla modu Younga 35-60 razy, dla naczynia bez otoczenia tkankowego. Gdy wprowadzimy czysto elastyczne otoczenie tkankowe stosunek amplitud ciśnień dla niższych częstotliwości staje się wyraźnie mniejszy, ale otrzymujemy wyraźne wysokie maksimum, którego położenie zależy od wartości K'_z . Wprowadzenie lepkości (otoczenie tkankowe lepkosprężyste) powoduje zmniejszenie wysokości tego maksimum.



Rys. 4.4 Stosunek amplitudy ciśnienia dla modu Lamba do amplitudy dla modu Younga dla modów powstałych przy wzbudzeniu osiowym (a), radialnym (b) i odpowiadającemu ruchowi tłoka (c) dla różnych parametrów tkanki otaczającej naczynie.

Podsumowanie

W niniejszej pracy zostało omówionych kilka modeli: model membrany zakończonej brzegiem, dyskretny model dwuwymiarowego auksetyka oraz dwa trójwymiarowe modele o geometrii cylindrycznej, gdzie w przypadku drugiego modelu dodatkowo uwzględnione zostały ruchy cieczy oraz otoczenie lepko-sprężyste. Najważniejsze wyniki dla poszczególnych modeli można podsumować następująco:

Półośkończona membrana z brzegiem w potencjale harmonicznym

1. Układ taki ma relacje dyspersji jak w jednorodnym równaniu Kleina-Gordona, występowanie fal i rezonansów powierzchniowych po wprowadzeniu warunku brzegowego zależy efektywnie tylko od jednego zredukowanego parametru.
2. W układzie tym uzyskujemy falę powierzchniową o relacji dyspersji leżącej poniżej dolnej granicy pasma objętościowego oraz fale ciekące, których relacje leżą nie tylko w obrębie pasma objętościowego, ale również poniżej (poddźwiękowa fala ciekąca).
3. Analiza fal ciekących pokazuje, że rozbieganie się w układzie wychyleń do nieskończoności wraz z odległością od brzegu w istocie nie zachodzi i fale te mają interpretację fizyczną mimo pozornej osobliwości.

Cylindryczne wydrążenie w ośrodku jednorodnym

4. W układzie tym otrzymujemy dla każdego zbadanego n (liczba węzłów fal na obwodzie cylindra) jedną falę powierzchniową. W granicy fal krótkich zachowuje się ona jak fala Rayleigha natomiast dla fal długich staje się falą objętościową muskającą powierzchnię (*surface skimming bulk wave*).
5. Relacje dyspersji w układzie są sparametryzowane jedynie ilorazem Poissona oraz liczbą n .
6. Dla $n = 0$ otrzymujemy dwa tryby z zespolonymi częstościami. Relacja dyspersji pierwszego, o charakterze torsyjnym, dla zredukowanych częstości i wektora falowego jest niezależna od współczynnika Poissona. Relacja dyspersji drugiego trybu, o charakterze osiowo-radialnym zależy od współczynnika Poissona, a w granicy fal krótkich tłumienie tego trybu staje się znikome.

7. W układzie tym występują poddźwiękowe fale ciekące. Efekt ten wydaje się wynikiem jedynie geometrii modelu w przeciwieństwie do znanych w literaturze przypadków. Czasy życia tych fal ciekących wzrastają do nieskończoności w granicy fal krótkich.
8. Otrzymaliśmy dla układu całą gamę relacji dyspersji fal ciekących dla $n = 0, 1, 2$ w zależności od współczynnika Poissona w całym zakresie zmienności, w tym dla często pomijanego obszaru auksetycznego. W wybranych przypadkach zależność od współczynnika Poissona jest wyjątkowo silna. Największe anomalie występują dla współczynnika Poissona w okolicy 0.5 tj. gdy objętość układu pozostaje w przybliżeniu stała przy jego jednoosiowym rozciąganiu.

