

Recenzja rozprawy doktorskiej
mgr. Jeremiego Ochaba
*Static and dynamic properties of selected
stochastic processes on complex networks*

Tematem rozprawy doktorskiej mgr. Jeremiego Ochaba są procesy stochastyczne na sieciach. Przewód doktorski jest prowadzony w oparciu o ustawę z dn. 18 marca 2011 r., promotorem jest prof. dr hab. Zdzisław Burda z WFAiIS Uniwersytetu Jagiellońskiego. Rozprawa doktorska ma formę spójnego tematycznie zbioru opublikowanych prac. Na cykl składa się pięć prac opublikowanych w *Phys. Rev. E* (2 prace), *Eur. Phys. J* (2 prace) i *Acta Phys. Polon. B* (komunikat konferencyjny). Dwie prace są jednoautorskie, jedna praca jest we współautorstwie z dr. hab. Pawłem Górą, a dwie są napisane wspólnie z promotorem. W załączonych oświadczeniach współautorzy oceniają swój wkład na 15% i 20%. Wkład współautorów polegał na dyskusji problemu i wyników, udziale w redakcji tekstu, natomiast mgr Ochab dyskutował problem fizyczny, wykonał większość obliczeń i prac nad przygotowaniem manuskryptu. Cykl prac spełnia warunki określone w art. 13 ustawy i może być przedstawiony jako rozprawa doktorska. Rozprawa jest uzupełniona obszernym, 100-stronicowym wstępem w języku angielskim, który elegancko wprowadza czytelnika w tematykę procesów na sieciach złożonych i konkretne zagadnienia dyskutowane przez doktoranta.

Zagadnienia badawcze podejmowane przez mgr. Ochaba w czasie pracy nad doktoratem należą do ważnych i aktualnych tematów związanych z dynamiką procesów na sieciach. Są to procesy perkolacyjne (rozwój epidemii) i różne rodzaje błędzenia przypadkowego dla sieci małego świata, sieci regularnych, sieci hierarchicznych Cayley'a i przypadkowych sieci testowych dla badania podstruktur. Trudno przecenić znaczenie modeli stochastycznych na sieciach. Układy takie jak sieć internetu, relacje społeczne i ekonomiczne są opisywane takimi strukturami. Równie ważne są dynamiczne procesy na sieciach, rozwój epidemii, transmisja sygnału, mechanizmy socjologiczne. Dynamiczne procesy mogą też być wykorzystane do analizy sieci złożonych, dla eksploracji danych na sieci lub badania struktury samej sieci.

Poniżej omówię wyniki prac stanowiących rozprawę doktorską

1. Praca *J. Ochab, P. Góra, Eur. Phys. J B 81 373 (2011)* zajmuje się określeniem progu na tworzenie epidemii w sieciach małego świata. Podstawowym ukła-

dem jest regularna sieć 2 wymiarowa z przypadkowymi przełączeniami krawędzi, co wprowadza efekt małego świata. Autorzy rozważają dwie wersje sieci małego świata, statyczną sieć małego świata i dynamiczną, w której w każdym kroku czasowym zmienia się przypadkowe krawędzie w grafie. Badany model epidemii to SIR, w czasie 3 lub 4 kroków, zakażony węzeł może zarażać inne z pewnym określonym prawdopodobieństwem p . Przełączanie krawędzi w czasie, gdy węzeł zaraża, zmienia próg na rozwój epidemii. Autorzy podają analityczne oszacowanie liczby zarażeń poprzez krawędzie przypadkowe. W sieci dynamicznej takich zakażeń jest średnio więcej. Zakażenie można przenieść na konkretny węzeł tylko raz w okresie infekcyjnym, więc wymieniając sąsiadów w każdym kroku zwiększamy średnią liczbę zakażeń. Obliczenia numeryczne potwierdzają obniżenie progów na rozwój epidemii. Oszacowanie analityczne ma podobną zależność od ilości przełączeń krawędzi jak wyniki numeryczne. Pewna systematyczna różnica jest widoczna, ciekawi mnie czy autorzy mają pomysł skąd to się bierze.

Bardzo ciekawa obserwacja w tym modelu to wyraźne zmniejszenie efektów skończonych rozmiarów dla progów na przekazanie zakażenia. W sieci dynamicznej nie można wręcz wyznaczyć skalowania z rozmiarem układu. Model dynamiczny wydaje się bardziej realistyczny jako opis rzeczywistych epidemii. Oznacza to, że próg na powstanie epidemii jest bardzo ostry, nawet w skończonych zbiorowiskach ludzkich.

2. W pracy *J. Ochab, Z. Burda, Phys. Rev. E 85, 021145 (2012)*, autorzy zajmują się procesami błądzenia przypadkowego na sieci Cayley'a. Rozważają zwykle błądzenie przypadkowe oraz błądzenie o maksymalnej entropii. Drzewo Cayley'a jest określone przez liczbę gałęzi, ilość pierwotnych gałęzi z korzenia r i liczbę generacji. Typowe błądzenie przypadkowe polega na wyborze w każdym kroku, z jednorodnym prawdopodobieństwem, dowolnej krawędzi dla przeskoku. Błądzenie maksymalnej entropii jest zdefiniowane jako proces, w którym wszystkie drogi o tej samej liczbie krawędzi, między określonymi wierzchołkami, są jednakowo prawdopodobne. Prawdopodobieństwa przejścia w błądzeniu maksymalnej entropii są określone przez największą wartość własną i odpowiadający jej wektor własny dla macierzy sąsiedztwa grafu. W niezwykle elegancki sposób, autorzy analizują problem własny macierzy sąsiedztwa dla sieci Cayley'a. W zależności od wartości r znajdują największą wartość własną i składowe wektora własnego. Wyliczone są rozkłady stacjonarne dla obu rozważanych przypadków błądzenia przypadkowego i ich zależność od liczby generacji. Dla procesu o maksymalnej entropii rozkład jest wypikowany w pobliżu korzenia drzewa.