Dyskretny model auksetyka dwuwymiarowego

9. W obecności zewnętrznego naprężenia i przy złamanej z tego powodu symetrii rotacyjnej możliwe jest uzyskanie w układzie współczynników Poissona z zakresu $-\infty < \nu < +\infty$.
10. Możliwe jest sterowanie własnościami fononicznymi układu przez zmianę przyłożonego naprężenia. Od pewnej wartości naprężenia kryształ staje się fononiczny tj. dostajemy przerwę wzbronioną w całym obszarze pierwszej strefy Brillouina.
11. Dla odpowiednio dobranych parametrów powierzchni oraz naprężenia zewnętrznego możliwe jest uzyskanie prawdziwej fali powierzchniowej w obrębie pasma objętościowego. Możliwość ta została potwierdzona przez wyznaczenie lokalnej gęstości stanów powierzchniowych.
12. Dla odbicia fal od powierzchni począwszy od pewnej wartości kąta padania jedna z fal odbitych staje się polem bliskim.
13. Dla częstości fali padającej bliskiej częstości izolowanej prawdziwej fali powierzchniowej dostajemy dla odpowiednich kątów padania wyraźne wzmocnienia współczynnika odbicia, podczas gdy dla nieco mniejszych i nieco większych kątów padania jedno bądź odpowiednio drugie z pól bliskich zostaje praktycznie wyeliminowane.

Model tętnicy wypełnionej krwią i umieszczonej w otoczeniu tkankowym

14. Obliczenia profili prędkości dla modów Younga i Lamba potwierdzają, że w przypadku pierwszego mamy do czynienia głównie z ruchami cieczy natomiast w przypadku drugiego głównie z ruchami ściany naczynia.
15. Mod Younga słabo zależy od parametrów tkanki otaczającej naczynie, podczas gdy mody Lamba i skręcający wykazują duże zmiany przy zmianie zarówno sprężystości jak i lepkości otoczenia tkankowego.
16. Wprowadzenie tkanki zewnętrznej do modelu skutkuje jakościową zmianą w relacjach dyspersji modów Lamba i skręcającego. Mody te zaczynają się dobrze rozchodzić dopiero od pewnej granicznej częstości zależnej od parametrów otoczenia tkankowego.

17. Zasięg tłumienia dla modu Lamba okazuje się być rzędu 10 cm dla fizjologicznych wartości parametrów tkanki otaczającej naczynie. Wskazuje to potencjalne znaczenie fizjologiczne tego modu ze względu na zasięg tłumienia porównywalny z wielkością organów wewnętrznych człowieka.
18. Analiza różnego typu sposobów wzbudzania modów pokazuje, że dla wzbudzania osiowego stosunek amplitudy ciśnienia dla wzbudzonego modu Lamba do amplitudy dla modu Younga jest >35 przy braku otoczenia tkankowego. Ponadto dla otoczenia tkankowego sprężystego i lepko sprężystego stosunek ten wykazuje wysokie maksimum w okolicach częstości zależnych od sprężystości tkanki otaczającej. Powyższe fakty mogą wskazywać na to, że prawdopodobne ruchy tętnicy i jej otoczenia mogą prowadzić do wzbudzenia fal w naczyniu tętniczym ze znacznym udziałem modu Lamba.
19. Ujemny współczynnik Poissona ściany naczynia w tym modelu prowadzi do zmniejszenia prędkości propagacji modu Younga.

Dodatek A

A.1 Macierz stałych sprężystych (str. 59)

Elementy macierzy stałych elastycznych wyrażają się następującymi wzorami:

$$c_{1111} = \frac{3(8l_{\alpha 0}^2\beta + \alpha(1 - 3\epsilon_{11})^2)(1 + \epsilon_{11})}{4l_{\alpha 0}^2\sqrt{4l_{\alpha 0}^2 - (1 - 3\epsilon_{11})^2}} \quad (\text{A.1})$$

$$c_{2222} = \frac{\alpha(4l_{\alpha 0}^2 - (1 - 3\epsilon_{11})^2)^{3/2}}{12l_{\alpha 0}^2(1 + \epsilon_{11})} \quad (\text{A.2})$$

$$c_{1122} = c_{2211} = \frac{\alpha\sqrt{4l_{\alpha 0}^2 - (1 - 3\epsilon_{11})^2}(-1 + 3\epsilon_{11})}{4l_{\alpha 0}^2} \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} c_{1212} = c_{1221} = c_{2112} \\ = \frac{\alpha\beta\sqrt{4l_{\alpha 0}^2 - (1 - 3\epsilon_{11})^2}(1 - 3\epsilon_{11})^2(1 - l_{\beta 0} + 3\epsilon_{11})}{4(-3l_{\alpha 0}^2\beta(-1 + l_{\beta 0} - 3\epsilon_{11})(1 + \epsilon_{11}) + \alpha(4l_{\alpha 0}^2 - (1 - 3\epsilon_{11})^2)(1 + 3\epsilon_{11}))} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{aligned} c_{2121} = 3\beta(-1 + l_{\beta 0} - 3\epsilon_{11})(1 + \epsilon_{11}) & \left(8l_{\alpha 0}^2\beta(-1 + l_{\beta 0} - 3\epsilon_{11}) \right. \\ & \left. + 3\alpha(-4l_{\alpha 0}^2 + (1 - 3\epsilon_{11})^2)(1 + \epsilon_{11}) \right) \\ & / (4\sqrt{4l_{\alpha 0}^2 - (1 - 3\epsilon_{11})^2}(-3l_{\alpha 0}^2\beta(-1 + l_{\beta 0} - 3\epsilon_{11})(1 + \epsilon_{11}) \\ & + \alpha(4l_{\alpha 0}^2 - (1 - 3\epsilon_{11})^2)(1 + 3\epsilon_{11}))) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Powyższe wzory można wyrazić używając kąta θ :

$$c_{1111} = \frac{(2 - l_{\alpha 0} \cos \theta)(2\beta + \alpha \cos^2 \theta) \csc \theta}{l_{\alpha 0}} \quad (\text{A.6})$$

$$c_{2222} = \frac{l_{\alpha 0} \alpha \sin^3 \theta}{2 - l_{\alpha 0} \cos \theta} \quad (\text{A.7})$$

$$c_{1122} = c_{2211} = -\alpha \cos \theta \sin \theta \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{aligned} c_{1212} = c_{1221} = c_{2112} \\ = -l_{\alpha 0} \alpha \beta \cos^2 \theta (-2 + l_{\beta 0} + 2l_{\alpha 0} \cos \theta) \sin \theta / (4\alpha - 2(-2 + l_{\beta 0})\beta \\ - l_{\alpha 0}(4\alpha - (-6 + l_{\beta 0})\beta) \cos \theta + (-4\alpha + 2l_{\alpha 0}^2\beta) \cos^2 \theta \\ + 4l_{\alpha 0} \alpha \cos^3 \theta) \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{aligned} c_{2121} = -\beta(-2 + l_{\alpha 0} \cos \theta)(-2 + l_{\beta 0} + 2l_{\alpha 0} \cos \theta)(-2\alpha + (-2 + l_{\beta 0})\beta \\ + l_{\alpha 0}(\alpha + 2\beta) \cos \theta + 2\alpha \cos^2 \theta - l_{\alpha 0} \alpha \cos^3 \theta) \csc \theta \\ / (l_{\alpha 0}(4\alpha - 2(-2 + l_{\beta 0})\beta) - l_{\alpha 0}(4\alpha - (-6 + l_{\beta 0})\beta) \cos \theta \\ + (-4\alpha + 2l_{\alpha 0}^2\beta) \cos^2 \theta + 4l_{\alpha 0} \alpha \cos^3 \theta)) \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

A.2 Macierz dynamiczna M (str. 65)

Po uwzględnieniu warunku (3.6) jawna postać elementów macierzy dynamicznej M jest następująca:

$$M_{11} = \frac{1}{l_{\alpha 0}^2} \left(-\alpha(1 - 3\epsilon_{11})^2 + l_{\alpha 0}^2(-2\beta + m\omega^2) + 2l_{\alpha 0}^2\beta \cos[3k_x(1 + \epsilon_{11})] \right. \\ \left. + \alpha(1 - 3\epsilon_{11})^2 \cos\left[\frac{3}{2}k_x(1 + \epsilon_{11})\right] \cos\left[\frac{1}{2}k_y\sqrt{-1 + 4l_{\alpha 0}^2 + 6\epsilon_{11} - 9\epsilon_{11}^2}\right] \right) \quad (\text{A.11})$$