Autorzy posuwają obliczenia dalej i otrzymują wyrażenia na drugą wartość własną

i jej wektor własny. Dzięki temu mogą wyliczyć dynamikę relaksacji rozkładu prawdopodobieństwa do rozkładu stacjonarnego. Dla procesu na drzewie węzły dzielą się na dwa zbiory, w odległości parzystej lub nieparzystej liczby kroków od początkowego węzła. Błądzenie powoduje migotanie rozkładu między tymi dwoma zbiorami. Jednak najciekawsze jest wyliczenie czasu relaksacji, jest on mniejszy dla procesu o maksymalnej entropii. Wartość czasu relaksacji zależy od liczby pierwotnych gałęzi w sieci. Dla większości przypadków czas relaksacji rośnie dla błądzenia maksymalnej entropii jak pewna potęga liczby generacji, czyli jak pewna potęga logarytmu rozmiaru sieci, natomiast dla zwykłego błądzenia przypadkowego czas relaksacji rośnie liniowo z rozmiarem. Wyniki potwierdzone są obliczeniami numerycznymi.

Ta praca zdobyła moje uznanie ze względu na szereg precyzyjnych wyników analitycznych dla rozkładów i czasów relaksacji.

3. Praca *J. Ochab, Acta Physica Polon. B 43 1143 (2012)* jest komunikatem konferencyjnym, ale zawiera ciekawe, oryginalne wyniki naukowe. Są to wyniki dla błądzenia przypadkowego na sieci drabinkowej. Sieć zawiera dwa obszary o topologii drabinkowej, połączone dwoma łańcuchami. Cząstka będąca początkowo w jednym z obszarów, pozostaje w niej uwięziona przez jakiś czas. Dla zwykłego błądzenia przypadkowego, czas uwięzienia rośnie jak kwadrat rozmiaru, sieć zachowuje się jak sieć regularna. Dla błądzenia o maksymalnej entropii czas uwięzienia rośnie eksponencjalnie z szerokością między obszarami. Przypomina to efekt tunelowania kwantowego. Autor wspomina, że udało mu się takie proste rozwiązanie uzyskać tylko dla przypadku symetrycznych obszarów drabinkowych. Nie jest dla mnie jasne dlaczego przy różnych długościach obszarów drabinkowych, nie zachodzi podobne skalowanie. Być może jest to związane, poprzez analogię kwantowo-mechaniczną, z wartością różnicy energetycznej między stanami symetrycznym i antysymetrycznym w podwójnej studni potencjału.
4. Praca *J. Ochab, Phys. Rev. E 86, 066109 (2012)* porównuje różne rodzaje miar centralności wierzchołków. Są to miary oparte na czasie dojścia błądzenia przypadkowego, na potęgach macierzy przejścia lub na składowych wektora własnego sąsiedztwa. Autor rozważa zwykłe procesy błądzenia przypadkowego i oraz błądzenie o maksymalnej entropii. Dla obliczeń numerycznych użyte są przypadkowe grafy testowe Lancichinetti-Fortunato-Radicchi. Porównując wektory centralności dla różnych miar, zauważył, że różne miary oparte na tym samym rodzaju błądzenia przypadkowego są do siebie podobne.

5. Praca *J. Ochab, Z. Burda, Eur. Phys. J. Special Topics 216, 73 (2013)* stosuje błędzenie przypadkowe maksymalnej entropii do wyszukiwania podstruktur w grafach. Autorzy porównują metody detekcji podstruktur na grafach testowych (znowuż LFR). Metody te konstruuja miarę różnicującą podstruktury opierając się na potęgach macierzy przejścia, czasie dojścia i ważonej liczbie dróg. Macierz różnicująca grafy jest użyta do konstrukcji iteracyjnego algorytmu wyszukiwania podstruktur. Są to algorytmy dzielące, oparte na zmianie wag krawędzi i algorytmy aglomeracyjne, dołączające węzły do podstruktur. Algorytmy, niezależnie od typu błędzenia przypadkowego, pracują dobrze dla grafów o dobrze zdefiniowanych podstrukturach. Z reguły lepszy jest algorytm oparty na zwykłym błędzeniu przypadkowym. Zastanawiający jest wyraźnie gorszy wynik algorytmy Netwalk przy użyciu błędzenia maksymalnej entropii.

Bardzo wysoko oceniam część opisową rozprawy. Jest to szczegółowy, ładnie napisany wstęp do tematyki procesów na sieciach. Krótko opisane są zagadnienia badawcze rozpatrywane w przedstawionych pracach. Praca jest dobrze zredagowana. Poziom językowy tekstu świadczy o dużej biegłości autora w posługiwaniu się językiem angielskim.

Wśród wyników badawczych wyróżniam, w nieprzypadkowej kolejności, wyliczenie czasów relaksacji na drzewach Cayley'a, obliczenie obniżenia progu na epidemię w dynamicznej sieci małego świata i zauważenie efektu eksponencjalnego czasu uwięzienia błędzenia maksymalnej entropii na sieci drabinkowej z defektami. Poziom warsztatowy i badawczy pracy *J. Ochab, Z. Burda, Phys. Rev. E 85, 021145 (2012)* oceniam jako wybitny i wnoszę o wyróżnienie całej rozprawy doktorskiej. Jednoznacznie stwierdzam, że przedstawiona rozprawa spełnia wszystkie wymagania ustawowe i zwyczajowe stawiane rozprawom doktorskim i wnoszę o dopuszczenie mgr. Jeremiego Ochaba do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Piotr Bożek