$$M_{22} = \frac{1}{l_{\alpha 0}^2(1 + 3\epsilon_{11})} \left(\alpha(-4l_{\alpha 0}^2 + (1 - 3\epsilon_{11})^2)(1 + 3\epsilon_{11}) \right. \\ \left. + l_{\alpha 0}^2(2\beta(-1 + l_{\beta 0} - 3\epsilon_{11}) + m(1 + 3\epsilon_{11})\omega^2) \right. \\ \left. - 2l_{\alpha 0}^2\beta(-1 + l_{\beta 0} - 3\epsilon_{11})\cos[3k_x(1 + \epsilon_{11})] \right. \\ \left. + \alpha(4l_{\alpha 0}^2 - (1 - 3\epsilon_{11})^2)(1 + 3\epsilon_{11})\cos\left[\frac{3}{2}k_x(1 + \epsilon_{11})\right] \cos\left[\frac{1}{2}k_y\sqrt{-1 + 4l_{\alpha 0}^2 + 6\epsilon_{11} - 9\epsilon_{11}^2}\right] \right) \quad (\text{A.12})$$

$$M_{33} = \frac{1}{l_{\alpha 0}^2(1 + 3\epsilon_{11})} \left(\alpha(-4l_{\alpha 0}^2 + (1 - 3\epsilon_{11})^2)(1 + 3\epsilon_{11}) \right. \\ \left. + l_{\alpha 0}^2(2\beta(-1 + l_{\beta 0} - 3\epsilon_{11})(2 + 3\epsilon_{11}) + (1 + 3\epsilon_{11})\tau\omega^2) \right. \\ \left. + 2l_{\alpha 0}^2\beta(-1 + l_{\beta 0} - 3\epsilon_{11})\cos[3k_x(1 + \epsilon_{11})] \right. \\ \left. + \alpha(-4l_{\alpha 0}^2 + (1 - 3\epsilon_{11})^2)(1 + 3\epsilon_{11})\cos\left[\frac{3}{2}k_x(1 + \epsilon_{11})\right] \cos\left[\frac{1}{2}k_y\sqrt{-1 + 4l_{\alpha 0}^2 + 6\epsilon_{11} - 9\epsilon_{11}^2}\right] \right) \quad (\text{A.13})$$

$$M_{21} = M_{12} = \frac{\alpha}{l_{\alpha 0}^2} \sqrt{4l_{\alpha 0}^2 - (1 - 3\epsilon_{11})^2} (1 - 3\epsilon_{11}) \sin\left[\frac{3}{2}k_x(1 + \epsilon_{11})\right] \sin\left[\frac{1}{2}k_y\sqrt{-1 + 4l_{\alpha 0}^2 + 6\epsilon_{11} - 9\epsilon_{11}^2}\right] \quad (\text{A.14})$$

$$M_{31} = M_{13}^\dagger = \frac{i\alpha}{l_{\alpha 0}^2} \sqrt{4l_{\alpha 0}^2 - (1 - 3\epsilon_{11})^2} (-1 + 3\epsilon_{11}) \cos\left[\frac{3}{2}k_x(1 + \epsilon_{11})\right] \sin\left[\frac{1}{2}k_y\sqrt{-1 + 4l_{\alpha 0}^2 + 6\epsilon_{11} - 9\epsilon_{11}^2}\right] \quad (\text{A.15})$$

$$M_{32} = M_{23}^\dagger = \frac{i}{l_{\alpha 0}^2(1 + 3\epsilon_{11})} \left(-4l_{\alpha 0}^2\beta(-1 + l_{\beta 0} - 3\epsilon_{11})\cos\left[\frac{3}{2}k_x(1 + \epsilon_{11})\right] \right. \\ \left. + \alpha(4l_{\alpha 0}^2 - (1 - 3\epsilon_{11})^2)(1 + 3\epsilon_{11})\cos\left[\frac{1}{2}k_y\sqrt{-1 + 4l_{\alpha 0}^2 + 6\epsilon_{11} - 9\epsilon_{11}^2}\right] \right) \sin\left[\frac{3}{2}k_x(1 + \epsilon_{11})\right] \quad (\text{A.16})$$

A.3 Macierze C, D, R (str. 65 i 70)

Elementy macierzy C :

$$C_{11} = \frac{\alpha(1 - 3\epsilon_{11})^2 \cos\left[\frac{3}{2}k_x(1 + \epsilon_{11})\right]}{2l_{\alpha 0}^2} \quad (\text{A.17})$$

$$C_{12} = C_{21} = \frac{i\alpha\sqrt{4l_{\alpha 0}^2 - (1 - 3\epsilon_{11})^2}(-1 + 3\epsilon_{11})\sin\left[\frac{3}{2}k_x(1 + \epsilon_{11})\right]}{2l_{\alpha 0}^2} \quad (\text{A.18})$$

$$C_{13} = -C_{31} = \frac{\alpha\sqrt{4l_{\alpha 0}^2 - (1 - 3\epsilon_{11})^2}(1 - 3\epsilon_{11})\cos\left[\frac{3}{2}k_x(1 + \epsilon_{11})\right]}{2l_{\alpha 0}^2} \quad (\text{A.19})$$

$$C_{22} = -C_{33} = \frac{\alpha(4l_{\alpha 0}^2 - (1 - 3\epsilon_{11})^2)\cos\left[\frac{3}{2}k_x(1 + \epsilon_{11})\right]}{2l_{\alpha 0}^2} \quad (\text{A.20})$$

$$C_{23} = -C_{32} = -\frac{i\alpha(4l_{\alpha 0}^2 - (1 - 3\epsilon_{11})^2)\sin\left[\frac{3}{2}k_x(1 + \epsilon_{11})\right]}{2l_{\alpha 0}^2} \quad (\text{A.21})$$

Elementy macierzy D :

$$D_{12} = D_{13} = D_{21} = D_{31} = 0 \quad (\text{A.22})$$

$$D_{11} = \frac{-\alpha(1 - 3\epsilon_{11})^2 + l_{\alpha 0}^2(-2\beta + m\omega^2) + 2l_{\alpha 0}^2\beta\cos[3k_x(1 + \epsilon_{11})]}{l_{\alpha 0}^2} \quad (\text{A.23})$$

$$D_{22} = \frac{1}{l_{\alpha 0}^2(1 + 3\epsilon_{11})} \left(\alpha(-4l_{\alpha 0}^2 + (1 - 3\epsilon_{11})^2)(1 + 3\epsilon_{11}) + l_{\alpha 0}^2(2\beta(-1 + l_{\beta 0} - 3\epsilon_{11}) + m(1 + 3\epsilon_{11})\omega^2) - 2l_{\alpha 0}^2\beta(-1 + l_{\beta 0} - 3\epsilon_{11})\cos[3k_x(1 + \epsilon_{11})] \right) \quad (\text{A.24})$$

$$D_{23} = -D_{32} = \frac{2i\beta(-1 + l_{\beta 0} - 3\epsilon_{11})\sin[3k_x(1 + \epsilon_{11})]}{1 + 3\epsilon_{11}} \quad (\text{A.25})$$

$$D_{33} = \frac{1}{l_{\alpha 0}^2(1 + 3\epsilon_{11})} \left(\alpha(-4l_{\alpha 0}^2 + (1 - 3\epsilon_{11})^2)(1 + 3\epsilon_{11}) + l_{\alpha 0}^2(2\beta(-1 + l_{\beta 0} - 3\epsilon_{11})(2 + 3\epsilon_{11}) + (1 + 3\epsilon_{11})\tau\omega^2) + 2l_{\alpha 0}^2\beta(-1 + l_{\beta 0} - 3\epsilon_{11})\cos[3k_x(1 + \epsilon_{11})] \right) \quad (\text{A.26})$$

Elementy macierzy R :

$$R_{12} = R_{21} = 0 \quad (\text{A.27})$$

$$R_{11} = \frac{-\alpha(1 - 3\epsilon_{11})^2 + 2l_{\alpha 0}^2(-2\beta_s + m_s\omega^2) + 4l_{\alpha 0}^2\beta_s\cos[3k_x(1 + \epsilon_{11})]}{2l_{\alpha 0}^2} \quad (\text{A.28})$$

$$R_{13} = R_{31} = \frac{\alpha \sqrt{4l_{\alpha 0}^2 - (1 - 3\epsilon_{11})^2} (1 - 3\epsilon_{11})}{2l_{\alpha 0}^2} \quad (\text{A.29})$$

$$R_{22} = \frac{1}{2l_{\alpha 0}^2 (1 + 3\epsilon_{11})} \left(\alpha (-4l_{\alpha 0}^2 + (1 - 3\epsilon_{11})^2) (1 + 3\epsilon_{11}) \right. \\ \left. + 2l_{\alpha 0}^2 (2\beta_s (-1 + l_{\beta 0s} - 3\epsilon_{11}) + m_s (1 + 3\epsilon_{11}) \omega^2) \right. \\ \left. - 4l_{\alpha 0}^2 \beta_s (-1 + l_{\beta 0s} - 3\epsilon_{11}) \cos[3k_x (1 + \epsilon_{11})] \right) \quad (\text{A.30})$$

$$R_{23} = -R_{32} = \frac{2i\beta_s (-1 + l_{\beta 0s} - 3\epsilon_{11}) \sin[3k_x (1 + \epsilon_{11})]}{1 + 3\epsilon_{11}} \quad (\text{A.31})$$

A.4 Macierz M dla $n > 0$ (str. 87)

Macierze $M_1 - M_4$ składające się na macierz M dla $n > 0$ są dane wzorami:

$$M_1 = \begin{bmatrix} \frac{(2i\eta(n^2 + a^2 k^2) + a^2 \rho \omega) J_n(ia k) + 2a k \eta'_n(ia k)}{h a^2 \rho \omega} & \frac{2i k \eta(a \alpha J'_n(a \alpha) + (a^2 \alpha^2 - n^2) J_n(a \alpha))}{h a^2 \alpha^2} & \frac{2\eta(J_n(a \alpha) - a \alpha J'_n(a \alpha))}{h a^2 \alpha} \\ \frac{2n\eta(J_n(ia k) - ia k J'_n(ia k))}{h a^2 \rho \omega} & \frac{2n k \eta(a \alpha J'_n(a \alpha) - J_n(a \alpha))}{h a^2 \alpha^2} & \frac{i\eta(2a \alpha J'_n(a \alpha) + (a^2 \alpha^2 - 2n^2) J_n(a \alpha))}{n h a^2 \alpha} \\ -\frac{2i k^2 \eta J'_n(ia k)}{h \rho \omega} & \frac{\eta(k^2 - \alpha^2) J'_n(a \alpha)}{h \alpha} & -\frac{i k \eta J_n(a \alpha)}{h a \alpha} \end{bmatrix} \quad (\text{A.32})$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} -\frac{E}{a^2(1-\sigma^2)} + \rho_w \omega^2 - \frac{K'_r - i K''_r}{h d} & -\frac{i n E}{a^2(1-\sigma^2)} & -\frac{i k \sigma E}{a(1-\sigma^2)} \\ \frac{i n E}{a^2(1-\sigma^2)} & -\frac{k^2 E}{2(1+\sigma)} - \frac{n^2 E}{a^2(1-\sigma^2)} + \rho_w \omega^2 - \frac{K'_\theta - i K''_\theta}{h d} & -\frac{n k E}{2a(1-\sigma)} \\ \frac{i k \sigma E}{a(1-\sigma^2)} & -\frac{n k E}{2a(1-\sigma)} & -\frac{n^2 E}{2a^2(1+\sigma)} - \frac{k^2 E}{1-\sigma^2} + \rho_w \omega^2 - \frac{K'_z - i K''_z}{h d} \end{bmatrix} \quad (\text{A.33})$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} \frac{k J'_n(ia k)}{\rho \omega} & \frac{i k J'_n(a \alpha)}{a} & \frac{J_n(a \alpha)}{a \alpha} \\ \frac{n J_n(ia k)}{a \rho \omega} & -\frac{n k J_n(a \alpha)}{a \alpha^2} & \frac{i J'_n(a \alpha)}{n} \\ \frac{k J_n(ia k)}{\rho \omega} & J_n(a \alpha) & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.34})$$

$$M_4 = \begin{bmatrix} i\omega & 0 & 0 \\ 0 & i\omega & 0 \\ 0 & 0 & i\omega \end{bmatrix} \quad (\text{A.35})$$

A.5 Operatory we współrzędnych cylindrycznych

Laplasjan we współrzędnych cylindrycznych:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (\text{A.36})$$

$$\nabla^2 \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \nabla^2 F_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} - \frac{F_r}{r^2} \\ \nabla^2 F_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial F_r}{\partial \theta} - \frac{F_\theta}{r^2} \\ \nabla^2 F_z \end{bmatrix} \quad (\text{A.37})$$

Dywergencja we współrzędnych cylindrycznych:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r F_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (\text{A.39})$$

Gradient we współrzędnych cylindrycznych:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (\text{A.40})$$

Dywergencja tensora we współrzędnych cylindrycznych:

$$\nabla \cdot T = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r T_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{zr}}{\partial z} - \frac{T_{\theta\theta}}{r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r T_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{z\theta}}{\partial z} + \frac{T_{\theta r}}{r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r T_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (\text{A.41})$$

Bibliografia

- [1] R. J. Gryglewski, R. M. Botting, J. R. Vane, *Mediators produced by the endothelial cell*, Hypertension **12**, 530 (1988).
- [2] J. R. Vane, *Adventures and Excursions in Bioassay: The Stepping Stones to Prostacyclin - Nobel Lecture (1982)*, Nobelprize.org 07/06/2010 http://nobelprize.org/nobel_prizes/medicine/laureates/1982/vane-lecture.html.
- [3] B. D. Caddock, K. E. Evans, *Negative Poisson ratios and strain-dependent mechanical properties in arterial prostheses*, Biomaterials **16**, 1109 (1995).
- [4] V. G. Mozhaev, M. Weihnacht, *Subsonic leaky Rayleigh waves at liquid-solid interfaces*, Ultrasonics **40**, 927 (2002).
- [5] K. Sezawa, *Dispersion of Elastic Waves Propagated on Surface of Stratified Bodies and Curved Surfaces*, B. Earthq. Res. I. Tokyo **3**, 1 (1927).
- [6] K. A. Ingebrigtsen, A. Tønning, *Elastic Surface Waves in Crystals*, Phys. Rev. **184**, 942 (1969).
- [7] W. Xiang-Fa, A. D. Yuris, *Wave propagation in nanofibers*, J. Appl. Phys. **100**, 124318 (2006).
- [8] J. W. S. Rayleigh, *On Waves Propagated along the Plane Surface of an Elastic Solid*, Proc. London Math. Soc. **17**, 4 (1885).
- [9] P. Bizoń, T. Chmaj, A. Rostworowski, *Asymptotic stability of the Skymion*, Phys. Rev. D **75**, 121702 (2007).
- [10] J. M. Ziman, *Wstęp do teorii ciała stałego* (PWN, Warszawa, 1977).
- [11] J. D. Bjorken, S. D. Drell, *Relatywistyczna teoria kwantów* (PWN, Warszawa, 1985).
- [12] G. I. Stegeman, *Normal-mode surface waves in the pseudobranch on the (001) plane of gallium arsenide*, J. Appl. Phys. **47**, 1712 (1976).
- [13] S. A. Gundersen, L. Wang, J. Lothe, *Secluded supersonic elastic surface waves*, Wave Motion **14**, 129 (1991).
- [14] A. G. Every, *Guided elastic waves at a periodic array of thin coplanar cavities in a solid*, Phys. Rev. B **78**, 174104 (2008).

- [15] D. Trzupek, D. Twaróg, P. Zieliński, *Stress Induced Phononic Properties and Surface Waves in 2D Model of Auxetic Crystal*, Acta Phys. Pol. A **115**, 576 (2009).
- [16] D. Trzupek, P. Zieliński, *Isolated True Surface Wave in a Radiative Band on a Surface of a Stressed Auxetic*, Phys. Rev. Lett. **103**, 075504 (2009).
- [17] D. Twaróg, P. Zieliński, *Surface waves and mode conversion at a surface coated with an elastic heavy layer*, Phase Transit. **79**, 577 (2006).
- [18] R. E. Camley, A. A. Maradudin, *Phonon focusing at surfaces*, Phys. Rev. B **27**, 1959 (1983).
- [19] A. G. Every, *Pseudosurface wave structures in phonon imaging*, Phys. Rev. B **33**, 2719 (1986).
- [20] N. E. Glass, A. A. Maradudin, *Leaky surface-elastic waves on both flat and strongly corrugated surfaces for isotropic, nondissipative media*, J. Appl. Phys. **54**, 796 (1983).
- [21] L. Dobrzynski, *Interface response and scattering matrix theories for composite systems*, Surf. Sci. **175**, 1 (1986).
- [22] K. M. Hallow, W. R. Taylor, A. Rachev, R. P. Vito, *Markers of inflammation collocate with increased wall stress in human coronary arterial plaque*, Biomech. Model. Mechanobiol. (2009).
- [23] A. L. McLeod, N. G. Uren, I. B. Wilkinson, D. J. Webb, S. R. Maxwell, D. B. Northridge, D. E. Newby, *Non-invasive measures of pulse wave velocity correlate with coronary arterial plaque load in humans*, J. Hypertens. **22**, 363 (2004).
- [24] D. C. Gazis, *Three-Dimensional Investigation of the Propagation of Waves in Hollow Circular Cylinders. I. Analytical Foundation*, J. Acoust. Soc. Am. **31**, 568 (1959).
- [25] D. C. Gazis, *Three-Dimensional Investigation of the Propagation of Waves in Hollow Circular Cylinders. II. Numerical Results*, J. Acoust. Soc. Am. **31**, 573 (1959).
- [26] L. D. Landau, E. M. Lifszyc, *Mechanika ośrodków ciągłych* (PWN, Warszawa, 1958).
- [27] J. D. Achenbach, *Wave propagation in elastic solids* (North-Holland, Amsterdam, 1973).
- [28] W. H. Press, *Numerical recipes in C: the art of scientific computing* (Cambridge University Press, Cambridge; New York, 1992).
- [29] A. A. Maradudin, in *Physics of Phonons*, edited by T. Paszkiewicz (Springer, Berlin, 1987).
- [30] A. E. H. Love, *A treatise on the mathematical theory of elasticity* (Cambridge University Press, Cambridge, 1952).
- [31] D. Twaróg, D. Trzupek, P. Zieliński, *Surface Dynamics and Phononic Properties of 2D Field Tunable Auxetic Crystal*, Acta Phys. Pol. A **115**, 579 (2009).
- [32] K. E. Evans, *Tensile network microstructures exhibiting negative Poisson's ratios*, J. Phys. D **22**, 1870 (1989).
- [33] K. E. Evans, B. D. Caddock, *Microporous materials with negative Poisson's ratios. II. Mechanisms and interpretation*, J. Phys. D **22**, 1883 (1989).

- [34] K. E. Evans, M. A. Nkansah, I. J. Hutchinson, S. C. Rogers, *Molecular network design*, Nature **353**, 124 (1991).
- [35] U. Schärer, P. Wachter, *Negative elastic constants in intermediate valent $\text{SmxLa}_{1-x}\text{S}$* , Solid State Commun. **96**, 497 (1995).
- [36] A. Sparavigna, *Phonons in conventional and auxetic honeycomb lattices*, Phys. Rev. B **76**, 134302 (2007).
- [37] G. Burns, A. M. Glazer, *Space groups for solid state scientists* (Academic Press, Boston, 1990), pp. xii.
- [38] P. Zieliński, D. Twaróg, D. Trzupek, *On Surface Waves in Materials with Negative Poisson Ratio*, Acta Phys. Pol. A **115**, 513 (2009).
- [39] W. W. Nichols, M. F. O'Rourke, *McDonald's blood flow in arteries. Theoretical, experimental and clinical principles*. (Hodder Arnold, London, 2005).
- [40] M. F. O'Rourke, *Vascular mechanics in the clinic*, J. Biomech. **36**, 623 (2003).
- [41] K. Jagielska, D. Trzupek, M. Lepers, A. Pelc, P. Zieliński, *Effect of surrounding tissue on propagation of axisymmetric waves in arteries*, Phys. Rev. E **76**, 066304 (2007).
- [42] W. R. Milnor, *Hemodynamics* (Williams & Wilkins, Baltimore, 1989).
- [43] R. Gryboś, *Podstawy mechaniki płynów* (PWN, Warszawa, 1989).
- [44] M. Zamir, *The Physics of Pulsatile Flow* (Springer, New York, 2000).